Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 19

2005

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 19

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA.

VOLUMEN 19

Editor:

Gustavo Martínez Sierra/Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Apoyo Técnico:

Universidad Autónoma de Guerrero, México
Unidad Académica: Facultad de Matemáticas
Centro de Investigación en Matemática Educativa

Claudia Leticia Méndez Bello (Coordinadora)
Estanislao Sierra Rivera
Antonio Zavaleta Bautista

Diseño de portada: Antonio Zavaleta Bautista

ISBN: 970-9971-08-5

Digitalizado en México / Junio de 2006

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Comité Científico de Evaluación

Cecilia R. Crespo
Margarita del Valle
Celia Rizo
Mayra Solana
Paul Torres
Rosa Cecilia
Víctor Martínez
Gisela Montiel
Rosa Ma. Farfán
Armando Albert
Carlos Rondero
Eduardo Miranda
Francisco Cordero
Germán Muñoz
Gustavo Martínez
Juan Carlos Piceno
Liliana Suárez
Mario Sánchez
Silvia Elena Ibarra
Ivan López
Gabriel Molina
Eddie Aparicio

Enrique Fabián
Oscar Francisco
Juan Raúl Delgado
Otilio B. Mederos
Germán Beitía
Gustavo E. Bermúdez
Ines Liliana Moises
Ricardo Cantoral
Alberto Camacho
Blanca Ruiz
David Warren
Evelia Reséndiz
Gabriela Buendía
Guadalupe Cabañas
Juan Antonio
Leopoldo Zúñiga
Marcela Ferrari
Ramiro Ávila
Ma. Patricia Colín
Santiago Ramiro
Leticia Téllez

Tabla de Contenidos

CATEGORÍA 4: USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Presentación

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME, tiene entre sus propósitos, posibilitar el intercambio entre colegas - profesores e investigadores – creando espacios académicos que favorezcan el contraste periódico de experiencias de docencia e investigación en castellano, orientando sus acciones en beneficio de los sistemas escolares de nuestra América Latina.

CLAME, ante el aumento en la participación de colegas de los distintos países latinoamericanos, así como la creciente profesionalización de la comunidad que año con año participa activamente en sus reuniones, ha ido configurando proyectos académicos que perfilan y consolidan el proceso de fortalecimiento de la disciplina en América Latina, bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respeto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros.

Es en este contexto de ideas y en cumplimiento además de uno de los propósitos específicos del CLAME, *promover la creación, organización, acumulación y difusión del conocimiento referidos a la matemática educativa*, se publica año con año el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME).

Los artículos publicados el Acta 2006, debieron cumplir con dos requisitos básicos, haber sido expuestos en alguna de las actividades de Relme 19 y su posterior presentación en forma de artículo, sujetándose a una evaluación rigurosa de pares especialistas en el campo. La publicación en el Acta de un trabajo presentado en Relme no es automática. Con esto, lo que se persigue es hacer del Acta un instrumento de calidad que difunda del estado del arte que en materia de docencia e investigación en nuestro campo, se realiza por amplio número de profesores en investigadores en Latinoamérica.

En el Acta 2005, el comité académico ha trabajado en tres aspectos que ha considerado fundamentales y que esperamos contribuyan a la calidad de la publicación. El primero, poner mayor cuidado en el proceso de evaluación, segundo, vigilar el cumplimiento del formato establecido, especialmente en el aspecto de la presentación de las referencias bibliográficas, tanto solicitándoles a los autores la corrección de la misma, como interviniendo directamente en una revisión del total de la bibliografía de los artículos aprobados.

Las categorías que componen el Acta son:

- Categoría 1: Análisis del Currículum y Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas.

- Categoría 2: El Pensamiento del Profesor, sus Prácticas y Elementos para su Formación.

- Categoría 3: Consideración de Aspectos Socioepistemológicos en el Análisis y Rediseño del Discurso Matemático Escolar.

- Categoría 4: Uso de la Tecnología en el Proceso de Aprendizaje de las Matemáticas.

La Comisión Académica del Acta, agradece a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos, pusimos nuestra mayor atención en la constitución de este documento y nos sentimos orgullosos de haber podido prestar este servicio académico.

Agradecemos a los árbitros por su contribución solidaria y profesional, así mismo agradecemos de manera especial a todos los colegas que de manera generosa y entusiasta nos regalaron su tiempo, inteligencia y creatividad para la realización de este proyecto.

Comisión Académica del
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 2006
Junio de 2006

Categoría 1:

Análisis del currículum y propuestas Para la enseñanza de las matemáticas

DESCRIPCIÓN BIBLIOGRÁFICA DE FUNCIONES TRASCENDENTES Y SU APLICACIÓN EN LAS CIENCIAS BIOLÓGICAS

Dal Bianco, Nydia-Botta Gioda, Rosana-Castro, Nora-Martinez, Silvia-Prieto, Fabio
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar - smartinez@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado; Nivel educativo: Superior

RESUMEN:

Es de fundamental importancia para el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, incentivarlos en el hábito de la lectura comprensiva y orientarlos en las correspondientes consultas bibliográficas a fin de que afiancen sus conocimientos.
Nuestro objetivo estuvo centrado en conocer el tratamiento de las funciones logarítmicas y exponenciales en bibliografía de los niveles Polimodal y Universitario, desde su presentación, la utilización de los diferentes registros y la respectiva conversión de los mismos, hasta los ejemplos y ejercicios de aplicación que se encuentran en ellos.
Haciendo una selección precisa de textos de uno u otro nivel y orientando a los alumnos en la elección de los mismos, encontrarán un complemento significativo de las clases teóricas-prácticas del tema que les facilitará su aprendizaje y posterior aplicación.

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente Biología y Matemática están desconectadas, incluso dentro de la Universidad, no obstante la mayoría de los biólogos están de acuerdo en que la Matemática puede ser y frecuentemente lo es, una gran ayuda para ellos, en particular en algunas ramas de la Biología.
En la actualidad, todas las ciencias tratan de expresar ciertas características de los fenómenos que estudian en función de otras; y cuanto más cuantitativo y medible matemáticamente sea ese estudio, más fructífero resultará.
Las funciones son una herramienta útil para describir, analizar e interpretar situaciones provenientes de la Matemática y otras ciencias como la Biología.
Los alumnos que cursan carreras de Ciencias Biológicas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, presentan reiteradas dificultades en la comprensión y/o aplicación de algunos temas de matemática, en particular en el tratamiento de funciones.
Se ha trabajado con los alumnos durante la cursada de la asignatura Matemática aplicando diferentes estrategias de aprendizaje, en esta oportunidad y anticipándonos al ingreso del estudiante, analizamos la Bibliografía utilizada en los distintos colegios de Polimodal de nuestra ciudad y también algunos textos considerados básicos en la cátedra, específicamente en las *funciones logarítmicas y exponenciales.* Esta propuesta se concretó a fin de conocer el desarrollo y presentación de estos temas en la bibliografía de consulta a fin de que, complementando las clases teórico-prácticas de la asignatura, faciliten la comprensión y aprendizaje por parte de los estudiantes.

Marco Teórico

En el aprendizaje de la Matemática, la adquisición de un concepto depende en gran parte de la capacidad para reconocer e interpretar una representación del mismo. En esto juega un papel importante el lenguaje utilizado. En particular en el tratamiento del tema funciones, y partiendo del concepto de función como expresión de una dependencia entre variables, consideramos fundamentales los siguientes registros de representación (Duval-1998):

- *Registro simbólico*: Cuando se da la definición de una función mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.
- *Registro analítico:* Cuando hacemos referencia a la definición de función mediante una expresión algebraica.
- *Registro verbal:* En este caso, el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones llamadas del mundo real. Estas pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- *Registro tabular:* Corresponde a los valores numéricos de la función organizados en tablas de valores. Dados valores específicos para x determinar los correspondientes valores de y organizados en una tabla.
- *Registro conjuntista*: Corresponde a la representación de función mediante un conjunto de pares ordenados, donde ninguno de estos tienen la primera componente igual.
- *Registro figural:* Cuando expresamos el concepto de función, mediante los llamados diagramas de Venn. En este caso, el alumno reconoce una función como aquella donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un solo elemento en el conjunto de llegada.
- *Registro gráfico:* Es la representación en el plano cartesiano.

La conceptualización de un objeto matemático no puede ser sólo la automatización de ciertos tratamientos o la comprensión de nociones, sino que implica una coordinación de registros de representación. Esta coordinación de registros es una de las condiciones fundamentales para el aprendizaje de las funciones.

Desarrollo

De la bibliografía de Matemática utilizada en los colegios del Nivel Polimodal en la provincia de La Pampa, así como de la propuesta en la asignatura para los alumnos de las carreras de Ciencias Biológicas, seleccionamos para su análisis cuatro textos.

Nivel Polimodal

- Matemática I. Autores: M. B. Camuyrano, G. Net, M. Aragón. Capítulo 5: Funciones exponenciales y logarítmicas.
- Matemática 2. Autores: A. Berio, M.L. Colombo, C. D'Albano, O. Sardella. Tramo C: Función logarítmica y exponencial.

Nivel Universitario:

- Cálculo. Volumen 1. Autores: R. Larson, R. Hostetler, B. Edwards. Capítulo 7: Funciones exponenciales y logarítmicas.

- Cálculo trascendentes tempranas. Autor: J. Stewart. Capítulo 2: Tipo de Funciones; desplazamiento y escalamiento. Capítulo 3: Funciones inversas: Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas.

Descripción de la bibliografía del Nivel Polimodal:

- En el capítulo 5 de **Matemática I** se introduce el tema de la *función exponencial* como modelo con la presentación de dos situaciones particulares: "la fisión nuclear" y la correspondiente a "carbono 14", anexando al final del desarrollo de cada una la ejercitación específica.
Posteriormente se presenta la fórmula de la *función exponencial* en forma general y la deducción de las expresiones correspondientes a cada uno de los modelos de las situaciones antes mencionadas.
Continúan los autores de este texto con una síntesis de las propiedades de las potencias de exponente real y prosiguen con los gráficos de funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$, con $a > 1$ y con $0 < a < 1$. En uno de los ejercicios de gráficas se analizan simetrías entre curvas.
En el mismo capítulo se describen y caracterizan los crecimientos exponenciales presentes en distintas situaciones y se incluyen ejercicios de características semejantes. Al finalizar el tratamiento de esta función y a partir de una situación problemática se efectúa el análisis de la exponencial de base *e* considerando casos importantes.

Titulando "*La función logarítmica como modelo*" y dentro del desarrollo de la situación "cálculos relacionados con la fisión nuclear" define la función logarítmica de base mayor que 1 como inversa de la exponencial. Para destacar la simetría se las grafica en un mismo sistema de coordenadas cartesianas conjuntamente con la función identidad. A partir de otra situación y en forma similar caracteriza a la función logarítmica de base menor que 1.
Posteriormente los autores definen la operación logaritmo, enunciando las propiedades sin demostración y mostrando ejemplos. Retomando el tema funciones logarítmicas en las bases mencionadas anteriormente, se analizan dominios, imágenes y/o intervalos de monotonía, concluyendo con la simetría entre las correspondientes gráficas respecto de la función identidad.
En las actividades de síntesis se presenta una variada ejercitación de la que destacamos las vinculadas a crecimientos poblacionales, PH de soluciones e intensidad del sonido entre otras.

- En el texto **Matemática 2** el tramo C: "*Función logarítmica y exponencial*" , desarrolla en primer lugar la función exponencial definiéndola en forma general y mostrando gráficamente las variaciones de la curva para distintos valores de la base. Inmediatamente aparecen representadas otras funciones en las que se cambian valores de los parámetros para indicar "corrimientos" sobre los respectivos ejes acompañada con una breve ejercitación. En la que se destaca el trabajo con los registros tabular y gráfico. Previo al tratamiento de la función logarítmica, en el texto se define la logaritmación y sus operaciones aplicando las propiedades correspondientes, sin ser demostradas, y con ejemplos desarrollados. La ejercitación propuesta es de características similares.
En la siguiente sección define la función logarítmica como inversa de la exponencial y grafica las dos funciones considerando la base 2, utilizando tabla de valores para la

logarítmica. Inmediatamente muestra la función logaritmo natural a partir de su tabla y gráfico y finaliza esta sección teórica con un ejemplo correspondiente a un corrimiento sobre el eje de las abscisas. En la ejercitación propuesta se solicita al lector construcción de gráficos de funciones exponenciales y logarítmicas con variación de los distintos parámetros y en la última parte se presentan dos ejercicios de aplicación a la Biología.

Descripción de la bibliografía del Nivel Universitario:

En el capítulo “Repaso y preámbulo” del texto: **Cálculo** de Stewart, hay una breve síntesis sobre ambas funciones. En los capítulos siguientes (1 y 2) se desarrollan los temas correspondientes a límites y derivadas en forma general. En el capítulo 3 aparecen las funciones de interés para nuestro trabajo. A continuación transcribimos parte del párrafo inicial:

> “Dos de las funciones más importantes que se manejan en las matemáticas y en sus aplicaciones son la función exponencial $f(x)= a^x$ y su inversa, la función logarítmica $g(x) = log_a x$. En este capítulo investigaremos sus propiedades, calcularemos sus derivadas y las emplearemos para describir el crecimiento y decaimiento exponencial, en campos como la química, la física, la biología y la economía.”

Iniciando el capítulo 3 se muestra la forma (como dice el autor) de la función exponencial para continuar con las propiedades de los exponentes a partir de los gráficos de las funciones $y = 2^x$ e $y = x^2$ comparando la monotonía de ambas.
En un teorema en forma de resumen aparecen las propiedades de la función exponencial. Mediante ejemplos se calculan límites y derivadas de estas funciones.
Continúa con un ejemplo de aplicación referido al crecimiento de una población de bacterias. En la ejercitación propuesta para esta sección se presentan ejercicios referidos a construcción de gráficos y cálculo utilizando la calculadora y algunos problemas de aplicación.
Siguiendo prácticamente los mismos lineamientos utilizados en el tratamiento de la función exponencial, en la sección siguiente, y a partir del concepto de función inversa, el autor define la función logarítmica con ejemplos de crecimiento y decaimiento exponencial de los que destacamos los referidos a crecimiento de una población de bacterias y desintegración radiactiva. Finaliza con una variedad de problemas de aplicación que involucran a los temas antes mencionados.

En el capítulo VII del texto: **Cálculo y Geometría Analítica** de Larson estas funciones particulares son abordadas después de un amplio estudio de las funciones elementales y luego de haber desarrollado los conceptos de limite, continuidad, derivación e integración de funciones.
Se presenta la función exponencial $f(x) = 2^x$ calculando algunos valores particulares y realizando el tratamiento con exponentes irracionales.
Se enuncian las propiedades de los exponentes en un Teorema (sin demostración) ejemplificando algunas de ellas. Posteriormente, utilizando tablas de valores, se construyen las graficas de algunas funciones exponenciales (distintas bases) y se analiza su comportamiento. Las características generales se enuncian formalmente como propiedades de las funciones exponenciales.

Después de definir el número *e* y la función exponencial en esta base se presentan sus primeras aplicaciones con dos ejemplos, uno de ellos vinculado a la Biología trata el crecimiento de un cultivo de bacterias. Aparecen en la ejercitación de esta sección varios problemas de interés para nuestro trabajo.
El autor continúa con el tratamiento de los conceptos derivación e integración de funciones exponenciales sin mostrar aplicaciones específicas.
En la sección siguiente se estudian las funciones inversas, su existencia y derivada, enunciando y demostrando teoremas relativos a esta temática.
Prosigue con el tratamiento de las funciones logarítmicas: definición y propiedades de la función logaritmo natural, enunciando en un teorema las propiedades de los logaritmos.
En las dos secciones posteriores se aplican la derivación e integración a las funciones logarítmicas, mostrando al final un problema aplicado a las leyes de los gases similar a la ejercitación propuesta y luego se trata el tema "crecimiento y decrecimiento exponenciales" y sus aplicaciones de las que destacamos: Desintegración radiactiva; Crecimiento de población y Ley de enfriamiento de Newton. Concluye con una propuesta interesante de problemas aplicados al campo de investigación en Biología .
El Capítulo VII finaliza con una serie de ejercicios y problemas que aplican los temas desarrollados e introducen algunos conceptos nuevos como la función densidad exponencial entre otros.

Análisis de la Bibliografía:

Existen diferencias en el tratamiento del tema que nos convoca en los dos textos del nivel Polimodal. Lo que requiere una especial atención es la actividad introductoria, ya que esta es de relevante importancia debido a que a partir de ella el alumno puede construir el sentido del conocimiento.
Los textos consultados presentan distintos enfoques en el estudio del tema funciones exponenciales y logarítmicas. En Matemática I se muestran algunas aplicaciones antes de definir el objeto de estudio, el que se construye progresivamente (en forma similar como ha evolucionado históricamente el concepto de función) analizando la dependencia entre las variables. Esta forma de introducción al tema de las funciones analizadas a partir de situaciones reales, externas a la Matemática, y mediante una interacción entre los distintos registros: tabular, gráfico y analítico permite una mayor comprensión del concepto estudiado.

En el texto Matemática 2 se introduce la función exponencial como un instrumento. Se la define con la fórmula general y su gráfica sin tener en cuenta la relación entre las variables. En este contexto la utilización de la función no esta ligada a una situación - problema con la que tendría sentido la definición del objeto.
El autor trabaja principalmente con la conversión del registro analítico - gráfico y viceversa y en unos pocos ejemplos se relacionan los registros : analítico – tabular-gráfico y verbal-analítico.
Siguiendo con la teoría de Duval consideramos que la articulación entre al menos dos registros favorece la comprensión del concepto.

En cuanto a los autores de los textos de Cálculo presentan en general similares enfoques, por ejemplo ambos enuncian en Teoremas las propiedades de las funciones y hasta existe

coincidencia en algunos ejemplos como el considerar base 2 para representar ambas funciones en sistema de ejes cartesianos. En los dos libros analizados en una sección especial se trabaja el tema de las funciones inversas, con una mayor complejidad en el tratamiento del texto Cálculo de Stewart como así también en los ejercicios propuestos.
También se observa en el desarrollo de los temas estudiados un tratamiento similar respecto a la construcción del objeto de estudio en cuanto a la utilización de los diferentes registros (analítico, tabular, gráfico, verbal) y sus respectivas interacciones. Esto favorece la transferencia y los aprendizajes ulteriores.

Conclusiones

En la bibliografía analizada podemos observar dos formas de presentar los temas:

- Se da la definición, propiedades, ejemplos y ejercicios para resolver entre los que aparecen situaciones problemáticas.
- Se presenta una situación problemática a partir de la cual se van construyendo los conceptos a enseñar, en este caso funciones exponenciales y logarítmicas.

Si los alumnos tienen que hacer una elección entre estas dos formas presentadas anteriormente, optan por la primera, ya que en general manifiestan que prefieren algo así como la "receta" ya que les resulta mas interesante un estudio guiado que los conduzca a una rápida solución de las situaciones planteadas.
Conceptualizar un objeto matemático no puede ser sólo la automatización de ciertos algoritmos o la comprensión de nociones, sino que implica una coordinación de registros de representación. Esta coordinación de registros es una de las condiciones fundamentales para el aprendizaje de las funciones. La ausencia de coordinación no dificulta toda la comprensión, pero favorece sólo en parte las transferencias y los aprendizajes posteriores.
Por otro lado, la forma de introducir los temas a través de situaciones problemáticas permitirá a los estudiantes reconocer en que momento lo aprendido es aplicable en una situación concreta. Si a esto le sumamos además la articulación entre varios registros de representación, permitirían una comprensión casi acabada del concepto.
Las actividades que promueven la representación de una misma función por diferentes fórmulas algebraicas, pueden contribuir a que los alumnos distingan el objeto matemático función de una fórmula que lo pueda representar.

Desde hace varios años se ha venido trabajando esta problemática buscando estrategias de enseñanza aprendizaje, que incluyan además ejemplos y problemas del área de Biología, enfatizando el trabajo con los alumnos, ya que muchas veces los docentes no logran incitar el interés y la imaginación de los estudiantes de biología por la utilidad y belleza del arte de las matemáticas.
Las situaciones "problemas matemáticos" son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática y junto con las acciones constituyen el componente práctico de las matemáticas.

Bibliografía

Camuyrano, M., Net, G., Aragón, M. (2000). *Matemática I. Modelos Matemáticos para interpretar la realidad*. Argentina: Estrada.

Berio, A., Colombo M.L., D'Albano, C., Sardella, O.(2001). *Matemática 2. Buenos Aires, Argentina: Puerto de Palos.*

Larson R., Hostetler, R., Bruce, E. (1995) *Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1*. España: McGraw-Hill.

Stewart, J. (1998). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* México: Internacional Thomson Editores S.A

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

K. Newstaed (eds): *Proceedings of the 22nd PME conference* (3), 1-8) Stellenbosch; South Africa

ANÁLISIS DE LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO EN TORNO A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Parra Verónica; Virginia Cano; Elichiribehety Inés; Otero, Maria Rita;
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
vparra@exa.unicen.edu.ar virginiacano2002@yahoo.com.ar ielichi@exa.unicen.edu.ar rotero@exa.unicen.edu.ar
Campo de investigación: Didáctica de la Matemática

Resumen

Este trabajo es parte de un proyecto que estudia las dificultades de la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Universitario. El estudio fue realizado en una Facultad de Ciencias Económicas, en un curso de Matemática. Se realizó una observación no participante de la totalidad de las sesiones de varias comisiones registrando la información en video, audio y registros escritos. Se adopta el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992,1999) para analizar las Praxeologías Matemáticas (PM) que se desarrollan durante un semestre en la asignatura Matemática. Discutimos las características de las PM en torno a la noción de función, las relaciones entre éstas, en qué medida se corresponden y los componentes de las mismas (objetos matemáticos, tareas, técnicas, tecnologías y teorías).

1. Introducción

En esta ocasión presentamos algunos resultados del trabajo que estamos realizando en una Facultad de Ciencias Económicas, analizando las PM que se desarrollan durante un semestre en la asignatura Matemática. La noción de Praxeología Matemática (PM) u Organización Matemática (OM) hace referencia a la concepción del trabajo matemático como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas. Lo cuál implica además, caracterizar, delimitar y clasificar los problemas; entender y describir las técnicas que los resuelven; establecer condiciones bajo las cuales funcionan o no y finalmente, construir aspectos sólidos que aseguren la validez de las maneras de proceder.
Presentamos el esquema de análisis desarrollado para evaluar las PM puestas en juego en esta particular institución y mostramos algunos resultados de esta evaluación. Nos proponemos estudiar si efectivamente estas PM son adecuadas para enseñar las nociones referidas a Función en la Universidad.

2. Elementos teóricos y presupuestos básicos

La TAD (Chevallard 1992,1999) sitúa la actividad matemática en el conjunto de las actividades humanas y de instituciones sociales. Esta teoría admite como postulado básico que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra praxeología. Etimológicamente tal concepto proviene de la unión de los términos: praxis y logos. El primero hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. El término logos, se identifica con el saber e incluye a las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones y fundamentaciones tecnológicas. Tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría son los elementos que componen una Praxeología Matemática (PM) u Organización Matemática (OM).

3. Metodología de investigación

Esta investigación se realizó durante el segundo semestre del año 2004 y se observaron a los profesores que dirigían el estudio de dos comisiones constituidas por aproximadamente 40 alumnos cada una. En ambos casos se trata de docentes expertos y con amplia trayectoria. Las clases se realizaban en dos sesiones semanales de tres horas cada una. De la totalidad de las sesiones observadas, en este trabajo sólo se consideran las cuatro relativas al estudio de "Funciones de una y varias variables". Las observaciones fueron de carácter no participante, se registraron en audio, video y además, se recogieron la totalidad de las intervenciones por escrito. Además se cuenta con los "Apuntes Teóricos" y el "Cuadernillo de Trabajos Prácticos" que la cátedra edita para los estudiantes, el programa analítico con los contenidos por unidad y con la bibliografía recomendada a los alumnos. Estos materiales son comunes en ambas comisiones. Adicionalmente se recogen los apuntes de clase de los alumnos.
Es conveniente aclarar las categorías que se utilizarán durante el análisis de los datos:

OMPE: Organización Matemática Propuesta para Enseñar.
OMPE$_1$: Organización Matemática Propuesta para Enseñar en el programa analítico.
OMPE$_2$: Organización Matemática Propuesta para Enseñar en el apunte teórico (materiales instruccionales).
OMEE: Organización Matemática Efectivamente Enseñada.
OMR: Organización Matemática de Referencia (observada en los libros de texto de los cuales han reconstruido la OMPE).
Para organizar y analizar la información, construimos dos tipos de tablas. Con la primera realizamos una trascripción completa del apunte teórico:

Objetos matemáticos presentes	Tipos de tareas	Tareas	Técnicas	Tecnología	Teorías	Ejemplos propuestos

Tabla 1

La primera columna nos permite identificar los objetos matemáticos que aparecen explícitos en el apunte teórico, ya sean antiguos o nuevos, respetando el orden de introducción de los mismos (consideraremos objeto matemático a todo aquello que pueda ser estudiado). La segunda columna, nos permite identificar los tipos de tareas que se generan en torno a esos objetos. La tercera columna, nos informa acerca de las tareas que se proponen en el apunte teórico y la siguiente, nos brinda las técnicas propuestas para resolverlas. La quinta y sexta columna nos permite identificar los elementos tecnológicos

teóricos que aparecen explícitos en el apunte teórico. Finalmente, la última columna nos muestra los ejemplos de tareas y técnicas que se proponen en el mismo apunte.
La Tabla 2, nos permite realizar un análisis más detallado de cada una de las OM puestas en juego. Hemos volcado en esta tabla los datos referidos a la $OMPE_2$ y a la OMR:

Objetos Matemáticos presentes (δ_N: nuevo, δ_A: antiguo)	Género de Tareas (G_i)	Tipos de Tareas (T_{ij})	Técnicas (τ_{ijk})	Elementos tecnológicos-teóricos ($\theta i/\Theta i$)

Tabla 2

La primera columna nos informa de los objetos matemáticos que se explicitan en cada una de las OM analizadas. La segunda nos permite identificar qué géneros de tareas se construyen en torno a esos objetos matemáticos. En la siguiente columna, detallamos los tipos de tareas que conforman dichos géneros. La cuarta columna nos indica acerca de las técnicas propuestas para la resolución de esos tipos de tareas. Finalmente, identificamos los elementos tecnológicos-teóricos que se explicitan.

4. Análisis de las Organizaciones Matemáticas puestas en juego

4.1. Características de la Organización Matemática Propuesta para Enseñar

En virtud del análisis de la OMPE, se han identificado las siguientes características:
Una desconexión interna en la OMPE que hace necesaria la distinción entre la $OMPE_1$ y la $OMPE_2$. Algunos de los indicadores más relevantes de esta desconexión son: una secuenciación de contenidos diferentes en cada una de las organizaciones mencionadas (la $OMPE_1$ y la $OMPE_2$) y la presencia de distintos objetos matemáticos en cada una de ellas. Identificamos además, objetos matemáticos estudiados en el apunte teórico que el programa analítico no considera.
Con respecto a la definición de función propuesta en la $OMPE_2$ debe destacarse un aspecto importante: la condición de existencia no se formula explícitamente. Tanto esta condición como la de unicidad, son necesarias en una definición de función. Notamos que ninguna de ellas se menciona de manera explícita, mientras que las tareas propuestas en el cuadernillo de trabajos prácticos y en el apunte teórico, requieren las mencionadas condiciones, particularmente, la condición de existencia. Observamos la presencia de un gran número de definiciones incompletas, imprecisas y coloquiales dentro del apunto teórico, definiciones que, formuladas de esta manera, naturalizan el saber. Por ejemplo:

- La correspondencia f de un subconjunto A de $R \times R = R^2$ en el conjunto R, dada por $f: A \subseteq R^2 \rightarrow R$ y tal que $\forall (x, y) \in A \ \exists z = f(x, y) \in R$, se denomina función real de dos variables reales. Identificamos aquí, la ausencia de la condición de unicidad de imágenes.
Otra de las características más relevantes de la $OMPE_2$ es la presencia de una excesiva cantidad de ejemplos de tareas y las técnicas necesarias para resolverlas. Identificamos en la misma $OMPE_2$ un gran número de "agujeros" (ausencia de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en torno a una amplia cantidad de objetos matemáticos introducidos). Tenemos así, una serie de definiciones que luego no se utilizan, de lo cuál se sigue una naturalización de las mismas.

Nos encontramos con una serie de "contradicciones" dentro de la misma $OMPE_2$. El propio texto formula explícitamente una definición y luego, utiliza otra. Por ejemplo:

θ_1*: Una función irracional es aquella en las que se aplica la raíz de cualquier índice a la variable x, o sea, la expresión* $y = \sqrt[n]{x}$

T_1*: Determinar el dominio de las siguientes funciones:* $f(x) = \sqrt{x-7}$

La definición formulada (θ_1) no se ajustaría a la tarea propuesta (T_1), ya que la expresión: $f(x) = \sqrt{x-7}$ según θ_1 no sería función irracional. Esto nos hace suponer la existencia de dos OM que conviven dentro de la propuesta en el apunte teórico: una que gira en torno a las definiciones efectivamente institucionalizadas y otra organización distinta a ésta, en torno a las tareas propuestas en el mismo apunte teórico.

A partir del instrumento de análisis que proporciona la tabla 2, concluimos en lo siguiente:

La $OMPE_2$, gira en torno a 5 géneros de tareas:

$\boldsymbol{G_1}$: *Analizar el dominio de funciones.* (Determinar el dominio de funciones de una y dos variables y graficar este último caso)

$\boldsymbol{G_2}$: *Operar con funciones.*

$\boldsymbol{G_3}$:.*Caracterizar funciones.* (Se refiere a analizar inyectividad, suryectividad, biyectividad, inversas, simetrías, homogeneidad, ceros, intervalos de crecimiento, decrecimiento, de positividad y de negatividad)

$\boldsymbol{G_4}$: *Representar gráficamente funciones.*

$\boldsymbol{G_5}$**:** *Analizar curvas de nivel.*

Las técnicas matemáticas asociadas, por ejemplo, al género G_1 son:

$\boldsymbol{\tau_{11}}$**:** *Si es una expresión con raíz, considerar el radicando mayor o igual a cero.*

$\boldsymbol{\tau_{12}}$**:** Si es una expresión fraccionaria considerar el denominador distinto de cero.

$\boldsymbol{\tau_{13}}$**:** Si es una expresión fraccionaria con una raíz en el numerador, analizar el radicando y el denominador. Domf=Dom numerador ∩ Dom denominador.

$\boldsymbol{\tau_{14}}$**:** Si es una expresión logarítmica considerar el argumento mayor a cero.

Detectamos la existencia de un bloque práctico-técnico que gira en torno a los cinco géneros de tareas que hemos señalado ($\boldsymbol{G_i}$). Los tipos de tareas propuestos son algo limitados y no ofrecen la posibilidad de relacionar las nociones referidas a función. Se observa una importante fragmentación de los contenidos y por lo tanto, una fragmentación de las tareas y de las técnicas, estableciendo una desconexión con otras tareas y técnicas.

El bloque tecnológico teórico que respalda el uso de estas técnicas está conformado sólo por las definiciones de cada uno de los objetos matemáticos que se ponen en juego. Consideramos que éste no se ajustaría a las tareas y técnicas puestas en juego en la $OMPE_2$, sería necesario algo más que definiciones, por ejemplo, generalizaciones, teoremas con sus demostraciones, proposiciones, lemas, entre otros.

4.2 Características de la Organización Matemática Efectivamente Enseñada

En virtud del análisis de la OMEE, se han identificado las siguientes características:

Se detectó la presencia de definiciones incompletas e imprecisas, por ejemplo:

-Definición de función irracional: Están afectadas por una raíz. Son la inversa de la parábola matriz.

En este ejemplo no se menciona que es lo afectado por una raíz, si una variable o una determinada expresión. Detectamos la misma definición que la propuesta en la $OMPE_2$. Considerando una función irracional como la inversa de la parábola matriz, solo se está

4

teniendo en cuenta la expresión f(x) = √x, excluyendo del campo de las funciones irracionales un gran número de expresiones.
Se detectó en la OMEE una excesiva cantidad de ejemplos de tareas y las técnicas de resolución. Identificamos así un bloque práctico-técnico, conformado por una amplia cantidad de ejemplos de pares de tareas-técnicas. La resolución de las tareas es llevada a cabo por el profesor en la totalidad de la clase y la tarea del alumno es resolver algunas pocas tareas fuera de clase.

A partir del instrumento de análisis que proporciona la Tabla 2, concluimos en lo siguiente:
La OMEE gira en torno a cuatro géneros de tareas:
H_1: *Analizar el dominio de funciones.* (Determinar el dominio de funciones de una y dos variables y graficar este último caso)
H_2: *Componer funciones.*
H_3: *Representar gráficamente funciones.*
H_4: *Hallar curvas de nivel.*

Describimos a continuación las técnicas asociadas a cada uno de estos géneros de tareas:
Las técnicas asociadas a H_1 se basan en el manejo algebraico de las expresiones. Se identifican exactamente las mismas técnicas que en la OMPE2. La técnica asociada a H_2 es: "*donde está la variable x poner g(x)".* Para H_3, la técnica propuesta es *"graficar usando tablas".* Para H_4, la técnica propuesta es *"darle valores al parámetro k y analizar que función se obtiene".*
Destacamos aquí una diferencia importante entre la $OMPE_2$ y la OMEE. La diferencia radica en las técnicas que se construyen en torno al género de tareas referido a graficar funciones: (G_4 para la $OMPE_2$ y H_3 en la OMEE). En la $OMPE_2$ las técnicas se basan en el análisis de la función estudiada evitando así, el uso de tablas de valores, mientras que en la OMEE, la única técnica es el uso de estas tablas. Esto tiene como consecuencia inmediata, que el G_4 de la $OMPE_2$ pierde cierto sentido en el H_3 de la OMEE. El bloque tecnológico-teórico está conformado sólo por una serie de definiciones que, como hemos mencionado anteriormente, son definiciones incompletas e imprecisas.

4.3 Características de la Organización Matemática de Referencia

La bibliografía que se propone en el programa analítico como material de consulta nos proporciona datos sobre una posible Organización Matemática de Referencia (OMR). Hemos construido esta OMR a partir de tres de los libros de texto enumerados en el programa. Destacamos algunas conexiones y desconexiones entre la $OMPE_2$, la OMEE y esta OMR. Como ejemplo de algunas desconexiones se tiene: en la OMR se definen de manera explicita las condiciones de existencia y unicidad luego de dar la definición de función. Esto se ha observado tanto para funciones de una variable como para funciones de dos variables. Otra de las diferencias es el tipo de definiciones que allí se dan, se trabajan con definiciones completas. Identificamos así, un bloque tecnológico-teórico formado por definiciones, pero con definiciones claras y precisas. Se explicitan en la OMR las relaciones entre los conceptos de plano, trazas, curvas de nivel y funciones de dos variables. Estos aspectos no se han identificado en ninguna de las otras dos organizaciones mencionadas, la $OMPE_2$ y la OMEE.

Las semejanzas con la $OMPE_2$ y la OMEE, son en los que respecta al género, tipo y tareas propuestas y a las técnicas asociadas a esas tareas. Analizando la información de la Tabla 2, concluimos lo siguiente:
Los géneros de tareas detectados en la OMR son:
***O_1**: Analizar el dominio de funciones.* (Determinar el dominio de funciones de una y dos variables y graficar este último caso)
***O_2**: Analizar que expresiones resultan ser relación funcional.*
***O_3**: Representar gráficamente funciones de una y dos variables.*
***O_4**: Analizar casos particulares de curvas de nivel.*

Las técnicas matemáticas asociadas a cada uno de estos géneros de tareas son:
Para el primer género de tareas (O_1), detectamos exactamente las mismas técnicas que en la $OMPE_2$. Para O_2, las técnicas se basan en analizar si existen puntos del dominio de la posible función para los cuales existan dos valores de imagen. Las técnicas asociadas a O_3 se refieren al análisis de los parámetros de las funciones estudiadas, no se considera bajo ningún punto de vista la posible construcción de tablas de valores. En O_4 identificamos la técnica de dar valores al parámetro k en la ecuación de la curva de nivel f(x, y) = k y luego identificar que expresión se ha obtenido.
Detectamos la existencia de un bloque práctico-técnico que gira en torno a los géneros de tareas que hemos señalado (***O_i***). Identificamos en este bloque una gran cantidad de ejemplos de tareas y la técnica de resolución, inclusive, algunos de éstos son los mismos que se han propuesto en la $OMPE_2$. Identificamos aquí un apartado con varias tareas nuevas, diferentes a las analizadas por el texto.
El bloque tecnológico-teórico está conformado sólo por una serie de definiciones que, en este caso, son completas, precisas y se relacionan en gran medida entre sí y con las tareas y técnicas propuestas. Se observa una fragmentación de los contenidos similar a la llevada a cabo en la $OMPE_2$.

5. Conclusiones

El análisis de las OM puestas en juego muestra que en todos los casos, aun en OMR, que el bloque tecnológico-teórico está formado sólo por un conjunto de definiciones. La OMR difiere de la $OMPE_2$ y de la OMEE en el bloque tecnológico-teórico.
Tanto en la $OMPE_2$ como en la OMEE y en la OMR predomina el bloque práctico-técnico, es decir, se proponen constantemente duplas formadas por tareas y técnicas. Las OM analizadas giran en torno a los mismos géneros de tareas. Éstas OM pueden caracterizarse "locales", ellas están formadas por una serie de organizaciones puntuales, que giran en torno a un género de tareas.
El análisis de la $OMPE_2$ evidencia una gran cantidad de definiciones poco precisas e incompletas desde el punto de vista matemático, de lo cual se sigue una inevitable naturalización del saber. Se encuentran definiciones que no son utilizadas en ningún tipo de tarea. Por otra parte, en la $OMPE_2$ se institucionalizan ciertas definiciones, mientras posteriormente se usan otras distintas aunque equivalentes, sin ninguna aclaración.

En síntesis, la actividad matemática que se lleva a cabo en esta institución es básicamente práctico-técnica y raramente alcanzan el nivel tecnológico. Como consecuencia, las OM son “puntuales”, lo que impide que se reconstruyan efectivamente OM “locales” relativamente completas. Estas restricciones institucionales sobre la actividad matemática conllevan al fracaso de los estudiantes, por tanto es necesario encontrar formas de modificar las praxeologías espontáneas que trasciendan la visión naturalizada de la Matemática.

Bibliografía

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, (1) pp. 73-112.

Chevallard, Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 17 (3) pp. 17-54.

Chevallard, Y (1999) L´ ánalyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19 (2) pp. 221-266.

¿PODEMOS INTEGRAR MATEMÁTICA, QUÍMICA, COMPUTACIÓN A PARTIR DE UNA PROBLEMÁTICA ACTUAL?

N.M. Monti[1], P.C. L'Argentière[2]
[1]Análisis Matemático, Facultad de Ciencias Económicas, [2]Química Inorgánica, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.
nmonti@fce.unl.edu.ar ó plargent@fiqus.unl.edu.ar
Campo de Investigación: Aprendizaje cooperativo - Probabilidad, estadística y combinatoria - Uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática; Nivel educativo: Básico

Resumen:

Esta experiencia se realizó en el Colegio Nuestra Señora de Guadalupe. El proceso educativo debe ser continuo, para facilitar la formación de una persona autónoma, trabajamos coordinadamente con vistas a la inserción de los alumnos provenientes del Nivel Medio en forma no traumática en aquellas Facultades de la Universidad Nacional del Litoral, en las cuales Matemática y Química son áreas relevantes en los respectivos planes de estudio. La adquisición de aprendizajes significativos se realiza mediante la claridad informativa y la aplicación sistemática, graduada y diversa de los contenidos a situaciones cotidianas que profundizan la comprensión de los conceptos. La situación seleccionada para esta experiencia es un tema de mucha trascendencia, **el tabaquismo**, que permitió integrar los contenidos de Matemática, Química y Computación

Palabras claves: integrar, Matemática, Química, computación

Esta experiencia se llevó a cabo en el marco del Proyecto de Investigación: *"Investigación de la capacidad para incorporar desarrollos tecnológicos en el aprendizaje de Matemática y Química en las Facultades de Ciencias Económicas y de Ingeniería Química"* que dirigen los organizadores y ejecutores de la misma; este proyecto fue aprobado por la Comisión de Ciencia y Técnica del H. Consejo Superior y ratificado mediante Resolución "C.S."Nº 22/02 recaída en Expte. Nº 408.244/30 de la Universidad Nacional del Litoral y es subsidiado por la misma, con los alumnos de noveno año de la Educación General Básica (EGB) del Colegio de Nuestra Señora de Guadalupe. Las edades de los alumnos oscilan entre los trece a quince años. Tanto la Universidad como el Colegio son de la ciudad de Santa Fe, Argentina.

Como todo proceso educativo debe ser continuo, ya que a través de él nos proponemos formar una persona autónoma, comenzamos a trabajar en forma coordinada con vistas a la inserción de los alumnos provenientes del Nivel Medio en forma no traumática en aquellas Facultades de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina) en las cuales Matemática y Química son áreas relevantes en los respectivos planes de estudio.

Se partió de la idea de que la adquisición de aprendizajes significativos se realiza mediante la claridad informativa y la aplicación sistemática, graduada y diversa de los contenidos a partir de situaciones cotidianas que profundizan la comprensión de los conceptos. Además esta situación cotidiana para que resulte motivadora para el alumno debe estar relacionada con una problemática actual.

Teniendo en cuenta que las drogodependencias se han convertido en uno de las problemáticas actuales que más preocupan a la sociedad, quizás debido a que cada día constatamos que no se trata de un problema relacionado sólo con zonas marginales sino que puede afectar a toda la comunidad y en especial, de forma más dramática, a una población de riesgo respecto al consumo: niños y jóvenes en edad escolar.

El tabaco es una droga, socialmente aceptada, pero droga al fin, y además nuestros alumnos de secundaria y bachillerato no sólo no están libres de ella, sino que es en estas edades cuando se inician en su consumo. También sabemos que algunos de los efectos del tabaco a largo plazo son.

- Disminución de la memoria, dolores de cabeza, fatiga, bronquitis, cáncer de pulmón, boca y de laringe.
- Disminuye el rendimiento deportivo.
- Dependencia física, con su correspondiente síndrome de abstinencia.
- Dependencia psíquica.
- Manifestaciones comportamentales derivadas de los momentos de abstinencia (irritabilidad, ansiedad, etc...)

Teniendo en cuenta esto elegimos como situación cotidiana seleccionada para esta experiencia, un tema de mucha trascendencia, tal como lo es el tabaquismo.

Sobre la base de esto y considerando que los alumnos tenían en su plan de estudio las áreas de Química, Matemática y Laboratorio de Computación, organizamos esta experiencia de la siguiente manera:

1°) Se seleccionaron los contenidos que permitieran integrar dichas áreas:
En Química los contenidos seleccionados fueron: *tabaco, efectos del tabaco sobre el organismo y la nutrición, consecuencia sociales del tabaquismo.*
En Matemática: *Estadística*, *variables estadísticas*, *encuestas*, *importancia de las mismas*.
En Laboratorio de Computación: *Internet, búsqueda de información, selección de la misma, elaboración de informes.*

2°) Se abordaron en cada área los contenidos seleccionados teniendo en cuenta que cuando los alumnos en Matemática fueran a desarrollar los contenidos previstos, previamente debían haber visto los contenidos correspondientes de Química, puesto que se partía en Matemática de una situación cotidiana como lo es *"estadísticas de incidencia del tabaco sobre la mortalidad en Argentina"*. Posteriormente, en el Laboratorio de Computación los alumnos realizaron búsquedas en Internet sobre incidencia del tabaquismo en la salud, lo que les permitió analizar si las encuestas eran creíbles o no.

3°) Una vez terminado de desarrollar los contenidos en las distintas áreas se organizaron los alumnos en grupos de trabajo.

4°) Cada grupo de trabajo realizó búsquedas bibliográficas sobre *"tabaquismo y adolescencia"*, un tema de mucha trascendencia social hoy y además encuestas sobre *"el consumo de tabaco dentro de su grupo de amigos"*.

5°) Cada grupo elaboró con todo el material reunido un informe final, dando sus opiniones personales sobre el tema. Dichos informes finales fueron presentados en forma de carteles a todo el alumnado y cuerpo docente del Establecimiento a través de una exposición que se realizó en la última semana del ciclo lectivo del año 2004.

Esta experiencia llevada a cabo en forma integrada entre los docentes de Matemática, Química y Computación tiene dos propósitos fundamentales:

1°) Uno social, como lo es el de comenzar a educar a los alumnos de secundaria y bachillerato en una prevención específica sobre la problemática de una de las adicciones actuales como lo es el tabaquismo.

2°) Otro académico como es respetar las inquietudes planteadas por los alumnos que participaron de la experiencia anterior *"alcoholismo, adolescencia y sus implicancias sociales en el mundo actual",* que querían realizar algo similar a la misma, en el curso siguiente.

Creemos que la experiencia resultó positiva puesto que:

* Los alumnos participantes de la misma volvieron a valorar positivamente cómo pueden integrarse contenidos de áreas tan distintas entre sí como lo son: Matemática, Química y Laboratorio de Computación.

* La misma también tuvo un alto contenido ético y de utilidad social porque el eje de todo el trabajo realizado fue "tabaquismo, adolescencia y sus implicancias sociales en la problemática actual".

* También sirvió para que los alumnos, que son adolescentes, trasmitan un mensaje sobre las consecuencias del tabaquismo a los amigos y compañeros de su misma edad ya que las encuestas las realizaron en los lugares donde ellos se reúnen.

* Los alumnos aprendieron a trabajar en equipo y a defender sus puntos de vista realizando un análisis y evaluación de su propio trabajo así como el de los demás, en un ámbito dinámico y cordial.

* También fue una manera de irlos preparando para su inserción en el ámbito universitario ya que a través de esta experiencia no solo tuvieron que manejar los contenidos conceptuales de Matemática, Química y Laboratorio de Computación, sino que también tuvieron que manejar los contenidos procedimentales y actitudinales de las mismas para poder resolver satisfactoriamente las situaciones planteadas y realizar una correcta defensa de su trabajo frente a los demás.

* Los mismos se iniciaron en la metacognición, porque una vez terminada la exposición de los distintos trabajos tuvieron que realizar una autoevaluación de sus trabajos en base a la escala fijada por los docentes y fundamentar la calificación que se asignaban. Es importante destacar que las calificaciones que se asignaron los alumnos generalmente coincidía con la asignada por los docentes, salvo en algunos casos excepcionales que la de los alumnos era inferior a la de los docentes. Lo que significa que la autoevaluación o metacognición realizada por los alumnos fue hecha a conciencia.

Bibliografía:

Berenson, M., Levine, D. (1996). Estadística básica en administración: Conceptos y aplicaciones, 6ª edición. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México.

Aliseda, J., Junta de Andalucía. (1993). Programa de prevención de drogodependencias en el medio educativo, Sevilla, España.

Laurito l., Stisin lL., Trama E., Ziger D., Sidelsky E. (2001). Matemática: Estadística y Probabilidad, 1 y 2. Casa de Ediciones Puerto de Palos, Buenos Aires, Argentina.

Bosack A., Lantz M., López, C., Negroti, P. (2001). Físico-Química, Casa de Ediciones Puerto de Palos, Buenos Aires, Argentina.

Dal Fávero M., Farré S., Moreno P., Olazar L., Steinman M. (2002). Química, Casa de Ediciones Puerto de Palos, Buenos Aires, Argentina.

Monti, N., L'Argentière, P (1998). "Transferencia de conocimientos y experiencias para la integración del Nivel Medio con la Universidad". XXIII Congreso Latinoamericano de Química, Río Grande, Puerto Rico.

Monti, N., L'Argentière, P (1998). "La importancia de las relaciones intra e interdisciplinarias en pos del mejoramiento de la calidad de la enseñanza". Tercer Taller Internacional para la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, La Habana, Cuba.

Monti, N., L'Argentière, P (2004). "¿Podemos enseñar Matemática, Química... con una mirada al mundo actual?". Décimooctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME-18, Chiapas, México.

Monti, N., L'Argentière, P. (2004). "Encaremos en forma integrada los contenidos de Matemática, Química,…". II Congreso Enseñanza en Facultad de Ingeniería, Montevideo, Uruguay.

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS METÁFORAS EN EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

[1, 2]Sastre Vázquez, P; [1]Boubée, C.; [1]Rey, G. , [1]Maldonado S., [3]Villacampa, Y.
[1]Facultad de Agronomía. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina. [2]Facultad e Agronomía. Universidad de Morón. Argentina.[3]Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Alicante. España.
psastre@faa.unicen.edu.ar; villacampa@ua.es
Campo de Investigación: Epistemología e Historia de la Matemática.
Nivel educativo: Superior (19-22 años).

RESUMEN

El conocimiento matemático está constituido por conceptos, metáforas, procesos y hábitos o actitudes, y se puede decir que un texto es bueno o un programa es completo cuando todos estos elementos son adecuadamente atendidos. Desde que Lakoff y Johnson (1991) pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido, el papel de este en la formación de los conceptos matemáticos, es un tema que cada vez tiene más relevancia para la investigación en didáctica de las matemáticas. En este trabajo, enmarcado en un Proyecto de Investigación sobre los Obstáculos Epistemológicos, se analiza y discute la evolución histórica de las metáforas ligadas al concepto de función, en particular las asociadas a la gráfica de una función.

INTRODUCCION

Algunas de las preguntas que seguramente se harán los lectores de este artículo son: ¿Por qué hacer el análisis histórico de los objetos matemáticos?. ¿Tiene algún interés de tipo didáctico el análisis de la génesis de un concepto matemático? Leyendo a Lakatos, 1976: *"...las matemáticas lo mismo que las ciencias naturales, son falibles y no indubitables; que también crecen gracias a la crítica y a la corrección de las teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades, y en las que siempre cabe posibilidad de error o de omisión"* y a Farfán y Hitt, 1983: *"Existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible, la construcción de un concepto: todos estos son andamios de los que se vale el sujeto en su acción sobre el objeto, para acceder al concepto en sí, andamiajes con vida efímera que, circunstancialmente, son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto y donde el "error" y la sensibilidad a la contradicción desempeñan un papel importante*" es posible encontrar las respuesta a estos interrogantes.
Es decir, el desarrollo histórico de un concepto proporciona una pista de cómo, posiblemente, se desarrolla el conocimiento de tal concepto en la mente de un alumno, ya que existen muchas similitudes entre el desarrollo cultural y científico que ha mostrado el ser humano como especie y el desarrollo cultural y científico que muestra un ser humano a lo largo de su vida. Richard Rorty sugiere considerar la historia de la cultura como la historia de la dialéctica entre metáfora y literalización. El desarrollo del conocimiento humano no consiste en una aproximación gradual a la "verdadera" constitución del mundo, sino en un continuo proceso por el cual ciertas descripciones se van dejando a un lado en virtud de la mayor eficacia explicativa de otras. "La Tierra gira alrededor del sol" tuvo un valor metafórico hasta el siglo XV, o incluso un poco más adelante, pero sólo a partir de su proceso de literalización dicho enunciado comenzó a tomarse como verdadero. De esta

manera, muchas descripciones comienzan siendo metafóricas, en el sentido de no-habituales, para luego fosilizarse (literalizarse), hasta cierto momento en que nuevas redescripciones metafóricas ocupan el lugar de las anteriores metáforas extinguidas. No es posible, por tanto, adjudicar verdad o falsedad a una metáfora hasta tanto no haya sido literalizada.
Lakoff y Johnson sostienen como tesis principal que "nuestro sistema conceptual ordinario, en términos del cual pensamos y actuamos, es fundamentalmente de naturaleza metafórica" y que estos conceptos metafóricos que utilizamos estructuran nuestra percepción, nuestra conducta. En cuanto al papel de la metáfora en las transformaciones culturales, Lakoff y Johnson concuerdan con la concepción rortyana: muchos de estos recambios lexicales surgen a partir de la introducción de conceptos metafóricos nuevos y el abandono de los antiguos. Según Lakoff y Johnson, no sólo el saber cotidiano o el sentido común funcionan "metafóricamente": también las teorías científicas actúan a partir de conjuntos consistentes de metáforas, conjuntos sin los cuales nuestra comprensión del mundo no iría más allá de lo que nos brinda la experiencia física directa. En suma, la versión cognitivista se asienta sobre un supuesto clave: "Es imposible escapar de la metáfora". Esta especie de "fuga infinita" de la metáfora se afirma en que ellas "no son simplemente cosas que se deban superar; para superar las metáforas, de hecho, hay que usar otras metáforas.

La metáfora es un mecanismo de analogía en el que se concibe un concepto que pertenece a un dominio conceptual determinado en función de otro dominio conceptual, y en el que se establecen correspondencias y proyecciones entre los atributos de ambos dominios. En este sentido se habla de dominio origen (atributos salientes) y dominio destino, y de correspondencias entre ellos (Lakoff 1989). De esta forma, la metáfora permite una proyección ontológica a través de la interconexión de elementos que pertenecen a los dos dominios, así como una correspondencia epistemológica en la que el conocimiento del dominio origen, normalmente más básico y familiar, hace posible y facilita el razonamiento, la expresión, o la comprensión en el dominio destino, más complejo y abstracto. Estos procesos suceden a un nivel conceptual y de razonamiento, y se basan en esquemas e imágenes provenientes de la experiencia perceptual y personal del ser humano
La metáfora puede ser el puente o el punto de transición entre los preconceptos y la conceptualización, la reflexión y la capacidad argumentativa. Ella une y compacta lo conocido con lo desconocido, lo tangible y lo menos tangible, lo familiar y lo nuevo. Como "un puente posibilitando el paso de un mundo al otro" (Shift:1979), las metáforas posibilitan a los aprendices "entender y experenciar una clase de cosa en términos de otra," para parafrasear la noción de la metáfora en Lakoff y Johnson's (1980).
Cuenca y Hilferty, 1999, señalan que en la proyección metafórica no todos los elementos del dominio origen están incluidos, ni todos los elementos del dominio destino tienen un elemento en el origen, ya que en caso contrario se trataría del mismo dominio. Ello supone las correspondientes y lógicas limitaciones en cuanto al razonamiento por analogía que todos conocemos al usar metáforas. Por otro lado, los mismos autores nos recuerdan que al resaltar ciertas facetas del dominio destino, pueden quedar ocultos otros aspectos, permitiendo errores de conceptualización por olvidar precisamente la limitación anterior.
En este trabajo se analiza la evolución histórica de la génesis del concepto de función, identificando en las etapas del proceso histórico, las metáforas subyacentes a su gráfico. El objetivo de este trabajo es obtener material de trabajo que permita posteriormente analizar

el desarrollo de las explicaciones, sobre gráficos de funciones, presentadas en los libros de texto, con la finalidad de reconocer en ellas la existencia, o no, de expresiones que hacen referencia a metáforas, y así poder posteriormente analizar las producciones de alumnos, que hayan utilizado determinados textos, a fin de determinar los efectos que dichas metáforas producen en la compresión evidenciada por los alumnos.

ANALISIS HISTORICO

Durante la Época Antigua no existía una idea abstracta de variable y las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos. El conteo implica correspondencia entre un conjunto de objetos y una secuencia de números para contar y las cuatro operaciones aritméticas elementales son funciones de 2 variables, como también lo son las tablas babilónicas. Durante esta época todos los desarrollos fueron explicados verbalmente, en tablas, gráficamente o por ejemplos.

Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales y las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes sin definirlas específicamente. Una función se definía mediante una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, no utilizándose fórmulas.

Durante el período moderno, que comienza a finales del siglo XVI, las funciones fueron equivalentes a expresiones analíticas.

Fueron Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) quienes dieron el paso fundamental que permitió liberar a la aritmética y el álgebra de su subordinación a la geometría. Se trataba de la representación de curvas geométricas en sistemas de coordenadas y, lo más importante, el tratamiento del álgebra y la aritmética sin tanta limitación con relación a la representación geométrica antigua. Si las curvas de esta manera podían describirse con ecuaciones algebraicas, también nuevas ecuaciones algebraicas permitían definir nuevas curvas que los griegos antiguos no podían conocer (pues estaban "amarrados" a las construcciones geométricas con regla y compás).

Los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas clásicas sobre las curvas: a) las curvas son secciones; y, b) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones; para añadir una tercera: c) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva.

Descartes no utiliza las ecuaciones para dibujar curvas. Para él, las curvas, más que el conjunto de puntos que cumplen una determinada ecuación, son el resultado de movimientos sucesivos de curvas más simples, de manera que los últimos vienen determinados por los anteriores. Lo que hace Descartes es considerar la curva generada a partir de curvas más simples, y a partir del estudio de estos movimientos halla la ecuación de la curva.

Leibniz (1646-1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra función en 1692, para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, como la longitud de la tangente, la normal, subtangente y de la ordenada. Así afirmaba “una tangente es una función de una curva”. Introduce las palabras: constante y variable; coordenadas y parámetro en términos de un segmento de constante arbitrario o cantidad. No utilizaba el concepto de función como lo entendemos en la actualidad. Para él una curva estaba formada por un *número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.*

Euler (1707-1783) continúa el camino para precisar la noción de función comenzando a definir nociones como *constante* y *cantidad variable* y, en 1755 define función como una expresión analítica: "*la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes"*. Pero no define "expresión analítica", que fue definida formalmente en el siglo XIX, explica que las expresiones analíticas admisibles son las que contienen las cuatro operaciones elementales, raíces, exponentes, logaritmos, funciones trigonométricas, derivadas e integrales. Euler admite como funciones las llamadas curvas mecánicas. Al ampliar el concepto de función divide las funciones en dos clases: las *continuas y las discontinuas*. El significado de estos dos términos era distinto al significado actual. Las discontinuas son las "curvas mecánicas". Es decir, son aquellas para las que no tenemos una ecuación conocida, aún cuando su trazo en papel sea seguido.
El concepto de función evolucionó, enriqueciéndose y cambiando a partir de la controversia iniciada entre Dalembert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante. Dada una cuerda elástica con extremos fijos se la deforma y se la suelta para que vibre. El problema consiste en determinar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante. La discusión entre Dalembert (1717-1783), Euler y D. Bernoulli (1700-1782) se centró alrededor del significado de "función" y versó sobre funciones que solucionaban este problema, sosteniendo los dos últimos autores que se debían buscar soluciones mas generales. Para entenderlo hay que pensar que durante el siglo XVIII se aceptaba por "artículo de fe", es decir sin demostración que: *"Si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes"*
En 1718 Bernoulli publica un artículo en el cual considera una función de una variable como una cantidad que está compuesta, de alguna manera, desde esta variable y constantes, y en 1753 propone una nueva solución al problema de la cuerda vibrante. Tanto Euler como Dalembert, rechazaron esta solución, basando sus argumentos en el artículo de fe la época. Señalaron que dado que $f(x)$ y la serie coincidían en (0,l), éstas debían coincidir en todos lados, concluyendo que la solución de Bernoulli conducía al absurdo de una función $f(x)$ par y periódica. Bernoulli formula la siguiente definición: *"llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada x, y por constantes ya sea algebraicamente o trascendentemente"* ; ésta se convierte en la primera definición de función como expresión analítica. El mayor efecto que produjo el debate sobre el problema de la cuerda vibrante fue extender el concepto de función para permitir la inclusión de funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones con gráfico y sin expresión analítica
Fourier (1768-1830) conjeturó, pero no probó matemáticamente, que dada una función podía desarrollarla, en un intervalo apropiado, mediante una serie trigonométrica**.** Esto rompió el "articulo de fe "del siglo XVIII, ya que no era claro que dos funciones, dadas por diferentes expresiones analíticas, pudieran coincidir en un intervalo sin la coincidencia fuera. Aporta la idea de función como *correspondencia* entre dos conjuntos de números independiente de cómo esta correspondencia esté dada pero limitada por la idea de que la gráfica sea una gráfica continua.
Dirichlet (1805-1859) se dedicó a convertir el trabajo de Fourier en un trabajo matemáticamente aceptable, encontrando que el resultado de Fourier que afirmaba que toda función podía ser representada por una expansión en series, era falso. En 1829 Dirichlet estableció las condiciones suficientes para que fuera posible y definió función como: *"y es una función de la variable x, definida en el intervalo* $a<x<b$*, si para todo valor de la*

variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia"
Dirichlet presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica ó curva que la represente. Da el primer ejemplo que ilustra el concepto de función como correspondencia arbitraria y también el ejemplo de una función que es discontinua en todas partes, en nuestro sentido, no en el de Euler. A partir de los trabajos de este matemático el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica, (Youscakevith,1976)
La teoría de conjunto iniciada por Cantor (1845-1918) produce una nueva evolución del concepto de función, extendiéndose la noción de función para incluir: *"toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjunto numéricos o no numéricos"*
Los desarrollos en el álgebra abstracta y la topología dan lugar a nuevas definiciones teóricas conjuntistas. El grupo Bourbaki , 1939, definió función como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837 (Yousvhkevitch, 1976): **"***Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x,; se dice que y es el valor de la función en el elemento x y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función ".* Bourbaki también formuló una definición de función equivalente, como conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989):*"una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano ExF"*

CONCLUSIONES

Si bien Descartes desarrolló la idea de introducir una gráfica en forma analítica, en general, durante la época anterior a la aparición de una definición formal de función, las metáforas clásicas sobre las curvas fueron: *a) las curvas son secciones;* y, *b) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones; c) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva y d) las curvas están formadas por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños*.
Hasta la publicación de los trabajos de Fourier, en la práctica la noción de función se identificaba con la noción de expresión analítica, es decir la metáfora durante esa época fue: *"una función es una expresión analítica"*. Poco tiempo después se encontró que esta identificación podía conducir a incoherencias: la misma función se podía representar mediante diferentes expresiones analíticas. También existían limitaciones referidas al tipo de funciones que se podían considerar.
A partir del debate sobre el problema de la cuerda vibrante el concepto de función se extendió permitiendo la inclusión de funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones con gráfico y sin expresión analítica. Es decir se introduce una nueva metáfora *"una función es un gráfico continuo".* A partir de los trabajos de los trabajos de Dirichlet en los cuales presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica ó curva que la represente, el concepto de

función se independiza del concepto de expresión analítica. Nace una nueva metáfora : *"una función es una correspondencia arbitraria".* Con la posterior aplicación de la teoría de conjuntos a las funciones, terminó de tomar cuerpo la metáfora conjuntista: *"la gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas (x, f (x))*"o *"una función es un conjunto de pares ordenados".*

AGRADECIMIENTOS: Este artículo ha sido realizado con el apoyo del proyecto GV04B-563 de la Generalitat Valenciana (Consellería de Cultura, Educación y Deporte), España. Los autores desean expresar su gratitud por el mismo.

BIBLIOGRAFIA

Cuenca, M. y Hilferty; J. (1999*). Introducción a la lingüística Cognitiva*, Barcelona. Ariel.

Farfán, R. y Hitt, F. (1983). *Heurística Matemática* (Nivel Superior). Sección Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Kleiner, I. (1989). *Evolution of the function Concept: A Brief Survey.* The college Mathematics Journal, 20(44), pp. 282-300.

Lakatos. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. London, Cambrige University Press.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G., and M. Johnson. (1980). *Metaphors we live* by. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Rorty, Richard (1979) *La filosofía y el espejo de la naturaleza*, Cátedra, Madrid.

Shift, R. (1979). *Art and life: A metaphoric relationship*. In On metaphor, S. Sacks (Ed). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Youschkevitch, A. (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19^{th} Century,* Arch. Hist. Ex. Sci. 16 37–85.

UN PASEO POR EL PARAÍSO DE CANTOR: PROBLEMAS Y REFLEXIONES ACERCA DEL INFINITO

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*".
Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires (Argentina)
ccrespo@uolsinectis.com.ar
Campo de investigación: Epistemología e Historia de la Matemática, Pensamiento lógico;
Nivel Educativo: superior
Palabras clave: infinito, paradojas, argumentaciones

Resumen

La enseñanza y comprensión del infinito presentan, un reto a los docentes. Las dificultades radican no solamente en el conflicto originado en la adquisición de este concepto por parte de los alumnos sino también, en las estrategias de los docentes por lograr la transposición adecuada del conocimiento. Este trabajo presenta brevemente algunos problemas clásicos y no clásicos relacionados con el infinito cuya resolución fue posible a partir de los trabajos de Cantor. Estos problemas generan reflexiones acerca de las argumentaciones empleadas y las dificultades que presentan en el aula.

Los griegos y el infinito

En Oriente, en la India particularmente, el tratamiento del infinito en la antigüedad es totalmente distinto del que se llevó a cabo en Occidente (Crespo Crespo, 2002). Nos centraremos en este trabajo en la visión occidental del infinito y su evolución. El infinito es claramente una construcción matemática que evidencia su carácter sociocultural, ya que su tratamiento refleja la manera de pensar de la sociedad científica de la cultura en la que nos detengamos.
Sin lugar a dudas, la influencia aristotélica en Occidente dejó su sello en el pensamiento a través de los siglos y ha llegado a nosotros tal influencia en múltiples aspectos del pensamiento racional.
Con anterioridad a Aristóteles, en época de Pitágoras surge en Grecia la concepción de infinito como algo a lo que no se puede asignar ningún tamaño. También en esta época, el infinito sufre una de las primeras crisis. Las paradojas de Zenón fueron enunciadas hace veinticinco siglos por Zenón de Elea, que se ocupó de tres problemáticas: lo infinitesimal, lo infinito y la continuidad, las tres fueron tratadas a partir de las ideas de movimiento y las contradicciones a que su análisis conducía. Aparentemente, una de sus intenciones era probar la inconsistencia de las ideas pitagóricas respecto del número. En su época, coexistían dos concepciones opuestas acerca de las características del espacio y del tiempo: una, afirmaba que estas magnitudes son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo, y la otra, que ambas están formadas por pequeños intervalos indivisibles, por lo que el movimiento consistiría en una sucesión de pequeños saltos discretos. Las argumentaciones de Zenón se dirigieron contra ambas teorías y parten de la hipótesis fundamental de que tanto el tiempo como el espacio pueden ser cada uno e independientemente el uno del otro, finitamente divisibles o infinitamente divisibles. Los planteamientos de Zenón tuvieron grandes consecuencias en el desarrollo del pensamiento matemático.

Para Aristóteles, el infinito existe en la naturaleza: en el tiempo que no tiene principio ni fin y en las magnitudes que pueden dividirse y seguirse dividiendo. El concepto aristotélico de infinito es la que dominó en la historia hasta la época cantoriana, y que tuvo una gran influencia en el desarrollo de este concepto. La concepción potencial del infinito es la que responde a la interpretación natural intuitiva del infinito; el infinito actual no tiene para Aristóteles un significado unido a la acción, sino que es estático y debe ser comprendido en su totalidad.
A partir de Aristóteles, los matemáticos griegos concibieron el infinito sólo en su esencia potencial. Se lo interpreta como aquello que siendo de hecho finito, crece y puede crecer sin límite alguno. El pensamiento de Aristóteles se reflejó en la obra de Euclides: todas las figuras geométricas consideradas en los Elementos son finitas y limitadas, en particular, la recta concebida por Euclides es subdivisible de manera potencialmente infinita y no atómica, siempre es posible "alargar" la recta hacia ambos lados y, dos puntos de la recta determinan un segmento que siempre es posible dividir en otros dos segmentos. Ambos procesos se pueden repetir hasta el infinito (Euclides, 1991). Por otra parte, para Euclides, existen más números primos que cualquier colección de números primos dada. Esta concepción evidencia claramente, una vez más, la presencia potencial del infinito en la matemática griega.

Algunas paradojas y problemáticas que involucran al infinito

Las paradojas vinculadas con el concepto de infinito que han surgido a través de la historia son numerosas. La esencia de estas paradojas es que se intenta dar al infinito un tratamiento similar al que se da a conjuntos finitos. Esto puso a los matemáticos ante algunas conclusiones que eran inexplicables en su época y que fueron considerados como paradojas durante siglos.

Algunas de estas paradojas son las siguientes:

- Existen cantidades infinitas que son el doble de otras cantidades infinitas:

> *Consideremos un círculo y sus infinitos diámetros; cada uno divide al círculo en dos semicírculos, o sea que existe el doble de semicírculos que de diámetros, por lo tanto llega a obtener un infinito mayor que otro.*

Este razonamiento realizado por Proclo de Alejandría (Siglo V) es para él contradictorio, ya que no acepta que una cantidad infinita sea el doble de otra cantidad infinita.

- Es posible poner en correspondencia conjuntos numéricos tales que uno esté incluido en otro:

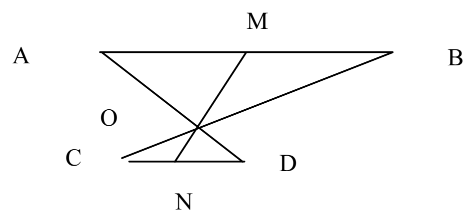
> *Si consideramos los números naturales y sus cuadrados, a cada número natural se le puede hacer corresponder su cuadrado, lo que implica que existen la misma cantidad de naturales que de cuadrados, pero es evidente que no todos los números naturales son cuadrados, por lo que hay más naturales que cuadrados.*

Esto fue observado por Galileo Galilei (siglo XVI). Análogamente:

> *Si consideramos los números naturales y sus duplos, a cada número natural se le puede hacer corresponder su duplo, lo que implica que existen la misma cantidad de naturales que de pares, pero es evidente que no todos los números naturales son pares, por lo que hay más naturales que pares.*

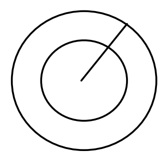
- Es posible poner en correspondencia los puntos de dos segmentos de distinta longitud:

    Dados dos segmentos AB y CD de distinta longitud, que podemos suponer paralelos, conéctese D con A y B con C para obtener el punto O. A cada punto M sobre el AB, puede hacerse corresponder un punto N sobre el CD.



- Es posible poner en correspondencia los puntos de dos circunferencias de distinto radio:

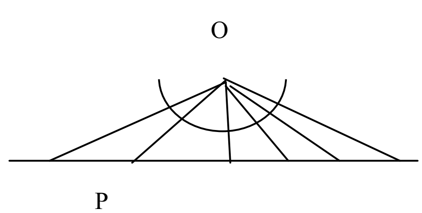
    Consideremos dos circunferencias concéntricas. A través de sus radios es posible ver que para cada punto de la circunferencia interior existe uno en la exterior y para cada punto de la exterior uno de la interior, o sea que tenemos la misma cantidad de puntos en ambas. Sin embargo las longitudes de ambas circunferencias son distintas.



De manera análoga, es posible razonar para en el espacio tridimensional parados esferas de distinto radio.

- Es posible poner en correspondencia todos los puntos de una semicircunferencia con los de una recta.

    Se traza una recta y la semicircunferencia como se indica en la figura. Dado un punto P de la recta, se traza el segmento OP desde el centro de la circunferencia O. Este procedimiento genera una correspondencia entre ambos conjuntos, a pesar de que la longitud de uno es finita y la del otro, infinita.



Estas paradojas eran conocidas durante la Edad Media. El concepto de infinito es abordado con una nueva óptica: se lo relaciona con la religión, con la creación, con Dios. Se lo intenta explicar desde la teología. El halo de misterio que rodea al infinito en esta época se relaciona directamente con la divinidad. Se discutió además acerca del infinito actual y el potencial.
Santo Tomás (siglo XIII) negó la existencia de conjuntos infinitos argumentando que si se pudiesen concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían un número finito y se produciría una contradicción. Santo Tomás negaba la existencia del infinito en acto fuera de Dios, aduciendo para probar su tesis un argumento basado en la omnipotencia de Dios: Dios puede hacer lo que quiera, pero el hacer provoca la existencia de lo que es hecho, por lo cual no puede darse en todo y para todo sin límites aquello que produzca contradicciones.
El obispo inglés Robert Grosseteste, en el mismo siglo, afirmó que el único que puede manejar el infinito es Dios, pues para Él los infinitos son finitos.
Para San Agustín, el infinito actual es un atributo que existe, pero que le es propio a Dios. *"Es absolutamente cierto que hay una infinidad".*

Por otra parte, siglos después, Carl Gauss explica también el infinito en término de límites. Dijo en 1831: *"Protesto contra la utilización de una cantidad infinita como si fuera una entidad real; en las matemáticas esto está prohibido. El infinito no es más que un modo de hablar, en el que se mencionan en el sentido propio, aquellos límites a los que ciertas razones se pueden aproximar tanto como se desee, mientras que a otras se les permite crecer sin límite."* Los que se ocuparon en esta época del infinito actual, tuvieron que oponerse a la autoridad de Gauss.
Sin embargo, los problemas relacionados con el infinito empezaron a presentarse con mayor frecuencia a medida que el cálculo comenzó a desarrollarse, por ejemplo a través de las series infinitas.

Bolzano y sus paradojas del infinito

En *Las Paradojas del infinito*, obra póstuma de Bertrand Bolzano publicada en 1851, encontramos una clara comprensión del concepto de coordinabilidad:

> *..."Afirmo que entre dos conjuntos que sean ambos infinitos se puede establecer una correspondencia tal que por una parte sea posible unir un objeto de un conjunto con otro del segundo para formar un par de manera que ningún objeto de ambos conjuntos deje de formar parte de algún par y tampoco forme parte de dos o más pares; y por otra parte es también posible que uno de estos conjuntos esté contenido en el otro como un subconjunto propio, de forma que las multiplicidades de estos representan, cuando consideramos todos los objetos de los mismos como iguales, es decir como unidades, tengan las más diversas relaciones unas con otras"...*

A Bolzano se debe la primera introducción del infinito desde un punto de vista conjuntista en la matemática, consiguiendo con esta herramienta un medio conceptual adecuado para el tratamiento de este concepto. Definió los conceptos de número y de magnitud a partir de la idea de colección. En relación al infinito, defendió la existencia del infinito actual. Su

concepción de infinito no tiene precedentes y puede considerarse revolucionaria, ya que modificó ideas milenarias. El infinito es una propiedad susceptible de ser atribuida a objetos que pueden ser contados o medidos.
Algunas ideas surgen claramente del abordaje que realiza Bolzano del infinito.

- *Una multiplicidad es infinita si todo conjunto finito es sólo una parte de ella.*
- *Si un matemático encuentra una cantidad mayor que cualquier número finito de unidades que ha elegido, la llamará infinitamente grande.*
- *Si es tan pequeña que cualquier multiplicación finita es menor que la unidad tomada, la llamará infinitamente pequeña.*
- *Aparte de estos dos tipos de infinitud y de las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas de orden superior que se basan en esta idea, no existe para las matemáticas ningún otro tipo de infinitud.*

Bolzano, al referirse al infinito actual, lo denomina "mal infinito" y al infinito potencial lo llama "infinito como cantidad variable"

Cantor y la formalización del infinito

Es imposible hablar del concepto de infinito sin mencionar al matemático alemán de origen ruso George Cantor. Definió los números transfinitos y caracterizó las nociones de potencia numerable y del continuo, sentando las bases de la teoría de conjuntos. Cantor definió formalmente conjunto infinito como aquel en el que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre el mismo conjunto y una parte propia de él, idea ya perfilada por Bolzano. Probó que un espacio de dimensión n tiene exactamente el mismo número de puntos que un espacio de dimensión 1. A Cantor se debe el enfoque actual del infinito, a partir de las definiciones de coordinabilidad de conjuntos.
Las ideas de Cantor no fueron aceptadas por la mayoría de los miembros de la comunidad matemática de su época, más aún: la mayoría de los miembros de esta comunidad, lo rechazaron. Fue a partir de esta época cuando surgió una famosa confrontación entre Cantor y Krönecker. Cantor fue calificado por Krönecker como "*charlatán, renegado y corruptor de la juventud*". Los intuicionistas, no aceptaron en absoluto sus ideas. Henry Poincaré, en 1909, no dudó en afirmar que *"no existe ningún infinito actual"* y que con el infinito se designa sólo la posibilidad de crear permanentemente nuevos objetos, tan numerosos o más de lo que son los objetos ya creados. Poincaré afirmó que la teoría de números transfinitos era una "*enfermedad*" de la que algún día las matemáticas llegarían a curarse.
Pero no todos los matemáticos atacaron a Cantor. Dedekind, convencido defensor del empleo del lenguaje conjuntista en matemática pura, elaboró las definiciones conjuntistas habituales de los números naturales, los enteros, los racionales y los reales. El gran avance del enfoque conjuntista estuvo acompañado por nuevas concepciones de los fundamentos de la matemática que estimularon la aparición de sistematizaciones.
Hilbert desempeñó un papel central como adalid del enfoque conjuntista abstracto, llegando a comprometer en la empresa toda su autoridad como investigador y líder de la comunidad matemática. Afirmó: *"Queremos investigar cuidadosamente, siempre que exista la menor perspectiva de éxito, las construcciones conceptuales y formas de inferencia fructíferas, y cultivarlas, afianzarlas y hacerlas susceptibles de aplicación. Del paraíso que Cantor nos creó, nadie podrá expulsarnos."*
A partir de las ideas de Cantor, las que hasta entonces eran paradojas del infinito, pasaron a poder ser explicadas. Dejaron de verse en estos razonamientos contradicciones. Se

comprendió que el tratamiento del infinito como objeto matemático no debe ser el mismo que se le daba a objetos finitos.

El infinito en el aula

Es cierto que el concepto del infinito, no parece regido por el sentido común. Contradice ideas "evidentes" e "intuitivas", como el axioma griego*: "El todo es mayor que las partes"*, tal como ocurre en las paradojas que hemos enunciado anteriormente. Esto es lo que hizo que durante siglos se tratara de una idea inabordable desde la ciencia. En el aula encontramos situaciones similares.
La enseñanza de este concepto presenta, sin lugar a dudas un reto a los docentes, ya que involucra obstáculos epistemológicos y didácticos que reportan diversos investigadores (Waldegg, 1996, Garbin y Azcárate, 2002, Lestón y Veiga, 2004).
El estudio de la evolución histórica y epistemológica de este concepto puede, sin lugar a dudas, dar luz de cómo nace y se desarrolla, cómo se plantean y construyen los procedimientos relacionados y qué limitaciones conceptuales aparecen en el aprendizaje de la noción de infinito.
El análisis de las paradojas surgidas y la manera en la que la teoría desarrollada por Cantor da respuesta a ellas, constituye quizá una manera de presentar y trabajar este concepto en la escuela, dando la posibilidad a los alumnos de construir este concepto a partir de aquellas ideas que permitieron que evolucionara a través de la historia hasta llegar a su tratamiento como lo conocemos en la actualidad.

Referencias bibliográficas

Bell, E. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del Infinito*. México: Mathema.

Crespo, C. (2001). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad.* En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo, C. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15(1). México: Iberoamérica, pp. 529-534.

Euclides, (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). *Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años*. En Enseñanza de las ciencias, 20 (1). pp.87-113

Gheverghese, G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid, España: Pirámide.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras.* Madrid, España: Espasa Calpe.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Vol I, II y III.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Kuratowski, K. (1973). *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología*. Barcelona: Vincens Vives.

Lestón, P. y Veiga, D. (2004). Introducción al infinito. En Díaz, L. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(1), pp.440-410.

Sartorio, A. (2000). *Conjuntos e infinitos*. Buenos Aires: Eudeba.

Vita, V. (1992). *El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo.* En *Mathesis* Vol VIII n° 2. México: Universidad Autónoma de México.

Waldegg, G. (1996*).* Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1(1), pp. 107-122.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid, España: Siglo XXI.

Zellini, P. (1991). *Breve historia del infinito.* Madrid, España: Ediciones Siruela.

ANÁLISIS DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN LA ETAPA DE FORMACIÓN

Elisa Petrone – Natalia Sgreccia – Marta Massa
Escuela Normal Superior N° 33, Armstrong, y Universidad Nac. de Rosario – Argentina
epetrone@fceia.unr.edu.ar - sgreccia@fceia.unr.edu.ar - mmassa@fceia.unr.edu.ar
Campo de Investigación: Formación de profesores

Resumen:

En el marco de un proyecto de investigación, que se encara en conjunto entre una Facultad y un IES, se ha asumido el compromiso de introducir a los estudiantes del Profesorado en Matemática en la problemática de la investigación en Educación Matemática.
Se trabaja en el área de la resolución de problemas geométricos, haciendo participar a los estudiantes en una fase *diagnóstica* para conocer el espacio asignado a la Geometría en un conjunto de instituciones educativas; una fase *analítica*, en la que se aplica, a alumnos de una de las escuelas, un instrumento de investigación consistente en un problema geométrico y cinco preguntas de reflexión sobre la actividad de resolución; y una fase *formativa*, en la que los estudiantes del profesorado indagan sobre los procesos cognitivos que se desarrollan durante la resolución.

La geometría, desde lo didáctico, reúne cuestiones importantes para analizar las condiciones que permiten transitar en forma gradual desde el trabajo sobre situaciones espaciales concretas hacia la formalización. Es sobre este sentido de la "representación" que interesa hacer reflexionar al estudiante de profesorado mientras desarrolla los marcos teóricos específicos y, a la par, iniciarlo en la exploración metódica de los problemas de la práctica educativa, aumentando su conocimiento, validando sus afirmaciones e introduciendo racionalidad al pensar en el diseño de sus prácticas. La iniciación en aspectos relacionados con la investigación educativa le proporciona nuevas perspectivas y categorías de análisis que contribuirán al desarrollo de una actitud reflexiva y crítica en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje.
La temática abordada corresponde al eje *resolución de problemas geométricos*, por cuanto constituye un campo interesante para analizar las diferentes competencias cognitivas y procedimentales requeridas a un sujeto para responder a las situaciones que requieren una ubicación espacial y su formalización . De este modo, el proyecto se presenta como un espacio para el desarrollo de la Didáctica de Geometría en el nivel medio a partir de la investigación educativa en los grupos-clase de EGB 3[1] y está orientado a estudiar los procedimientos que ejecutan dichos grupos-clase al abordar la resolución de problemas geométricos.
La comprensión de los procesos de razonamiento desarrollados por estudiantes de EGB3 al abordar la resolución de problemas geométricos resulta de especial significado para interpretar y validar posibles modelos didácticos que sustentarán las prácticas educativas de los futuros profesores de Matemática. La reflexión sobre las propias experiencias como alumno del nivel medio y durante la resolución de problemas geométricos en el espacio curricular Tópicos de Geometría, presente en el 3° año de la carrera, permitirá a cada estudiante del Profesorado focalizar posibles dificultades, analizar diferentes formas de

[1] EGB 3: Tercer Ciclo de la Educación General Básica, constituido por alumnos 7°, 8° y 9° años, con edades comprendidas entre 12 a 15 años.

representación y de búsqueda de solución. Sin duda, la visita a las escuelas para recoger información sobre estas actividades en las actuales aulas de nivel medio permitirá posicionarse frente a un contenido de enseñanza evitando posibles fracturas entre lo disciplinar y lo didáctico.
La Geometría ofrece oportunidades interesantes para hacer frente a problemas no rutinarios, con enunciados narrativos, en lenguaje coloquial, con una correspondencia más cercana a la experiencia cotidiana que la de los textos técnico-expositivos (Blanco et al, 2003; IMCI, 1998).
Como marco teórico para indagar las actuaciones de los alumnos al resolver problemas geométricos se adopta la confluencia de dos líneas teóricas: la concepción del pensamiento como una búsqueda del *espacio del problema* (Newell et al, 1972) y la idea de *modelo mental* de Johnson-Laird (1983). Los primeros consideran la resolución como un proceso de *representación y búsqueda*, con tres componentes: un *sistema de procesamiento de la información* (el sujeto), un *ambiente de la tarea* (el formato del problema) y un *espacio del problema* (la representación interna articulada con conceptos, procedimientos y técnicas disponibles). La teoría de los modelos mentales (Johnson-Laird, op. cit.) se centra en la manera en que las representaciones mentales son interpretadas como modelos o análogos estructurales del mundo.
Zhang (1997) ha mostrado que las representaciones externas (palabras, símbolos, etc) en el enunciado y los modelos (representaciones internas) construidos por el sujeto suponen registros diferenciados: uno, perceptivo y otro, cognitivo.

El plan de trabajo está constituido por tres fases:

a) *diagnóstica*, en la cual se analizan las actividades vinculadas con los contenidos de Geometría en una muestra de escuelas de tres localidades diferentes de la provincia de Santa Fe;
b) *analítica*, para estudiar los procedimientos que ejecutan los estudiantes de EGB3 al abordar la resolución de problemas geométricos;
c) *formativa*, consistente en la introducción de la investigación educativa como eje de articulación de estrategias didácticas en estudiantes del Profesorado en Matemática desde la cátedra Tópicos de Geometría. Es esta fase, en particular, sobre la que se centra el presente artículo.

El proyecto de investigación se desarrolla integrando tres tipos de instituciones, según se muestra en la Figura 1:

a) una Facultad que cuenta con una larga y reconocida trayectoria en la educación matemática para la formación de licenciados y doctores en Matemática, de profesores para EGB3 y Polimodal y nivel terciario o universitario y de ingenieros;
b) un Instituto de Enseñanza Superior de gestión oficial, dependiente del Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, ubicado en la localidad de Armstrong, distante 100 km de Rosario, y que por más de dos décadas viene formando profesores de Matemática quienes se insertan laboralmente en su región de influencia;
c) siete escuelas de enseñanza media de cuatro localidades ubicadas en dicha región.

Desde el punto de vista de los actores implicados en la investigación, las autoras de este artículo son las responsables del proyecto de investigación (en la Figura 1 designadas como E, M y N). Se desempeñan en la docencia universitaria y en la formación de profesores, pero además integran un grupo de investigación en enseñanza de las Ciencias, radicado en la Facultad, trabajando durante los últimos años en el área de la resolución de problemas.

Este grupo es responsable del diseño de las actividades, de los instrumentos de investigación y de los criterios generales para el procesamiento de la información.
Una de estas docentes (N) se desempeña como profesora del espacio curricular Tópicos de Geometría, siendo quien mantiene un contacto directo con los estudiantes del profesorado de Matemática de Armstrong y quien es responsable de la orientación de las actividades que dichos jóvenes realizan, tanto en el trabajo de campo como en el procesamiento.
Los estudiantes (cuyos nombres se presentan en la Figura 1), que voluntariamente se incorporaron al desarrollo de este proyecto, asumen la responsabilidad de la realización del trabajo de campo en las escuelas medias (E1, E2,...).
Finalmente, el proyecto cuenta con una tutora (Z) quien, de acuerdo con lineamientos del Ministerio de Educación (ME), sigue la marcha del proyecto y periódicamente mantiene reuniones con el equipo de investigadores de la FCEIA donde se discuten los avances.

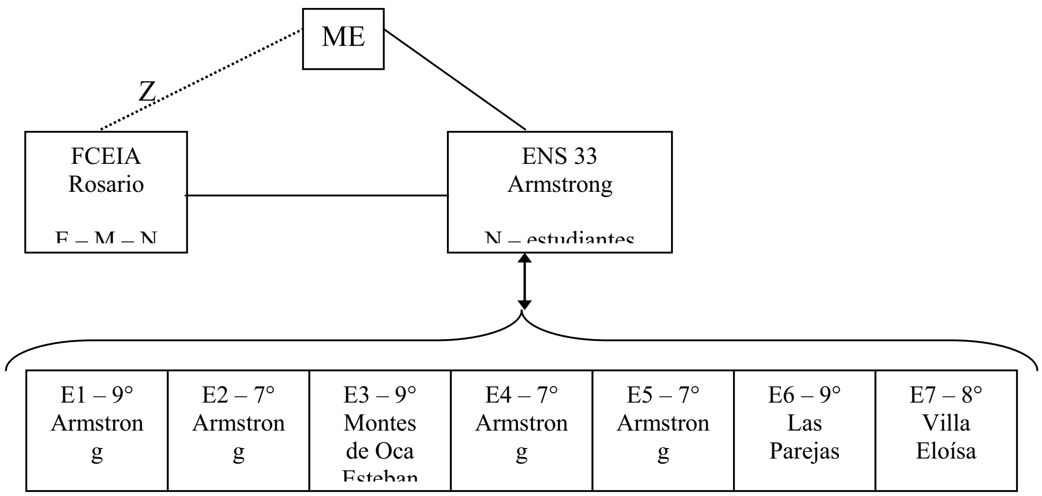


Figura 1: Instituciones y actores involucrados en la investigación

4. Trabajo con los alumnos del Profesorado:

La participación de los estudiantes de Tópicos de Geometría en las distintas etapas del proyecto fue progresiva y vinculada con diferentes aspectos:

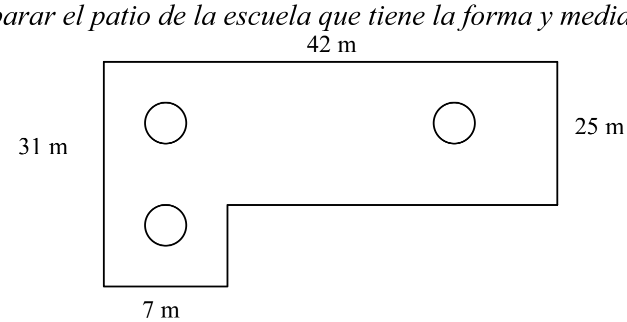
a) En la fase *diagnóstica* se buscó el acercamiento hacia las realidades de las distintas instituciones educativas de la zona. Siguiendo un protocolo diseñado por las responsables del Proyecto de Investigación, los estudiantes indagaron en un conjunto de escuelas medias sobre el espacio real asignado a la Geometría en la EGB3 (existencia de ejes estructurales, organización, actividades previstas relacionadas con Geometría, tiempo total asignado a cada contenido, momento del año en que se abordan los contenidos geométricos, bibliografía propuesta, fundamentación de la planificación).
b) En la fase *analítica*, la participación de los estudiantes quedó limitada a un único alumno del Profesorado quien se ofreció a aplicar un instrumento de investigación, consistente en un problema geométrico y cinco preguntas de reflexión sobre la actividad de resolución, a 40 alumnos de dos cursos de 8vo. año EGB 3 en una de las escuelas. La definición de dimensiones de análisis y variables para analizar las producciones y el procesamiento de la información fue efectuado por el equipo de investigadoras.
c) En la fase *formativa*, los estudiantes del profesorado intervinieron en una actividad del tipo investigación-acción orientada a: aprender a hacer un recorte metodológico para

definir las dimensiones de análisis con sus correspondientes variables; descubrir que la lectura está cargada de subjetividad y que la triangulación entre pares atenúa este aspecto; aprender a organizar una matriz de datos; advertir que a pesar de la diversidad de criterios se termina codificando la información, por consenso entre pares, y cómo esta organización permite efectuar miradas comparativas globales y/o individuales (por filas o por columnas) para favorecer una interpretación.

Específicamente la actividad desarrollada en el aula de Tópicos de Geometría consistió en:

1) la resolución del mismo problema que en la fase analítica se había aplicado a alumnos de EGB3, cuyo enunciado se transcribe a continuación, incluyendo la respuesta a las consignas que figuraban en el protocolo.

Se quiere reparar el patio de la escuela que tiene la forma y medidas de la figura:



Las refacciones consistirán en: cambiar las baldosas, pintar las dos paredes más largas del patio hasta una altura de 2,20 m y colocar cercos alrededor de los canteros circulares.

Se piensa en comprar baldosas cuadradas de 20 cm de lado. Sin descontar la superficie de los canteros, calcular cuántas baldosas serían necesarias para cubrir todo el patio. Sabiendo que en los comercios las baldosas se venden a \$ 35 el m^2, calcular cuánto costará embaldosar el patio.

Respecto de las paredes, deberás identificar de cuáles se trata y calcular la superficie a pintar. Sabiendo que cada litro alcanza para pintar 4 m^2 de pared y que el costo del tarro de 10 litros es de \$ 62, calcular el costo de la pintura.

Finalmente, hay que comprar la cerca para el borde de los canteros circulares.
Para calcular los m de cerco que serán necesarios se cuenta con la siguiente información: la superficie ocupada por los tres canteros representa 1/26 de la superficie total del patio. Calcula el radio de cada cantero, la cantidad de m necesarios para cada cerco y el costo total de los tres cercos, sabiendo que cuesta \$15 el m.

Las preguntas formuladas a continuación se refieren a: si les costó entender y/o resolver el problema, si trabajó con problemas de este estilo el año pasado, cuáles fueron los temas de Geometría que necesitó para resolver el problema.

2) la intervención en un debate en la clase en el que se discutieron las distintas miradas sobre dichas dificultades, etc. La profesora indujo elementos a observar (parámetros) tomados de las evaluaciones resueltas por los alumnos de 8° y previamente analizadas por las tres investigadoras de la FCEIA;

3) la distribución de los estudiantes en tres grupos entre los que se repartieron tres paquetes con algunas resoluciones seleccionadas realizadas por un conjunto de alumnos de la escuela media, los que fueron identificados mediante los números 1, 2, 3, 5, 23, 26, 27, 32 y 37.
4) el procesamiento de una de las resoluciones, en forma individual en cada grupo, a partir de los parámetros de análisis establecidos por la profesora de "Tópicos de Geometría" quien sugirió la posibilidad de incorporar otros. En cada grupo, se procedió a triangular los análisis individuales y se elaboró una única planilla para cada prueba;
5) el procesamiento de las restantes resoluciones, a realizar en un tiempo máximo de un mes, con una triangulación final inter-grupo.

5. Consideraciones generales:

El debate realizado en clase constituyó una etapa rica para posicionar en el aula las cuestiones vinculadas con la resolución de problemas geométricos ya que permitió trascender el punto de vista habitual de las clases de Tópicos de Geometría: la de la *problemática centrada en el propio aprendizaje disciplinar*, hacia la reflexión sobre la *problemática del contexto* en que se realiza tal aprendizaje y cómo operar para *transformarlo en situaciones didácticamente eficaces*. Las actividades encaradas durante la fase diagnóstica permitieron acercar a los estudiantes al contexto específico de la EGB3, encontrando elementos para establecer el rol asignado concretamente por los profesores a la Geometría frente a los restantes contenidos matemáticos y la función asignada a la resolución de los problemas geométricos.
La resolución del mismo problema que se le presentara a los alumnos de EGB3 sirvió de referencia para reflexionar sobre las posibilidades para el desarrollo de competencias conceptuales y procedimentales brindadas por ese tipo de enunciados más abiertos que los hallados en el material relevado durante el diagnóstico y establecer su función en la formación de un adolescente. La Figura 2 sintetiza los aspectos que emergieron durante el transcurso del debate como relevantes en relación a las resoluciones analizadas, cuyos argumentos fueron acordados entre los estudiantes.

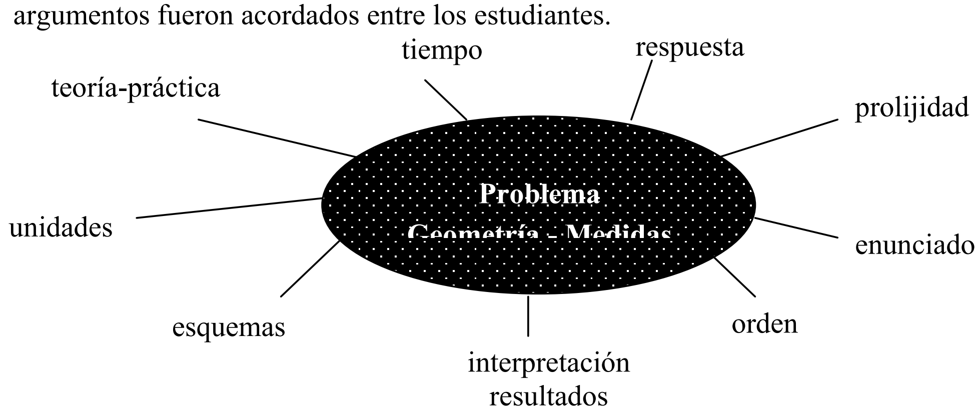


Figura 2: Aspectos de las resoluciones mencionados por los estudiantes del Profesorado
Otra etapa importante estuvo asociada con el estudio de las diferentes variables que se pueden adoptar para analizar la resolución de un problema, discutiendo la importancia de los procesos de comprensión y búsqueda en función del marco teórico adoptado. A continuación se presentan tales variables, con sus correspondientes modalidades, destacándose con letra mayúscula algunas aportadas por los propios estudiantes.

Variables (Modalidades)
0- Completitud (si, no)
1- Estrategia de resolución (correcta, parcialmente correcta, incorrecta, inexistente)
2- Planteo (coloquial, numérico horizontal, numér. vertical, NUMÉR. MIXTO, inexistente)
3- Uso de unidades (correcto y completo, correcto e incompleto, INCORRECTO Y COMPLETO, incorrecto < 50 %, incorrecto > 50 %, no)
4- Esquemas gráficos (hay esq. graf. propios, hay aportes propios s/ el graf. dado, no hay)
5- Exactitud en los cálculos (100 %, [60, 100) %, [30, 60) %, [0, 30) %)
6- Tipo de respuesta (coloquial, un número con unidades, un número sin unidades, no hay)
7- Explicita fórmulas geométricas (sí, a veces, nunca)
8- Reinterpreta en función de la realidad (sí, no, no se puede decidir)

Finalmente, la tarea de analizar cada protocolo de resolución desde el punto de vista de las variables presentadas inició a los estudiantes en una actividad de investigación, permitiendo diferenciar entre la corrección de un problema como práctica docente y una indagación en profundidad de los procesos cognitivos que desarrolla un alumno durante la resolución. De esta manera, se puede detectar en esa complejidad aciertos, errores, sesgos y heurísticos que muestran las actuaciones realizadas a medida que se comprende un enunciado, se efectúa un modelado situacional y se definen posibles modos de búsqueda de la solución.
Actividades de esta naturaleza están permitiendo transformar el enfoque que los estudiantes del Profesorado de Matemática asignan al espacio de Tópicos de Geometría, permitiendo valorar la importancia de reflexionar sobre las prácticas y practicar las reflexiones en forma consecuente.

Bibliografía:
Blanco, L. y Barrantes, M. (2003) Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educ*, 6(2).

Corberán Salvador, R. (1989) *Didáctica de la geometría: modelo Van Hiele.* Valencia: Publicación de la Universidad de Valencia.

I.M.C.I. (1998) Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. En Mammana y Villani, (1998) *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century*, Kluwwer Acd. Pub.

Johnson, P. (1983) *Mental Models*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Newell, A., Simon, H. (1972) *Human Problem Solving.* N.J: Prentice Hall.

VanLehn, K. (1998) *Problem Solving and Cognitive Skill Acquisition*. En M. I. Posner (ed.) Foundations of Cognitive Science (pp. 527-579). Cambridge (Mass.): MIT Press.

Zhang, J. (1997) The Nature of External Representations in Problem Solving, *Cognitive Science*, 21(2).

LOS TRES MOSQUETEROS: ROLLE, LAGRANGE Y CAUCHY
(UNO PARA TODOS Y TODOS PARA UNO)

Norberto Rossi, Gloria Suhit
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Bahía Blanca. Argentina
gsuhit@criba.edu.ar; nrossi@frbb.utn.edu.ar
Campo de investigación: Gráficas y funciones; Nivel educativo: Superior.

RESUMEN
Exponemos aquí una presentación gráfica unificada de los Teoremas del Valor Medio (Rolle, Lagrange y Cauchy) destinada a los alumnos de Cálculo o Análisis Matemático del primer año de Universidad. La intención es ofrecer al estudiante la posibilidad de *ver* (en el más literal sentido de la palabra) a los tres teoremas como una unidad conceptual, siguiendo un camino que permita *construir* las ideas en lugar de la vía de la *verificación* (típica de las demostraciones de Lagrange y Cauchy). Para ello, luego de la presentación clásica del Teorema de Rolle, introducimos como recurso didáctico la idea de la deformación del gráfico característico de su interpretación geométrica para poder *ver*, *analizar* y *deducir* relaciones entre los incrementos y las derivadas de tres funciones *f*, *g* y *h* definidas en un intervalo $[a,b]$ (todas continuas y derivables, con $h = f - g$).

INTRODUCCIÓN
En los últimos años se ha postulado con insistencia la utilidad del uso de herramientas gráficas, en matemática educativa, que hagan posible “establecer un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico” (Cantoral et al., 2003) como un medio idóneo para promover el aprendizaje de nociones y conceptos matemáticos.

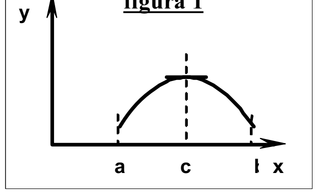
En un todo de acuerdo con esta posición, exponemos en este trabajo una presentación gráfica unificada de los teoremas del valor medio (Rolle, Lagrange y Cauchy) destinada a los alumnos de Cálculo o Análisis Matemático del primer año de Universidad.

Para comenzar reseñamos la forma clásica de presentación de los tres teoremas (y sus respectivas interpretaciones geométricas) en los textos universitarios:

ROLLE: Sea *f* una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$; entonces existe al menos un *c* perteneciente al intervalo (a,b) tal que:

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

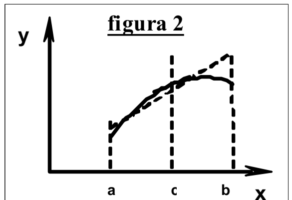
figura 1



Interpretación geométrica (infaltable): Existe un punto C = (*c*,*f*(*c*)) (figura 1) donde la recta tangente al gráfico de *f*(*x*) es paralela al eje *x* (horizontal si el eje *x* es horizontal).

LAGRANGE (Teorema del Valor Medio): Sea *f* una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b); entonces existe al menos un *c* perteneciente al intervalo (a,b) tal que:

figura 2



$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Interpretación geométrica (infaltable):

Existe un punto $C=\left(c,f(c)\right)$ (figura 2) donde la recta tangente al gráfico de $f(x)$ es paralela a la recta secante que pasa por $A=\left(a,f(a)\right)$ y $B=\left(b,f(b)\right)$.

CAUCHY (Teorema Generalizado del Valor Medio): Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivables en el intervalo abierto (a,b) y tal que $g'(x)\neq 0$ para todo x en (a,b); entonces existe al menos un c perteneciente al intervalo (a,b) tal que:

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Interpretación geométrica:

a) En algunos textos no existe.

b) Si existe: en al menos un c en (a,b) el cociente de las pendientes de las rectas tangentes a f y g es igual al cociente de las pendientes de las secantes a los gráficos de f (por $\left(a,f(a)\right)$ y $\left(b,f(b)\right)$) y de g (por $\left(a,g(a)\right)$ y $\left(b,g(b)\right)$).

Observación (siempre presente): Si $g(x)=x$ el Teorema Generalizado del Valor Medio de Cauchy se reduce al Teorema de Lagrange.

Esta observación establece el nexo entre los teoremas de Cauchy y Lagrange y justifica el nombre de Teorema Generalizado del Valor Medio al exponer a Lagrange como un caso particular de Cauchy.

En textos recientes (Larson y Hostetler, 1989; Stewart, 1998) luego de los teoremas de Rolle y Lagrange se presenta la regla de L´Hôpital (sin su demostración) para el cálculo de límites indeterminados. El Teorema de Cauchy (con su demostración) y la demostración, a partir de Cauchy, de la regla de L´Hôpital se encuentran en un apéndice separado. Creemos que esto se debe a que para el curso de Cálculo las formas *operativas* del teorema del valor medio son Rolle y Lagrange y la regla de L´Hôpital una de sus más consagradas *consecuencias operativas*. El Teorema de Cauchy se ve relegado al papel de *trampolín* necesario para la demostración de la regla de L´Hôpital, induciendo así que todo intento de interpretación geométrica del mismo se haga desde el punto de vista de la regla de L´Hôpital (pendientes de secantes y tangentes) pasando por alto cualquier esfuerzo por unificar conceptualmente a los tres teoremas del valor medio. Es muy probable que la decisión de darle esta forma al discurso escolar se deba a la necesidad de compatibilizar los objetivos en la formación de los estudiantes con los tiempos disponibles para alcanzar esos objetivos.

Luego de esta presentación clásica observamos que los estudiantes:

a) Consideran al Teorema de Cauchy como un *accesorio* de la regla de L´Hôpital.

b) Ven como la clave central en su demostración a la *invención* de la función $h(x)=\left(g(b)-g(a)\right).\left(f(x)-f(a)\right)-\left(f(b)-f(a)\right).\left(g(x)-g(a)\right)$ que verifica Rolle.

c) No encontrarían vínculos evidentes entre los tres teoremas si no fuera por la observación: Si $g(x)=x$ el teorema generalizado del valor medio de Cauchy se reduce al teorema de Lagrange.

Sobre la base de estas observaciones nos preguntamos:

¿Por qué no dar una interpretación geométrica que permita ver al teorema de Cauchy en un gráfico que complete una secuencia natural con los gráficos de los teoremas de Rolle y Lagrange?, ¿no será posible?, ¿es muy difícil?, ¿no la entenderían los estudiantes?, ¿demandaría demasiado tiempo?, ¿es innecesaria o inútil?.

A continuación nuestra propuesta.

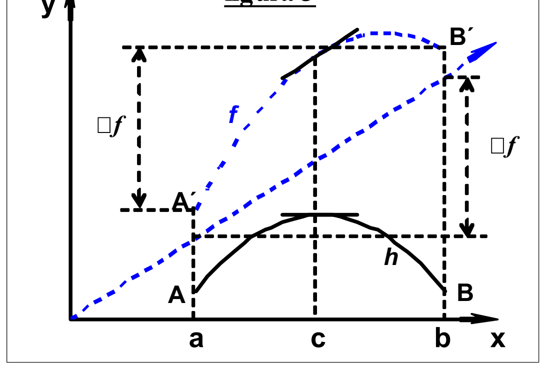
LA PROPUESTA

El Teorema de Rolle: No introducimos ningún cambio. Conservamos la demostración y la interpretación geométrica clásicas.

El Teorema de Lagrange: ¿Qué le pasaría al gráfico de una función h que verifica las hipótesis del Teorema de Rolle si sufriera una deformación como la de la figura 3?

Con referencia al sistema cartesiano original el eje x se desplaza a la posición $y = \mathrm{m}.x$ y el arco AB (gráfico de la función h) se desplaza a la posición A´B´ que corresponde a una función $f(x) = h(x) + \mathrm{m}.x$. Esta función tiene derivada $f\,'(x) = h\,'(x) + \mathrm{m}$, es decir para cada x en (a,b) la pendiente de la recta tangente en $(x, f(x))$ es igual a la pendiente en $(x, h(x))$ aumentada en m unidades. Como h verifica Rolle existe al menos un c en (a,b) tal que $h\,'(c) = 0$ y por lo tanto $f\,'(c) = \mathrm{m}$; o sea, existe en A´B´ al menos un punto $(c, f(c))$ donde la recta tangente tiene pendiente m. Además es $\Delta f = f(b) - f(a) = h(b) + \mathrm{m}.b - h(a) - \mathrm{m}.a = h(b) - h(a) + \mathrm{m}.(b-a) = 0 + \mathrm{m}.(b-a)$ entonces $\mathrm{m} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$; en términos geométricos: la pendiente de la recta secante que pasa por A´ y B´ es igual a la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$, o sea:

figura 3



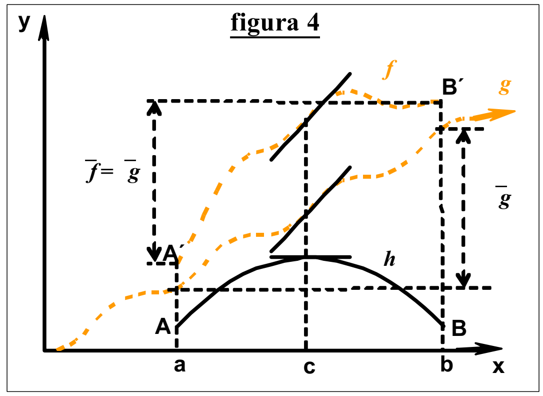
$$\boxed{f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}$$

El Teorema de Cauchy: ¿Qué le pasaría al gráfico de una función h que verifica las hipótesis del Teorema de Rolle si sufriera una deformación como la de la figura 4?

Con referencia al sistema cartesiano original el eje x se desplaza a una posición $y = g(x)$ (con g continua, derivable y $g'(x) \neq 0$) y el arco AB (gráfico de la función h) se desplaza a la posición A´B´ que corresponde a una función $f(x) = h(x) + g(x)$.

Como h verifica Rolle existe al menos un c en (a,b) tal que $h\,'(c) = 0$ y por lo tanto $f'(c) = h'(c) + g'(c) = g'(c)$, es decir que existe en A´B´ al menos

figura 4



un punto $(c, f(c))$ donde la recta tangente es paralela a la recta tangente al gráfico de $g(x)$ en $(c, g(c))$.

Por otra parte es:
$f(b)-f(a)=h(b)+g(b)-h(a)-g(a)=h(b)-h(a)+g(b)-g(a)=0+g(b)-g(a)=g(b)-g(a)$
es decir *f* y *g* tienen el mismo incremento en $[a,b]$.

En otras palabras: Si dos funciones *f* y *g* son continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) y $f(b)-f(a)=g(b)-g(a)$ su diferencia $h(x)=f(x)-g(x)$ no solo es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) si no que además $h(b)-h(a)=0$ y, por el Teorema de Rolle, existe al menos un *c* en (a,b) tal que $h'(c)=0$. Como $h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$ se concluye que $\boxed{f'(c)=g'(c)}$ para al menos un *c* en (a,b) y los gráficos de *f* y *g* tienen rectas tangentes, en $(c, f(c))$ y $(c, g(c))$ respectivamente, paralelas entre sí.
Este resultado es sólo un caso particular del teorema generalizado del valor medio (cuando $\Delta f = f(b)-f(a)=g(b)-g(a)=\Delta g$) y no se puede aplicar directamente a los diversos pares de funciones *f* y *g* que verifican las hipótesis del teorema.
Sin embargo, observando que:

1. Dada una función *g* continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) y tal que $g'(x)\neq 0$ para todo *x* en (a,b) la función $g_1(x)=\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right).g(x)$ verifica las mismas condiciones que *g*, con el agregado que $g_1(b)-g_1(a)=\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right).g(b)-\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right).g(a)=\left(\dfrac{g(b)-g(a)}{g(b)-g(a)}\right)=1$; es decir, el factor $\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right)$ hace unitario el incremento de $g_1(x)$ en $[a,b]$.

2. Multiplicando $g_1(x)$ por el factor $(f(b)-f(a))$ se logra que la función $g^*(x)=(f(b)-f(a)).g_1(x)=\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right).g(x)$ tenga en $[a,b]$ el mismo incremento que $f(x)$, conservando las características originales de $g(x)$ en cuanto a continuidad, derivabilidad y, si $f(b)\neq f(a)$, también $g^{*\prime}(x)\neq 0$ para todo *x* en (a,b).

Concluimos que la función $h(x)=f(x)-g^*(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[a,b]$, lo que implica que $h'(c)=0$ para al menos un *c* en (a,b) y, por lo tanto: $f'(c)=g^{*\prime}(c)=\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right).g'(c)$, o sea:

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Esto corresponde a la situación mostrada en la figura 5 donde el gráfico de la función *h* que verifica Rolle sufre una deformación (definida por $g^*(x)$) en el eje *x*, que lleva el arco AB a la posición A´B´ correspondiente a la función $f(x) = h(x) + g^*(x)$.

En este caso el factor $\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)$ produce un escalamiento de la función g para lograr que $\Delta f = f(b) - f(a) = \Delta g^* = g^*(b) - g^*(a)$ y que, en consecuencia, siempre podamos tener una $h = f - g^*$ que verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[a,b]$, lo que asegura, como se ve en la figura 5, que exista al menos un c en (a,b) donde $f'(c) = g^{*\prime}(c)$ (dicho en términos geométricos: asegura la existencia de un punto $(c, f(c))$ en el gráfico de f donde la recta tangente es paralela a la recta tangente en $(c, g^*(c))$ al gráfico de $g^*(x)$).

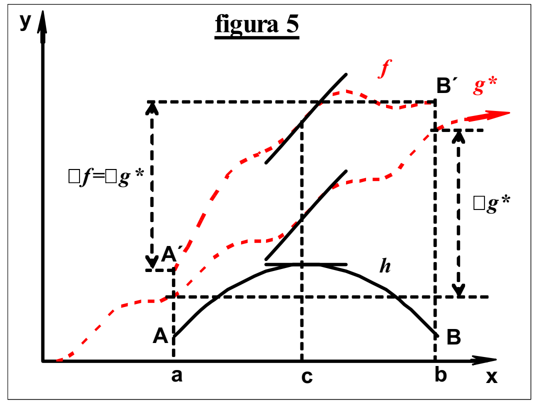


figura 5

UN POCO DE ANÁLISIS

Este enfoque gráfico permite *ver* a los teoremas de Lagrange y Cauchy operando de manera análoga sobre el gráfico de una función que verifica Rolle, poniendo de manifiesto la idea central en la demostración de ambos teoremas: la vinculación de las hipótesis de cada uno con una situación donde es aplicable Rolle.

Si la razón para que los textos interpreten gráficamente a los teoremas de Rolle y Lagrange pero no al de Cauchy es que en los primeros se hace referencia a una única función y en el último a dos funciones, debemos señalar que en la demostración del Teorema de Lagrange (a partir de una función $h(x) = f(x) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right).x$) ya aparece una segunda función (lineal y no constante) con la particularidad de tener en $[a,b]$ un incremento igual al de f (y, por lo tanto, la función h presenta un incremento nulo en $[a,b]$), aunque el enunciado solo hace referencia a la f porque las hipótesis y la tesis se refieren exclusivamente a ella. En el caso de Cauchy la segunda función (g*) es más general, pero igual que en Lagrange nos permite obtener una función h que verifica Rolle en $[a,b]$.

Por lo tanto las analogías se tornan más evidentes cuando se analizan los caminos de las respectivas demostraciones. Este tipo de relaciones son las que pretendemos mostrar a los estudiantes, no siguiendo las demostraciones clásicas que llevan por la vía de la *verificación* si no a través de un camino que permita *construir* las ideas a la par de *verlas* en un gráfico.

Un ejemplo de los frutos de esta construcción es la percepción, a partir de las figuras 3 y 5, que el Teorema de Lagrange es un caso particular del Teorema de Cauchy cuando g sea *cualquier función lineal no constante* y no solamente si $g(x) = x$.

Efectivamente, si $g(x) = \mathrm{m}.x + \mathrm{n}$ es $g(b) - g(a) = \mathrm{m}.b + \mathrm{n} - \mathrm{m}.a - \mathrm{n} = \mathrm{m}.(b-a)$ y además $g'(x) = m$ de donde $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ se reduce a $\dfrac{f'(c)}{m} = \dfrac{f(b)-f(a)}{m(b-a)}$ o sea:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

CONSIDERACIONES FINALES

La intención de esta propuesta es ofrecer al estudiante de Cálculo (o Análisis Matemático) la posibilidad de *ver* (en el más literal sentido de la palabra) a los Teoremas del Valor Medio (Rolle, Lagrange y Cauchy) como una unidad conceptual. Para ello, luego de la presentación clásica del Teorema de Rolle, introducimos como recurso didáctico la idea de la deformación del gráfico característico de su interpretación geométrica. La manera de presentar esta deformación puede variar de acuerdo a los gustos de los estudiantes y docentes involucrados; por ejemplo, se podría decir:

a) Que el programa que grafica la función en la computadora fue afectado por un *virus* que deformó el gráfico.
b) Que al gráfico le dio una *chiripioica* (si don Roberto Gómez Bolaños no se opone).

La segunda alternativa nos parece más apropiada (y, sobretodo, más *descriptiva*) para el ambiente educativo latinoamericano, cada uno podrá idear la suya, esto no es lo esencial.

Lo esencial es poder ver y analizar que dada una función $f = h + g$, si $\Delta h = 0$ en $[a,b]$ entonces $\Delta f = \Delta g$ en $[a,b]$; o, a la inversa, que si $\Delta f = \Delta g$ en $[a,b]$ entonces $h = f - g$ verifica que $\Delta h = 0$ en $[a,b]$. Si además *f* y *g* son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) la función *h* verifica las hipótesis de Rolle, lo que implica que $h'(c) = 0 = f'(c) - g'(c)$ o sea: $f'(c) = g'(c)$ para al menos un *c* en (a,b). Hablando geométricamente: El gráfico de *f* tiene recta tangente en el punto $(c, f(c))$ paralela a la recta tangente en $(c, g(c))$ al gráfico de *g*.

En el caso más general, cuando $\Delta f \neq \Delta g$ en $[a,b]$, se puede *escalar* el incremento de una de ellas (la que tenga derivada no nula en (a,b)) poniendo $g^*(x) = \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right).g(x)$ para volver a la situación anterior.

Al momento de la redacción de este trabajo la propuesta no ha sido suficientemente ensayada en el aula como para extraer conclusiones o presentar resultados concretos. A pesar de ello confiamos en los beneficios derivados del cambio del camino de la verificación (en Lagrange y Cauchy) por el de la construcción de las relaciones y vínculos entre los tres teoremas siguiendo la secuencia: ver, analizar y deducir.

Esperamos haber dado una respuesta (seguramente ni la única ni la mejor) a los interrogantes planteados en la introducción. Una vez completada la (irremplazable) experiencia de aula reportaremos resultados y eventuales cambios en la propuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Anton, H. (1984) *Cálculo y Geometría Analítica*. México: Limusa.

Cantoral, R.; Farfán, R., Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2003) Tratamiento matemático y calculadoras gráficas. pp. 174 *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Editorial Trillas.

Larson, R. y Hostetler, R.(1989) *Cálculo y Geometría Analítica*. España: McGraw-Hill / Interamericana.

Stewart, J. (1998) *Cálculo*. México: International Thomson Editores.

ECUACIÓN DE LA RECTA: UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA SU ENSEÑANZA

Rey Genicio, María; Forcinito, Silvia; Lazarte, Graciela; Hernández, Clarisa.
Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Jujuy- Argentina
tresm@imagine.com.ar

Campo de investigación**:** Gráficas y funciones-Resolución de problemas; Nivel Educativo: Medio

Resumen

Esta propuesta surge de un Proyecto de Investigación que se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo, que adopta como metodología para la investigación la «Ingeniería Didáctica» y que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. En este marco, se elaboró una secuencia didáctica que comienza con la obtención de la ecuación que define a una función de proporcionalidad directa, para luego abordar las ecuaciones de rectas paralelas, perpendiculares, horizontales y verticales. Se pretende por último, que el alumno sea capaz de determinar las distintas formas que adopta la ecuación de una recta, dependiendo de los datos que se conocen sobre ella. A lo largo de la propuesta, se presente una variada ejercitación, trabajando tanto en el marco numérico como en el algebraico y el geométrico

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco del Proyecto de Investigación " Innovaciones Didácticas en la Enseñanza de la Matemática" se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema**:** Ecuación de la recta. Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica de la matemática. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.

De la fuente psicológica se toma las teorías cognitivas que entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado. Entonces la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

Se toma también el concepto de Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo, aunque en ellos se hace necesaria una intervención del docente muy cuidadosa, optimizando las actividades, facilitando los intercambios cognitivos, supervisando, recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos.

Por otra parte, de la fuente didáctica general se toma el concepto de estrategia didáctica de Bixio: conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica, o sea, de lograr un aprendizaje en el alumno. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben

apoyarse en los conocimientos previos de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.
En el campo de la Didáctica de la Matemática, la propuesta se apoya en la «ingeniería didáctica» (Douady – 1996): elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje. En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.
La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de «la teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau: proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Así, la llamada «Situación fundamental», dada por las situaciones adidácticas, enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los marcos geométrico y algebraico le otorgan significatividad a la propuesta.
En la resolución de los problemas, se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas propuestas y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.
Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico y algebraico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Fase: Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Fase: Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Fase: Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Fase: Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Fase: Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Fase: Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica

La secuencia se inicia a partir del conocimiento previo del alumno sobre la expresión algebraica y la representación gráfica de la función de proporcionalidad directa. Continúa con la siguiente actividad, que tiene por objetivo que el alumno construya la fórmula de una función de proporcionalidad directa

Actividad 1

1.– Siendo P = (2 ; 3) un punto de la gráfica de una función de proporcionalidad directa, creciente, con dominio en los Reales y denominando O al origen del sistema de coordenadas cartesianas**:**

a) Escribe las coordenadas de otro punto A perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; A) sea mayor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para A?.Hallar la distancia (O; A) y la distancia (O, P)

b) Escribe las coordenadas de otro punto B perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; B) sea menor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para B?. Hallar la distancia (O, B)

c) Escribe las coordenadas de otro punto C $\neq$ P que pertenezca a la gráfica de la función y tal que la distancia (O; C) sea igual a la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para C?. Hallar la distancia (O, C)

d) Encuentra las ordenadas de otros puntos pertenecientes a la gráfica cuando la abscisa toma los valores**:** 20 ; –200 ; 105 ; 2/3 y 5/7 ?.

e) Escribe la fórmula que define a esta función. Usa la fórmula para verificar las respuestas obtenidas en el inciso anterior.

f) i) ¿Cuál es la amplitud del ángulo formado por el gráfico de la función dada y el semieje positivo de las abscisas? ii) ¿Qué conocimiento usaste para encontrarlo?. iii)¿Obtendrías la misma amplitud del ángulo si utilizas otro punto de la recta dada?. Justifica tus respuestas

2.– Si conoces un punto P (x_0 , y_0) que pertenece a la gráfica de una función de proporcionalidad directa, cómo harías para calcular el ángulo que forma la gráfica con el eje x positivo.

3.– Determina el ángulo que forma la recta de ecuación y =5x / 8 con el semieje x positivo.

4.– Encuentra en cada caso la ecuación de la recta que pasa por el origen del sistema y el punto**:**

a) A (–5 ; 3) b) B(−1/2; −5) c) C(3/2; −12/5) d) P(x_0 , y_0)

5.– Grafica en coordenadas cartesianas (usa la misma escala en ambos ejes) y encuentra en cada caso la ecuación la ecuación de la recta que pasa por el origen del sistema y forma el ángulo α con el semieje positivo de las abscisas. Luego determina similitudes y diferencias entre las dos gráficas. a) $\alpha = 45^{o}$ b) $\alpha = 135^{o}$

6.– Una recta, que pertenece al I y III cuadrante, pasa por el origen del sistema de coordenadas y tiene una inclinación más pronunciada que la de la recta definida por la función identidad.

a) Propone la ecuación de dicha recta. b) ¿Cuántas soluciones se pueden obtener?

c) ¿Qué condición debe cumplir la pendiente para que satisfaga la condición dada?

d) ¿Entre qué valores se encuentra la amplitud del ángulo que forma con el semieje positivo X ?

7.– Una recta, que pertenece al I y III cuadrante, pasa por el origen del sistema de coordenadas y tiene una inclinación menos pronunciada que la recta definida por la función identidad.

a) Propone la ecuación de dicha recta. b) ¿Cuántas soluciones se pueden obtener?

c) ¿Qué condición debe cumplir la pendiente para que satisfaga la condición dada?

d) ¿Entre qué valores se encuentra la amplitud del ángulo que forma con el semieje positivo de las x ?

8.– Realiza un análisis análogo a los dos anteriores para la recta y = – x

9.– Sea α el ángulo que forma cada una de las rectas, cuyas ecuaciones se indican, con el semieje positivo de las abscisas, completa el cuadro con V (Verdadero) cuando corresponda

Ecuación de r	$0º \le \alpha < 45º$	$45º \le \alpha < 90º$	$90º \le \alpha < 135º$	$135º \le \alpha < 180º$
$y = -5x/7$				
$y = 1{,}3\ x$				
$y = -9x/5$				
$y = -0{,}05\ x$				
$y = 12x/13$				
$y = -\sqrt{5}\ x$				

La mayoría de los ejercicios de esta primera actividad, se pueden resolver utilizando distintos conocimientos previos. Algunos alumnos utilizarán la regla de tres simple, otros la semejanza de triángulos, otros la constante de proporcionalidad y otros conceptos de trigonometría. La situación planteada en los primeros ítem es propicia para que el alumno calcule la distancia de un punto al origen

La secuencia continúa con la obtención de la condición para que dos rectas sean paralelas entre sí y luego perpendiculares entre sí. Al mismo tiempo se determina la fórmula de la ecuación de una recta conociendo, ya sea la pendiente y un punto o bien dos puntos de la misma.

Actividad 2

1.– Dadas dos rectas en un sistema de coordenadas cartesianas, una que pasa por el origen y otra paralela a ésta ¿Cómo son entre si los ángulos que forman cada una de ellas con el eje de las abscisas? Justificar.

2.– Dada la ecuación de la recta $y = 2x/5$

a) Propone la ecuación de otras rectas r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 paralelas a la dada que corten al eje de las ordenadas en**:** 3 ; -1 ; $\sqrt{2}$; -150 y 5/ 8 respectivamente.

b) Enuncia la condición que deben cumplir las pendientes de dos rectas para que éstas sean paralelas.

c) Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) $Q(\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/5 \in r_3$ ii) $R(-5/8, 7/8) \in r_5$ iii) $P(5; -148) \notin r_4$

3.– Dada una recta de ecuación**:** $y = 2x + b$, encuentra el valor de la ordenada al origen, b, sabiendo que el punto P pertenece a ella. Escribe en cada caso la ecuación de la recta. a) P (0 , 5) b) P (1/2, 4) c) $P(x_0, y_0)$

4.– Escribe la ecuación de la recta de pendiente " a " y que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$

5.– Sabiendo que los puntos A (3, 5) y B (6, 7) pertenecen a la recta r

a) Encuentra ecuación de la recta que pase por el origen y sea paralela a la recta r.

b) Determina la pendiente de r c) Escribe la ecuación de r d) Encuentra la distancia entre A y B

6.– Ídem al ejercicio anterior si $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, siendo $x_0 \neq x_1$

7.– Encuentra en cada caso la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados

a) A (10, 7) y B (-5, 1) b) A ($-1/2$, 0) y B ($-3/2$, $-5/4$)

8.– Dados los puntos A ($-3/2$, 5) y B (4, 5)

a) Halla la ecuación de la recta "r" que pasa por los puntos indicados. b) Representa gráficamente r.

c) ¿Qué característica tiene la dirección de esta recta?. ¿Cómo se posiciona respecto al eje de las abscisas? ¿Y respecto al eje de las ordenadas? ¿ Qué característica tiene la ecuación de r?

9.– Propone en cada caso la ecuación de una recta, r, paralela al eje de las abscisas, sabiendo que**:**

a) Corta al eje de las ordenadas en 4 b) P (−2; 7) pertenece a ella c) $(-3/2, b) \in r$

10.– Traza una recta perpendicular al eje "x" y que pase por el punto P (3, 0).

a) Escribe las coordenadas de 4 puntos que pertenezcan a dicha recta. ¿ Qué característica tiene la abscisa de dichos puntos?. b) Propone una ecuación para dicha recta.

11.– Escribe la ecuación de una recta vertical que pase por el punto P (b, 2)

12.– En un sistema de ejes coordenados cartesianos ubicar el punto P (3, 5)

a) Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto P y por el origen. Represéntala gráficamente.

b) Efectúa a P una rotación, con centro en el origen, de 90º en sentido antihorario, llama P_1 al punto así obtenido. Escribe las coordenadas de P_1.

c) Halla la ecuación de la recta r_1 que pasa por el punto P_1 y por el origen. Represéntala gráficamente.

d) i) ¿Cómo son entre sí las rectas r y r_1 ? .

ii) Encuentra una relación entre las pendientes de r y de r_1. ¿Se puede generalizar la relación encontrada entre las pendientes, a dos rectas cualesquiera perpendiculares entre sí y que no sean verticales?.

13.– Si la recta r tiene por ecuación $y = x/2 + 3$

a) Escribe la ecuación de otra recta cualquiera, que sea perpendicular a r ¿ Cuántas puedes escribir?

b) Escribe la ecuación de otra recta que sea perpendicular a r y que tenga ordenada al origen −7/5

c) Escribe la ecuación de otra recta que sea perpendicular a r y que pase por el punto P (– 3 , 16)

d) Escribe la ecuación de otra recta que sea perpendicular a r y que corte al eje de abscisas en $x = 8$

14.– Dada la recta r de pendiente "a", escribe la ecuación de la recta r_1 que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P(x_0, y_0)$

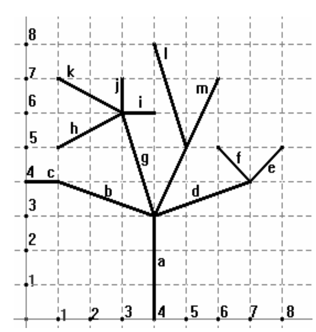
Para terminar la secuencia didáctica se plantea una actividad cuyo objetivo general es que el alumno reinvierta los distintos conceptos vistos en las actividades anteriores. Finalmente se incluyen una serie de juegos, cuya finalidad es practicar y afianzar los conceptos vistos. De la variedad de juegos propuestos solo incluiremos los siguientes.

El árbol Lineal

Las ramas del árbol son segmentos de recta.

1.– Escribe la ecuación de la recta a la que pertenece cada rama.

2.– De las ecuaciones halladas, indica las que corresponden a rectas paralelas y a rectas perpendiculares.



Ecuaciones e identidad

El número del documento de identidad de Susana consta de 8 cifras. Averígualo a partir de las siguientes consignas**:**

***Consignas*:**
Las cifras están tomadas de izquierda a derecha
1ª cifra**:** Ordenada al origen de una recta de pendiente 4 y que pasa por el punto P(1,7).
2ª cifra**:** Abscisa donde la recta de ecuación $3y + 12 = 6x$ corta al eje x.
3ª cifra**:** Ordenada del punto de intersección de las rectas de ecuaciones $y = x / 2 + 6$ e $y = 5x - 3$.
4ª cifra**:** Pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(1/2, 3)$ y $P_2(-1/2, -2)$.
5ª cifra**:** Pendiente de una recta que es perpendicular a la recta de ecuación $y = -x/4 + 3$
6ª cifra**:** Ordenada al origen de la recta que pasa por el punto $P(-1,1)$ y es paralela a la recta de ecuación $y = 5x - 8$.
7ª cifra**:** Abscisa al origen de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, -7)$ y $P_2(2, \sqrt{3})$.
8ª cifra**:** Ordenada al origen de la recta que forma un ángulo de 30º con el eje x positivo y que pasa por el punto $P(\sqrt{3}, 9)$.

Conclusión

Las actividades diseñadas responden a las "condiciones del buen problema" ya que, los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos, todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta (al menos para el problema inicial), admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico, numérico, algebraico y gráfico).
En toda la secuencia se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para resolverlos, al mismo tiempo las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad

Bibliografía

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L.; (2002). *Matemática/Polimodal – Funciones 2*. Bs. As. Longseller.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México. G.E.I.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Bs. As. Argentina. Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba. FAMAF.

Brousseau, G. (1994). *Los roles del maestro en Didáctica de la Matemática* de Parra, C, Saiz, I, otros. Compilación. Paidos . Bs. As..

Buschiazzo, N., Fongi, E. *et al* (2000). *Matemática II*. Buenos Aires. Argentina: Santillana.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J.; (1998). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. España.: Horsori.

Davini, M. (1997). *La formación docente en cuestión*: *política y pedagogía*. Buenos Aires. Argentina: Piados.

Etchegoyen, S.; Fagale, E.; Rodríguez, S.; Ávila, M. y Alonso, M.; (1999). *Matemática 1 – Polimodal*. Bs. As. Kapelusz

Kaczor, P.; Schaposchnik, R.; Franco, E.; Cicala, R. y Díaz, B.; (1999). *Matemática I– Polimodal* . Buenos Aires. Argentina: Santillana.

Latorre, M., Spivak, L. *et al* (1998). *Matemática 9*. Buenos Aires. Argentina: Santillana.

Macnab, D. y Cummine, J. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. Madrid. Visor.

Semino, S., Englebert, S. y Pedemonti, S. (1999). *Matemática 9*. Buenos Aires. Argentina: A-Z Editora.

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid. Síntesis.

UNA EXPERIENCIA CON MODELACIÓN MATEMÁTICA EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS.

Etcheverry, Nilda; Evangelista, Norma; Reid, Marisa; Torroba, Estela
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina
E-Mail: estelat@exactas.unlpam.edu.ar

Campo de Investigación: Modelación Matemática; Nivele Educativo: Medio y Superior.

Resumen

En el presente trabajo abordamos la Modelación Matemática como una alternativa pedagógica en distintos niveles educativos.

La experiencia consiste en presentar el mismo problema a estudiantes de primer año de Nivel Polimodal (Medio superior) y a alumnos de la carrera Profesorado en Matemática que habían cursado la asignatura Análisis I.

El trabajo describe una actividad de Modelación Matemática en la que se propuso, a través de una situación problemática, analizar los costos de producción e ingresos según el nivel de complejidad de fabricación de joyas, cuyos modelos obedecen a las etapas sucesivas de la curva Antikoch.

Concluimos que el uso de modelación es un proceso para desarrollar capacidades en general y actitudes en los estudiantes, tornándolos creativos y habilidosos en la resolución de problemas.

Introducción

En el presente trabajo reportaremos acerca de los procesos seguidos por estudiantes de distintos niveles para resolver un problema propuesto en el transcurso de una experiencia didáctica diseñada para mostrar que el conocimiento adquirido en un curso de enseñanza universitaria puede y debe ser transferido a la enseñanza elemental de Matemática.

Se propuso el mismo problema a estudiantes de primer año de Nivel Polimodal de una escuela de la ciudad de Santa Rosa (La Pampa) y a estudiantes universitarios. Estos últimos, alumnos de la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. que habían cursado la asignatura Análisis I y tenían conocimientos de límites de sucesiones y series.

La actividad propuesta consiste en calcular el perímetro y el área de etapas sucesivas de la curva Antikoch, un fractal generado por simple recursión de un triángulo equilátero. A partir del cálculo de costos de producción, precio de venta y beneficio analizaron el comportamiento a largo plazo de estas cantidades para optimizar la ganancia.

Esta investigación es enmarcada en una pedagogía basada en la Modelación Matemática, ya que según Bassanezi (1994): "Trabajando con Modelación Matemática no solamente se apunta a afianzar el conocimiento sino también a desarrollar una forma particular de pensar y actuar: producir conocimiento, poner junto abstracciones y formalizaciones interconectándolo a procesos empíricos y fenómenos considerados como situaciones problemáticas."

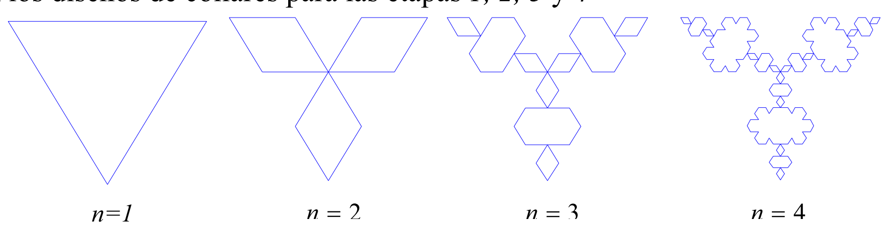
La Modelación como estrategia pedagógica ha sido empleada en distintos niveles educativos. Existen experiencias llevadas a cabo en los niveles inicial y medio (Blomhøj, 2004; Biembengut & Hein, 1999, 2000a), universitario (Etcheverry et al, 2003a, 2003b; Borba & Bovo, 2002; Araújo, 2002; Barbosa, 2001; Borba, Menegheti & Hermini, 1997; Gazzeta, 1989) y hasta en el nivel de postgrado (Bassanezi, 1994). Autores como Barbosa (2001), Bassanezzi (2002) o Biembengut (2004) coinciden en señalar la importancia de incluir la modelización en los cursos de formación de profesores y en los cursos de perfeccionamiento de los mismos.

La responsable del desarrollo de la propuesta didáctica fue una docente-investigadora que está a cargo de la cátedra de Análisis Matemático I. Otra integrante del equipo realizó filmaciones y grabaciones de audio durante el desarrollo de los encuentros con los alumnos y confeccionó un cuaderno de registro de observaciones a fin de describir y analizar el desarrollo de las actividades, los procesos de pensamiento y las estrategias de los estudiantes.
En la siguiente sección describiremos, sintéticamente, el grupo de estudiantes que participó del estudio y la propuesta didáctica que generó el escenario de investigación. Posteriormente reportaremos algunos episodios y, finalmente, presentaremos algunas conclusiones.

El grupo de trabajo
Para realizar esta experiencia se trabajó con alumnos de Primer año de Nivel Polimodal de un Colegio de la Ciudad de Santa Rosa en su habitual clase de Matemática, a cargo de una de las docentes integrantes del grupo de investigación y con estudiantes de Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa que habían cursado la asignatura Análisis I. La experiencia se realizó en mayo de 2004.

Propuesta didáctica
A ambos grupos se les planteó el siguiente problema:

Una joyería tiene para la venta distintos tipos de collares diseñados por un artesano de la siguiente forma: a partir de un triángulo equilátero de lado 1 pie, se divide cada lado en tres partes iguales y sobre el segundo tercio de cada lado se quita un triángulo equilátero que apunta hacia adentro. Y continua este proceso para *n* pasos. En las siguientes figuras se muestran los diseños de collares para las etapas *1, 2, 3* y *4*



Para engalanar cada modelo de la joya se colocó sobre el borde de la figura un fino hilo de oro cuyo costo es de 0.05 rupias el pie. Las joyas fueron talladas sobre una lámina de oro cuyo costo es de 0.1 rupias el pie cuadrado. El precio de venta de cada collar es inversamente proporcional al área de la misma, esto es, cuanto más pasos demande la construcción más cara será la joya. Mientras que el costo de fabricación del mismo depende directamente del costo de los materiales usados. La joyería desea saber cuál es el tipo de collar que le reportará el mayor beneficio. Para ello se les pide analizar los costos de producción e ingresos según el nivel de complejidad de fabricación de la joya, esto es, cuando las etapas de fabricación crecen sin límites.

Actividades desarrolladas por estudiantes de Nivel Polimodal.
La actividad se realizó en el horario habitual de clases de Matemática durante dos módulos (160 minutos), en un curso de 24 alumnos cuyas edades son 14 y 15 años. La clase se organizó en grupos de dos alumnos. Junto al enunciado del problema se entregó a cada

grupo ampliaciones de los diseños de los collares para *n=1, 2, 3 y 4*. Tres grupos solicitaron además las correspondientes a *n=5* y *6*.
Cabe destacar que todos trabajaron con calculadoras científicas.
Algunos grupos no pudieron superar el segundo paso, hallando solamente el perímetro y la superficie del triángulo equilátero del paso uno y calculando el costo, el precio de venta y el beneficio para ese tipo de collar.
El grupo formado por Florencia y Lola logrón avanzar en sus formulaciones: Presentamos a continuación las anotaciones que realizaron para calcular el área y el perímetro correspondiente a la etapa 3.
Partiendo de la figura obtenida en el paso 2 (Figura 1-b), cuya área es $0{,}2887\,pies^2$

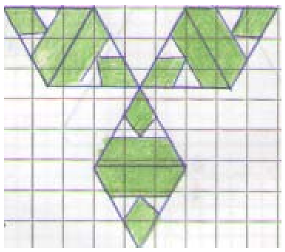


Figura 1-a

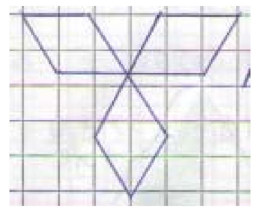


Figura 1-b

y realizando la figura correspondiente al paso 3 (Figura 1-a) determinan que ella está compuesta por 6 triángulos equiláteros iguales (Figura 1-c) .

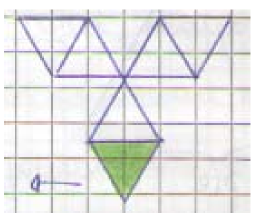


Figura 1-c

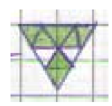


Figura 1-d

Entonc[illegible]uno de esos triángulo será la sexta parte del área de la figura que corresponde al paso 2: $0{,}28867/6 = 0{,}04811$. Dividiendo cada uno de esos triángulos en 9 equiláteros iguales se obtiene la Figura 1-d, y el área de cada uno de estos triángulos será a su vez la novena parte de $0{,}04811$ esto es $0{,}0003655$. Como la figura 1-d contiene 7 de estos triángulos entonces su área será $0{,}0003655 \times 7$. Entonces el área total de la figura que corresponde al paso 3 es $0{,}03741 \times 6 = 0{,}22451$
El grupo formado por Federico y Nicolás presentó una manera muy ingeniosa de plantear el problema. Por este motivo se les solicitó que presentaran un informe de su trabajo usando gráficos, tablas, etc. Como ellos estaban familiarizados con el uso del software DERIVE 5, usaron este recurso para presentar la solución del problema.
En su informe mostraron la siguiente tabla obtenida a partir de la visualización de las distintas figuras y de los cálculos realizados con calculadora:

Paso	Cantidad de lados (QL)	Longitud de cada lado	Cantidad de Triángulos ($Q\sigma$)	Perímetro	Superficie de cada triángulo	Superficie total
1	3	1	1	3	0,4330	0,4330
2	12	1/3	6	4	0,04811252	0,288675

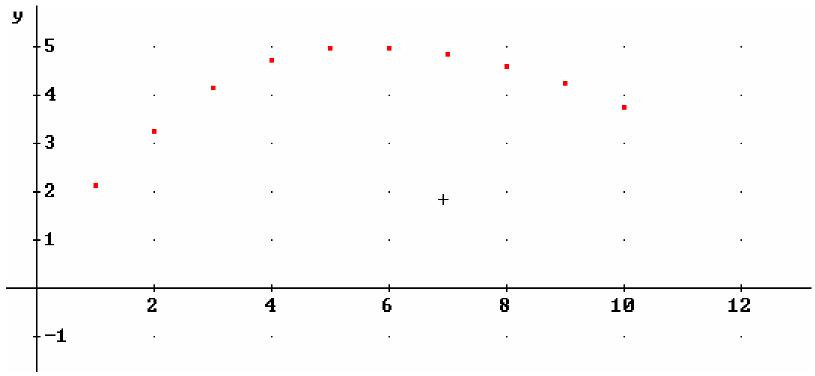


Figura 2

3	48	1/9	42	5,33333	0,00534853	0,224525104
4	192	1/27	330	7,11111	0,000593981	0,1961398
5	768	1/81	2778	9,481481	0,000065997	0,183342369

De la observación de esta tabla generaron los siguientes patrones que les permitieron generalizar:

- *Cada triángulo se va dividiendo en nueve triángulos, donde el área de cada uno es* $\frac{1}{9}$ *de la del paso anterior.*
- *Cada lado se va dividiendo en 4 lados de longitud* $\frac{1}{3}$ *de la longitud del lado del paso anterior.*
- *La cantidad de triángulos (Qσ) de un paso es igual a la cantidad de triángulos del paso anterior por 9, menos la cantidad de lados del paso anterior, porque a cada lado se le resta un triangulito.*

Verificaron sus afirmaciones para las sucesivas etapas respecto a la cantidad de triángulos y la cantidad de lados.

QL1 =3

Qσ1=1

QL2= QL1 $\times 4 = 12$

Qσ2= (Qσ1 $\times 9$) – QL1 = $(1 \times 9) - 3 = 6$

QL3 = QL2 $\times 4 = 12 \times 4 = 48$

Qσ3= (Qσ2 $\times 9$) – QL2 = $(6 \times 9) - 12 = 42$

QL4 = QL3 $\times 4 = 48 \times 4 = 192$

Qσ4= (Qσ3 $\times 9$) – QL3 = $(42 \times 9) - 48 = 330$

QL5 = QL4 $\times 4 = 192 \times 4 = 768$

Qσ5= (Qσ4 $\times 9$) – QL4 = $(330 \times 9) - 192 = 2778$

Para continuar su trabajo, utilizando el software introdujeron las expresiones que les permitieron calcular la cantidad de triángulos y la cantidad de lados definiéndolas por recursión, y comprobaron que en las diferentes etapas los resultados obtenidos coincidían con los obtenidos por ellos usando la calculadora. Plantearon las ecuaciones que les permitieron calcular el precio de venta, el costo de fabricación y el beneficio y realizaron la gráfica (Figura 2) que representa el beneficio en función del número de pasos.

De la observación de la gráfica obtenida y usando el Zoom determinaron que el beneficio mayor corresponde al collar fabricado en el paso 6.

Actividades desarrolladas por estudiantes universitarios.
Se trabajó con un grupo de 10 alumnos que habían cursado la asignatura Análisis I y que solicitaron consultas antes de rendir el examen final de la materia sobre el tema límite de sucesiones y series infinitas. En este encuentro se les propuso la resolución del problema. Del trabajo en duplas, reportaremos la solución obtenida por el grupo formado por Luciana y Fernanda.
En primer lugar calcularon el perímetro de los distintos modelos. Así, determinaron el perímetro del triángulo equilátero de lado un pie, $P_1 = 3$.
La siguiente figura tiene doce lados y cada lado mide $1/3$ entonces $P_2 = 12 \cdot 1/3 = 3 \,.\, 4/3$. De la misma manera $P_3 = 3 \cdot (4/3)^2$. Continuando con este proceso generalizaron que el perímetro para *n* iteraciones es $P_n = 3 \,.\, (4/3)^{n-1}$.
Posteriormente calcularon el área de esos modelos. Para el triángulo equilátero obtuvieron $A_1 = \sqrt{3}/4$.
El área de la siguiente figura resulta igual al área del triángulo original menos el área de tres pequeños triángulos, siendo cada una de ellas la novena parte de A_1, entonces $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3)$ y para el paso tres de la figura anterior se quitan 12 triángulos de área $\left(\frac{1}{9}\right)^2$, por lo tanto el área correspondiente a *n=3* es

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4).$$

Así en forma inductiva afirman que en cada paso se extraen 4 veces tantos nuevos triángulos como se sacaron en el paso anterior y cada uno de estos triángulo tiene un área $\frac{1}{9}$ del área del triángulo anterior.

Generalizando obtuvieron que : $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right)$

Observaron que en la fórmula hallada aparece la suma de n-términos de una progresión geométrica de razón $\frac{4}{9}$, que es igual a $\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$. Entonces $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right)$.

Habiendo hallado las expresiones para calcular el área y el perímetro de las sucesivas figuras, plantearon las ecuaciones que les permitirían calcular el costo de fabricación, el precio de venta y el beneficio.

Con la ayuda del software (Derive 5) construyeron tablas y graficaron las respectivas funciones. Mostramos a continuación la gráfica que representa a cada una de ellas (Figura 3).

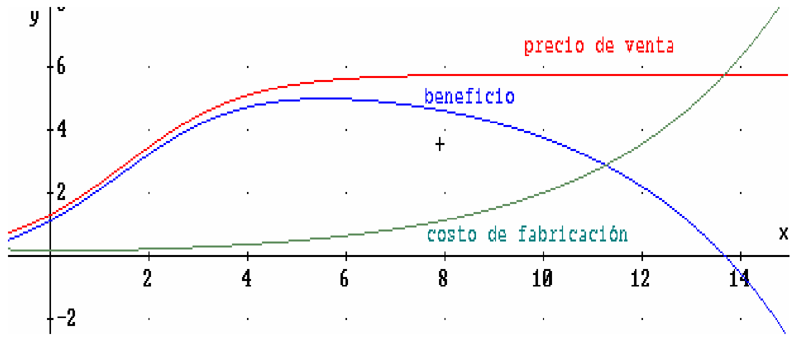


Figura 3

Observando la gráfica de la función Beneficio y haciendo uso del Zoom comprueban que el máximo de esta función está entre 5 y 6. Haciendo uso del Cálculo Diferencial, determinan que el beneficio máximo corresponde a $n = 5{,}572255180$.
Respondiendo al pedido formulado, el beneficio máximo corresponde al modelo de collar obtenido en paso 6. Y en ese caso el beneficio será de aproximadamente 4,977258354 rupias.
También la visualización de la gráfica les permitió conjeturar:

- La función costo es creciente.
- La función precio cuando *n* tiende a infinito se aproxima a un valor constante.

La docente les solicitó que justifiquen la segunda observación. Esto permitió determinar que cuando *n* tiende a infinito el área estará representada por una expresión que contiene una serie geométrica convergente y en ese caso el área será constante e igual a $\frac{\sqrt{3}}{10}$. Luego, el precio de venta cuando *n* tiende a infinito se aproxima al valor $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Conclusiones

Los caminos elegidos por los estudiantes dependieron de su formación. Los estudiantes de Nivel Polimodal aprenden primero a reconocer las formas como un todo y luego a analizar sus propiedades. Posteriormente, pueden ver las relaciones entre las formas y hacer deducciones simples. Ellos realizaron sus análisis mediante el uso de tablas usando funciones discretas para calcular el perímetro y el área y confiaron en los gráficos de estas funciones para predecir el beneficio máximo.
Los estudiantes universitarios determinaron expresiones generales para calcular el área y el perímetro en función del número de etapas y resolvieron el problema de optimización del beneficio usando cálculo diferencial.
La actividad desarrollada en duplas se vio favorecida por el diálogo siendo el estilo de comunicación característico para esta investigación pues, es por medio del diálogo que ocurren las negociaciones y significados en el aula. Esto permitió a los estudiantes no paralizarse ante las dificultades, tomar decisiones para organizar el trabajo y tener un control sobre las equivocaciones y las interpretaciones.

La actividad propuesta permitió que los alumnos percibieran las matemáticas como un conocimiento con valor práctico para la resolución de problemas dentro de un proceso de modelación de la realidad en el que les fue posible utilizar diversas estrategias.
Según lo expresado por Biembengut & Hein (2000) "Modelaje Matemático es el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento matemático, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas".
Acordamos con ello y enfatizamos que el uso de modelación en la resolución de problemas es un proceso para desarrollar capacidades en general y actitudes en los estudiantes, tornándolos creativos, y habilidosos en la resolución de problemas.

Bibliografía

Araújo, J. L. (2002) Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Río Claro, n.14, p. 66-91.

Barbosa, J.C. (2001) Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. Río Claro: UNESP. Tesis de Doctorado en Educación Matemática.

Bassanezi, R (2002). Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R. (1990). Modelagem Aprendizagem. Boletín Sociedad Brasilera de Matemática Aplicada.

Bassanezi, R. (1994.) Modelling as a teaching-learning strategy. For the Learning of Mathematics, 14, n.2, 31-35.

Biembengut, M. S. (2004) PADEM –1: Modelación Matemática para la enseñanza. Memorias del VI Simposio de Educación Matemática. Edumat. ISBN Nº 987-20239-2-1

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2000) Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza - aprendizaje de matemáticas. QUBO Boletín del docente de Matemática del Bachillerato Peruano, v.1, n.3.

Biembengut, M., HEIN, N. (1999) Modelación matemática: estrategia para enseñar y aprender matemáticas. Educación Matemática, v. 11, n. 1, p. 119 – 134.

Blomhøj, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En: Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

Borba, M., Meneghetti, R. & Hermini, H. (1997.). Modelagem, calculadora gráfica e interdiscipilinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 3, 63-70.

Borba, M.; Bovo, A. (2002) Modelagem em sala de aula de matemática: interdisciplinaridade e pesquisa em bilogia. Revista de Educação Matemática, v. 8, n. 6-7, p. 27-33.

Etcheverry, N; Torroba, E.; Reid, M.; Evangelista, N. (2003a) El trabajo interdisciplinario aliado al Modelaje Matemático. Libro de Resúmenes de la XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, p. 280. Santiago de Chile,.

Etcheverry, N; Torroba, E.; Reid, M.; Evangelista, N. (2003b) Modelaje Matemático: Area finita perímetro infinito. Libro de Resúmenes de la III Conferencia Argentina de Educación Matemática, p. 185. Salta.

EXPERIENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON ALUMNOS DE 12-13 AÑOS

Mina, María[1], Esteley, Cristina[2], Cristante, Analía[3], Marguet, Isabel[4]
[1] Colegio Taborin, [2] UNVM, [3] Inst. Nstra. Señora, [4] Colegio 25 de Mayo, Córdoba, Argentina
mmina@taborin.net
Campo de Investigación: Modelización Matemática; Nivel Educativo: Básico

Resumen

El presente trabajo describe y analiza una experiencia de modelización en el aula desarrollada con alumnos de 12 o 13 años. Esta experiencia se planificó y ejecutó con la intención de trabajar los contenidos de la curricula desde la perspectiva de la modelización como estrategia de enseñanza. Las distintas etapas del proceso de modelización seguido se describen a través del trabajo de un grupo de alumnos. Entre los resultados obtenidos se señalan algunas estrategias de los alumnos en la elaboración de un problema a modelar, actividades elementales de validación, y la posibilidad de organizar una curricula adaptada a la edad de estos alumnos a partir de los temas elegidos por ellos para modelizar.

Introducción

El presente trabajo describe y analiza una experiencia de modelización matemática en el aula involucrando a 120 alumnos de 12 – 13 años[1]. Esta actividad se planificó y ejecutó con la intención de, por un lado, trabajar los contenidos de la curricula desde la perspectiva de la modelización como estrategia de enseñanza (Bassanezi, 1994), y por el otro, implementar el desarrollo de proyectos grupales de modelización sobre temas elegidos por los mismos alumnos, es decir, desarrollar en los alumnos una competencia en modelización matemática. Esta competencia se entiende como la "capacidad de llevar a cabo en forma autónoma y significativa todas las etapas de un proceso de modelización en un contexto determinado" (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003).
Las etapas principales de este proceso, que no serán descriptas en este trabajo, se

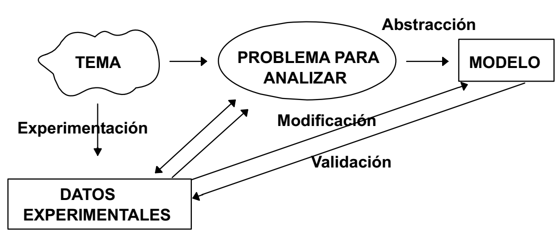


Fig.1. Etapas del proceso de modelización matemática.

muestran en la Figura 1.
Aunque la bibliografía consultada fue importante para definir un marco teórico sobre modelización y modelo matemático (Bassanezi, 1994; Davis y Hersh, 1988; & Ernest, 1998), y para proveer ejemplos, la misma no respondía a ciertas cuestiones que surgieron a lo largo de todo el proyecto y que fueron motivos de reflexión, de elaboración y de toma de decisiones posteriores. Estos cuestionamientos pueden

[1] Esta experiencia se llevó a cabo en el marco del "*Programa de Innovaciones en el Aula*" auspiciado por la Agencia Córdoba Ciencia, la Universidad de Córdoba y la Academia Nacional de Ciencias de la República Argentina.

resumirse en las tres preguntas siguientes: (1) ¿qué modelización podrían desarrollar alumnos de 12 – 13 años?; (2) si los contenidos de la curricula se trabajaban mediante la perspectiva de la modelización como estrategia de enseñanza, ¿podrían los alumnos transferir ciertas capacidades aprendidas a un proceso autónomo sobre un tema elegido por ellos? Esto llevó al planteo de la tercera cuestión: (3) el proceso de modelización mismo, ¿no debería constituirse en objeto de reflexión para los alumnos de modo tal que puedan apropiarse del mismo? Para dar respuestas a estas preguntas se decidió tomar la perspectiva de enseñar todos los contenidos de la curricula según la modelización como estrategia de enseñanza (Bassanezi, 2002; Biembengut y Hein, 1999, 2003), y trabajar con el proceso completo de modelización matemática (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003) y no con subprocesos de éste. De este modo, se asumió tentativamente que, la exposición de los alumnos a un contexto áulico en donde el proceso de modelización y todas sus etapas estaban siempre detrás de los contenidos matemáticos a aprender, favorecería la apropiación de este proceso de modo tal que pudieran luego trabajar de forma autónoma sobre un problema planteado por ellos mismos.
Es importante señalar, a los fines de la descripción y análisis de un trabajo de los alumnos que seguirá más adelante, que se intentó colocar en el centro de la reflexión proceso que los alumnos habían experimentado al aprender los contenidos matemáticos. Por ejemplo, las características del proceso de abstracción, la noción de variable y el porqué de la selección de ciertas variables fueron identificados como parte de un conocimiento explícito y tácito aprendido (Ernest, 1998). Los resultados de las reflexiones de los alumnos sobre sus acciones y los aportes de la docente a cargo del curso sobre las mismas se registraron por escrito en las carpetas de los alumnos y se hicieron públicas mediante una página web diseñada para tal fin. Estos instrumentos de registro de la información fue necesaria debido a la falta de material sobre modelización adecuada para la franja etaria de los alumnos de este proyecto, y además, por el fuerte nexo que existe entre estas ideas y el contexto social en donde surgieron.

Contexto en donde se realizó esta experiencia
El proyecto se llevó a cabo con 120 alumnos (varones y mujeres) entre 12 y 13 años, divididos en tres secciones. La institución escolar, situada en la ciudad de Córdoba (Argentina) era de gestión privada y contaba con importantes recursos edilicios (laboratorios, gabinetes de informática, sala de proyecciones, etc.) y humanos (ayudantes de laboratorio). La primera autora y docente a cargo de los alumnos no contaba con experiencia previa en modelización, como tampoco la tenían los alumnos. El proyecto se implementó a lo largo de todo el año escolar 2004, contando con cinco clases semanales de 40 minutos cada una destinadas a la asignatura Matemática. Los proyectos grupales de los alumnos comenzaron en la segunda parte del año, usando para esto dos clases semanales de 40 minutos. Al finalizar la experiencia, los alumnos expusieron sus trabajos mediante posters, salvo tres de los grupos que lo hicieron en presentaciones PowerPoint®. Todos los grupos presentaron un informe escrito.
A continuación se describe un trabajo escogido entre otros por su calidad ilustrativa de las distintas etapas de un proceso de modelización que siguieron todos los alumnos en el desarrollo de sus proyectos grupales.

Descripción y análisis de uno de los trabajos desarrollados por los alumnos

El trabajo aquí descrito fue elaborado por un grupo de tres varones en el contexto y bajo las decisiones señaladas anteriormente, siguiendo las etapas clásicas de un proceso de modelización como el que muestra la Figura 1. Este grupo escogió el tema “raquetas de tenis". A partir de la información obtenida, fue definido el problema a ser estudiado. El análisis y representación de los datos se realizó con la ayuda de la herramienta Graphmatica©[2], como así también la obtención del modelo. Una sencilla pero interesante estrategia de validación del modelo fue empleada por estos alumnos.

1. Selección del tema, búsqueda de datos y definición del problema

Los alumnos que presentaron por escrito, un posible tema de estudio, las razones que motivaron la elección del tema y la situación en donde se les ocurrió. Este grupo elige como tema las raquetas de tenis manifestando interés en la construcción de las mismas. Uno de los integrantes señala que se le ocurrió este tópico ya que "*mientras jugaba al tenis me acordé de la tarea de Matemática*". El grupo utilizó como fuente de información un catálogo de raquetas de la empresa Babolat$_{TM}$, junto con datos proporcionados por el padre de uno de los alumnos, instructor de este deporte. El problema planteado y las variables consideradas se muestran en la Figura 2.

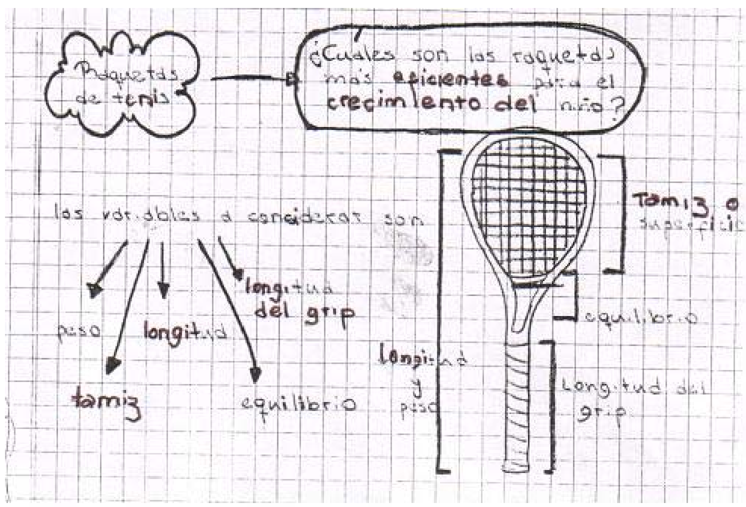


Fig. 2. Problema y variables consideradas para el tema de las raquetas de tenis.

En esta figura puede verse que el problema queda definido como: "¿Cuáles son las raquetas más eficientes para el crecimiento del niño? Los alumnos definen la idea de "eficientes" asignando el significado de "adecuada" en peso, longitud, longitud de la empuñadura[3], etc., que se constituyeron en las variables a considerar. En esta presentación puede verse una fuerte influencia de la información contenida en el catálogo Babolat$_{TM}$ usado por estos alumnos, ya que entre los datos técnicos de las distintos modelos había una sección destinada a raquetas para niños de distintas edades. Vemos también que han sido descartadas otras variables como el material de construcción o la forma geométrica, que fueran intereses originales de este grupo.

En cambio, se incluyó la variable "equilibrio" que fue incorporada debido a la experiencia de los alumnos en este deporte y representada mediante una acción física

[2] Software que permite la construcción de gráficos de funciones a partir de su expresión analítica o de una tabla de datos. Disponible gratuitamente en http://www8.pair.com/ksoft/.

[3] Los alumnos utilizaban el término en inglés "grip" en lugar de empuñadura.

sobre un objeto[4]. Fue importante la acotación de un alumno no pertenecientes al grupo durante la presentación oral de este tema:

> [Pedro[5]]: *"Si van a estudiar las raquetas adecuadas al crecimiento del niño, allí falta la variable edad"*

Tanto en la presentación de este grupo como en el aporte de Pedro puede observarse el reconocimiento de ciertas características percibidas de la realidad (la raqueta y sus notas estructurales, y la edad del niño) y su idealización como variables del problema (Bassanezi, 1994).

2. Organización de los datos y representación de los mismos.
Los datos obtenidos de la fuente de información fueron seleccionados para adaptarlos a las necesidades del problema, y organizados en una tabla como muestra la Figura 3.

Nombre / variables	edad	Peso (gr.)	Longitud (mm)	Longitud del grip (cm)	Tamiz (cm2)
Boll fighter 80	3 años	165	430	11	----
Boll fighter 100	5 años	170	500	13	----
Boll fighter 110	6 años	210	550	15	615
Boll fighter 125	8 años	220	600	16.5	615
Boll fighter 140	9 años	245	650	18	
Rodick junior 140	7 años	230	635	------	680
Rodick junior 145	9 años	240	660	------	680
Rodick junior 125	7 años	220	650	------	645

Fig. 3. Tabla de datos que muestra características estructurales de las raquetas para distintas edades del usuario y para distintos modelos.

La relación entre cada una de las variables estructurales (peso, longitud, longitud del grip, y tamiz) y la edad del niño, se representaron luego en distintos gráficos cartesianos usando el software Graphmatica© a partir de pares de puntos. Por cuestiones de espacio sólo se presentará el análisis de uno de estos gráficos (Ver Figura 4) donde se muestra la relación entre la edad del niño y la longitud de la raqueta adecuada a la misma.

[4] Estos alumnos simulaban colocar el dedo índice en el punto de unión del aro y la empuñadura para analizar en qué sentido se inclinaba la raqueta, definiendo así la propiedad de equilibrio de la misma. Esta variable fue incluida debido a la experiencia de los alumnos en el tenis, pero no fue trabajada luego debido a que la fuente de información no contenía datos respecto de ella.
[5] Se utilizan seudónimos para identificar a los alumnos.

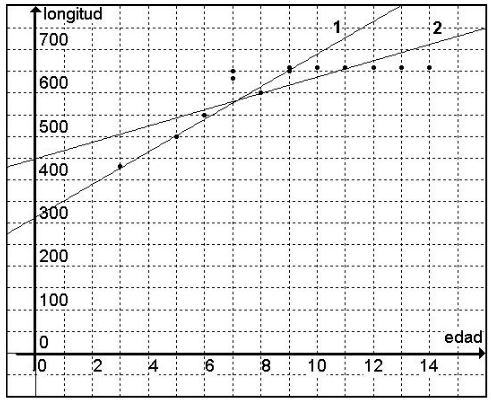


Fig. 4. Representación de la relación entre la edad del niño y la longitu
raqueta adecuada a la misma.

3. Análisis de los datos, modelo obtenido y validación del mismo

En el gráfico mostrado en la Figura 4 se puede ver que los alumnos han representado dos valores posibles de longitud para una única edad, por ejemplo, para 7 años (cf. con la tabla de la Figura 3), sin reconocer aquí la inclusión de una nueva variable, es decir, el modelo de la raqueta. Las rectas **1** y **2** en el gráfico representan dos intentos que hicieron los alumnos, usando una propiedad del software Graphmatica© llamada "Ajuste", por encontrar la mejor regresión lineal para los pares de datos obtenidos, acompañando esto con la siguiente expresión coloquial:

> [Marcos]: *"¡La recta **1** es la que pasa por la mayor cantidad de puntos!"*

De este ajuste entre los datos de la longitud de la raqueta y la edad del niño, los alumnos colocaron la siguiente expresión analítica que representaba tentativamente la relación entre estas variables:

37.61 x + 313.56 = L, L: longitud en mm, x: edad del niño*[6].

Luego de obtener este modelo, los alumnos advierten que la recta **1** marca una tendencia que no se corresponde con la realidad ya que en ella se ve que, de manera indefinida, a mayor edad mayor longitud de la raqueta. Este hecho es discutido por los alumnos frente a la pantalla de la computadora donde estaba el gráfico de la Figura 4, colocando uno de ellos su mano sobre la pantalla de forma paralela al eje de las abscisas y señalando:

> [Marcos]: *"La recta **1** se debe quebrar acá",*
> (indicando el punto representado por el par (9 años, 660 mm)

Durante esta discusión otro alumno asegura que:

> [Manuel]: *"Para más de 9 años ya se debe usar raquetas de adultos"*

[6] Apoyando el cursor sobre la curva en cuestión, Graphmatica© devuelve la expresión analítica de esa curva.

Esta situación de intentar validar el modelo obtenido llevó a los alumnos a tomar ciertas decisiones para modificar el mismo. En la Figura 4 puede verse que los alumnos agregaron puntos para los valores de 10 a 14 años de la variable edad, asumiendo para éstos un valor constante de 660 mm de longitud de la raqueta. De alguna manera, la recta horizontal formada por estos 5 puntos representa geométricamente lo que el alumno quiso representar enactivamente con su mano ante la pantalla de la PC, según se relatara más arriba. En el informe escrito presentado por este grupo puede leerse que el modelo señalado más arriba es válido "sólo *hasta los 11 años*"[7]. Análisis similares al descrito aquí fueron realizados para las otras variables (tamiz, longitud del grip, y peso), en función de la edad del niño.

Resultados de esta experiencia

Teniendo en cuenta el cuestionamiento planteado en la introducción sobre qué proceso de modelización podrían desarrollar alumnos de 12-13 años, en este trabajo sobre las raquetas de tenis podríamos conjeturar la apropiación de parte de los alumnos de cierta autonomía durante las distintas etapas que muestra el diagrama de la Figura 1, constituyéndose éste en herramienta de organización y de reflexión. Esta conjetura podría sustentarse en la experiencia y reflexión sobre procesos similares de modelización que los alumnos estudiaron durante el desarrollo de contenidos de la curricula previo al trabajo con sus proyectos grupales.
Con respecto al tema elegido por los alumnos, este trabajo permite observar que los alumnos pudieron definir un problema dentro de su ámbito de interés, donde aplicaron algunos conocimientos prácticos sobre su experiencia como jugadores de tenis, con una marcada influencia de la información disponible. Por otra parte, también podríamos decir que el proceso de modelización desarrollado no produjo un modelo matemático demasiado sofisticado, y que el proceso de matematización necesario para construirlo estuvo perfectamente al alcance de estos alumnos. Este hecho se repitió en trabajos presentados por otros grupos lo que permitiría afirmar que es posible construir una curricula para esta edad de alumnos a partir de problemas percibidos por ellos en su entorno. En este sentido, fueron diversas las situaciones que se presentaron a lo largo del proyecto donde los requerimientos y preguntas de los alumnos motivaron la introducción de temas en momentos que no habían sido previstos por la docente.
En el trabajo aquí descrito se pudo observar una actividad sencilla de validación y modificación del modelo obtenido. Sin embargo, en la mayoría de los proyectos grupales esta etapa apareció prácticamente ausente o poco significativa. Una explicación podría estar en el mayor tiempo destinado por la docente para las actividades de definición del problema y experimentación, frente al tiempo para la elaboración del modelo y su validación. Sin embargo, la literatura (Blomhøj, 2004; Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003) describe este fenómeno como uno de los principales obstáculos al trabajar modelización como estrategia de enseñanza, debido a los factores afectivos y a la falta de conocimiento fáctico con que los alumnos se enfrentan a un fenómeno donde deben identificar ciertas características de la realidad que perciben.

Bibliografía

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching – Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics 14* (2), 31-35.

[7] No hay evidencia de porqué los alumnos señalan los 11 años como edad máxima y no los 10 años (cf. con el gráfico de la Figura 4).

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. San Pablo, Brasil: Editora Contexto.

Biembengut, M. & Hein, N. (1999). Modelización matemática: estrategia para enseñar y aprender matemática. *Educación Matemática 11* (1), 119-134.

Biembengut, M. & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino*. San Pablo, Brasil: Editora Contexto.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En: Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Application 22* (3), 123-138.

Davis, P. & Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. (1ra. Ed.). Madrid, España: Editorial Labor.

Lerman, S. (1999). Culturally situated knowledge and the problem of transfer in the learning of mathematics. En L. Burton (Ed.), *Learning Mathematics: From Hierarchies to Networks* (pp. 93-106). Londres, Inglaterra: Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, EE.UU.: State University of New York Press.

LA MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA PARA ABORDAR PROBLEMAS

Liliana Estela VALDEZ, Carlos Eugenio PUGA, Eudosia DÍAZ de HIBBARD y Martín HERRÁN
Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ciencias Exactas - Argentina
valdez@unsa.edu.ar, cpuga@yahoo.com
Campo de Investigación: Modelos matemáticos; Nivel Educativo: Superior

Resumen

Este trabajo propone una estrategia de enseñanza que pone énfasis en los vínculos que existen entre la matemática y el mundo real.

Las diferentes unidades del programa de la asignatura, se presentan como herramientas aptas para resolver problemas cotidianos, ya que se estima que este acercamiento es una buena motivación, tanto para los estudiantes bien preparados, como para los que presentan deficiencias.

Se intenta además construir procesos de simbolización y abstracción, necesarios para acceder a contenidos más complejos, los que serán de utilidad para encarar y resolver nuevos problemas. Se promueve que el estudiante se acerque a los diferentes problemas planteados en forma gráfica, numérica y simbólica.

Introducción

El presente trabajo ha sido elaborado por docentes de Introducción a la Matemática, asignatura que integra el primer año de la currícula de grado de carreras de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta.

Puesto que el estudiante ha realizado ya varios cursos de matemática en los ciclos previos y por tratarse de una materia introductoria, gran parte de sus contenidos no son nuevos para el alumno. Sin embargo, la percepción de los autores es que la formación e información con que los estudiantes ingresan a la universidad, no es suficiente para afrontar estudios de nivel superior.

Propósito

El propósito de este trabajo es desarrollar una estrategia de enseñanza que destaque los vínculos existentes entre la matemática y la realidad. Intenta -además- acercar al alumno a la disciplina, desde el lugar en el que éste enfrenta -a diario- situaciones problemáticas diferentes, a fin de que compruebe -mediante su práctica- que la matemática pone a su alcance herramientas para resolver estos problemas. A partir de esta experiencia, se lo estimula a realizar procesos de simbolización y abstracción, necesarios para acceder a contenidos más complejos los que, a su vez, posibilitarán la búsqueda de soluciones a nuevos problemas.

Metodología

Cada unidad temática se aborda a partir del planteo de un problema concreto y, mediante su resolución, se construyen resultados más generales. Se ha comprobado que esta forma de acercamiento es motivadora para la mayoría de los alumnos: para los que cuentan con una preparación adecuada y -también- para aquellos que poseen conocimientos insuficientes.

Se propicia que los alumnos trabajen con los problemas en forma gráfica, numérica y simbólica, para reforzar así su capacidad de abstracción y razonamiento. En los problemas que refieren a aplicaciones de los conceptos estudiados, se pone el acento en la interpretación práctica de los resultados obtenidos y de los símbolos utilizados.

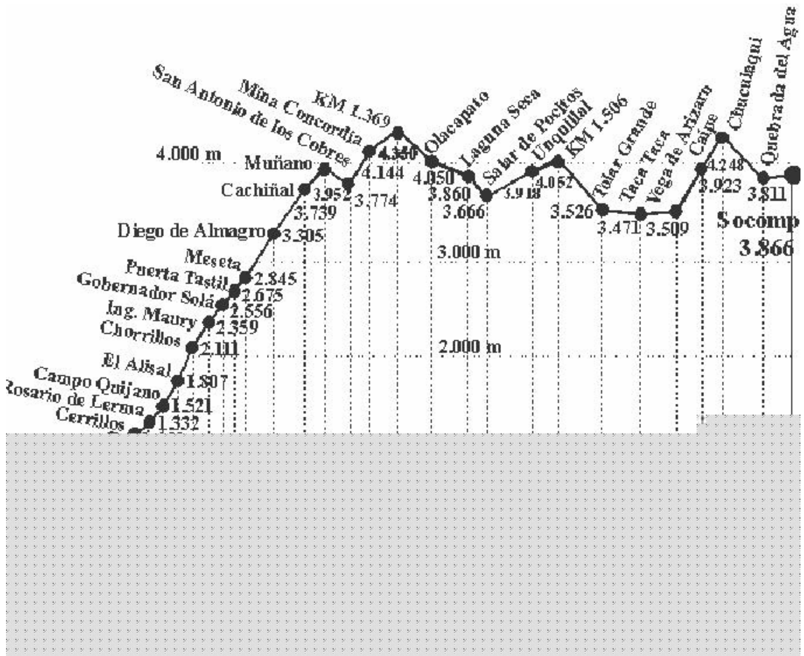
Los problemas propuestos no son triviales y tienen –a menudo- enunciados complejos, lo que pone también en juego la comprensión del texto por parte del estudiante, aspecto que, si bien configura una dificultad adicional al planteo matemático, contribuye al logro de progresos en ese campo. La extensión considerable de los enunciados ejercita al alumno en la lectura y promueve su regreso a ella, hábito actualmente desplazado por otras formas de comunicación, basadas en recursos tecnológicos novedosos y actuales, que destacan la imagen, la inmediatez y la aceptación acrítica.

En esta oportunidad, se presentan siete problemas que reflejan esta estrategia y que forman parte de las guías de trabajos prácticos de la asignatura. En ellos se muestran situaciones que involucran funciones elementales, tema que -no obstante constituir un eje vertebrador de la materia- históricamente ha sido identificado como el que genera más dificultades a los estudiantes.

Problema 1. El "Tren de las Nubes" realiza cotidianamente (salvo en épocas de nevadas o derrumbes) el trayecto de 172 km entre la ciudad de Salta y el Viaducto La Polvorilla. Sin embargo, y esto no es tan conocido, hay otro servicio, conocido como "El trencito", que visita semanalmente a todos los pueblos que están al costado de las vías, hasta el paso fronterizo de Socompa, a 496 km de la ciudad.
A continuación se da una tabla en la que figuran las alturas sobre el nivel del mar para varias localidades del recorrido completo, donde se visualizan las alturas sobre el nivel del mar de distintas localidades del Ramal C-14 en función de las distancias a la ciudad de Salta.

a) ¿Puedes asegurar que esta curva modeliza una cierta función que relaciona la altura sobre el nivel del mar con la distancia a Salta? En ese caso, indica, en unidades apropiadas, el dominio y la imagen de la misma.
b) ¿A qué distancia de Socompa la altura es de 2.845 metros sobre el nivel del mar (msnm)?
c) ¿Entre qué poblados el tren que va de Salta a Socompa está bajando?, ¿significa esto que allí la función es decreciente?
d) ¿A qué distancia de El Alisal el tren alcanza la máxima altura?
e) ¿Cuál es la preimagen de 1.093? ¿Qué significa esto en el contexto del problema?
f) ¿Cómo nos diría el maquinista que $f(262) = 4.050$? ¿Dónde ocurre esto?
g) El folleto que reparten a los turistas fue escrito por un matemático y en él se lee: "en Taca-Taca, el punto más seco de la línea $f^{-1}(3.471) = 436$". Expresa esta información coloquialmente.

h) El médico de a bordo anuncia a los pasajeros que entre Diego de Almagro y el Abra de Muñano habrá una descompresión importante porque se ascienden 695 metros; parte de esta información puede ser simbolizada, ¿sabes cómo hacerlo?



Problema 2. El consumo de fertilizantes nitrogenados para los campos de mandarina del este jujeño se comporta como una función y ha podido ser modelizado de acuerdo a la fórmula $V = F(a) = 3a^2+5$, donde a es la superficie en hectáreas y V es el volumen de agroquímico necesario. Por otra parte el precio de venta del fertilizante se relaciona con el volumen del producto de acuerdo con una elemental función dada por:
$P = G(V) = 3{,}5V+2$, donde P es el precio en pesos.

a) ¿Podrías decir cuánto costará entonces fertilizar una plantación de 63 hectáreas?
b) ¿Cuál es el significado de G o F (12,5)? ¿Y el de FoG (1200)?

Problema 3. El promedio mensual de precipitaciones p en mm, en la localidad de Acambuco, durante los últimos 20 años, se indica en la siguiente tabla:

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
p	154,9	137,1	99,2	55,8	30,4	15,2	7,6	5,1	12,7	71,1	78,7	137,1

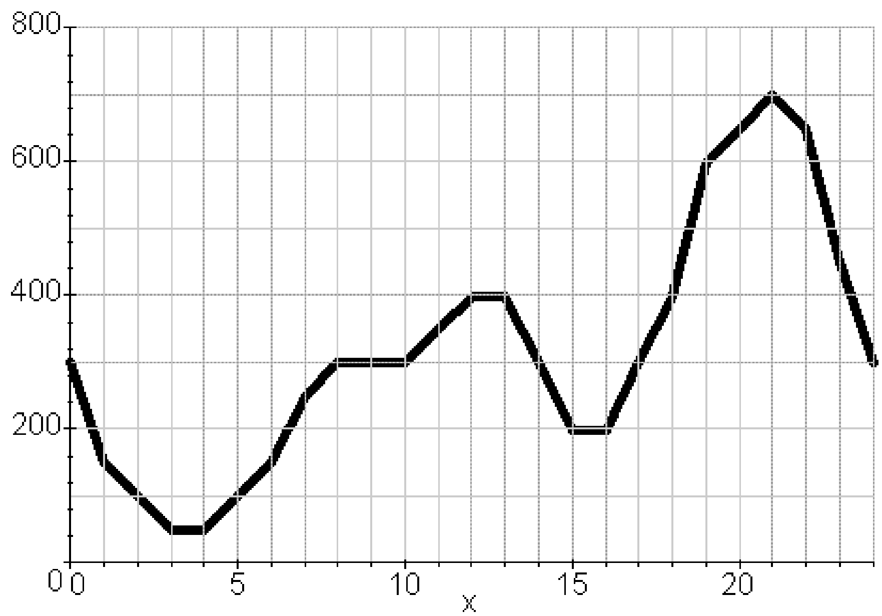
Encuentra una función $p(t) = A \operatorname{sen}(Bt + C) + D$ que aproxima los mm de precipitación. Grafica p(t) con los datos.

Problema 4. Un cóndor inició su recorrido matinal desde una saliente del Torreón de la Cuesta, a 3.800 msnm. Durante treinta minutos aprovechó las térmicas ascendentes para llegar, sin esfuerzo prácticamente, a los 5.300 msnm. A esa altura se mantuvo con planeo estático una hora y media más, hasta que, al detectar un ternero despeñado, comenzó a acercarse, bajando así 2.500 metros en diez minutos. Sin embargo, momentos antes de sobrevolar el cadáver se dio cuenta de que había perros en los alrededores, por lo que subió rápidamente hasta posarse sobre una roca a 3.300 msnm, lo que le llevó quince minutos. ¿Cuál sería una curva que represente los recorridos matinales de este cóndor?

Problema 5. La compañía distribuidora de energía eléctrica de la ciudad de La Habana, Cuba, está estudiando las curvas de demanda diaria de potencia eléctrica con el objeto de reprogramar la secuencia de operaciones de las centrales térmicas de Matanzas, Holguín y Cayo Tortugas. La curva que se presenta a continuación resume entonces la demanda de los últimos cinco años. En la reunión de la comisión técnica ad-hoc se quiere contestar los siguientes interrogantes. ¿Podrías tú anticipar las respuestas?

a) ¿Cuándo se produce la demanda máxima de potencia?
b) ¿Cuál es el valor mínimo y a qué hora se registra?
c) ¿En qué momento del día la potencia demandada es de 600 MW (megavatios)?
d) ¿En qué intervalos horarios la potencia muestra un aumento?
e) ¿Se observa algún lapso durante el cual la potencia permanezca constante?
f) ¿En qué rangos fluctúa diariamente la potencia demandada?

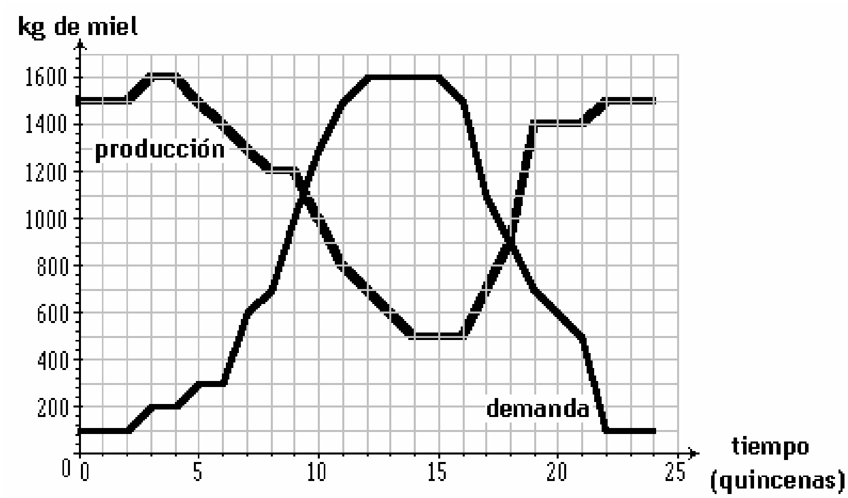
Si para sacar la central de Matanzas del sistema interconectado y hacerle una purga de turbinas se debe esperar que la potencia demandada se mantenga por debajo de los 150 Mw, ¿de cuánto tiempo disponen los técnicos para efectuar esta purga?



Problema 6. Una cooperativa de criadores de abejas, cuyos apiarios están instalados en la localidad de Pozo del Breal, en el departamento de Anta, decidió estudiar con cierto detalle una serie de datos que pudieron recoger durante los últimos cuatro años, referidos a producción de miel por los enjambres de Apis amazónica, la nueva variedad que están criando, como así también los datos de demanda de esa miel por parte de su clientela en Salta y Tucumán.
Rodolfo Chiliguay, hijo de Don Mateo, que es el productor más experto en la zona, ha encarado el asunto ayudándose con gráficas matemáticas, aprovechando que está

estudiando el profesorado, en Joaquín V. González. Así, pudo ordenar la información y volcarla en los gráficos siguientes. Durante la última reunión de la Cooperativa "El aguijón", Doña Gladys Quispe y Don Enrique Sotelo le pidieron a Rodolfo que les aclarara ciertas dudas:

a) ¿En qué fecha se obtiene la mejor cosecha? ¿Y la mínima?
b) ¿Qué demanda hay en ese momento?
c) ¿Cuál es, aproximadamente, la cantidad de miel que se puede acumular entre noviembre y abril?
d) ¿Cuándo se nota que la producción no alcanza para cubrir la demanda (demanda insatisfecha)?
e) ¿Alcanzaría el stock acumulado en las épocas de baja demanda para cubrir ese déficit?



Problema 7. El propietario de un campo liberó 18 liebres con la idea de salir de cacería, pero sus conocimientos sobre el efecto de las especies exóticas eran nulos y ahora es responsable de un grave problema ecológico. En efecto, al cabo de un año de la suelta se hizo un censo por métodos aproximados y había 3.200 animales. Suponiendo que los datos sean correctos:
a) ¿Cuál es la tasa decrecimiento mensual de liebres?
b) ¿Cuántas liebres había a los cinco meses de la suelta?
c) Si no se controla la población, ¿cuántas liebres habría dentro de un año? ¿Y dentro de tres años?

La ecuación que describe el crecimiento de la población de liebres es: $y = C.a^t$, donde C es la cantidad inicial y t el tiempo en meses.

Bibliografía

Gordon, S. (1994). *Functioning in the real world.* U.S.A.: The math Modeling. PreCalculus Reform Project.

Hughes-Hallett, D. (1995). *Cálculo.* México: Compañía Editorial Continental S.A.

Díaz de Hibbard, E., Puga, C. y Valdez, L. (2004). *Introducción a la Matemática.* Salta: U.N.Sa.

Leithold, L. (1989) *Matemáticas previas al Cálculo*. México: Harla.

Sobel, M; Lerner, N. (1996). *Algebra.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Swokowsky, E. y Cole, J. (1998). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: International Thomson Editores. Novena Edición.

Zill, D. y Dewar, J. (1999). *Algebra y Trigonometría*. Colombia: Mc Graw Hill. Segunda edición.

MODELACIÓN COMO ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA EN UN CURSO CON ORIENTACIÓN EN CIENCIAS NATURALES

Marguet, Isabel[1], Cristante, Analía[2] ;Esteley, Cristina[3]; Mina, María[4]
Inst. 25 de Mayo(1), Inst. Ntra. Señora(2) ,UNVM(3), G. Taborin(4)– Argentina
isabelmarguet@yahoo.com.ar
Campo de Investigación: Modelación Matemática; Nivel Educativo:Medio
Experiencia en aula.

RESUMEN

Con la presente comunicación se pretende describir y analizar una experiencia de Modelación llevada a cabo con alumnas de 16-17 años. En ésta, se exponen brevemente: etapas seguidas, temas escogidos por las alumnas, descripción y análisis de un trabajo de problem posing y otro de Modelación propiamente dicha. Es de destacar el interés que en general mostró este grupo de alumnas por temas centrados en el estudio de la dinámica poblacional de diversas especies, fenómeno que se manifestó en ambas actividades. Finalmente se presentan un análisis y discusión de algunas observaciones de la implementación en aula.

INTRODUCCIÓN

En la presente comunicación se reporta una experiencia de modelación en un colegio de la ciudad de Córdoba (Argentina). Partimos de las nociones de modelación como estrategia pedagógica y como actividad matemática fundamentalmente, según los aportes de Bassanezi, Biembengut, M. & Hein y Davis y Hersh, entre otros. Indicamos primero el modo en que se puso en aula, luego ilustramos con algunos ejemplos para finalmente presentar algunos de los resultados logrados.

Puesta en Aula

La puesta en aula se realizó en una sección del segundo año del ciclo básico superior, con orientación en Ciencias Naturales del Colegio 25 de mayo, con 28 alumnas. Dicho colegio es de gestión privada y cuenta con una infraestructura adecuada para llevar adelante el proyecto. Las alumnas ya habían trabajado con proyectos en otras asignaturas, pero es la primera vez que lo hacían en un curso de matemática.

Partimos de atribuir a los modelos la doble función de medio para pasar información y de dispositivo para pensar (Davis y Hersh, 1988, Devlin, K., 1994). Tomamos como noción y clasificación de modelos matemáticos a las presentadas en Bassanezi (1996) Las ideas básicas de la Modelación como estrategia pedagógica son compatibles con las propuestas por Bassanezi (1994) Biembengut, M. & Hein, N. (1999) y Biembengut, M. & Hein, N. (2003). En particular asumimos que: Representar una situación real con un modelo matemático involucra una serie de procedimientos: 1°) Interacción con el asunto, 2°) Construcción del modelo. Formulación de hipótesis (el significado que se le atribuyó a la palabra “hipótesis” es el etimológico del término, del griego, “situar bajo algo”, “lo que apoya algo”, es decir bajo qué condiciones...) y 3°) Convalidación del modelo.

Decidimos emplear la Modelación, tanto para trabajar algunos contenidos de la currícula como para que las alumnas pudiesen interactuar con la realidad a través del planteo de problemas reales de su propio interés.

Luego de un mes y medio de clases llevadas a cabo en forma tradicional comenzamos en el mes de mayo con la introducción de la Modelación como estrategia pedagógica. Partimos en esa oportunidad de una breve discusión respecto a "qué es la matemática", en la que participaron de forma abierta todas las alumnas. Surge así la noción de la matemática como resolución de problemas y la introducción de la matemática como la ciencia de los modelos, y la Modelación como forma de abordar la matemática, en la que se trata de encontrar situaciones interesantes de la vida real o de la misma Matemática a partir de las cuales estudiar y explorar aquellos conceptos que nos permitan resolverla.

Para ejemplificar los procedimientos antes mencionados propusimos primero una situación sobre la población mundial entre los años 1986 y 1991. Y posteriormente trabajamos con un problema de dinámica poblacional de las abejas, al que abordamos bajo dos hipótesis.

ALGUNOS RESULTADOS:

***Actividades de problem Posing.**

Terminada la primera hipótesis antes mencionada, propusimos a las alumnas una actividad de problem posing expresada como:

Piensen un tema del mundo real en el que crean que existen progresiones aritméticas y/o funciones definidas por partes. Inscriban en él un problema del interés de ustedes. Traten de construir el modelo matemático que les permita resolverlo y analicen si realmente el modelo encontrado responde o no al modelo pedido justificando sus conclusiones.

Se presentaron seis temas con sus respectivos problemas. A continuación analizaremos con más detalle el trabajo de uno de los grupos.

Tema: Dinámica poblacional de los conejos.

Los datos se obtuvieron a partir de la consulta con una persona que se dedica a la cría de conejos en una granja de Córdoba. En base a ellos las alumnas decidieron realizar el análisis de la situación bajo estas condiciones: 1) cada pareja de conejos tiene 4 crías por parto, 2) el período de gestación es de 3 meses (tienen 4 partos por año) y 4) ya a los 3 meses de edad pueden tener crías. A partir de ello plantearon el siguiente:

Problema: ¿En cuánto tiempo se podrá obtener un criadero de 120 conejos si comenzamos con una pareja de conejos? Bajo la siguiente condición:

Hipótesis: *En cada parto nacen la misma cantidad de machos que de hembras*.

Las alumnas construyeron un diagrama de árbol a partir del cual elaboraron una tabla, y en base a ella propusieron un modelo recursivo y con dominio partido:

$$\begin{cases} a_n = 2.a_{n-1} - 1 \quad si \quad n \quad es \quad par \\ \\ a_n = 2.a_{n-1} + 1 \quad si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$$

Según la clasificación de Bassanezi se puede indicar que el modelo encontrado es: analítico no lineal, dinámico, determinístico. A partir de este trabajo pude mostrarles la posibilidad de encontrar otro modelo para el mismo problema con una fórmula también recurrente pero sin partir el dominio tal como se muestra a continuación:

$$\boxed{a_n = 2.a_{n-2} + a_{n-1}}$$

Y finalmente la fórmula general (de manera semejante a la que se usa para la sucesión de Fibonacci): $a_n = \frac{4}{3}.2^n - \frac{1}{3}(-1)^n$

La actividad de problem posing resultó altamente positiva ya que se presentaron algunos problemas que despertaron discusiones enriquecedoras y aportaron luego elementos para el posterior trabajo de Modelación.

<u>*Actividades de Modelación</u>

En la etapa final, se presentaron un total de 6 trabajos. Los temas escogidos por las alumnas fueron los siguientes: 1)Dinámica poblacional de Pingüinos de Magallanes, 2) Mareas, 3) Leyes de Mendel, 4) Avalanchas, 5) Estudio nutricional de una población y 6) Dinámica poblacional de la ballena franca austral.

A continuación presentamos una descripción y análisis de uno de los trabajos de Modelación presentado por uno de los grupos. Para ello indicaremos tema y problema escogido por las alumnas como así también parte de el proceso de construcción del correspondiente modelo.

<u>Un ejemplo</u>:

Tema: Dinámica poblacional de la ballena franca austral

Fue a partir de un viaje, con la escuela, a Puerto Madryn, (Provincia de Chubut, Argentina), que este grupo de alumnas se preocupó por la persecución de las ballenas en los mares australes y su consiguiente peligro de extinción. Logrando en esa oportunidad recopilar una importante cantidad de información sobre el tema

El primer problema que se plantearon fue: *Calcular cuánto tiempo transcurrirá hasta que la población recupere el número de individuos que tenía en la época del descubrimiento*. Como el intervalo a estudiar era muy amplio, las fórmulas a utilizar se iban haciendo casi inmanejables, decidieron acotar el problema. Pensaron en: *calcular cuánto tiempo tardaría la población actual en triplicarse.*

Una vez que hubieron delimitado el problema comenzaron a plantearse las hipótesis correspondientes. En un principio fijaron la tasa de mortalidad en un 15,56 % considerando diversas causas que podrían causar la muerte del individuo. Pero al ponerse a esbozar los cálculos se dieron con que de esta manera la población de las ballenas tendía a desaparecer en muy poco tiempo. Después de algunas discusiones y cálculos, decidieron tomar en cuenta algunas restricciones para reelaborar su problema:

- Los individuos están equidistribuidos por edades.
- La población actual en Península Valdés es de 1200 individuos, de los cuales 375 son hembras y 825 son machos.
- La ballena tiene cría cada tres años.
- La esperanza de vida de las ballenas es de 75 años.
- La edad reproductiva de las hembras y de los machos comienza a los 9 años.

- La tasa de mortandad perinatal es de 18,11%.
- La probabilidad de quedar preñada es de 95 %.

Por lo tanto el problema se transformó en:

¿Cuánto tiempo tardará la población actual de ballenas francas australes (1200 individuos), ubicada en Península Valdés en triplicar la cantidad de individuos existentes, considerando que las mismas están equidistribuidas por edades?

Notar: Se trabaja bajo la hipótesis de "equidistribución de las edades".

Análisis de los datos:

- En primer lugar consideraron que de los 1200 individuos, el 31,25 % son hembras y el 68,75 % son machos.
- Como la esperanza de vida es 75 años y ya que los individuos están equidistribuidos por edades, habrá entonces:
  375 / 75 = 5 individuos hembras por edad
  825 / 75 = 11 individuos machos por edad
- La edad reproductiva comienza a los 9 años, por esa razón habrá:
  75 años – 9 años = 66 años de fertilidad
- Tienen una cría cada tres años
  66 años fértiles / 3 años = 22 edades en que las ballenas tienen cría
- Hay 5 ballenas hembras por edad. Por eso habrá 22 x 5 = 110 ballenas con capacidad de procrear.
- La probabilidad de que una ballena quede preñada es del 95 %
  95 % de 110 = 104 individuos nacen por año

Trabajaron realizando tablas, discriminando machos y hembras, y por etapas: de 0 a 9 años; de 9 a 18 años y de 18 a 24 años. La sistematización de la información presente en sus tablas les permitió llegar a relacionar los datos y organizarlos por etapas como se muestra a continuación:

Primera etapa (año 0 a 9)

Fórmula: $A_n = 375 + (26{,}74 - 5) \times n = 375 + 21{,}74 \times n \qquad 0 \le n \le 9$

(Individuos hembras)

Fórmula: $A_n = 875 + (58{,}83 - 11) \times n = 875 + 47{,}83 \times n \qquad 0 \le n \le 9$

(Individuos machos)

Total de individuos primera etapa : 570,66 hembras + 1305,47 machos = 1876,13 individuos

Segunda etapa (año 9 a 18) (poniendo el contador otra vez en 0)

Fórmula recursiva (individuos hembras):
$A_n = A_{n-1} - 5 + 24{,}31\%\left[(22 - x) \times 5 + x \times 26{,}74\right]$
Años 1, 2 y 3: x = 1 Años 4, 5 y 6: x = 2 Años 7, 8 y 9: x = 3

Fórmula recursiva (individuos machos) :
$A_n = A_{n-1} - 11 + 53{,}48\%\left[(22 - x) \times 5 + x \times 26{,}74\right]$
Años 1, 2 y 3 : x = 1 Años 4, 5 y 6 : x = 2 Años 7, 8 y 9 : x = 3

Total de individuos segunda etapa: 861,49 hembras + 1945,17 machos = 2806,66 individuos
Tercera etapa (año 18 a 24) (poniendo el contador otra vez en 0) Fueron haciendo una tabla hasta alcanzar en el año 24 la respuesta aproximada al problema que se habían planteado.

Total de individuos: 1150,27 + 2580,42 = 3730,69 individuos

<u>Conclusiones de las alumnas</u>: Luego de los cálculos realizados llegaron a la conclusión de que transcurridos aproximadamente 24 años la población de Ballena Franca Austral en Península Valdés se triplicará, partiendo de la hipótesis de equidistribución de edades.

Nuestra mirada sobre algunos aspectos de este trabajo:

1) El primer punto fue que las alumnas usaron una matemática no convencional. Usaron, en un formato “no formal”, nociones matemáticas que no conocían y a la vez no tenían conciencia de que las estaban usando. Se animan a probar, hecho que habitualmente no hacen en la clase tradicional. No tienen prejuicios y se animan a utilizar de manera intuitiva conceptos o estrategias que no conocen. Tal es el caso de la composición de funciones o de la función parte entera.

2) Piensan y actúan sobre la realidad (Bassanezi). Hacen una matemática crítica. Las alumnas se habían planteado originalmente un problema muy ideal que denota la buena intención o la falta de conciencia real respecto de la conservación o degradación por el hombre del medio ambiente. Y este trabajo entre otros aspectos ayudó a tener una idea más clara al respecto. Es un buen ejemplo de que la matemática nos permite ver qué es lo que está detrás de una situación real.

Hablábamos de una matemática no convencional sobre todo por el hecho de que hay algunas herramientas que ellas no conocían y sin embargo pudieron utilizar aunque sin formalizarlas.
Por ejemplo:

Lo que las alumnas escriben así: años 1, 2 y 3 : x = 1
4, 5 y 6 : x = 2
7, 8 y 9 : x = 3

Comenzando a contar desde el año cero, podríamos formalizarlo, utilizando la función parte entera: $x = \left[\frac{n-7}{3}\right] \quad 9 \le N \le 18$

Por lo tanto la fórmula recursiva obtenida por las alumnas para la segunda etapa se transforma en:

$$a_n = a_{n-1} - 5 + 24{,}31\% \left(110 + 21{,}78\left[\frac{n-7}{3}\right]\right) \quad 9 \le n \le 18$$

Esto es, la composición de dos funciones, la que encontraron las alumnas con la de la parte entera.

CONCLUSIONES

En algunos de los trabajos fue necesario emplear contenidos matemáticos y habilidades por lo general no desarrollados tradicionalmente. Las alumnas destacan: "*aprendimos a pensar, a buscar información y usarla correctamente.*" *"Buscar información por métodos propios"*

Este enfoque comprometió a otros actores en el proceso de enseñanza o aprendizaje, como familiares, profesores de otras asignaturas, especialistas. Las alumnas señalan como uno de los aspectos positivos "*poder hablar y encuestar a profesionales relacionados con el tema"*.

Fue importante también el aporte de otros recursos, como por ejemplo el uso del programa Graphmatica, que fue significativo para algunos de los trabajos.

Una característica de nuestro trabajo fue la gran demanda de tiempo y esfuerzo tanto para las profesoras como para las alumnas. "*Requiere de mucho tiempo escolar y extraescolar."*

Algunas alumnas acostumbradas a realizar con rapidez las tareas de Matemática se resistían a esta forma de trabajo y no produjeron trabajos de la calidad esperada.

Otras, con un sentido muy crítico, apuntaron a un trabajo de mayor envergadura y, señalan: *"hubiera sido mejor aprender más técnicas y fórmulas matemáticas para así elaborar proyectos más trabajados, es decir, con temas más avanzados."*

Consultadas las alumnas respecto de lo que les había resultado más difícil del proyecto responden: "*Resultaba difícil encontrar un problema real y de interés*." *"Fue complicado seleccionar las variables que íbamos a utilizar en nuestro problema."*

Las alumnas valoran en este proyecto el hecho de que "*contribuye a desarrollar autonomía en ellas y les brinda herramientas para la facultad*"; y además rescatan "*el intercambio con los demás colegios que integraron el proyecto"*

Finalmente, a nivel docente, fue fundamental la interacción con todo el equipo de trabajo, especialmente con la directora del proyecto quien estuvo siempre presente a través de sus sugerencias, y aliento permanente, y a la vez tuvo un papel fundamental en el seguimiento de las clases y de los trabajos de las alumnas.

Bibliografía:

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching – Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics 14* (2), 31-35

Bassanezi, R. (1996) Ensino-aprendizagem com modelagem matemática . San Pablo, Editora CONTEXTO

Biembengut, M. & Hein, N. (1999*) Modelación Matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas*. Educación Matemática, vol. 11, n. 1, p. 119-134.

Biembengut, M. & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino*. San Pablo, Brasil: Editora

Davis, P. & Hersh, R. (1988) Experiencia matemática. 1. ed. Trad. L. Bou García. Madrid: Editorial Labor, 314 p. Traducción de: The mathematical experience

Devlin, K. (1994) Mathematics the Science of Patterns. Scientific American Library

UTILIZACION DE UN MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Martha Beatriz Fascella – Hugo Víctor Masía
Univ. Nacional de Rosario - Univ. Tecnológica Nacional - República Argentina
mbfascella@yahoo.com - hvmasia@hotmail.com
Campo de Investigación: Modelos Matemáticos; Nivel educativo: Superior
Palabras Clave: Ecuaciones Diferenciales - Modelos Económicos - Solow - Problemas Motivadores.

RESUMEN

Uno de los objetivos de la investigación en el contexto de la Matemática educativa es promover metodologías que fortalezcan sus procesos de enseñanza-aprendizaje. Si se pretende que los alumnos manejen criterios que le permitan optimizar un proyecto desde su concepción para obtener los mejores resultados, debe transformarse la clase en una instancia fuertemente interactiva, de modo que los conocimientos aprendidos queden grabados en la mente de esos futuros profesionales.

Este trabajo muestra el uso de un Modelo de Crecimiento Económico como motivación para la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales en carreras de Economía. Al respecto, introduciendo problemas vinculados con la especialidad se posibilita la interacción entre la matemática y otras ciencias, como por ejemplo la economía.

1. INTRODUCCION

En la enseñanza de la Matemática, en particular en la enseñanza de ecuaciones diferenciales en carreras en las cuales la matemática cumple un rol instrumental, debe darse prioridad a la comprensión de los conceptos y las aplicaciones del conocimiento tratando de minimizar el tiempo que se dedica a cálculos rutinarios y operatoria estéril. Para lograr la comprensión de conceptos es sensato tratar de motivar al alumno mediante la proposición y análisis de problemas afines con su especialidad. Así, las presentaciones deberían efectuarse en forma geométrica, numérica y algebraica, teniendo en cuenta que las representaciones visuales, la experimentación numérica y gráfica han producido cambios en la forma de enseñar el razonamiento conceptual. Si ello es adecuadamente complementado con calculadoras y/o computadoras, seguramente se logrará una mejor calidad de la enseñanza pues el uso de software permite inmediatas verificaciones de propiedades, representaciones gráficas, así como resolución de problemas en situaciones reales, constituyendo una ayuda importante para la exploración inductiva del conocimiento por la inmediatez de la respuesta del procesador.

Esta modalidad de enseñanza planteada es posible únicamente si la metodología de trabajo en las clases se basa en la activa participación de los alumnos. El presente trabajo se plantea, entonces, respondiendo a tal metodología.

2. ORGANIZACION DE LOS CONTENIDOS

- Presentación de un Problema Motivador.
- Desarrollo de la Teoría Matemática de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden. Resolución de algunos ejemplos. (Omitido en este trabajo).
- Desarrollo de la Teoría Económica necesaria para la resolución del Problema y resolución del Problema Motivador.
- Resolución del mismo problema utilizando software matemático.
- Consideraciones finales y conclusiones.
- Referencias bibliográficas.

3. PROBLEMA MOTIVADOR

Investigaciones efectuadas por un equipo de analistas permiten admitir que la función de producción Q de una economía está dada por:

$$Q = K^{3/4} L^{1/4},$$

donde K es la acumulación de capital y L la fuerza de trabajo. La tasa de crecimiento de la fuerza laboral es $n = 0{,}05$; la propensión al ahorro $s = 0{,}2$; y la depreciación del capital $d = 0{,}03$. Inicialmente la acumulación de capital per cápita es $k_0 = 25$.

Utilizando el modelo de crecimiento de Solow, se pretende hallar la trayectoria temporal de la acumulación de capital per cápita k , y su valor de equilibrio a largo plazo.

4. MODELO: MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO DE SOLOW

El modelo de crecimiento económico de Solow intenta prever la tendencia del producto potencial en el largo plazo, analizándolo mediante la relación entre la acumulación de capital, el ahorro, la fuerza de trabajo y el crecimiento.

Para su mejor comprensión, se definen las variables con las cuales se trabajará:

Tiempo (variable continua):	t	Fuerza de trabajo:	L
Producto total:	Q	Producto per cápita:	$q = Q / L$
Acumulación de capital:	K	Capital per cápita:	$k = K / L$
Inversión:	I	Ahorro:	S
Propensión marginal al ahorro:	s		

Todas las variables definidas son funciones del tiempo t , aunque ello será omitido en la notación, por razones de simplicidad.

SUPUESTOS BASICOS Y DESARROLLO DEL MODELO:

El modelo de Solow básico, apela a varias hipótesis simplificadoras. Supone:

- La existencia de un equilibrio dinámico, o sea no existe desequilibrio y ni desempleo.
- El punto de partida es la función de producción Q definida por
$$Q = F(K, L), \qquad (1)$$
en la cual K y L son las variables antes definidas. Se trabajará con las variables involucradas en términos per cápita.
- La población y la fuerza de trabajo son iguales, con variación exponencial dada por
$$L = L(t) = L_0 e^{nt}, \qquad (2)$$
en la que n es una constante. Nótese que $L'(t) = nL(t)$, por lo que $n = L'/L$ representa la tasa de crecimiento referida a la fuerza de trabajo (relación constante entre tasa de crecimiento y fuerza de trabajo). Se la supone independiente de otras variables del modelo, y determinada por factores biológicos y otros factores exógenos.
- La función de producción Q tiene rendimientos constantes a escala. Esto significa que la función de producción global es homogénea de grado uno, es decir:
$$Q = F(K, L) = L\,F(K/L, 1) = L f(k).$$
Así resultará
$$q = f(k), \qquad (3)$$
donde la función f deberá ser una función creciente de la variable k pero su crecimiento "menos que proporcional a k ". Más precisamente, valores crecientes de k deben producir valores crecientes de q , pero a una tasa decreciente.
- La economía es cerrada al comercio con otros países, y no existe sector público. Así, en condiciones de equilibrio, la inversión interna I será igual al ahorro nacional S :
$$I = S. \qquad (4)$$

- La tasa de cambio del stock de capital es igual a la inversión neta de la depreciación. Con un stock de capital K, supone que la depreciación es una proporción fija de K, igual a dK, siendo d el coeficiente de proporcionalidad de esa depreciación.

$$K' = I - dK. \tag{5}$$

- El ahorro es una proporción fija del producto nacional, esto es $I = S = s\,Q$, por lo cual

$$K' = s\,Q - dK. \tag{6}$$

De (6) se obtiene la relación entre las variables en términos per cápita:

$$K'/L = s\,q - d\,k. \tag{7}$$

- El avance tecnológico está dado a una tasa de crecimiento λ, definida como la tasa de variación de la productividad del trabajo. Si $E(t) = L(t)\,e^{\lambda t}$, resultará entonces $E(t) = L_0\,e^{(n+\lambda)\,t}$. Así, conocido el valor inicial L_0, $E(t)$ dependerá del ritmo de crecimiento biológico *n*, y del ritmo de crecimiento de la productividad del trabajo λ.
- Se hará la suposición simplificadora de que no hay progreso tecnológico, o sea $\lambda = 0$.

Con las suposiciones efectuadas, realizando las operaciones adecuadas, se obtiene:

$$\boxed{k' = s\,f(k) - (n+d)\,k.} \tag{8}$$

Esta es la *ecuación fundamental de la acumulación de capital*. Es una ecuación diferencial de primer orden en la incógnita k, con dos parámetros (s, n), cuya función solución $k = k(t)$ describe la trayectoria temporal del capital per cápita (o razón capital / trabajo). El tipo de ecuación que finalmente resulte dependerá de la función de producción global que se utilice.

La ecuación muestra que la acumulación de capital per cápita crecerá con una rapidez dada por la tasa de ahorro per cápita, a la que se sustrae el término $(n+d)\,k$.

Este último término se interpreta de la siguiente manera: La fuerza laboral crece a una tasa n, por lo que una parte del ahorro per cápita debe ser usado para equipar a los nuevos trabajadores de la fuerza laboral. Al mismo tiempo, otra parte del ahorro dk se destina a reponer el capital depreciado. De tal modo, $(n+d)\,k$ es la parte del ahorro per cápita que debe usarse tan solo para mantener invariable el coeficiente capital / trabajo en el nivel k. Si el ahorro supera al monto $(n+d)\,k$, resulta $k'(t) > 0$, representando esto un aumento en el coeficiente capital / trabajo.

La parte del ahorro per cápita utilizado para equipar a los nuevos trabajadores que ingresan a la fuerza laboral se denomina *ampliación del capital*. El ahorro neto per cápita se llama *profundización del capital*. De tal modo en la ecuación fundamental es

Profundización del capital = Ahorro − Ampliación del capital − Depreciación.

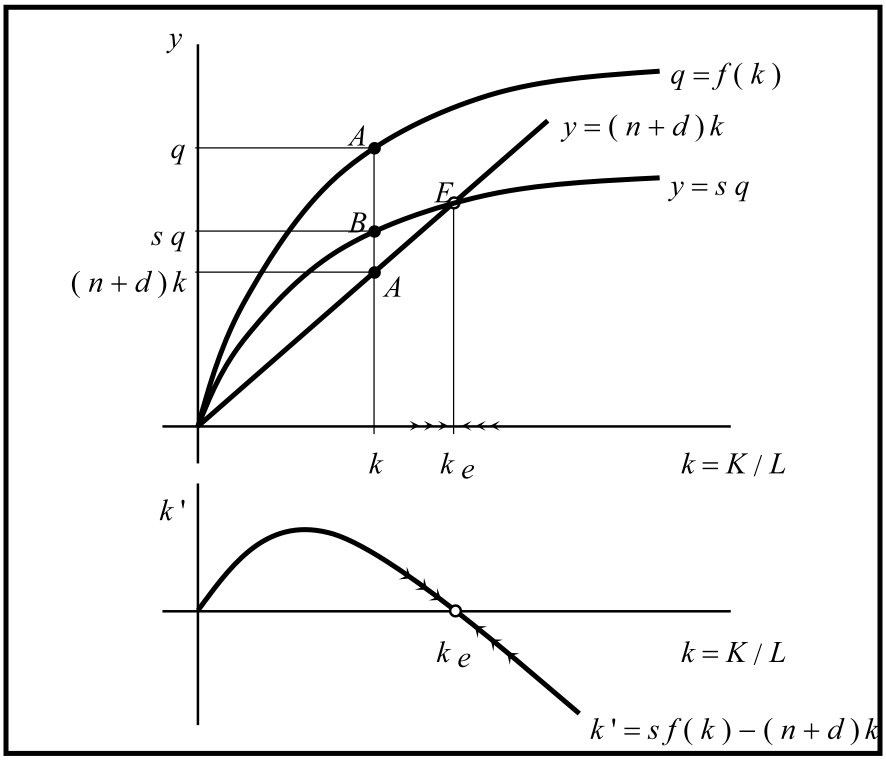
En *estado estacionario* o de *equilibrio estable*, es decir cuando se llega a una situación de equilibrio en el largo plazo de la economía, el capital per cápita alcanza un valor de equilibrio y permanece invariable en ese nivel. Como consecuencia, el producto per cápita también alcanza un estado estacionario (considerando el progreso tecnológico nulo). Así, en estado estacionario tanto k como q alcanzan un nivel permanente. Para alcanzar el estado estacionario, el ahorro per cápita debe ser exactamente igual a la ampliación del capital, es decir que el crecimiento de capital per cápita es nulo. Eso significa que $k'(t) = 0$, y para ello deberá ocurrir:

$$\boxed{s\,f(k) = (n+d)\,k.} \tag{9}$$

Aún cuando el estado estacionario significa un valor invariable para q y k, esto no significa que el crecimiento sea nulo, sino que hay un crecimiento positivo del producto a la tasa n. En efecto, si la fuerza laboral está creciendo a la tasa n, como el coeficiente capital / trabajo es constante, la tasa de crecimiento del capital ($\Delta K / K$) resulta igual a la tasa de crecimiento de la fuerza laboral ($\Delta L / L$). Así, tanto L como K crecen a la tasa n, y el producto crece a la misma tasa n.

Las gráficas de Figura 1 permiten interpretar esos conceptos. En la primera se representan la función q (producción per cápita), la función $s\,q$ (ahorro per cápita), y la función lineal $(n+d)\,k$, suma de la ampliación de capital y la depreciación, del segundo miembro de (9). La segunda gráfica o curva de fase, representa la relación entre k' y k.

FIGURA 1



Siendo el ahorro per cápita $s\,q$ proporcional a q, donde el factor constante s está entre 0 y 1, la gráfica de $s\,q$ tiene la misma forma que la gráfica de q y se encuentra por debajo de ésta. El punto E de intersección de la misma con la recta, corresponde al valor de equilibrio k_e, que será el determinado por la condición (9). Esto caracteriza al estado estacionario, es decir con el capital per cápita k_e y el producto per cápita q_e, el ahorro per cápita compensa exactamente la ampliación del capital y la depreciación.

Cuando la economía está operando a la izquierda del punto E, la acumulación de capital per cápita crece, o sea $k' > 0$. A la derecha del punto E ocurre lo contrario, ya que el ahorro per cápita no es suficiente para producir una ampliación del capital, $k' > 0$, y en consecuencia k decrece.

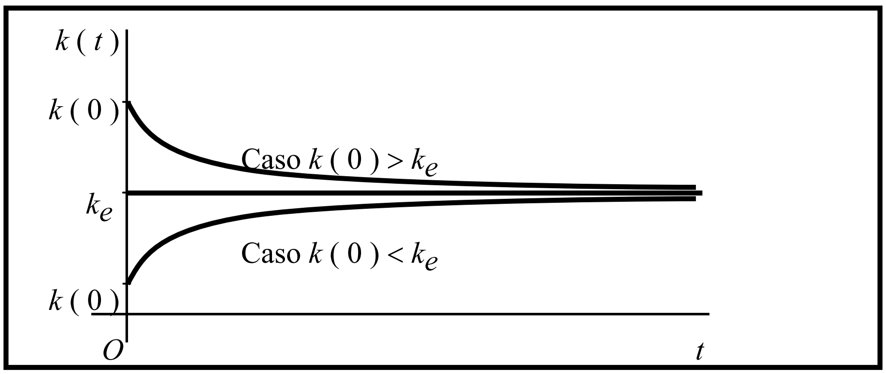
Este análisis del modelo lleva a la conclusión de que cada vez que la economía se aparta del estado estacionario, hay fuerzas que la empujan hacia el equilibrio del estado estacionario. Esta particularidad del modelo de Solow es sumamente importante y muestra no sólo que el estado estacionario es un punto en el cual q y k son invariables, sino también que la economía naturalmente tiende hacia el punto de equilibrio. En resumen, según sea la relación entre los valores $k(0)$ y k_e se presentarán tres casos:

1. $k(0) = k_e$: La trayectoria temporal de la acumulación de capital per cápita resultará constante en su nivel de equilibrio.
2. $k(0) > k_e$: La acumulación de capital per cápita $k(t)$ será decreciente, y su trayectoria temporal tenderá a su nivel de equilibrio k_e decreciendo.
3. $k(0) < k_e$: La acumulación de capital per cápita $k(t)$ será creciente, y su trayectoria temporal tenderá a su nivel de equilibrio k_e creciendo.

Las tres situaciones anteriores son representadas gráficamente en la Figura 2.

NOTA: Un sistema dinámico en el cual las variables tienden por naturaleza hacia un estado de equilibrio se conoce como un sistema estable, por lo que el modelo de crecimiento de Solow describe un proceso dinámico estable.

FIGURA 2



5. RESOLUCION DEL PROBLEMA MOTIVADOR

Utilizando el modelo de crecimiento de Solow, se pretende hallar la trayectoria temporal de la acumulación de capital per cápita k, y su valor de equilibrio a largo plazo.

La ecuación fundamental de la acumulación de capital en el modelo de Solow establece que:

$$k' = s f(k) - (n+d)k.$$

En este caso el producto per cápita es

$$f(k) = q = Q/L = K^{3/4} L^{1/4} / L = (K/L)^{3/4} = k^{3/4}.$$

Sustituyendo esta expresión de $f(k)$ y los valores numéricos de n, s y d en la ecuación se obtiene:

$$k' + 0{,}08\, k = 0{,}2\, k^{3/4}.$$

La solución de esta ecuación diferencial del tipo de Bernoulli está dada por:

$$\boxed{k(t) = (-0{,}264\, e^{-0{,}02\, t} + 2{,}5)^4}$$

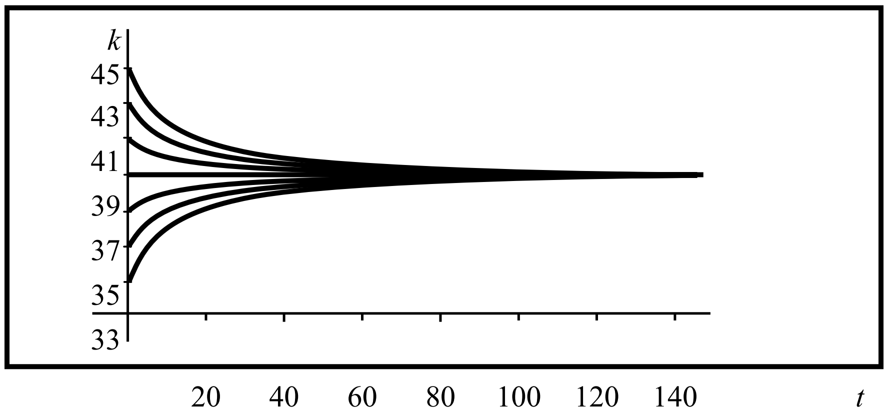
Confirmando lo deducido analíticamente, la expresión hallada pone en evidencia el comportamiento asintótico de la variable capital per cápita k tendiendo a su valor de equilibrio $k_e = 2{,}5^4 = 39{,}0625$ en forma creciente debido a que el valor inicial k_0 es menor que el valor de equilibrio.

6. RESOLUCION DEL PROBLEMA CON SOFTWARE

En esta etapa los alumnos, en grupos de dos o tres, proceden a resolver el problema motivador con el software Mathematica, o el software Derive. Por considerar innecesaria su inclusión detallada, la secuencia de instrucciones para resolver el problema es omitida en este trabajo.

La gran ventaja del uso de software para resolver ecuaciones diferenciales consiste en la posibilidad de obtener las soluciones de una misma ecuación, así como visualizar sus gráficas muy rápidamente, cuando se plantean distintas condiciones iniciales.

FIGURA 3



En el caso del problema motivador, al variar las condiciones iniciales, se logran fácilmente gráficas simultáneas de las distintas soluciones (Ver Figura 3). La experiencia indica que esta facilidad para representarlas, provoca entusiasmo en los alumnos, permitiéndoles comprender y relacionar el concepto matemático de familia de soluciones (o familia de "curvas solución") con la teoría macroeconómica.

7. CONSIDERACIONES FINALES Y CONCLUSIONES

El presente trabajo propone una alternativa a los métodos tradicionales de enseñanza de la matemática, especialmente apropiado para carreras que utilizan la matemática como herramienta instrumental. Si bien se ha realizado el mismo pensando en los alumnos de las distintas profesiones de las Ciencias Económicas (Economistas, Administradores de Empresas, Contadores, etc.), tiene plena validez para ser aplicado en otras disciplinas puesto que tanto el tema matemático (Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden), como el problema planteado (y su consecuente modelo económico), son sólo ejemplos que permiten desarrollar la metodología de trabajo en clases planteada.

La experiencia en el aula permite concluir que los alumnos que han participado activamente en el proceso de aprendizaje, relacionando los conceptos matemáticos con los económicos y utilizando un software que permita desviar la atención de la resolución hacia el análisis del problema, han presentado un mayor interés en los temas matemáticos y han profundizado los mismos con la finalidad de resolver problemas económicos más complejos relacionados con el problema motivador propuesto inicialmente.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Blanchard, P., Devaney, R., y Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Thomson.

Blanchard, O. y Pérez, D. (2000). *Macroeconomía.* Buenos Aires, Argentina: Prentice-Hall.

Chiang, A. (1999). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. Madrid. España: McGraw Hill.

Dornbusch, R. y Fischer, S., (1991). *Macroeconomía.* España, Madrid. España.: McGraw Hill.

Edwards, C. y Penney, D. (2001). *Ecuaciones Diferenciales.* México.:Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Samuelson, P. (2003). *Economía.* España, Madrid. España: McGraw Hill.

Simmons, G. (1993). *Ecuaciones Diferenciales.* 2da. Edición. España, Madrid. España: McGraw Hill.

ESTUDIO DEL DESARROLLO COGNITIVO EN ALUMNOS QUE CURSAN MATEMÁTICA EN INGENIERÍA COMO BASE DEL MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

AZPILICUETA, Jorge Alberto* y Alicia LEDESMA**
* Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Univ. Nac. de Córdoba. Argentina.
** Facultad de Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina.
jorgeazpilicueta@arnet.com.ar
Campo de investigación: Modelos Mentales; Nivel Educativo: Superior

Resumen

Hasta el presente se cuenta con pocos datos e investigaciones sobre el desarrollo psicológico en función de la edad, para distintas poblaciones de estudiantes de Matemática. La duda más seria está en la certeza de que las etapas de construcción del pensamiento respondan a los límites cronológicos dados por Piaget (Piaget, 1978; Piaget y Beth, 1980).
Este trabajo plantea como primer objetivo, caracterizar el desarrollo cognitivo en una muestra de población de alumnos que ingresan a los cursos iniciales de Análisis Matemático I. El análisis de las características cognitivas de los alumnos es el punto de partida de un segundo objetivo para iniciar un proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura, el cual se relaciona además, con los docentes y con los contenidos curriculares y programáticos en un contexto metodológico constructivista (Azpilicueta y Ledesma, 2003).

I. INTRODUCCIÓN

El pensamiento matemático de los alumnos que ingresan en la Facultad de Ingeniería y que cursan Matemática en primer año, es la base de esta investigación educativa. Esto se asume en el marco de la heterogeneidad y diversidad de preparación matemática que tienen los alumnos que egresan de la Escuela Media. Como correspondencia de ello se han observado problemáticas específicas, principalmente aquellas relacionadas directamente con el rendimiento académico y la poca retención de conceptos abstractos propios de la asignatura (Azpilicueta, 2003). Surgen de esta manera los dos problemas fundamentales planteados por el desarrollo de las operaciones matemáticas. El primero consiste en el acuerdo permanente de las operaciones deductivas y la realidad física y el segundo, el de la fecundidad del razonamiento matemático incluído en el anterior (Piaget, 1978).

El pensamiento matemático se elabora, mediante operaciones constructivas. Al respecto, la Teoría de Piaget (Carretero et al, 1998) ofrece en la actualidad la visión más completa del desarrollo cognitivo, tanto por la gran cantidad de aspectos que aborda, como por su coherencia interna y la utilización de una metodología que ha originado resultados muy productivos. Resulta imprescindible por lo tanto conocer cómo es y cómo evoluciona el razonamiento lógico de los alumnos al iniciar los cursos de Matemática, teniendo en cuenta los contenidos de la cognición como “elementos” que organizados de acuerdo a ciertas relaciones, encarnan en la práctica estructuras cognitivas de todo tipo (percepciones, recuerdo, conceptos, operaciones e incluso estructuras o un “objeto cualquiera” de matemática o lógica). Los logros de cada estadio del desarrollo cognitivo son secuenciales, pero a nivel del aprendizaje matemático se visualiza que la etapa de operaciones concretas, ejercicio de la lógica con los objetos de su entorno y la de las Operaciones Formales, donde se opera de manera “hipotética-deductiva”, son las representativas de este estudio.

La hipótesis planteada en relación a lo expuesto se basa en el desconocimiento sobre el desarrollo psicológico en función de la edad, para distintas poblaciones de estudiantes que inician los cursos de Matemática en Ingeniería, surgiendo la necesidad de tener un Programa Cognitivo, que lleve al mejoramiento de la calidad del proceso de Enseñanza-Aprendizaje en esta materia.

Los objetivos de esta investigación son:

- Caracterizar el desarrollo cognitivo en una muestra de población de alumnos que ingresan a los cursos iniciales de Análisis Matemático I.
- Desarrollar una Planificación que contempla el Conocimiento, la Organización, y el Mejoramiento del proceso cognitivo matemático en el marco de la Organización Educativa.

II. METODOLOGÍA

Se toma una muestra de 62 alumnos de un total de 532 que inician el curso de Análisis Matemático I, año 2002, en la Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Córdoba.

El instrumento de medición utilizado es un test escrito con tres ítems: ITEM A, típico test piagetiano llamado “Test de las Islas” ideado para obtener información sobre la habilidad de reflexionar en función de una relación de variables; ITEM B, un problema de densidad con operaciones de complejidad creciente que pone a prueba la habilidad de razonar en términos de proporciones; ITEM C, entrevista estructurada escrita sobre la actitud hacia la Matemática y el empleo de conceptualizaciones.

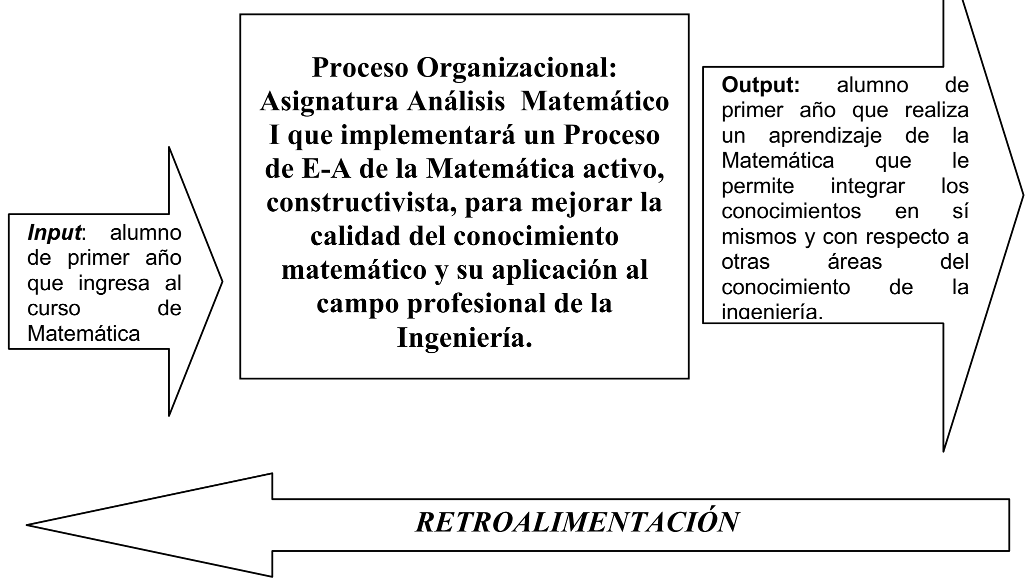
Se realiza un análisis de los resultados obtenidos en el diagnóstico y se propone un estudio integrado que contempla tres fases: Conocimiento, Organización, y Mejoramiento del proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática.

- **Conocimientos previos:**

  Se han identificado puntos críticos y áreas claves, en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática (Azpilicueta, 2003):

  - Metodología de Estudio con predominio de un modelo academicista.
  - Docente conductista.
  - La materia es el centro del interés.
  - Contenidos tratados como compartimientos no integrados.
  - Falta de razonamiento y aplicación del conocimiento adquirido.
  - Grado alto y medio de dificultad en matemática.
  - Bajo rendimiento en la materia.
  - Falta de preparación pedagógica de los docentes, para actuar en contextos no tradicionales.
  - Falta de gestión y planificación sobre las regularidades funcionales de las situaciones de enseñanza, en la Institución educativa.

- **Organización para el proceso de mejoramiento:**



III. RESULTADOS

Para las variables:

- A (item) se mide la capacidad de relacionar variables, según las categorías: 1 = no contesta; 2 = contesta mal, pero puede ordenar los datos; 3 = menciona únicamente la relación A-C; 4 = menciona otras relaciones, emplea reversibilidad, ordena datos, relación bipolar; 5 = relación múltiple usando condicional, si A-C... no A-B.
- B1 (item) = categoriza el empleo de proporciones con cinco dígitos (uno por cuestión) y de acuerdo a: 1 = no contesta; 2 = contesta mal (no asume la relación m/v (masa/volumen) o manifiesta falta de criterio en los resultados numéricos); 3 = contesta mal pero asume relación m/v; 4 = contesta bien, pero no justifica; 5 = bien y justifica.
- B2 (item): califica errores matemáticos cometidos en el item B1: 0 = no; 1 = si (error en sumas, restas, multiplicaciones y divisiones).
- C(item): mide el nivel de conceptualización alcanzado en Matemática, categorizado con tres dígitos. El primer dígito categoriza el tipo de concepto rescatado, conocimiento teórico: 0 = no contesta; 1 = conceptos puntuales; 2 = conceptos generales; 3 = conceptos incluyentes.

  El segundo dígito categoriza la aplicación reconocida para los conceptos seleccionados, conocimiento práctico: 0 = no contesta; 1 = intenta definir; 2 = para saber, aprobar; 3 = menciona aplicaciones prácticas.

  El tercer dígito caracteriza la conceptualización en: 0 = no contesta; 1 = interpretación consistente sin contradicciones, con causa-efecto parcialmente estructurada (pensamiento asociativo); 2 = conceptos bipolares, pensamiento comparativo simple y elemental; 3 = pensamiento descriptivo, en función de varios aspectos por separado; 4 = pensamiento explicativo, define por sus características propias o diferencias específicas.

Edad y Sexo; Colegio Secundario del cual egresan caracterizado como: 1 = Comercial; 2 = Bachiller; 3 = Técnico.

Desarrollo Intelectual: 1 = PREO (preoperacional); 2 = CI (concreto inicial); 3 = CA (concreto avanzado); 4 = CA-FI (transicional); 5 = FI-FA (formal transicional).

Los resultados muestran:

- Item A: se manifiesta que el 67% de los alumnos mencionan solo la relación A-C, lo que denota la falta de habilidad para reflexionar en función de una relación de variables.
- Item B1: se observa que ningún alumno contestó el test empleando esquemas de razonamiento pleno formal; un 8% de los alumnos expresa un nivel de razonamiento transicional formal (FI-FA) al operar con proporciones y densidades; un 3% CA-FI (transicional); un 48% CA (concreto avanzado); un 35% CI (concreto inicial) y casi un 5% PREO (pre-operacional). Se rescata en el item B2 que el 76% de los alumnos no tiene errores matemáticos básicos.
- Item C: considerando los tres dígitos como respuesta se observa que los alumnos pueden en un 50% rescatar conocimientos teóricos con conceptos incluyentes o fundamentales. Un porcentaje más elevado 72%, no puede relacionar los conceptos anteriores con el conocimiento práctico, ya que sólo intenta definir y dar algunos ejemplos. En relación a la conceptualización la mayor parte de los alumnos (66%) no contesta, un 10% con predominio de pensamiento asociativo (CI), otro 10% con pensamiento descriptivo (FI) y sólo un 4% pudo manifestar un pensamiento explicativo (FI-FA).
- En relación a la edad el 23% de los alumnos tienen 18 años y se estima que hay un 65% en CA, un 30% en CI y menos del 10% en FI-FA. El mayor porcentaje de alumnos 40,32% responden a 19 años, con predominio de un 50% en CA, un 30% en CI y más del 15% en FI-FA . A más edad el porcentaje mayor está entre CI y CA, no habiendo FI-FA. Casi el 100% de los alumnos en la muestra es masculino.
- Los alumnos procedentes de los colegios Técnicos y Bachiller presentan una distribución muestral semejante con alta proporción de estadio CI (50%), luego le siguen 27% y 35% para CA y un 10 a 7% para FI-FA respectivamente. En el caso del Colegio Comercial el 47% es para CA y un 35% para CI. Los niveles de PREO se encuentran representados en alrededor de un 5% tanto dentro de los Técnicos como en el Comercial.

En base al diagnóstico precedente se observa que el mejoramiento de la calidad de los aprendizajes de los alumnos en Matemática debe referenciarse en un Programa Cognitivo que contemple:

1. Analizar desde un nuevo paradigma de Enseñanza-Aprendizaje el cambio hacia un aprendizaje colaborativo y no sólo individual, centrado en los alumnos y no en el propio rol docente.
2. Mejorar la calidad del proceso de aprendizaje de la Matemática mediante una Planificación que integre el diseño, procesos y resultados a través de: objetivos específicos, contenidos, metodologías, actividades y evaluación.
3. Orientar el proceso de Enseñanza-Aprendizaje hacia el desarrollo de una plataforma didáctica de la Matemática que enfatice el razonamiento, autoaprendizaje, aprendizaje

colaborativo, uso y análisis de la información y contacto con la realidad a través de resolución de problemas de la vida real.

4. Desarrollar un Programa de Capacitación para los docentes de Matemática en lo pedagógico-didáctico innovando en temas de calidad de los aprendizajes y en metodologías activas como Resolución de Problemas.

IV. CONCLUSIONES

Se puede concluir que:

1) La mayoría de los estudiantes que inician el curso de Matemática, tiene gran dificultad para emplear esquemas de pensamiento formal, ya que se encuentran mayoritariamente en los estadios CI y CA. Esto implica que operaciones básicas como: operar con proporciones, conceptualizar, adquirir las nociones de conservación de masa y peso, densidad, etc..., se hacen complicadas sin un razonamiento al menos transicional FI-FA.

2) La resolución correcta de un problema pone a prueba la capacidad de razonamiento hipotético-deductivo propio del pensamiento matemático, al que llegan el menor número de alumnos. Es preocupante la ausencia de conceptualización matemática observada.

3) Las condiciones de aprendizaje de los alumnos no guardan estrecha relación con el tipo de colegio del cual provienen, pero si con la edad y su desarrollo cognitivo. El mismo está, en un gran porcentaje de alumnos, por debajo de lo que se requiere para la estructura conceptual del curso de Análisis Matemático I en carreras de Ingeniería.

4) Es necesario acordar un Programa Cognitivo, basado en el Mejoramiento de la calidad del Proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Análisis Matemático I en Ingeniería, desarrollando modelos constructivistas que apunten a un rol activo de los alumnos.

V. BIBLIOGRAFÍA

Azpilicueta, J. (2003). Enseñanza de la Matemática para No Matemáticos. La Resolución de Problemas como Metodología Activa de Aprendizaje del Análisis Matemático. Tesis de Maestría en Docencia Universitaria. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Córdoba.

Azpilicueta, J. A. y A. Ledesma (2003). Administración y Gestión de Procesos para el Mejoramiento Continuo de la Calidad de los Aprendizajes en la Educación Superior. Tesis de Maestría. Universidad Diego Portales. Chile.

Carretero, M. et al (1998). Debates Constructivistas. Ed. AIQUE. Buenos Aires.
Piaget, J. El Preadolescente y las Operaciones Proposicionales. Psicología del Niño. Buenos Aires.

Piaget, J. y E. Beth (1980). Epistemología Matemática y Psicología. España. Grijalbo.

GULLIVER Y LA MATEMÁTICA

Silvia Cristina Tajeyan
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". U.I.D.I. Unidad Interdepartamental de Investigaciones. República Argentina.
stajeyan@yahoo.com.ar
Campo de Investigación: Pensamiento algebraico

Resumen

¿En qué pensamos cuando citamos a Gulliver? Seguro que en proporciones. El trabajo nos va a mostrar la riqueza que posee este libro en la relación de la matemática con otras disciplinas como es la literatura, o como la música entre otros temas. Todo el material para incorporar en las aulas es de tal magnitud que nos preguntaremos ¿por qué no lo usamos y lo aprovechamos con nuestros alumnos?
Se propone tomar distintos párrafos del libro y trabajar las situaciones que se plantean con longitudes, perímetros, superficies, volúmenes, medidas no convencionales, sistemas de coordenadas, razones, figuras y cuerpos geométricos, relaciones trigonométricas para llevar al espacio áulico con nuestros alumnos dichas actividades, donde veremos la riqueza de esta obra literaria con nuestra asignatura y otras.

"Los viajes de Gulliver", se editó en el siglo XVIII, más precisamente en 1726, en Londres, pero en forma anónima. Su autor es Jonathan Swift, un irlandés que nació 1667, y falleció en 1745. Este trabajo que le llevó seis años al autor nos muestra lo arduo del mismo. Considerado un clásico de la literatura infantil, propongo poner de manifiesto las múltiples referencias a conceptos matemáticos que aparecen, principalmente en el área de la Geometría y, en base a esto, sugerir actividades. Sin dejar de recomendarlo por su fácil y amena lectura,
La estructura del libro es de cuatro partes o viajes que realiza nuestro personaje por los que va recorriendo mundos extraños. Los dos primeros son los más reconocidos ya que visita a los liliputienses (enanos) y a los brobdingnagianos (gigantes), pero a estos le siguen los laputianos (de la Isla Voladora) y los yahoo (el de los caballos que son los que dominan la sociedad). Este último de los viajes no se encuentra en todas las ediciones, principalmente en las del origen británico, porque en él se desprende fácilmente la aversión a la corona británica de su autor, y a la monarquía reinante de la época. Resaltando que es el único de los viajes que no tiene una presencia matemática como se desprende fácilmente en los restantes.
En las páginas que relatan sus aventuras en el país de los diminutos liliputienses y de los gigantes brobdingnagianos se encuentra la mayor parte de las referencias a conceptos de la Matemática y de la Física. Llama nuestra atención que: las personas, los animales, las plantas y las cosas, sean doce veces más grandes o doce veces más pequeñas que las de nuestro mundo. La explicación radica en que en el sistema inglés de medición, la relación de pie a pulgada es de 12, que por nuestro sistema de medición no es tan obvio. Y ya nos señala el camino que nos deparan estos viajes por las páginas de Swift.. Esto nos permite hablar de semejanza viendo los dos casos para analizar. Y además esta relación se eleva a 144 en el caso de las superficies y a 1728 en el caso del volumen. Nos permite presentar numerosos problemas, más allá de lo que se percibe a primera vista.

En el párrafo inicial, el autor preanuncia las abundantes referencias matemáticas poniéndolas en boca de Gulliver con las las siguientes palabras: "… fui aprendiendo navegación y otras partes de las Matemáticas, útiles a quien ha de viajar…".
Aún cuando algunos sostienen dos posturas respecto de la autenticidad del autor de la obra, donde unos declaran que la obra no es de Swift, ya que para componerla debía tener muchos conocimientos en la materia, y él no era un experto; mientras otros indican que solamente alguien que no tiene los suficientes conceptos es capaz de cometer tantos errores, como veremos en uno de los párrafos seleccionados más adelante.
Las nuevas ideas en Didáctica de la Matemática, desarrolladas desde mediados del siglo XX (por G. Polya; Schoenfeld, Brousseau; M. de Guzmán, etc.) insisten en centrar su enseñanza en la resolución de problemas y en contextualizarla. Esto es lo que se propone en este trabajo: en cómo el profesor y los estudiantes llegan a compartir significados matemáticos para que el flujo de la clase continúe de forma viable, en cómo contextualizar los conceptos geométricos en el aula (entre otros), en cómo comprende un estudiante las intervenciones del docente, en el interaccionismo simbólico en relación al significado, en la naturaleza del conocimiento matemático y los procesos para llegar a conocer, basados en instrumentos (semióticos) para el razonamiento matemático, considerando que estos instrumentos semióticos son eficaces para resolver problemas matemáticos.
Para este trabajo se concluye que, todo lo presentado por Jonathan Swift como si fueran imágenes fantásticas de su imaginación en cada uno de los personajes extraños y de nombres difíciles en estas aventuras, es en realidad un cálculo meticuloso del uso de la Matemática, siguiendo las reglas de la Geometría. Sin ahondar en quién es el autor de este material literario, los invito a leer con los alumnos de diversas edades este libro, basándose en la didáctica que habla de transposición para referirse al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. Ya que los contenidos y los conceptos que se pueden trabajar podemos adaptarlos a cada curso en diferentes niveles para hacerlos comprensibles a los estudiantes; por eso se requiere prescindir de la formalización y usar un lenguaje comprensible para ellos. Es parte del desafío de nosotros como docentes, pues el profesor debe crear las condiciones suficientes para que los alumnos se apropien de cierto conocimiento, y que reconozca cuándo se produce tal apropiación conceptual.

LOS VIAJES DE GULLIVER [1]

Estas son algunas de las actividades que diseñé y he puesto en práctica en el ámbito escolar tomando distintos fragmentos. En la primera parte: Un viaje a Liliput, donde nos encontramos con razones, superficies, volumen, proporcionalidad inversa.
En este primer viaje en el Capítulo 2, Jonathan Swift, nos cuenta las vicisitudes por las que sucede la vida de Gulliver entre los enanos, liliputienses, en un lugar que no tiene las comodidades para un hombre de semejantes dimensiones. Sobre todo al llegar la noche y tener que acostarse a dormir en el suelo hasta que se le fabricara una cama para él.
"Se llevaron a mi casa y se armaron seiscientas camas de la medida corriente. Ciento cincuenta de estas camas, unidas unas con otras, daban el ancho y el largo; a cada una se superpusieron tres más, y, sin embargo, puede creerme el lector si le digo que no me

[1] Swift, Jonathan (1993). *Los Viajes de Gulliver.* Barcelona, España: Ediciones Altaya.

preocupaba en absoluto la idea de caerme al suelo, que era de piedra pulimentada. Según el mismo cálculo se me proporcionaron sábanas, mantas y colchas, bastante buenas para quien de tanto tiempo estaba hecho a penalidades.”

1.Si tomamos que la medida de una cama de una plaza es de 0.90 m x 1.80 m, ¿cómo pueden haber dispuesto los ciento cincuenta colchones para armarle la cama a Gulliver?
2. ¿Existe una única forma de ubicarlos?
3. De todas las posibles, ¿cuál es la más conveniente?
4. ¿Cuál es la medida de los colchones de estos pequeños en cada caso?
5. En una tabla, ubicar estas medidas por el ancho y el largo de los colchones.
6. En un par de ejes cartesianos, representar estas medidas, colocando en uno de los ejes el ancho y en otro el largo de los colchones.
7. ¿Qué conclusiones es posible sacar respecto de la función que queda representada?
8. ¿Qué relación hay entre las medidas del personaje y la de los habitantes de Liliput? ¿Cuál es la razón entre éstas?
9. Explica el por qué no le preocupaba el caerse y el por qué era tan dura esa cama. ¿Cómo armarías el lecho de Gulliver para que sea más cómodo?

Al llegar al cuarto capítulo aparecen los siguientes conceptos: sistemas de coordenadas, superficies y movimientos. Gulliver nos describe la capital de Liliput llamada Mildendo, que conoce luego de su liberación, después de solicitar un permiso a su majestad. Para evitar que sucedan accidentes mientras el gigante recorre la ciudad se dan instrucciones a los habitantes para que permanezcan en sus casas. Mientras relata lo siguiente:

“…La muralla que la circunda es de setenta y cinco centímetros de alto y por lo menos de treinta de anchura, puesto que puede dar la vuelta sobre ella con toda seguridad un coche con sus caballos, y está flanqueada con sólidas torres a tres metros de distancia. Pasé por encima de la gran Puerta del Oeste, y, muy suavemente y de lado, anduve las dos calles principales, sólo con chaleco, por miedo de estropear los tejados y aleros de las casas con los faldones de mi casaca. Caminaba con el mayor tiento para no pisar a cualquier extraviado que hubiera podido quedar por las calles, aunque había órdenes rigurosas de que todo el mundo permaneciese en sus casas, ateniéndose a los riesgos los desobedientes. Las azoteas y los tejados estaban tan atestados de espectadores, que pensé no haber visto en todos mis viajes lugar más populoso. La ciudad es un cuadrado exacto y cada lado de la muralla tiene ciento setenta metros de longitud. Las dos grandes calles que se cruzan y la dividen en cuatro partes iguales tienen metro y medio de anchura. Las demás vías, en que no pude entrar y sólo vi de paso, tienen de treinta a cuarenta y cinco centímetros. La población es capaz para quinientas mil almas…”

1.Realiza un plano, imaginario, de la ciudad.
2.¿Cuántas torres hay en total?
3.En el centro de la ciudad, marca el centro de coordenadas y un par de ejes coordenados ortogonales.
4.¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de la Gran Puerta del Oeste?
5.¿La ciudad es simétrica? Si es así, respecto de quién.
6.Elige dos torres que sean simétricas e indicar cuáles son sus coordenadas.
7.¿Cuál es la superficie que habitan los liliputienses? (Sin tener en cuenta las calles internas, pues no se sabe cuantas hay).
8.Puedes calcular la densidad demográfica estimándola, con datos que nos proporciona Gulliver.

Cuando arribamos a la segunda parte viaja a Brobdingnag, y entre los conceptos matemáticos encontrados tenemos: semejanza, cuerpos geométricos, volumen, y medidas de capacidad.

En el Capítulo 2 de este viaje entre los gigantes, Gulliver queda al cuidado de una niña de 9 años –hija de la familia que lo encontró– llamada Glumdalclitch, quien se encargaba de enseñarle el idioma, de confeccionarle ropas para sus muñecas y por sobre todo de cuidarlo para que no sufriera ningún accidente, a quien Gulliver le está agradecido por todo esto y por su afecto.
Nuestro aventurero es llevado por Glumdalclitch y su padre por distintos pueblos del reinado, presentado como un "fenómeno" ante un público ávido por ver a un pequeño ser que no pasaba de seis pies de alto que hacía cosas divertidas. Cómo por ejemplo la siguiente:
"Alcé, lleno de licor, un dedal que Glumdalclitch me había dado para que me sirviese de copa, y bebí a la salud de los espectadores."
1.¿Un dedal de esta forma a qué tipo de cuerpo corresponde?
2.El tamaño de un dedal para una niña en nuestro mundo es el siguiente: el diámetro mayor de 1.5 cm., el diámetro menor de 1 cm. y la altura de 1.5 cm. ¿Cuál es la medida del dedal de Glumdalclitch, la niñera de Gulliver?
3.¿Cuál es volumen del dedal?
4.¿Cuánto licor cabe en ese dedal en litros? ¿Y en centímetros cúbicos?
Ya instalado en el país de los brobdingnagianos, en su capítulo 4, Gulliver viaja a través del reinado de Lorbrulgrud dentro de su habitación –la caja– en el regazo de la niña mientras viaja en uno de los coches cedidos por los reyes. Nos cuenta como es ese lugar: "…yo viajé por él, que no pasó de dos mil millas en contorno de Lorbrulgrud, la metrópoli…"
"La total extensión de los dominios de este príncipe alcanzaba unas seis mil millas de longitud y de tres a cinco mil de anchura…"
"…limitada al Norte por una cadena de montañas de treinta millas de altura, que son por completo infranqueables a causa de los volcanes que hay en las cimas…"
En los párrafos anteriormente citados vemos entre otros temas: perímetros, longitudes y superficies.
1.La frase "…dos mil millas en contorno de Lorbrulgrud…", ¿se refiere al perímetro o a la superficie de la ciudad?
2.¿Cuál es el perímetro en metros y kilómetros de todo el reinado?
3.¿Cuántos metros de altura tienen las montañas?
4.El Monte Everest mide 8840 m; se lo llama la Cima del mundo, por ser el más alto. ¿Cuántas veces es mayor esta cordillera de los gigantes?
Finalmente en la Tercera Parte: Un viaje a Laiput, Bahibardi, Luggnagg, Glubbdubdrib y el Japón nos encontramos con la aparición de figuras y cuerpos geométricos y combinaciones entre otros conceptos.
Al llegar a la isla en el segundo capítulo Gulliver nos describe a los habitantes Laiputianos: "Tenían inclinada la cabeza, ya al lado derecho, ya al izquierdo; con un ojo miraban hacia adentro, y con el otro, directamente al cenit". Como vemos nos preanuncia que son expertos en la Astronomía.
El Rey habita en la parte Superior de la isla donde se alza el palacio real. Gulliver ve al rey en su trono con jóvenes pajes que lo asistían a cada lado. Pese a que nuestro navegante despliega todos los idiomas que sabe, porque demuestra tener una gran facilidad para aprenderlos a usar no logra comunicarse con el rey. Entonces, éste le asigna dos criados y es conducido a otra habitación a la que le llevan la comida:
"Nos sirvieron 2 entradas de 3 platos cada uno. La primera fue un brazuelo de carnero cortado en triángulos, un trozo de vaca en romboide y un pudín en cicloide. La segunda, 2 patos, empaquetados en forma de violín, salchichas y pudines imitando flautas y

oboes y un pecho de ternera en figura de arpa. Los criados nos cortaron el pan en conos, cilindros, paralelogramos y otras figuras matemáticas.”

1.Busca en el diccionario las palabras brazuelo, cicloide y oboe.
2.Dibuja las formas geométricas de los 3 primeros platos.
3.Clasifica al triángulo y al romboide, según la cantidad de lados.
4.¿Qué tipo de polígonos son el triángulo equilátero, y el romboide?
5.¿Qué otros polígonos conoces?
6.¿Qué es la cicloide?
7.¿Se puede clasificar la cicloide como un polígono? ¿Por qué?
8.Haz un dibujo del modo en que cortaron los panes.
9.Reconoce en éstos cuáles son cuerpos geométricos y cuáles son figuras geométricas.
10. ¿Los que son cuerpos geométricos pueden rodar o no? Justifica la respuesta.
11. Da una definición de cilindro y de cono.
12. Las formas que tienen los alimentos del 2º plato, ¿a qué figuras corresponden?
13. Haz un cuadro con la clasificación de los cuerpos en general.
14. ¿De cuántas maneras distintas se pueden servir los platos de la entrada?

Aquí podemos integrar los conceptos de la geometría con la música. Se pueden presentar los instrumentos musicales y mostrar que en el caso de los violines, para su construcción, se usa la sección áurea, como norma de proporción armónica, como en otros muchos instrumentos. En el caso del oboe está formado por un tubo cónico de madera con agujeros y llaves, mientras que la flauta es un tubo cilíndrico con orificios que producen diversos sonidos. Y finalmente el arpa está formado por un bastidor de forma triangular con cuerdas paralelas colocadas en forma vertical, que se pulsan con ambas manos. Observamos y hacemos reflexionar a los estudiantes como aún teniendo formas distintas se logran los mismos sonidos en las diferentes escalas musicales.

Este detalle está por igual en versiones en castellano y en español, podemos aprovecharlos abordándolos en el espacio áulico, pero que no mostraron en estas actividades propuestas.

Considero por último a modo de reflexión, que en estos fragmentos extraídos de este escrito, podemos trabajar en el aula más que el exclusivo concepto de semejanza, y que conjuntamente se pueden adaptar las distintas actividades dependiendo de las edades de nuestros alumnos en cuestión, con el objeto de integrar la matemática con otras áreas, donde es posible, partiendo de la literatura y pasando por la geografía, la música entre otras. En conclusión no está todo dicho, en cuanto a que cada uno de nosotros, los educadores, podemos aún plantear otras preguntas para formular ante cada uno de estos párrafos.

Bibliografía:

Alsina, Claudi y otros (1997).*¿Por qué Geometría?. Propuestas didácticas para la ESO.* España, Madrid: Síntesis.

Díaz Godino, Juan y otros (2003) *Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática.* [En red]. Marzo 2005. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_fundamentos.htm

Proyecto Edumat – Maestros. Díaz Godino, Juan y otros (2004) *Matemática para maestros. Manual para el estudiante.* [En red]. Marzo 2005. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.html

Repetto, C., Linskens M., y Fesquet H. (1967). *Matemática Moderna. Aritmética 2.* (18 ava. ed.). Buenos Aires, Argentina: Editorial Kapelusz.

Swift, Jonathan (1993). *Los Viajes de Gulliver.* Barcelona, España: Ediciones Altaya.

Swift, Jonathan. *Los Viajes de Gulliver.* [En red]. Marzo 2004. Disponible en: http://www.bibliotecasvirtuales.com/biblioteca/OtrosAutoresdelaLiteraturaUniversal/Swift/index.asp

CONOCIMIENTOS ALGEBRAICOS DE LOS ALUMNOS INGRESANTES A LA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICA MATEMÁTICAS Y NATURALES DE LA UNSL

María Amelia Mini (1) (1)- Nélida Haydée Pérez(1) - Julio C. Benegas(1)
Universidad Nacional de San Luis - República Argentina
nperez@unsl.edu.ar

Campo de Investigación: Pensamiento algebraico; Nivel Educativo: Superior

RESUMEN

Los estudiantes que ingresan a primer año a las carreras de ciencias e ingeniería tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con el álgebra. El objetivo de este trabajo, es analizar algunas de las dificultades.
El estudio lo realizamos analizando la información obtenida a partir de la aplicación de una prueba de diagnóstico, Test de Conocimientos Previos de Matemática (TCPM) a 698 alumnos en 2002 y 606 en 2003.
La bondad del instrumento de medición [3] y la importancia estadística de la muestra, nos permite afirmar que las conclusiones obtenidas pueden servir no sólo como una medida del nivel de logro, sino como un elemento de reflexión. El eje temático de análisis es: *"Interpretación. Representación y Tratamiento de la información. Lenguaje gráfico y algebraico"* según [5] y [6].

Introducción
Desde el año 2002 en la Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis, se implementó la toma de un Test de Conocimientos Previos de Matemática (TCPM) para medir el estado inicial de conocimientos básicos. Los temas incluidos en los TCPM corresponden a una selección del currículo normal del tercer nivel de la Educación General Básica (EGB3) y del nivel Polimodal de la escuela pública.
Al álgebra se le dedica un tiempo importante de instrucción en los niveles EGB3 y Polimodal, sin embargo, los estudiantes que ingresan a la Facultad tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con ella. Estas consideraciones nos llevaron a realizar este trabajo con el objetivo de profundizar en la comprensión sobre cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes que ingresan a las carreras ofrecidas por la Facultad al resolver ejercicios y problemas que involucran conocimientos algebraicos.

Sobre el diagnóstico:
Los Test de Conocimientos Previos de Matemática (TCPM) fueron elaborados con ítem de respuestas múltiples, 20 en el año 2002 y 30 en el 2003, más dos problemas a desarrollar. Su diseño, lo realizamos junto a otras colegas con experiencia en la enseñanza de la matemática en el ámbito de primer año de la universidad, participantes de diferentes programas de interacción y colaboración con profesores de EGB3 y Polimodal.
Los análisis estadísticos de la parte objetiva de los TCPM fueron reportados en otros congresos [3][4]. Las conclusiones indican que los TCPM son confiables, los ítem de buena calidad en lo que se refiere a discriminación y grado de dificultad. Los diagnósticos, fueron tomados a 698 estudiantes en el ciclo lectivo 2002 y 606 en el

(1) Proyecto de Investigación: "El rol del aprendizaje conceptual de la matemática y la física en el rendimiento de los alumnos ingresantes a carreras de ciencias e ingeniería de la UNSL"

2003. Resultó difícil para la población diagnosticada en el 2002, dado que la media general solo alcanzó el 38% de rendimiento en cambio en el 2003 mejoró, la media fue de 47%.
Destacamos que la población estudiantil del 2002 no había tenido ninguna instrucción universitaria previa. Al momento de inscribirse en la Facultad recibieron un cuadernillo con ejercicios que involucraban distintos temas de conocimientos matemáticos considerados necesarios para iniciar estudios en ciencias e ingeniería. En el 2003, al momento de inscribirse se les entregó una guía de estudio con abundante ejercitación y tomaron un Curso de Apoyo de cuatro semanas de duración, con 3 horas diarias de clases. Podemos suponer entonces que los resultados reflejan los conocimientos impartidos en la escuela media, en el primer caso y en el segundo también, puesto que en un curso intensivo de estas características los logros obtenidos son muy limitados.
En este marco situamos las pruebas de diagnóstico, a las que podemos asignar los siguientes objetivos específicos:

- Retroalimentar al sistema escolar preuniversitario regional para que pueda optimizar sus esfuerzos en mejorar la enseñanza de la matemática.
- Informar a los docentes de los cursos iniciales de la Facultad, el nivel de conocimientos de los alumnos, con el fin de que puedan diagramar una enseñanza acorde a la situación real.
- Alertar a los propios estudiantes acerca del nivel de sus conocimientos matemáticos.

Análisis:
Nos detuvimos a analizar los resultados del eje temático *"Representación y tratamiento de la información. Lenguaje gráfico y algebraico"* propuesto en el diseño curricular de la provincia de San Luis [9], por cuanto más del 75% de los aspirantes a ingresar a la Facultad provienen de escuelas de esta provincia.
Tuvimos además en cuenta que, luego del 3er. Operativo Nacional de Evaluación de la Calidad Educativa, llevado a cabo en todo el país en 1995, se produjeron recomendaciones metodológicas para la enseñanza [7], entre ellas aparecen precisiones conceptuales relacionadas con los contenidos de matemáticas y las competencias calificándolas en: Reconocer, Conceptualizar, Aplicación de Algoritmos y Resolución de Problemas.
Considerando estos aspectos, se resume lo obtenido en la *Tabla 1* para el año 2002, y en *Tabla 2* para el 2003.
La primera columna: Ítem, corresponde al número de ejercicio o problema en el TCPM. En las siguientes cuatro columnas se indican los porcentajes de respuestas por cada una de las opciones posibles, la opción correcta en cada ítem aparece con fondo gris. En la sexta columna se indica el porcentaje de alumnos que no contestan.

Tabla 1: Resultados de los ítem que evalúan el Eje Representación y tratamiento de la información. Lenguaje gráfico y algebraico en el año 2002.

Item	**Opciones (%)**					**Contenido**	**Competencia**	**Operación requerida y evaluada**	**Nivel**
	A	**B**	**C**	**D**	**No contesta**				
6	18	17	57	3	5	Extracción de factor común. Simplificación de expresiones	Aplicar algoritmo	Factor común y simplificación	8vo.

7	32	43	19	5	1	Cuadrado de un binomio	Aplicar algoritmo	Producto de binomios y/o desarrollo del cuadrado de un binomio.	8vo.
9	8	13	12	63	4	Factorear polinomios y simplificación de expresiones algebraicas.	Aplicar algoritmo	Diferencia de cuadrados y simplificación	8vo.
12	9	8	66	5	12	Función lineal. Ecuación de primer grado	Aplicar algoritmo	Resolución de la ecuación por método algebraico.	7mo. y 8vo.
13	17	24	15	24	20	Operaciones con expresiones algebraicas.	Aplicar algoritmo	Algoritmo de la división de polinomios.	8vo.
14	11	4	26	55	4	Función lineal. Sistema de ecuaciones de primer grado	Resolución de problemas	Plantear y resolver un problema usando sistemas de ecuaciones de primer grado.	9no. y Poli-moda l
15	23	27	27	7	16	Raíces de ecuaciones (4to.grado)	Reconocer	Identificar raíces	Poli-moda l
16	12	24	13	29	22	Ecuación de 2do. Grado	Conceptualizar	Reconstruir ecuaciones de 2do. Grado	Poli-moda l

El rendimiento global en los ocho ítems de este eje alcanza una media del 31% y el promedio porcentual de los que no contestan es 10,5%. Esto refleja las dificultades que tuvieron los alumnos a la hora de trabajar con expresiones algebraicas.

Tabla 2: Resultados de los ítem que evalúan el Eje Representación y tratamiento de la información. Lenguaje gráfico y algebraico en el año 2003.

Item	**Opciones (%)**					**Contenido**	**Competencia**	**Operación requerida y evaluada**	**Nivel**
	A	**B**	**C**	**D**	No contes				
9	18,5	56,8	6,4	17,1	0,8	Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias	Aplicar algoritmo	Suma y producto	9º.
10	11,2	8,6	10,1	66,3	3,8	Operaciones con expresiones algebraicas	Aplicar algoritmo	Suma. Propiedades de la igualdad.	8º
11	1,8	4,6	87,1	6,1	0,3	Operaciones con expresiones algebraicas	Aplicar algoritmo	Suma de monomios.	8º
12	37,6	18,8	23,8	17,5	2,3	Simplificación de expresiones	Aplicar algoritmo	Producto y potencia	9º
13	38,8	2,8	7,6	48,3	2,5	Factorización de polinomios y simplificación de expresiones algebraicas.	Aplicar algoritmo	Diferencia de cuadrados y simplificación.	8vo.
14	30,5	17	28,5	16,8	7,1	Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.	Aplicar algoritmo	Suma. Diferencia de cuadrados. Factor común.	

15	3,3	55,9	10,1	27,7	3	Operaciones con polinomios. Área.	Aplicar algoritmo Aplicar concepto.	Producto de polinomios. Cálculo de área.	Poli-modal
16	13,9	58,6	10,9	11,4	5,3	Operaciones con polinomios.	Aplicar algoritmo	Algoritmo de la división.	8º
18	33	46,9	2	14.5	3,6	Ecuación de primer grado	Aplicar algoritmo	Planteo y resolución de problemas.	7º y 8º
19	7,4	4,5	10,6	73,8	3,8	Sistema de ecuaciones de primer grado	Aplicar técnica	Resolver sistemas de ecuaciones de primer grado.	9º y Poli-modal
20	6,9	79,2	3,8	7,8	2,3	Sistema de ecuaciones de primer grado	Resolución de problemas	Plantear y resolver un problema usando sistemas de ecuaciones de primer grado.	9º y Poli-modal
21	25,4	3,3	62,9	5,4	3	Ecuación de 2do. Grado	Aplicar fórmula	Determinar raíces.	Poli-modal
22	29	8,9	12,9	43,9	5,3	Raíces de ecuaciones (3º.grado)	Reconocer	Identificar raíces.	Poli-modal
23	9,6	5,9	57,1	25,4	2	Función lineal.	Graficar.	Identificar la gráfica de una función lineal con su ecuación.	Poli-modal
24	13,5	54,1	4,8	22,9	4,6	Función cuadrática.	Evaluar.	Calcular el valor numérico de una función cuadrática.	Poli-modal
25	43,6	16,3	15,2	12,2	12,7	Función lineal.	Conceptualizar	Intersecciones con los ejes coordenados.	Poli-modal
26	32	43,9	10,7	11,2	2,1	Lenguaje gráfico	Conceptualizar	Lectura de gráficos espacio-tiempo	Poli-modal

El rendimiento global en los trece ítems de este eje alcanza una media del 55% y el promedio porcentual de los que no contestan es 3,8%.

Comparación de resultados:

) **Ítem 9** (2002) Al simplificar la expresión $\frac{a^2 - x^2}{b(x-a)}$ se obtiene:

A) $\frac{x+a}{b}$ B) $-\frac{a+x}{b}$ C) $\frac{a^2 - x}{b(1-a)}$ D) $\frac{a-x}{b}$

En el 2002 el rendimiento más bajo lo tuvo el ítem 9 sólo el 13% de respuesta correctas. En la *Figura 1* se representan las curvas de probabilidad de cada una de las cuatro respuestas posibles en función del rendimiento. En este caso el rendimiento está representado por la distancia desde el rendimiento medio (38%) en unidades de desviaciones estándares de la distribución de probabilidad de toda la población.

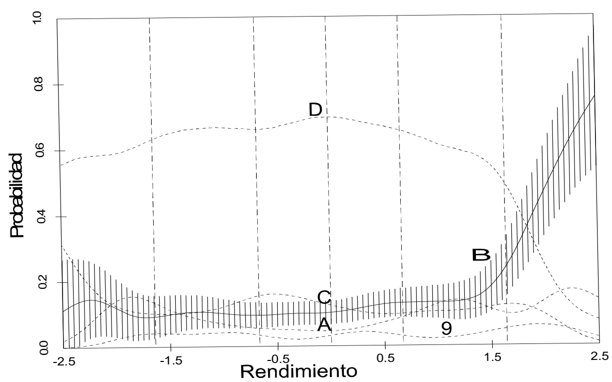


Figura 1:Curvas de probabilidad vs.Rendimiento item 9- 2002

La opción D, fue elegida por el 63% de la población. Si bien pensamos que los estudiantes simplifican sin controlar el signo del factor eliminado, el error más marcado y preocupante es que para elegir la alternativa de respuesta D, evidentemente razonaron sobre la siguiente cadena de igualdades $\frac{a^2 - x^2}{b(x-a)} = \frac{(a-x)^2}{b(x-a)} = \frac{a-x}{b}$

Este ítem con una leve variación, eliminamos el conflicto del signo, fue repetido en el 2003:

9) **Item 13** (2003) Al simplificar la expresión $\frac{a^2 - x^2}{b(a-x)}$ se obtiene:
A) $\frac{x+a}{b}$ B) $-\frac{a+x}{b}$ C) $\frac{a^2 - x}{b(a-1)}$ D) $\frac{a-x}{b}$

La gráfica de las curvas de probabilidad de cada una de las cuatro respuestas posibles en función del rendimiento nos mostraron que al proponer nuevamente la pregunta mejoramos notablemente la discriminación del ítem (0,84), creemos que el signo provocó una distorsión en la primer prueba (2002), lo normal sería obtener un orden de respuestas del 30%.

Para este caso, el 38,8 % de esta población eligió la respuesta correcta, pero el 48,3% se inclinó nuevamente por la opción D. ¿Cuál es el error que prevalece? *"los alumnos consideran verdadera la siguiente igualdad:* $(a-x)^2 = a^2 - x^2$ *"*

Es conocido que la mayoría de las veces las dificultades en el álgebra, no son tantas, sino problemas que quedan sin corregir en la aritmética, por ejemplo: uso de paréntesis, potencias, etc. Además se cometen errores de procedimientos: la mayoría se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o la linealidad de algunas operaciones.

Los alumnos extienden la relación de linealidad entre producto y potencia: $(a.b)^2 = a^2b^2$, al caso de la suma como algo natural y escriben: $(a+x)^2 = a^2 + x^2$

De igual forma que con las potencias sucede con las raíces, es frecuente que extiendan la distributividad de la radicación respecto a la multiplicación, a la suma o a la resta. Numerosas investigaciones avalan este tipo de errores, los que están profundamente enraizados y no se eliminan con facilidad. [10]

Es importante notar que en el TCPM del 2002, el ítem 7 específicamente pide el desarrollo del cuadrado del binomio: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, la repuesta correcta es la opción C, contestada por el 19 % de los estudiantes, el 32 % elige la opción A: $x^2 - \frac{1}{4}$ y el 43 % la B: $x^2 + \frac{1}{4}$.

En las dos pruebas, los temas que involucran resolución de una ecuación lineal con una incógnita y resolución de sistemas de ecuaciones lineales logran rendimientos por encima del 50%. Lo cual muestra que estos procedimientos algorítmicos y de cálculo fueron medianamente superados con la instrucción escolar, sin embargo, el rendimiento disminuye si este conocimiento se requiere para resolver un problema con texto, donde la importancia radica en la interpretación del problema con la consecuente formulación de las ecuaciones correctas.

Conclusiones y reflexiones

Las conclusiones están referidas al diagnóstico y a las implicancias que el nivel de conocimientos algebraicos tiene, respecto al desarrollo de las asignaturas del primer año de estudios en nuestra Facultad y de las consecuencias en la implementación de la EGB3 y del Polimodal en el sistema educativo de la región.

- Respecto del TCPM, el análisis estadístico previo indicó que es un buen diagnóstico, confiable y validado en su construcción por distintos equipos docentes como también a posteriori, por su uso. La población de alumnos ingresantes en el 2002 tuvo un rendimiento general muy bajo (38% de media) y en algunos ítem, muy próximo o inclusive por debajo del valor estadístico de responder al azar (25%). En el 2003 el rendimiento promedio fue algo mejor respecto al 2002, el 47%.

- Los resultados indican que los conocimientos sobre temas, conceptos y procedimientos indagados en las preguntas que se refieren a las habilidades y conocimientos básicos de representación y tratamiento de la información, conocimiento y manejo del lenguaje gráfico y algebraico, que deberían ser fluidamente manejados por los estudiantes para obtener éxito en las asignaturas universitarias del primer cuatrimestre de primer año, Cálculo I y Álgebra I, son insuficientes. De consultas y observaciones puede inferirse que las razones de este fracaso escolar generalizado son de distinta índole.

- Respecto a la Ley Federal de Educación es clara la disociación entre las normativas de aplicación de la Ley, como los Contenidos Básicos Comunes y la realidad cognitiva de los egresados del Polimodal. En primer lugar se nota una instrumentación deficiente, tanto en lo que hace a la formación de los profesores en servicio, como al hecho de que la mayoría de las escuelas del distrito escolar no tiene matemáticas de forma obligatoria en el último año de Polimodal.

Los resultados evidencian modificaciones positivas en el rendimiento global al pasar de un diagnóstico sin instrucción a otro aplicado después de un apoyo con consultas. Esta experiencia en cierto sentido favorable produjo valiosas modificaciones en el sistema de ingreso. Además pudimos proveer a los profesores de los cursos introductorios de herramientas para que trabajen con los errores frecuentes, de modo que diseñen su enseñanza enfrentando a los estudiantes con la contradicción para eliminar sus falsos conceptos.

Bibliografía

Otero, M., Fanaro, M. y Elichiribehety, I., (2001). El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 4(3), p. 267-287.

Landazábal, M., Bilbao, F., Otero, J. y Caballero, C., (2003). Formación inicial y rendimiento en Física del primer curso universitario. *Revista de Educación* (Madrid).

Pérez, N., Mini, M. y Benegas, J. (2003). Análisis estadístico de un test de conocimientos previos de matemáticas para ingresantes universitarios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 17(1), pp.94-100.

Mini, M., Berraondo, R., Pérez, N. y Benegas, J. (2003) *"*El conocimiento matemático de los alumnos ingresantes a la UNSL y su relación con la implementación completa de la Ley Federal de Educación" Reunión de Educación Matemática". *UMA.*

Consejo Federal de Cultura y Educación - "Contenidos Básicos para la Educación Polimodal" - Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, Bs. As.

"Diseño Curricular EGB 3" – (1997) Subsecretaría de Cultura y Educación del Ministerio de Gobierno y Educación de la Provincia de San Luis.

Socas, M. (1997). *Capítulo V de "La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.". Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria.* ICE/HORSORI. Universidad de Barcelona.

UNA PROPUESTA PARA EL TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE ÁREA EN EGB.

Ana María Mántica, Marcela Götte y María Susana Dal Maso
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.
amantica@fhuc.unl.edu.ar , mgotte@fhuc.unl.edu.ar , mdalmaso@fhuc.unl.edu.ar

Campo de investigación: Pensamiento geométrico

Resumen

En este artículo se presenta el análisis de cuestiones surgidas en la implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de área.
Los conceptos de área y perímetro son abordados generalmente en la enseñanza elemental, pero el trabajo que se realiza con ellos, tiene más que ver con aplicaciones de fórmulas que con los conceptos en sí, sobre todo en lo que a área se refiere.
La propuesta que diseñamos considera las problemáticas que plantea la adquisición de conceptos matemáticos y en particular, los geométricos, dada su doble naturaleza figural y conceptual. Consideramos distintas aproximaciones al concepto referidas a repartir equitativamente, comparar y reproducir, y medir.
Analizaremos las dificultades y fortalezas que se presentaron en su puesta en el aula.

Este trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación "Diseño de propuestas didácticas tendientes a superar dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de la Geometría Euclídea" que se desarrolla en el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias.
Encuadramos el trabajo en el método de investigación-acción, según (Mg Knight et al 2000), los objetivos de una investigación acción tienden a:

- Remediar problemas específicos o mejorar un conjunto de circunstancias que se desarrollan en el aula.
- Equipar al docente con nuevas técnicas y métodos, elevando su autoconocimiento.
- Introducir métodos innovadores para la enseñanza y el aprendizaje.
- Mejorar la comunicación entre el docente en ejercicio y el investigador académico.
- Proporcionar una alternativa para la resolución de problemas en el aula.

Este proceso en general incluye las fases de:
Planificación: planteo del problema, estimación del tiempo y de recursos.
Acción y observación: Diario del profesor, fichas, observador externo.
Reflexión: Evaluación: del proceso, del aprendizaje y de la acción del profesor. Problemas encontrados. Causas. Alternativas. Mejoras.
***Revisión*:** Cambios a introducir. Nueva planificación de actividades.
Estas cuatro fases constituyen un peldaño de una espiral. Cuando se termina la última fase, se pone en marcha el siguiente peldaño, que incluye nuevamente las cuatro fases.
En este artículo presentamos la fase de reflexión de la segunda etapa de este proceso.

Se considera la tarea realizada por el equipo de investigación en el tercer ciclo de la EGB sobre la enseñanza del concepto de área y la relación entre los conceptos de área y perímetro.

Para la elaboración de esta secuencia se consideró lo realizado por el equipo de investigación en una propuesta didáctica sobre la independencia de área y perímetro implementada en un 8º año de una escuela de la ciudad de Santa Fe en el año 2001 durante dos jornadas, el análisis de lo trabajado llevó a la conclusión que “los conceptos de área y perímetro no están claros. Por un lado los alumnos afirmaron que, si no quitan ningún trozo las figuras tienen igual área y por otro, consideraron que al cortar trozos de una determinada figura y disponerlos de manera más dispersa, el "lugar " ocupado por ésta es mayor que el de la original y por lo tanto tiene mayor área y mayor perímetro” (Mantica et al, 2002, pp117). Esto nos llevó a comenzar el diseño con el concepto de área.

En la elaboración de esta nueva propuesta se tuvieron en cuenta los aportes de (Freudenthal, 1983**)** quien plantea la gran profundidad y sofisticación del concepto de área.
Dentro de las aproximaciones, que trata este autor, para la formación del concepto de área consideramos las siguientes:
Repartir equitativamente, aquí incluye situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo y los distintos modos de realizarlo. Se pueden aprovechar regularidades; realizar estimaciones superponiendo partes e ir equilibrándolas hasta conseguir que estas queden iguales o medir la cantidad a repartir, dividiendo esta medida entre el número de partes que se desea y medir cada una de estas partes.
Comparar y reproducir, se consideran situaciones para las que hay que comparar dos superficies pero también aquellas en las que se debe realizar una reproducción de una superficie con una forma diferente. Esto puede realizarse por inclusión, si una superficie está contenida en la otra; por transformaciones de romper y rehacer en la que se descompone una superficie en partes y se reorganizan obteniendo figuras de diferente forma pero de igual área; por medio de funciones cuando las superficies se expresan con fórmulas o cuando a partir de la gráfica es posible obtener una de ellas realizando traslaciones, giros y simetrías hasta superponerlas.
Midiendo, por exhausción con unidades; por acotación entre un nivel superior e inferior; por transformaciones de romper y rehacer, proceso por el que generalmente se deducen las fórmulas de las figuras geométricas; o por medio de relaciones geométricas generales midiendo las dimensiones lineales y aplicando fórmulas para obtener la medida.

La propuesta se llevó a cabo en 7º y 8º año de EGB de una escuela de la ciudad de Santa Fe durante los años 2003 y 2004 con el mismo docente y el mismo grupo de alumnos.
En la implementación de la secuencia en la que se proponen actividades tendientes a provocar una ruptura entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de las que gozan las superficies, se destacan aspectos positivos y dificultades presentadas en la adquisición del concepto por parte de los alumnos.

En primer lugar se expondrán las fortalezas:

Áreas de figuras en 2D y 3D
En la primera actividad se les solicita dibujar superficies y los alumnos grafican tanto figuras en dos dimensiones como en tres dimensiones. Esto muestra que se debe dar a los alumnos la oportunidad de captar al área como una cualidad de los objetos, descartando el carácter bidimensional de las superficies consideradas, no limitándose al caso de los polígonos sino trabajando el área en los contextos en que aparece. “La percepción del área

puede desarrollarse a partir de la idea de *cubrir objetos*; actividad que también puede realizarse para el caso de recintos no planos" (del Olmo et al, 1993, pp 48)

Cálculo de áreas respecto de unidades no convencionales
No se presentaron dificultades en las actividades para obtener el área de una figura en función de una unidad dada, pudieron cortar, plegar, calcar, copiar, transformar, embaldosar ... para realizar dicha tarea.
Una de las actividades propuesta consiste en determinar la posibilidad de embaldosar distintas figuras dadas por el docente con ciertas figuras consideradas como baldosas. En la construcción de la figura se tuvo en cuenta que sean embaldosables sólo con algunas de las baldosas dadas. Estas últimas se construyen de manera que permitan calcular las áreas de las figuras dadas con todas las baldosas tomadas como unidad sin necesidad que estas embaldosen la superficie, considerando la relación entre las áreas de las distintas baldosas.
Esto muestra que los alumnos no parecen necesitar las fórmulas para iniciar el cálculo de áreas sino que prefieren utilizar otras estrategias, como cuadricular la figura y contar cuadrados. "Se deben plantear situaciones donde se precise la *búsqueda* de *un intermediario* para poder comparar figuras […] Las actividades de *pavimentado* son muy aconsejables y facilitarán, posteriormente, las tareas de aritmetización" (del Olmo et al, 1993, pp 63)

Se presentan ahora las dificultades que se les plantea a los alumnos a la hora de la adquisición del concepto de área:

Respecto de la medida
Las figuras que no se dan pavimentadas generan en los alumnos la dificultad de tener que seleccionar la unidad de medida.
Se les entregó a los alumnos dos cuadrados distintos y se les pide analizar cuál de los dos tiene mayor área. Uno de los grupos cuadricula las figuras con cuadrados iguales en cada una pero con lados de longitud diferente. Concluyen que ambas están formadas por 16 cuadrados por lo tanto ninguna es mayor que la otra (Figura 1). Plantean sus procedimientos y discuten con todos los alumnos de la clase hasta acordar que el modo utilizado por este grupo es erróneo, pues los cuadrados en los que se dividió cada una de las figuras "no tienen igual longitud de lado".

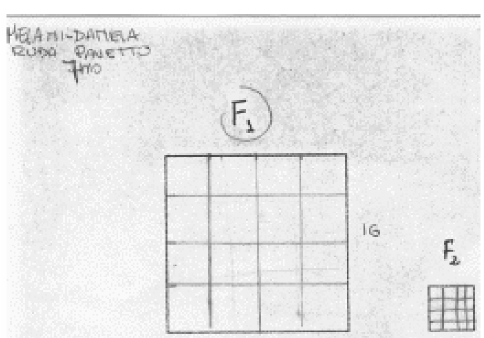


Figura 1

Evidencian una dificultad mayor para representar figuras de un área determinada si no cuentan con papel cuadriculado.
Cuando se les solicita representar figuras de un cm^2 de área representan distintas figuras haciendo modificaciones al cuadrado de 1 cm de lado, ya sea contando el número de cuadrados de la hoja que lo forman o quitando una parte del cuadrado de 1 cm de lado o de uno de los cuadrados de la hoja, y colocándolo en otro lado, obteniendo una figura distinta, pero equivalente en área a la dada. Aparecen figuras cóncavas y convexas en las modificaciones realizadas. En cambio, cuando se les solicita dibujarlas en papel liso, la mayoría dibuja polígonos cuyos lados tienen una longitud de 1 cm.
"El grado de éxito con que los niños alcanzan a conceptualizar la definición de área en aquellas situaciones en que el espacio no se encuentra *visualmente* recubierto con unidades necesarias es muy inferior al de las situaciones en las que el recubrimiento de la superficie que hay que medir salta a la vista" (Dickson, et al, 1991, pp 120).

El contar unidades no enteras
Se les entrega a los alumnos dos rectángulos para que determinen cuantas veces mayor es uno respecto del otro, de tal manera que el de menor área no entra un número exacto de veces en el de mayor área. Con esto pretendemos evitar que el alumno identifique "que la unidad de área elegida debe entrar un número entero de veces en la otra" o "que el área es un número natural".
Los alumnos presentan inconvenientes al comparar estas figuras. En principio suponen que se debe a un error de medición, descartada esta posibilidad comienzan a rellenar el interior de la superficie a medir con unidades colocadas unas junto a otra y no superpuestas, y en aquellas partes de la superficie donde no es posible ubicar la unidad se recurre a rellenar con unidades más pequeñas, es decir que utilizan el método por exhausción por unidades.
Contar cuadrados enteros o mitades resulta fácil pero se complica la tarea si se debe considerar cuartos u octavos, mucho mas difícil resulta si la unidad es un rectángulo o un triángulo (Figura 2). "Con frecuencia se abusa en el uso de medidas enteras, de esta forma en los problemas suelen obtenerse siempre números enteros para las soluciones y el alumno tiende a pensar que todas las medidas son así" (Chamorro y Belmonte, 1994, pp 47)

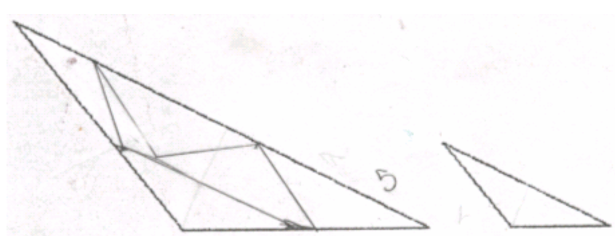


Figura 2

Confusión área – perímetro
El hecho que dos figuras tengan el mismo área induce a algunos alumnos a creer que tienen el mismo perímetro.
En la actividad "rodear las figuras que ocupan el mismo lugar en la hoja", se presentan distintos hexaminos sin pavimentar. Algunos grupos consideraron los perímetros de dichas figuras y no las áreas.

En otra actividad se le presentan distintas figuras y se les solicita que rodeen las de igual área y que calculen el perímetro de las que tienen igual área. Algunos alumnos miden los lados de las figuras, suman dichas longitudes y concluyen que ninguna de las figuras dadas tienen igual área porque tienen distintas medidas, haciendo alusión a los perímetros.
También se les solicitó que modifiquen un polígono dado de manera de obtener otro de menor área y mayor perímetro. Ninguno de los grupos logró cumplir la consigna pedida. En algunos casos pudieron modificar el perímetro manteniendo el área y en otros logran disminuir el área pero no aumentar el perímetro.
Muchas veces los alumnos se dejan llevar por lo perceptual sin realizar un análisis conceptual de la situación. “Es muy posible que los alumnos no dispongan de oportunidades suficientes para la exploración práctica de los fundamentos espaciales de estas dos ideas y de las relaciones que las ligan” (Dickson, et al , 1991, pp 124)
Esta confusión entre el área y el perímetro es de tal persistencia que según (Chamorro, M. 1995) puede ser considerada como un “obstáculo epistemológico” que requiere un tratamiento específico.
En el desarrollo de la secuencia se observa que los alumnos se acercan al concepto de área haciendo uso de las aproximaciones que plantea Freudenthal, como por ejemplo utilizando el método de exhausción por unidades, por transformaciones geométricas, por transformaciones de romper y rehacer, reparto equitativo por cuadriculado, por inclusión y aplicación de fórmulas midiendo las dimensiones lineales.

En la figura 2 es posible ver como utilizan el método de exhausción por unidades y la dificultad que presenta el hecho que la unidad no sea un cuadrado.

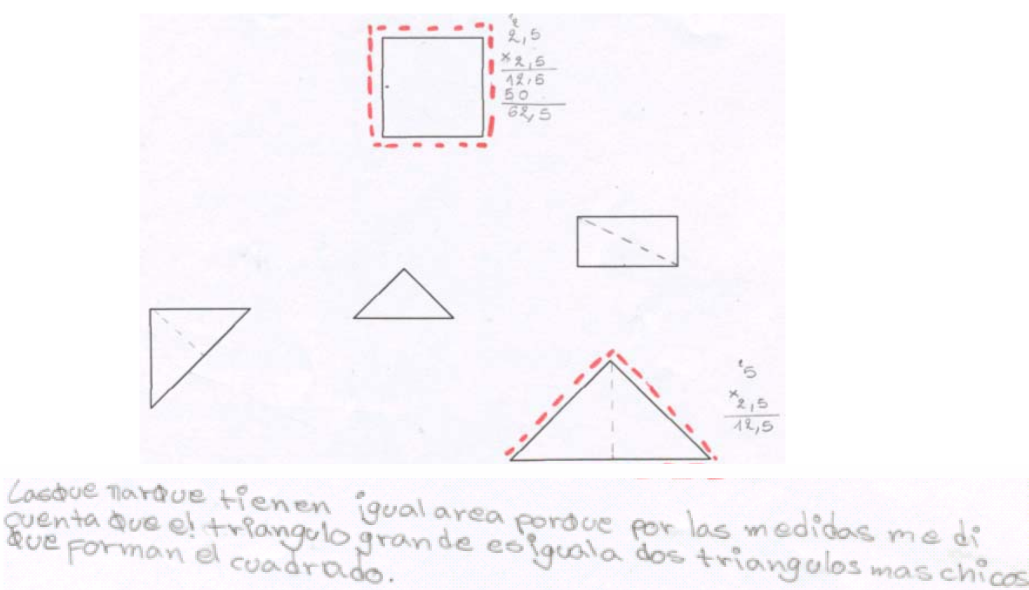


Figura 3

En la figura 3 se aprecia como se utilizan las transformaciones de romper y rehacer para comparar las áreas de las figuras dadas.

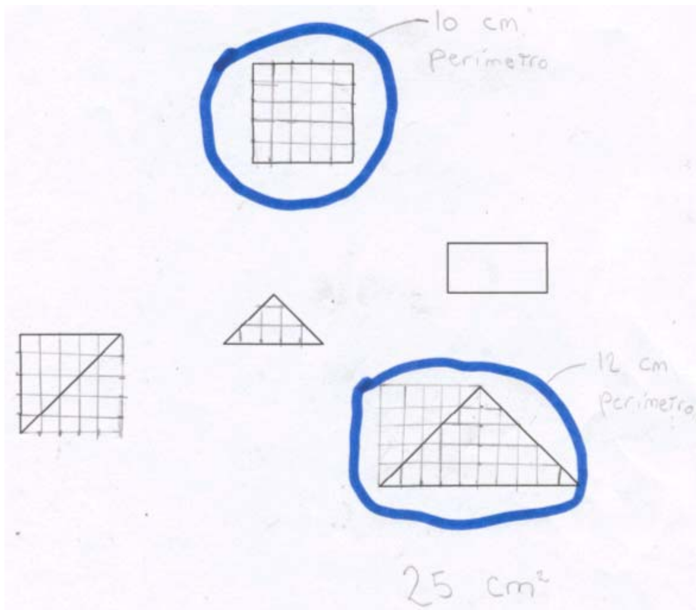


Figura 4

En la figura 4 también se utilizan las transformaciones de romper y rehacer pero además aparece el reparto equitativo por cuadriculado

Es importante remarcar lo que sobre la formación de conceptos geométricos sostiene Fischbein (1993) quien desarrolla la teoría de los conceptos figurales. "El concepto figural es una entidad única que permanece bajo la doble y muchas veces contradictoria influencia de los sistemas con que está relacionado (el conceptual y el figural). El sistema conceptual debería controlar los significados, las relaciones y las propiedades de la figura. Muchos errores en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales. Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones. Pero el desarrollo de conceptos figurales no es, generalmente, un proceso natural. Debería tenderse desde la propuesta de enseñanza a que los conceptos figurales se desarrollen naturalmente hacia su forma ideal. Una de las principales tareas de la Educación Matemática (en el dominio de la geometría) es crear secuencias didácticas que apunten a una cooperación estricta entre los dos aspectos, hasta la fusión en objetos unitarios". (Mántica et al, 2005, pp 27)

Bibliografía

Chamorro, M. y Belmonte, J. (1994): *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis. Madrid.

Chamorro, M (1995): "Aproximación a la medida de las magnitudes en la Enseñanza Primaria", en UNO Procedimientos en Matemáticas Nº 3.Graó. Barcelona. 31- 53

Del Olmo, M.; Moreno, M. Gil, F. (1993): *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid. Síntesis.

Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.; (1991): "Medida", en *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona. Labor. 88 - 181.

Douady, R. y Perrin, M. (1988): "Investigaciones en didáctica de matemáticas: Áreas de superficies planas en CM y 6éme". En *Hacer Escuela Nº9.* Escuela Nueva Soc. Coop. Ltda. Buenos Aires. 34 - 60.

Fischbein, E. (1993): " The theory of figural concepts" en *Educational Studies in Mathematics, 24*. 139 - 162.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company. Boston.

Mántica, A.; Marzioni, A.; Dal Maso, M. y Götte, M. (2002): "La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica". En *Educación Matemática*, Vol.14, N° 1. 111-119. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Mántica, A.; Götte, M. y Dal Maso, M. (2005): "Un camino para la comprensión del concepto de área". En *Yupana. Revista de Educación Matemática*, Número 2. Universidad Nacional del Litoral. Argentina. 25-40

Mc Knight , C.; Magid, A.; Murphy, T. y Mc Knight, M (2000): *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island:

UNA APROXIMACIÓN A LA NOCIÓN DE INFINITO A TRAVÉS DE FRACTALES

Lina Mónica Oviedo[1, 2]; Ana María Kanashiro[1]; Mónica Patricia Benzaquen[3]; Mónica Gorrochategui[3]
Facultad de Ingeniería Química- UNL[1]; Escuela de Enseñanza Media N° 442 "Juana del Pino de de Rivadavia" [2]; Escuela de Enseñanza Media Particular Incorporada N° 8106 "Don Bosco" [3]. Santa Fe- República Argentina.
linaoviedo@gigared.com; akanashi@fiqus.unl.edu.ar;
Campo de Investigación: Pensamiento Geométrico; Nivel educativo: Básico y Medio

Resumen

Este trabajo presenta una experiencia realizada con cuatro grupos de alumnos provenientes de dos escuelas locales pertenecientes a noveno año de la EGB y a primer año de la Educación Polimodal. En el mismo se investiga la construcción de la idea de infinito mediante la elaboración del fractal copo de nieve. Se analizan logros y dificultades.
Los fractales permiten un acercamiento entre las estructuras analíticas y las formaciones gráficas que muestran los procesos iterativos que repiten infinitamente procesos finitos. Dichos procesos permiten obtener una figura autosemejante.
La visualización de estos objetos permite la comprensión de los procesos de cambios de acuerdo a la transformación de la misma figura como así también cuestionarse el porqué de dicho cambio y si el mismo es o no controlable.

Introducción

Algunos autores proponen construir la idea del infinito utilizando algunos fractales simples con estudiantes de la escuela media. Fundamentan que se debe partir de un acercamiento geométrico del infinito ya que esto puede dar lugar a situaciones en las que pueden estar presente las características que definen y dan marco a la noción de infinito como un estado.
Los fractales permiten un acercamiento entre las estructuras analíticas y las formaciones gráficas que muestran los procesos iterativos que repiten infinitamente procesos finitos. Dichos procesos permiten obtener una figura autosemejante ya que todas las partes se repiten a distintas escalas.
Es bien sabido que los fractales tienen propiedades matemáticas específicas muy importantes:

1. La construcción de un fractal implica la ejecución de un algoritmo, el cual se debe repetir una y otra vez.
2. Son objetos que se detallan a través de representaciones gráficas y brindan un acercamiento analítico para explicar su comportamiento.

La visualización de estos objetos permite la comprensión de los procesos de cambios de acuerdo a la transformación de la misma figura como así también cuestionarse el porqué de dicho cambio y si el mismo es o no controlable.
La construcción de la curva de Von Koch (copo de nieve) es un ejercicio interesante para aproximarse a la idea de infinito.

La generación de esta curva es un proceso iterativo *ad infinitum* que se construye de la siguiente manera: se parte de un triángulo equilátero de lado de longitud **a**, cada segmento (lado) se divide en tres y el segmento del medio se sustituye por dos segmentos que forman con él un triángulo equilátero. Se repite la misma operación con los segmentos de longitud **a**/3, **a**/9, **a**/27, etc.
Cada segmento se transforma en cuatro segmentos más cortos en cada paso del proceso iterativo y al cabo de n iteraciones la longitud de cada uno de ellos es: **a** . $(4/3)^n$. A medida que el número de iteraciones aumenta, el valor del área encerrada por la curva converge a un valor finito, en cambio el valor del perímetro diverge.
Se parte de un problema geométrico y por lo tanto visualizable. La mayor dificultad es que la figura límite no es conocida ni se puede acceder a ella de una manera fácil.
Se puede trabajar tanto de manera gráfica como numérica con la sucesión generada, de perímetros y / o áreas, por la iteración, el término general puede escribirse como una función de n.
En las primeras generaciones, las figuras son fácilmente realizables por los alumnos. La curva límite no es fácil de describir: un perímetro expresado por una sucesión en la cual la expresión del término general no es tan complicada y que tiene propiedades curiosas que no pueden determinarse más que por pasaje al límite.
Según Bloch (2000) : *"los alumnos no tienen ninguna razón para poner en duda, a su nivel, el hecho que el límite del perímetro es el perímetro de la figura límite"* .
Una aproximación experimental del límite por el cálculo puede permitir conjeturar dos casos, el límite es finito (en este caso el área) o el límite es infinito (en este caso el perímetro) y si bien el alumno del nivel medio no dispone de los conocimientos suficientes para dilucidar este problema, resulta interesante presentarle ambos casos para que ellos puedan construir las nociones y criterios en lo que hace a dos sucesiones diferentes, poder comparar y concluir que no son de la misma naturaleza.

Objetivo de la investigación
Obtener información en forma cualitativa de dos grupos de alumnos, pertenecientes a distintos niveles de la enseñanza acerca del concepto que poseen sobre la noción de infinito.

Descripción de la Experiencia
Este trabajo consistió en la elaboración y posterior puesta en obra de una guía de autoaprendizaje acerca de la construcción de la curva copo de nieve (fractal de Von Koch).
En la misma se hizo hincapié en la construcción geométrica del fractal de Von Koch. Se trabajaron, además, las nociones de perímetro, área, límite finito e infinito.
Con todos los grupos se trató de buscar una expresión analítica para el cálculo del perímetro, analizar la evolución del mismo cuando n crece indefinidamente y ver qué ocurre con el área.

Marco Teórico
Se trabajó dentro de la perspectiva teórica de las construcciones mentales que está basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. En la construcción del conocimiento matemático se tienen en cuenta los siguientes parámetros: acciones, procesos, objetos y esquemas y los elementos escogidos, en este trabajo, tienen en cuenta la evolución adaptativa del conocimiento ante una situación.

Descripción de la muestra
Se trabajó con cuatro grupos distintos de alumnos, entre los años 2002 y 2004. A los mismos se les informó, previamente, acerca de las características del trabajo, se les explicó que debían construir una figura geométrica de determinadas características y contestar ciertas preguntas relacionadas a la construcción de la misma. En todos los casos estuvieron de acuerdo en colaborar y mostraron una excelente predisposición para hacerlo.
Los alumnos dispusieron de dos clases de 80 minutos cada una, excepto los alumnos del Grupo 2 que llevaron a cabo la actividad en una sola clase por razones organizativas.

Característica de los grupos:

Grupo 1: 33 alumnos, 15 varones y 18 mujeres correspondientes al noveno año de E.G.B. de la Escuela n° 442.
Grupo 2: 20 alumnos varones correspondientes al noveno año de E.G.B. de la Escuela n° 8106.
Grupo 3: 22 alumnos, 10 mujeres y 12 varones correspondiente al primer año Polimodal de Comunicación, Arte y Diseño de la Escuela n° 442.
Grupo 4: 27 alumnos, 8 varones y 19 mujeres correspondiente al primer año Polimodal de Ciencias Naturales de la Escuela n° 442.

Objetivos del trabajo.
Los objetivos planteados en la hoja de actividades fueron comprobar si el alumno era capaz de:

1. Construir el fractal copo de nieve siguiendo un algoritmo determinado.
2. Analizar la variación del perímetro en cada etapa de la construcción.
3. Generar la sucesión de los perímetros.
4. Encontrar la fórmula de recurrencia para el perímetro.
5. Determinar el comportamiento para n grande, siendo n el número de etapa.
6. Analizar la variación del área.
7. Determinar la convergencia o no de las sucesiones

Descripción de la guía.
En la siguiente tabla se presentan las características principales y el tipo de tarea solicitada en cada uno de los ítems.

Ítem	Tarea solicitada	Técnica empleada	Dispositivo	Gesto
a	Construir la curva copo de nieve hasta la etapa 3.	Geométrica	Hoja de papel cuadriculada. Lápiz. Regla.	Trazar segmentos iguales.
b	Determinar el n° de segmentos en cada etapa. Determinar la fórmula de recurrencia para la etapa n.	Geométrica. Numérica	Gráfica construida en el ítem a. Tabla de valores .	Contar segmentos en cada etapas y registrarlos en una tabla. Inferir el número de segmentos para las etapas posteriores.

c	Determinar la constante multiplicativa de una etapa otra.	Numérica	Tabla de valores	Analizar los valores registrados en la tabla . Calcular la constante.
d	Analizar la variación de la figura cuando el proceso se repite indefinidamente.	Geométrica. Numérica.	Gráfica. Tabla de valores.	Analizar como evoluciona la sucesión generada en el ítem b y registrada en la tabla de valores.
e	Determinar el valor del perímetro hasta la quinta etapa y generalizar para la etapa n.	Geométrico Numérico	Gráfica. Tabla de valores.	Calcular el valor del perímetro. Registrar los valores obtenidos en una tabla.
f	Determinar la constante multiplicativa de una etapa otra.	Numérico	Tabla de valores	Analizar los valores registrados en la tabla . Calcular la constante.
g	Determinar a que valor tiende el perímetro del fractal copo de nieve.	Geométrico Numérico	Gráfica. Tabla de valores.	Determinar la tendencia del valor del perímetro cuando el n° de etapas aumenta indefinidamente.
h	Analizar, de manera intuitiva, qué ocurre con el área.	Geométrico	Gráfica	Determinar la tendencia del valor del área cuando el n° de etapas aumenta indefinidamente.

Análisis de las respuestas

I- Alumnos de EGB:

- No tuvieron dificultades para construir la figura. El grupo 1 realizó la construcción de la misma hasta la etapa 3, en cambio el grupo 2 desarrolló sólo dos etapas, por una cuestión de falta de tiempo.
- Encontraron los términos de la sucesión generada por los números de segmentos en cada etapa.
- Encontraron el término general (enésimo) de dicha sucesión.
- Determinaron la constante multiplicativa para pasar de una etapa a otra en la determinación del número de segmentos.
- Generaron la sucesión de los valores de los perímetros hasta la etapa enésima. No pudieron encontrar la expresión general por sí solos y hubo que orientarlos.
- Hallaron, sin dificultad, la constante multiplicativa para el cálculo del perímetro de una etapa a la otra.
- Determinaron la tendencia del valor del perímetro cuando n aumenta indefinidamente.
- No pudieron determinar, en la gran mayoría de los casos, qué ocurre con el área.

Consideraciones generales acerca de las respuestas

Al ser interrogados sobre la tendencia del perímetro cuando n aumenta indefinidamente, la gran mayoría de los alumnos manifestó que el mismo crece y crece sin llegar a un valor determinado, en el grupo 1 algunos alumnos expresaron que el perímetro no tendrá fin y otros que tendía a infinito. Cuando se los interrogó acerca de lo que esto significaba manifestaron que era algo "muy pero muy grande" o lo asociaron a algún fenómeno físico, por ejemplo: " el espacio es infinito".
Casi todos los alumnos de los dos grupos no pudieron explicar que sucedía con el valor del área. Salvo dos o tres alumnos de ambos grupos manifestaron que el valor del área era finito. En el trabajo con el grupo 1 se les propuso encerrar la figura generada en la iteración 3 dentro de un cuadrado y se les pidió que observaran y analizaran como evolucionaba la figura interior, se los interrogó si en algún momento la figura saldría fuera del cuadrado y ver si podían sacar conclusiones. La mayoría no lo pudo hacer.

II- Alumnos de Polimodal:

- No tuvieron dificultades para construir la figura hasta la tercer etapa.
- Encontraron los términos de la sucesión generada por los números de segmentos en cada etapa.
- Encontraron, sin dificultad, el término general (enésimo) de dicha sucesión.
- Determinaron la constante multiplicativa para pasar de una etapa a otra en la determinación del número de segmentos.
- La mayoría de los alumnos de ambos grupos generó, sin dificultad, la sucesión de los valores de los perímetros hasta la etapa enésima. A algunos hubo que orientarlos para encontrar la fórmula de recurrencia.
- Hallaron, sin dificultad, la constante multiplicativa para el cálculo del perímetro de una etapa a la otra.
- Determinaron la tendencia del valor del perímetro cuando n aumenta indefinidamente.
- Determinaron, con dificultades, que ocurre con el área encerrada en la figura.

Consideraciones generales acerca de las respuestas
En cuanto a la tendencia del perímetro cuando n crece indefinidamente manifestaron que el mismo tiende a infinito y al ser interrogados acerca de qué significa infinito, en la mayoría de los casos lo asociaron a un fenómeno físico (infinito potencial).
Pudieron establecer que el área posee un valor límite finito, algunos trataron de encontrar la serie de los perímetros pero desistieron después de varios intentos.

Conclusiones
A partir de este trabajo se observa que, en los alumnos de EGB y Educación Polimodal, la noción de infinito no está visiblemente delineada y existe una predisposición a corresponder la misma a fenómenos físicos (infinito potencial). En consecuencia existe dificultad en la concepción de dicha noción, lo que requiere un tratamiento especial. La noción de infinito, la idea de algo que crece o decrece sin límite (infinito actual) no está clara para los alumnos.
El trabajo con el fractal copo de nieve es un buen principio para trabajar la noción de infinito asociado con el infinito actual y no sólo con el potencial. La generación de la

sucesión infinita asociada al perímetro de la figura aproxima a la noción de divergencia de la misma. Si los alumnos fueran capaces de generar la sucesión asociada al cálculo de las áreas, podrían comparar dos sucesiones diferentes con tendencias distintas lo que les permitiría concluir que no son de la misma naturaleza.
Consideramos que con este trabajo hemos dado un paso importante para acercar a los alumnos a la siempre conflictiva noción de infinito. Reconocemos que mucho queda por hacer y en esa dirección estamos trabajando en estos momentos.

BIBLIOGRAFÍA

Albert, J.; Cázares, M. y Castañeda, A. (1999). Construcción del infinito a través de fractales en estudiantes de secundaria. - Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. V12, (1) Pág. 1-6. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C. V.- México

Bloch, I. (2000). L'enseignement de L'analyse á la Charniere Lycée/ Université. Savoirs, Connaissances et Conditions Relatives á la Validation. These de la Universite Bordeaux 1- France.

Chevallard, Y. (1992). Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives Aportes par une Approche Anthropologique- Recherches en Didactique des Mathématiques- La Pensée Sauvage - Vol 12/1, pág. 73- 112. Francia.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar Matemáticas- El Eslabón Perdido entre la Enseñanza y el Aprendizaje. Ice- Horsori- Universitat de Barcelona- Barcelona- España

Devaney, R. (1990). Chaos, Fractals, and Dynamics- Computer Experiments in Mathematics- Addison- Wesley Publishing Company Inc.- U.S.A.

Oviedo, L. (2003). La enseñanza de los sistemas dinámicos discretos como medio para analizar dificultades cognitivas en cuanto a las nociones de función y número real en la transición escuela media- universidad- Tesis de Maestría.. UNRC.

Oviedo; Kanashiro; Colombini, (2005). Fractales. Un universo poco frecuentado- Editorial Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina.

Peitgens; Heinz O.; Jürgens; Hartmut; Saupe; Dietmar *et al* (1992). Fractals For The Clasroom- Strategic Activities- Vol. 1- Vol. 2- Editorial Springer- Verlag-New York- U.S.A.

Santaló, L. (1992). Conjuntos Fractales- Elementos de Matemática- Vol. VI- N° 23. Pág. 5-26 -Publicación Didáctico Científica de la Universidad CAECE.

Stewart, I. (2001). ¿Juega Dios A Los Dados? – Editorial Crítica– Barcelona – España

LA GEOMETRÍA EN LAS CULTURAS PRECOLOMBINAS

Oscar Sardella
Instituto Superior del Profesorado "J.V. González"
Buenos Aires. Argentina
oscarsardella@yahoo.com.ar

Campo de investigación: Pensamiento geométrico; Nivel Educativo: Medio, superior

Resumen

Luego de una breve introducción histórica, se hace referencia a las investigaciones científicas que nos indican aspectos no conocidos e inesperados sobre lo realizado por los indígenas que vivieron en América precolombina Se dividió el continente americano en áreas y se analizó en cada una de ellas y en diferentes períodos la realizado por las diferentes culturas en construcciones y en sus manifestaciones artísticas relacionadas con le geometría.

Desde los comienzos del siglo XVI, al difundirse en Europa la noticia del descubrimiento de un nuevo continente, comenzó el interés por los objetos que traían los navegantes desde estas lejanas tierras.

Pero estos objetos solo fueron una muestra de materiales preciosos en piezas que no eran representativas de ninguna manifestación artística.

Fue el pintor alemán Dodero unos de los primeros europeos quien en año 1520, en Amberes, apreció cierto valor artístico al analizar el tesoro que el jefe azteca Moctezuma envió a Hernán Cortes y que Carlos V quiso que se mostrara en varias ciudades.

Luego fueron muchos los artistas y estudiosos que se interesaron por todo lo realizado por los indígenas que vivían en el continente americano.

En los últimos años ha crecido el interés por el estudio de los pueblos aborígenes de América. Las investigaciones científicas nos indican aspectos no conocidos y a veces inesperados acerca de estos pueblos que nos llaman poderosamente la atención.

Es importante destacar que este mundo indígena que se creyó durante mucho tiempo que estaba formada por tribus aisladas entre si y de gran ignorancia, fue, por el contrario, dinámico y constituido por poblaciones relacionadas entre si y no solo conocedores de sus tierras, sino también de fenómenos astronómicos que los ayudaron a regular sus actividades.

La búsqueda de objetos precolombinos se inició en la época española, pero no en forma adecuada. Al descubrirse que los jefes eran enterrados con sus fabulosos tesoros, aparecieron los aventureros que se dedicaron a encontrar tumbas en Colombia y Perú.

La primera excavación científica se realizó en la segunda mitad del siglo XVIII. El médico francés E. Dombey, fue enviado a Perú por Luís XVI quien realizó durante cinco años excavaciones y estudios científicos Sus colecciones se encuentran en el museo del Hombre en París y algunas piezas en Madrid. Durante el siglo XIX se realizaron otros estudios y los objetos encontrados están en el Museo mencionado. Las mejores excavaciones fueron realizadas en México.

POBLAMIENTO DE AMERICA

¿Como se pobló el continente americano? Se duda si fue una población autóctona o se trata de inmigrantes llegados de otras partes del mundo.

Afirma Lehmann: "Todo el mundo concuerdan en admitir que el poblamiento de América se produjo por inmigración, pero las opiniones están divididas en cuanto al origen de los inmigrantes".
Mientras algunos sostienen un origen común, otros en cambio piensan originados en diferentes puntos y se encontraron en sucesivas oleadas, provenientes de Asia.
Entre los objetos más antiguos encontrados figuran puntas de piedra, que son láminas delgadas y puntiagudas, que fueron halladas en la localidad de Folsom en Nueva México. Es interesante destacar que estos objetos son comparables con los que encontraron en Solutré que datan del paleolítico, pero es difícil relacionar el tiempo entre estos dos continentes.

ÀREAS CULTURALES

Las culturas precolombinas mas importantes se localizan en México, en América Central y en la parte interior del sistema andino de América del Sur, o sea en Ecuador, Perú, Colombia, Bolivia, norte de Chile y el noroeste de la Argentina. En consecuencia el área de las grandes culturas es limitada, pero la variedad es de tal magnitud, que no se puede analizar conjuntamente su evolución y sus creaciones geométricas.
Mencionaremos las siguientes áreas:
1- Área Mesoamericana
2- Área Intermedia
3- Área andina
4- Área sur andina
5- Área amazónica
6- Área caribeña
7- Área fuego pampeana

ÁREA MESOAMERICANA

Entre los años 1000 AC a 300 DC.
<u>Cultura Chipicuaro</u>
Se destaca por la variedad de formas. Se pintaban el cuerpo desnudo con diseños geométricos variados. Las líneas de las figuras tenían tonos negros y de color crema. Las vasijas encontradas fueron moldeadas a mano y pintadas de rojo y blanco con diferentes formas geométricas.
Otras culturas de este período fueron la Cultura <u>Olmeca</u> y la Cultura <u>Tlatilco</u>
Los Olmecas fueron grandes escultores. Con ellos surge el arte monumental, en Meso América. Las figuras en cerámica son de formas geométricas muy simples y de rasgos faciales característicos.

Período comprendido entre los años 300 DC hasta los 900 DC.----------------

<u>Cultura Teotihuacan</u>
La cerámica es de color naranja. Se caracterizaron por la construcción de grandes jarrones. Se encontró un jarrón trípode con tapa, con importantes decoraciones geométricas.

<u>Cultura Maya</u>
La cerámica viene con decoraciones pintadas e incisas. Los temas más destacados son serpientes, monos y pájaros.

Cultura Azteca

Inicialmente debido a su poca habilidad artística adoptaron elementos de la cultura Teohiacan. Posteriormente crearon un arte severo muy riguroso y expresivo que reflejaban sus creencias religiosas y su espíritu bélico.

AREA ANDINA

Entre 1500 AC al 100 DC

Cultura Chavin

La cerámica Chavin refleja la importancia que se le daba a la religión y a los objetos ceremoniales. La decoración de la cerámica es a base de texturas contrastadas, que se obtenían cubriendo parte de la superficie con incisiones, punteados, cepillados y estampados con piedra. Algunos motivos son figuras estilizadas de animales.

Cultura Paracas

Recibe inicialmente la influencia de la cultura Chavin para practicar luego un arte muy diferente relacionado con la industria textil. La expresión artística llega a los nantos enteramente cubierto con motivos geométricos.

Entre 100 y 800 DC

Cultura Nazca

Se destaca por la decoración policroma, con frecuencia aparecen felinos con atributos humanos posteriormente comienza una tendencia hacia la abstracción y finalmente se pierde la identidad de sus motivos.

Cultura Tiahuanaco

La ciudad de Tiahuanaco fue un centro ceremonial importante que se destacó por la famosa Puerta del Sol cuyo motivo central se transforma en modelo que aparece representado en toda el área de influencia de Tiahuanaco. La cerámica es decorada con dibujos de felinos, serpientes y cóndores. Aparecieron vasos decorados con figuras similares a la cabeza humana.

Entre 800 D.C. y 1500 D.C.

Cultura Inca

Los Incas fueron grandes organizadores y constructores. Se destacaron por el trazado de ciudades y la calidad de los caminos y puentes. La cerámica Inca se destaca por sus platos redondos, con asa en un extremo y cabeza de animal en el otro. La decoración se basa en diseños geométricos. Hay diseños en base a triángulos, rombos y cuadriculados, utilizaron los colores negro, blanco y rojo.

Otras culturas de este período son: la Cultura Chimu y la Cultura Changay. Está última hizo una gran producción de textiles de alta calidad.

ÁREA SUR ANDINA

Entre 500 A.C. hasta 500 D.C.

Cultura Cienaga

La cerámica se caracteriza por el predominio del gris o el negro que aparece en los motivos incisos. Las formas son sencillas y aparecen en jarros, fuentes y urnas funerarias. La decoración es con motivos simples y geométricos, una línea ancha delimita las figuras cuyo superficie se rellena con líneas finas paralelas entre si.

Cultura Condorhuasi
La cerámica Condorhuasi se distingue por la variedad de sus formas, los objetos están decorados con motivos geométricos pintados en negro y blanco con fondo rojo.

Entre 500 D.C. hasta 1000 D.C.----------

Cultura La Aguada

La cultura Cienaga da origen a esta cultura. Se expresa claramente en su cerámica donde predomina la tradición del gris inciso. El motivo principal es el felino en cuya imagen personificaron el culto a las fuerzas de la naturaleza.

Otras culturas en este período son la Cultura Las Animas que presentan similitudes con la cultura Condorhuasi y Tiahuanaco. Y la Cultura San Pedro que es la continuación de la llamada con el mismo nombre del período anterior.
Desde 1000 D.C. hasta 1500 D.C.

Cultura Belén Santa María

Se caracteriza por sus urnas pintadas en negro sobre fondo blanco que utilizaron para sepultar niños. Hay trabajos metalúrgicos excelentes con llamativos discos y campanas en metal fundido.

Cultura Mapuche

Esta cultura subsiste hasta la actualidad. Su cerámica se distingue por sus jarros de cuerpo globular con fondo blanco y motivos geométricos rojos se han encontrado urnas funerarias decoradas. Se destacaron por sus trabajos en piedra. Confeccionaron hachas, pipas y diversos tipos de insignias.

Otras culturas de esta época son la diaguita que se caracterizó por jarros y cantaros en forma globular y vasos decorados con gran cantidad de pequeños dibujos geométricos. Y la Cultura Diaguita Clásica se caracterizó por los platos de paredes rectas y jarros decorados a base de una repetición de pequeños dibujos geométricos ordenadamente dispuestos.

Referencias bibliográficas

Greslevin, H. (1960). Monografía. Introducción al estudio del arte autóctono de la América del Sur. Argentina.

Lehmann, H. (1992.). Las culturas precolombinas. Argentina.: Editorial EUDEBA.

Museo chileno de arte precolombino. (2003), Culturas precolombinas. Chile.

Museo Inca Huasi. La Rioja. Argentina.

Museo Etnográfico. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires.

Pacheco, O. (2000). Etnogeometría para la etnomatemática. Bolivia. Editorial CEPD.

Rex, A. y Pérez, J. (1989) La Argentina indígena. Argentina: Editorial Paidos.

Sardella, O. (2001).La Geometría en la Argentina indígena. Números. 45.21-32.

Vera, N. (1980). El arte ornamental diaguita. Argentina. Editorial Castelvi. Santa Fe.

“APRENDER A APRENDER” – UNA EXPERIENCIA EN GEOMETRIA ANALITICA

Mónica B Caserio; Martha E. Guzmán; Ana María Vozzi
UNR- FCEIA; UTN- FRR – Argentina
mbcaserio@yahoo.com.ar; guzmartha@yahoo.com ; amvozzi@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento Geométrico ; Nivel educativo: Superior

Resumen:

El análisis de las manifestaciones de los alumnos, registradas a través de encuestas y entrevistas, acerca de sus dificultades para asumir con autonomía el propio aprendizaje, nos llevó a iniciar una investigación con el objetivo de elaborar actividades facilitadotas para aprender significativamente, para “aprender a aprender”.
Constituimos un equipo, involucrando a oros docentes de las cátedras de Álgebra y Geometría Analítica, orientando nuestras acciones por una parte a la discusión sobre los obstáculos que traban el aprendizaje, atribuibles a dificultades intrínsecas de la disciplina en estudio o a las propias posibilidades del alumnos o a errores pedagógicos y por otra parte a la búsqueda y selección de metodologías válidas para el logro de nuestro objetivo.

Introducción

El conocimiento es necesario para pensar. Con el fin de pensar en un dominio específico, una persona necesita conocimientos sobre ese dominio. Las conexiones entre saber, pensar y aprender son “profundas e inseparables” (Nickerson, 1988 Pág. 35). Uno no puede aprender o pensar sin conocimientos sobre los cuales pensar. (Como enseñar estrategias cognitivas en la escuela – Irene Gaskind y Thorne Elliot – Editorial Paidós Educador –Pág.85.
En el trabajo que se expone completa, en cierta forma, los resultados que fueran expuestos y publicados, como reportes en Relme 15 “Una estrategia didáctica para el aprendizaje de superficies” y Relme 17 “Evaluación de una experiencia didáctica”.
En esta última etapa atendemos fundamentalmente a las dificultades que manifiestan los alumnos para asumir tareas de aprendizaje autónomo. Estas fueron expresadas por ellos en las encuestas y entrevistas ya referidas en nuestro reporte publicado en el Relme 17.
Un aspecto recurrente que constatamos en dichas entrevistas estuvo dado por los comentarios de los alumnos sobre los problemas para comprender aquellas temáticas que no hayan sido desarrolladas por los docentes. Estos remiten a:

- ✓ Dificultades para comprender lo que se lee.
- ✓ Dificultades para decodificar (interpretación del lenguaje matemático)
- ✓ Inseguridad respecto de lo estudiado y/o aprendido.
- ✓ Dificultades para separar lo importante de lo accesorio.

A partir de esta realidad revisamos nuestras acciones. Expusimos en reuniones de cátedra las ideas vertidas por los alumnos, a partir de ahí un número considerable de docentes se involucró en la experiencia. Constituimos un equipo de trabajo en el cual se discutió para lograr una puesta a punto sobre el concepto de aprendizaje significativo y de las metodologías facilitadotas para el logro de dicho aprendizaje. También reflexionamos sobre los obstáculos que se presentaron, los que podrían clasificarse en:
Dificultades intrínsecamente atribuibles al tema de estudios, o a las posibilidades de aprendizaje del alumno o a errores pedagógicos

Marco Teórico

Matemáticas es la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma «poderoso, conciso y sin ambigüedades» (según la formulación del Informe Cockroft, 1985). Ese idioma se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo "hablen". En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias (los ejercicios).

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo.

Es la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería, con alumnos que necesitan ser formados en ella para hacer uso de la misma como instrumento de modelización y resolución de situaciones problemáticas, uno de los desafíos más importantes que debe ser encarado por los docentes de esa disciplina, ya que uno de los principales propósitos de la educación pre-graduada de los estudiantes de ingeniería es favorecer la independencia y creatividad del alumno, especialmente las destrezas para proponer y resolver problemas.

Cuando un estudiante se enfrenta a un problema matemático no se hace evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; hay que relacionar saberes procedentes de campos diferentes, hay que poner a punto relaciones nuevas

Los algoritmos que se suelen explicar en clase, o que aparecen en los libros de texto, resuelven grupos enteros de problemas. Lo que pasa es que si no situamos previamente los problemas a los que responden, estamos dando la respuesta antes de que exista la pregunta. Y en ese contexto no es difícil de adivinar el poco interés con que se recibe la misma

Esta idea nos la concretan autores como Schubauer, M., Anne L. y Clermont entre otros, (citados por Mugny, G y Pérez, J. 1988) quienes plantean la importancia de generar investigaciones sobre las categorías de pensamiento del estudiante y Nickerson, R y Perkins, quienes declaran que en la solución de problemas matemáticos y en la "enseñanza" de habilidades de resolución de estos; los procesos más relevantes son el razonamiento, la creatividad y la metacognición.

Estos tres procesos, consideramos, definitivamente se ven involucrados cuando una persona se enfrenta a un problema matemático. Por ejemplo ante determinado problema, el resolutor desde su saber matemático tiene que establecer relaciones y saber porque las establece (razonamiento), pero eso no es suficiente; tiene también, que ser capaz de generar alternativas de solución posiblemente nuevas para él (creatividad) y además debe tener la habilidad de saber cuando usar una información que ya posee (metacognición)

La metodología utilizada se enmarca en la ingeniería didáctica caracterizada por la experimentación en clase basada en el registro de casos y la forma de validación que es en esencia interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Experiencia

Para elaborar las situaciones de aula, con la intención de que los alumnos superen las dificultades, elegimos como contenido la sub unidad superficies de revolución y preparamos:

- Material bibliográfico.
- Guías de aprendizaje.
- Trabajos prácticos
- Cuadernillo electrónico para la utilización de un soft.

La situación a experimentar consiste en:

1. Formar grupos de trabajo para el abordaje de la unidad temática.
2. Distribuir entre los grupos los ejercicios y problemas que deberán resolver y presentar.
3. Planificar las entrega y defensas de los TP
4. Evaluar la experiencia de cátedra.

En el trabajo de aula se trató de verificar las etapas que, respecto del desarrollo de la percepción espacial, señalan R. Pallascio y otros:

- **Visualización**: después de haber observado un objeto, poder memorizar (suficientemente) imágenes parciales a fin de reconocerlos que son iguales o semejantes por cambio de posición o escala, entre una diversidad que posean el mismo croquis
- **Estructuración**: luego de haber visualizado un objeto, su “estructuración” consiste en poder reconocer y reconstruirlo a partir de sus elementos básicos constituyentes.
- **Traducción**: reconocer un objeto a partir de una descripción analítica y viceversa.
- **Clasificación**: reconocer clases de objetos equivalentes según diferentes criterios de clasificación.

Estas etapas permiten a su vez desarrollar las habilidades de observar (visualización), abstraer (estructuración), comunicar (traducción) y organizar (clasificación).

Un ejemplo representativo de la ejercitación solicitada es:

Obtener la ecuación de una superficie de revolución a partir de distintas curvas planas con el mismo eje de giro. Se pretende que el estudiante observe que la generatriz de una superficie de revolución no es única.

Se observa que, en general, los alumnos tienden a realizar una sustitución directa sin llegar a comprender el porqué de tal acción.

En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar. Pero, una vez localizado, se aplica y basta. Justamente, la proliferación de ejercicios en clase de matemáticas ha desarrollado y arraigado en los alumnos un síndrome generalizado; en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una somera reflexión, contestan: "lo sé" o "no lo sé", según hayan localizado o no el algoritmo apropiado. Ahí acaban, en general, sus elucubraciones.

Cuando el alumno aborda el estudio del tema, teniendo como objetivo la resolución de uno o más problemas tiende a buscar en el texto (libro y/o apunte) alguna situación similar a la planteada, de modo tal de “copiar” el procedimiento, sin intentar en demasía “comprender” los porqué de ellos. Por ejemplo cuando necesitan obtener la ecuación de una superficie de revolución conociendo una curva generatriz contenida en un plano coordenado ($F(x,z) = 0$, $y = 0$) realizan en forma “automática” la sustitución de “x” por $\sqrt{y^2 + x^2}$ sin profundizar en las razones de la misma. Esta circunstancia nos motivó a incorporar problemas que tiendan a “sacar” al estudiante de esa rutina impulsándolo a

que, a través de la visualización logre ubicarse espacialmente comprendiendo mejor el concepto.
En la práctica: Dadas las curvas C1; C2 y C3 obtener en cada caso la superficie de revolución que se genera al girar cada una de ellas alrededor del eje y.

$$C_1 \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad C_2 \begin{cases} y = z^2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad C_3 \begin{cases} y = z^2 + x^2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Para las curvas contenidas en planos coordenados (C1 y C2) la acción del alumno es sustituir mecánicamente y obtiene correctamente la ecuación de la superficie. En este caso la sorpresa es que en ambos casos la superficie es la misma. Cuando trabaja con la curva C3, se evidencia la aparición de un conflicto cognitivo (no responde al ejemplo teórico), la curva no está contenido en un plano coordenado y debe dejar de lado la sustitución automática para retomar la lectura comprensiva del texto.
En casi todas las oportunidades los estudiantes recurren a la consulta con el docente, poniéndose de manifiesto la dificultad para la comprensión de la situación planteada.
Observamos que los inconvenientes se sitúan en la ubicación espacial y en la correcta utilización del lenguaje matemático (ecuaciones).
La orientación brindada por el docente en esta circunstancia se basa en sugerirle que efectúe la representación gráfica (con el soft elegido) de ambas superficies con su correspondiente intersección, de modo tal que el aporte de la "visualización" ayude a la correcta interpretación de la situación planteada, utilizando recursos y conocimientos que aquellos han incorporado, y de la búsqueda de información en diversas fuentes. En particular, en el contexto de la investigación, la utilización de la herramienta informática (Computadora con acceso a Internet) juega un rol determinante para el desarrollo de la percepción visual.
La Facultad dispone de un laboratorio de informática con programas de cálculo simbólico (MATHEMATICA, MAPLE, DERIVE, etc.), al que los alumnos acuden con el objetivo de familiarizarse con su manejo, ya que los mismos admiten papeles muy variados en las interacciones entre los tres elementos fundamentales, (alumnos, profesor, instrumentos didácticos) constitutivos del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.
Es en esta instancia en que el alumno, si bien asistido por el docente, logra comprender la propiedad intrínseca de las superficies de revolución, pudiendo entonces justificar matemáticamente aquella acción antes automática y ahora razonada y visualizada.
Logrando entender que aquella expresión algebraica utilizada representa el radio de giro de la superficie de revolución en cada punto del eje de revolución y no una mecánica sustitución de variables.

A modo de conclusión:

Uno de los principales aportes que observamos es un avance importante respecto de la comprensión del lenguaje matemático, la relación entre las expresiones algebraicas (ecuaciones) y los lugares geométricos que representan (gráficas), ya no leen expresiones algebraicas (abstractas), sin contenido "registrable" sino que las han incorporado en su lenguaje cuasi habitual, cuando leen una ecuación realizan casi inmediatamente las relaciones representadas en ella y hasta consiguen en muchos casos "ver" la superficie o la curva en cuestión.
Aprovechando el diferente manejo del tiempo, docentes que colaboraron con nuestra propuesta, manifestaron que el abordaje de algunas unidades temáticas a través de esta estrategia les daba la oportunidad de interactuar con el alumno desde otro lugar, permitiéndole la profundización de los contenidos sin la urgencia que debido a la falta

de tiempo, la extensión de los programas y las multitudinarias clases deriva en la algoritmización prematura sin el debido proceso de maduración de los conceptos.
Una función siempre importante en el rol del profesor es crear situaciones de aprendizaje y fomentar la motivación para aprender. El papel del profesor consiste, cada día más en enseñar a aprender, a entresacar información, a investigar; en ayudar al alumno a trabajar.
El eje de toda actividad educativa es el alumno, para lo cual lo que interesa es desarrollar habilidades en él para que aprenda a aprender, a investigar, a comunicarse, a saber escuchar, a saber discutir, a experimentar, a actuar en grupo.
Hoy lo que se transmite está en cambio, vivimos una cultura dinámica cuya característica es la movilidad. Por esto nos parece más interesante que el hombre tenga habilidades para descubrir datos que necesita.

Bibliografía

Camargo, L. (1997). Aportes de la Psicología del Procesamiento de la Información a la Educación Matemática. *Revista EMA*. Vol. 2.

Dorado, C. (2000). Aprender a Aprender. Artículo de Internet. E-mail: cdorado@pie.xtec.es

Flores, A. (1991). ¿Qué es la educación Matemática?. Volumen 3.

Gómez, P (1992). Profesor No Entiendo. Una Empresa Docente: Universidad de los Andes:

González, C. Creatividad en el escenario Educativo Colombiano. Pedagogía y Currículo.

González, F. (2001). Acerca de la Metacognición. Artículo de Internet: e-mail: fgonzalez@dino.conicit.ve

Mialaret, G. Las Matemáticas Cómo se Aprenden, Cómo se enseñan. Aprendizaje Visor

Mugny, G. y Pérez, J. (1988). Psicología Social del Desarrollo Cognitivo. Antrhopos: España.

Moreno, L. Matemáticas y Educación : Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México. DF.

Nickerson. R., Perkins D. Y Smith E. Enseñar a Pensar

Orozco, M. (1997). "Comentario al Artículo Razonamiento Lógico Matemático en Contextos Culturales de Andalucía Shliemann." En Debate: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados en Psicología, Cognición y Cultura. Revista Colombiana de Psicología N 5 y 6. Universidad del Valle: Colombia.

Rico, L. (1990) Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática. Universidad de Granada, España.
Vergnaud. El niño y la realidad

Rizo, C y Campistrous, L (1996). Aprender a Resolver Problemas Aritméticos. Editorial Puebla: Ciudad de la Habana.

Romo, M. (1997). Psicología de la Creatividad. Paidós.

Santos, T. (1997). Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Iberoaméricana: México.

Shoenfeld, A. (1992). Learning to think Mathematically: Problem solving, Metacognition, and sense making in Mathematics. Handbook. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 23 N°3, May 1992.

Someren, M y Sandberg. J. (1994). The think aloud Meted a practical Guide to Modelling Cognitive Processes San diego CA Academic Press Inc.

HACIA LA CONFIGURACIÓN DE LA "GEOMETRÍA DEL PROFESOR" COMO CONTENIDO DE ENSEÑANZA

Natalia Sgreccia – Marta Massa – Adolfo Ordóñez
Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Univ. Nac. de Rosario) – Argentina
sgreccia@fceia.unr.edu.ar - mmassa@fceia.unr.edu.ar - ordoniez@fceia.unr.edu.ar
Campo de Investigación: Pensamiento geométrico; Nivel Educativo: Medio

Resumen:

Los modelos pedagógicos adoptados por los docentes se efectivizan en el aula a través de las configuraciones didácticas de sus clases. A partir de ellas los alumnos construyen sus aprendizajes vinculándolos con aspectos de los contenidos específicos.
Con respecto al profesor de Matemática, cabe preguntarse: ¿cómo influye en las configuraciones didácticas de sus clases su formación de base?, ¿cómo se ha ido modificando su relación con la Geometría como área de enseñanza?, ¿cuál es su mirada de la Geometría en la formación de un adolescente?
El presente artículo se basa en una parte del avance de una de tesis de Maestría en Didácticas Específicas. En particular, se centra en mostrar cómo se ha organizado el aspecto metodológico de la investigación.

Introducción:

Se entiende a la "geometría del profesor" como un complejo entramado entre su concepción disciplinar como resultante de su formación específica, sus valoraciones como contenido de enseñanza y su actuación en la clase.

En este trabajo interesa estudiar cómo la Geometría se configura vinculada a una etapa particular: la EGB 3. Este recorte en el estudio se realiza por los siguientes motivos:

- es en esta etapa de la escolaridad en la que el sujeto empieza a desarrollar el pensamiento formal, las abstracciones, con una toma conciencia de la conformación de estructuras que den cuenta del mismo.
- por ser la última etapa establecida como obligatoria en el Sistema Educativo Argentino donde se define cuáles son los conocimientos con los que un ciudadano debe contar, independientemente de sus elecciones académicas posteriores.
- la Geometría, entendida como una "Matemática del espacio", permite en este ciclo relacionar objetos concretos, del mundo sensible, con entidades teóricas; y al mismo tiempo formalizarlas y operar con ellas como ideas matemáticas.

Entre los objetivos generales del presente estudio se pueden mencionar:

- Indagar sobre los elementos que definen la posición del profesor ante los contenidos geométricos como contenido de enseñanza.
- Establecer las vinculaciones entre las configuraciones didácticas derivadas de la geometría del profesor y la reflexión en la clase.

Mientras que los objetivos más específicos se refieren a:

- Analizar la influencia del campo de formación académica del profesor en la conformación de su concepción de la Geometría como área de enseñanza en la EGB 3.
- Identificar las valoraciones docentes sobre la Geometría como área de enseñanza en la EGB 3.
- Caracterizar las actuaciones del profesor al abordar la enseñanza de los contenidos geométricos en la EGB 3.
- Encontrar indicadores de aspectos que caracterizan la actuación del profesor para realizar buenas prácticas en la enseñanza de la Geometría.

Una *buena enseñanza* podría pensarse como una práctica que, a través de la reflexión en el momento de la clase, busca la comprensión por parte de los alumnos. Pero este camino no siempre es claro y durante largo tiempo han existido desigualdades en la búsqueda y el logro de la *comprensión* o incluso no se le ha prestado atención.
Los *docentes necesitan saber* qué tópicos vale la pena comprender, qué deben comprender los alumnos sobre esos tópicos, cómo pueden fomentar la comprensión, cómo pueden averiguar qué es lo que comprenden los alumnos.
Se pretende una *educación* que les permita a los individuos ser pensadores críticos, plantear, analizar y resolver problemas, ser capaces de sortear la complejidad, ir más allá de la rutina y vivir productivamente en este mundo en rápido cambio. Los buenos desempeños de comprensión permiten a los alumnos aprender y expresarse por medio de inteligencias y modos de expresión múltiples.

Por otro lado, debido a que en su *entorno ambiental* las personas se encuentran rodeadas de objetos, formas, diseños y transformaciones, muchas de las propiedades geométricas están presentes en la vida cotidiana. Paulatinamente se va tomando posesión del espacio, orientándose, analizando formas y buscando relaciones espaciales de situación, de función o simplemente de contemplación y así se va adquiriendo conocimiento directo del entorno espacial.
Así, *la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría pueden ser caracterizados como el estudio de las experiencias espaciales*.
Un profesor de Matemática de EGB 3 tendría que empezar por preguntarse ¿cuáles son aquellos contenidos geométricos que un ciudadano, al margen de su labor profesional, debe poseer?, es decir, debería ir seleccionando aquellos tópicos trascendentes, configurando su geometría para generar prácticas que busquen el enriquecimiento de la "geometría del alumno".
En la *enseñanza obligatoria de la Geometría*[1] se fijan unos *objetivos mínimos* en función de los cuales deben programarse las actividades, sin olvidar que existen unos objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar tras su formación básica: "tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinar, aplicar conocimientos geométricos para modelizar, crear o resolver problemas reales, usar los diferentes lenguajes y representaciones, etc."
El *aprendizaje en Geometría* posee características especiales en cuanto a habilidades a desarrollar, metodológicas y adecuación de niveles. Cuando uno se plantea estudiar las bases del aprendizaje de la Geometría se deben distinguir dos aspectos: uno corresponde a

[1] Diseño Curricular Jurisdiccional de la Provincia de Santa Fe para la EGB 3

analizar cómo se construyen las relaciones espaciales en la mente de los individuos y el otro, es analizar los distintos niveles de conocimiento, que sobre las cuestiones geométricas se pueden tener.
Precisamente desde esta última posición, Piaget distingue distintos *niveles de organización espacial*, en correspondencia con diferentes etapas genéticas del desarrollo intelectual:
Etapa 1: sensorio-motor .... percepciones sensoriales de las relaciones espaciales, visión egocéntrica del espacio
Etapa 2: intuitivo .... representaciones intuitivas en un nivel preoperatorio
Etapa 3: concreto .... representaciones operatorias, operaciones reversibles con diferentes materiales concretos
Etapa 4: abstracto .... representaciones formales y abstractas, geometría deductiva de Euclides y Hilbert

El *dato de cómo conciben los estudiantes al espacio* es un indicador para el docente de las pautas para planificar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.
Es importante señalar que el estudio de un concepto matemático no se agota en un solo nivel y que debe existir una *sintonía* entre el nivel del alumno (geometría del alumno) y la instrucción que recibe (geometría del profesor).

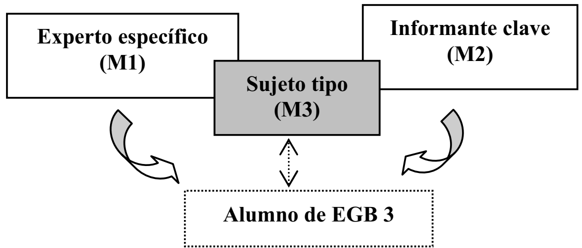
Estrategias metodológicas:

Se utiliza un enfoque metodológico fundamentalmente *cualitativo*, que permite indagar, analizar y comprender la geometría del profesor en sus prácticas de enseñanza que se desarrollan en la EGB 3.
El estudio es de naturaleza:
- *descriptivo* buscando especificar las propiedades y las características que asume el profesor en el tratamiento de la Geometría como área de enseñanza, tanto en los aspectos conceptuales como en los enfoques didácticos.
- *correlacional* buscando establecer las posibles relaciones entre los conceptos, categorías o variables emergentes de la etapa previa.

Las distintas *fases de la investigación* (A, B y C) se focalizan en:
A) Sujetos: Se trabaja sobre tres muestras intencionales:

M1: Una muestra de expertos: Especialistas en Matemática y en Didáctica de la Matemática elegidos de acuerdo a su trayectoria vinculada con la enseñanza de la Geometría. Los mismos son seleccionados para recoger información relacionada con el significado atribuido a la Geometría tanto como disciplina de estudio, su campo formativo, las dificultades implicadas en su enseñanza y aprendizaje, y las perspectivas desde las cuales se orienta la enseñanza en la EGB 3.
M2: Una muestra de informantes claves: Profesionales de distintas disciplinas (Psicología, Educación, Psicopedagogía, Epistemología) que aportan perspectivas teóricas para configurar la Didáctica de la Matemática, ya que ésta tiene lazos que la vinculan con dichas especialidades, si bien está claramente diferenciada de cada una de ellas.

M3: Una muestra de sujetos-tipo: Docentes en Matemática de la EGB 3 que se desempeñan actualmente en escuelas de la ciudad de Rosario tanto de gestión pública como privada.



B) <u>Diseño metodológico:</u> La investigación se desarrolla en dos etapas:

E1: búsqueda de información sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, las problemáticas específicas como área de conocimiento en general y en la EGB 3 en particular. Se utilizan como técnicas *entrevistas semiestructuradas abiertas* o *grupos enfocados*, siguiendo dos protocolos de instrumento según las muestras de sujetos: uno para M1 y M3 y otro para M2.

E2: diseño de *estudio de casos múltiples* que metodológicamente está recomendado para un análisis en profundidad cuando se busca un entendimiento lo más completo posible de la naturaleza de la situación objeto de estudio que, precisamente en esta etapa, es la configuración de la geometría del profesor desde sus prácticas de enseñanza. Las técnicas empleadas son: *observación de clases* (video, grabador y cuaderno de campo), *técnica flash* (a los alumnos: qué "les dejó" la clase de hoy, qué aprendieron) y *registros escritos* (evaluaciones y bibliografía)

C) <u>Procesamiento de la información:</u> La información recogida a partir de los distintos instrumentos es analizada desde diferentes dimensiones (con sus respectivas categorías).

<u>Dimensiones de análisis:</u>

Dim. 1: El docente como profesional de la educación.

- <u>La formación académica:</u>
  - Títulos
  - Año de egreso
  - Antigüedad docente
- <u>Antecedentes / Desempeño docente:</u>
  - Nivel de escolaridad
  - Adónde enseña Geometría

Dim. 2: El docente en acción:
lo actuado en el aula.

Dim. 3: El docente en su relación con el contenido geométrico:
lo disciplinar in situ.

Observación de clases

Dim. 4: El docente como ser humano
y su relación con la persona de sus alumnos.

Dim. 5: La geometría del docente desde lo específico declarado:
Didáctica de la Matemática.

5.1. Geometría dentro de la Matemática
5.2. Geometría en la Formación Docente
5.3. Geometría en EGB3
- <u>Tiempo destinado al tratamiento de contenidos geométricos:</u>
  Lo que se hace
  Lo que haría
  Por qué
- <u>Contenidos geométricos básicos en la EGB 3:</u>
  Geometría
  Medidas
  Geometría y Razonamiento
  Razonamiento matemático

5.4. Enseñanza de la Geometría

* <u>Atendiendo al destinatario (proceso de aprendizaje de los alumnos):</u>

- Cuándo un alumno tiene un concepto
- Obstáculos en el aprendizaje
- Comprensión alcanzada por los alumnos en el momento de la clase

* <u>Atendiendo a los preparativos (didáctica planificada) del docente:</u>

- Recursos didácticos específicos
- Presentación de propiedades
- Elección de estrategias

* <u>Atendiendo a lo que acontece en la clase:</u>

- Buena enseñanza en Geometría
- Dificultades en la enseñanza de ciertos contenidos geométricos
- Evaluación

5.5. Factores motivacionales hacia la docencia de Matemática

- Elección de la carrera

Dim. 6: La geometría del docente desde lo pedagógico: Didáctica General.

- Contexto de actuación del docente
- Aspectos relevantes de la formación docente
- Criterios de comprensión

<u>Avance de algunos aspectos detectados:</u>
Las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de ciertos contenidos, no necesariamente geométricos, muchas veces reflejan dificultades de los docentes en su enseñanza. Específicamente en Geometría, hay docentes que deciden no enseñarla por sus propias inseguridades: no tuvieron formación suficiente como en otros temas, no les gusta, no le dan importancia, etc.

Lo que el docente realiza efectivamente en sus clases, in situ, es un indicador concreto de qué importancia le asigna a los contenidos geométricos; por ejemplo, si los considera constituyendo un espacio propio o solamente complementario a otras partes de la Matemática. Además, evidencia de qué manera la clase se centra en torno a la reflexión del contenido geométrico y, también, la relación que él guarda con la Geometría como contenido de enseñanza, es decir, "la geometría del profesor".

El rol del docente es fundamental para permitirle aprender al alumno: un profesor de Matemática, desde sus propias valoraciones, en el momento que genera sus propias configuraciones didácticas, desde su receptividad y sensibilidad, puede contagiar el gusto por la Geometría a los alumnos. *Un docente puede hacerles vivir creativamente o mecánicamente la matemática a sus alumnos.*
Creativo, como sinónimo de novedoso, que siempre se renueva, independiente de los resultados, opuesto a lo mecánico en el sentido estrictamente memorístico o puramente formal y sin comprensión, a lo repetitivo a-críticamente. Que siempre va despertando nuevo interés y planteando nuevos interrogantes, como algo viviente, relacionado con todo, que nunca puede agotarse, que deja ver en libertad, discernir por sí mismo, sentir. Un *docente creativo* tiene, entre otras cosas, entusiasmo, ganas de enseñar, despierta en los alumnos intensidad en la percepción de las ideas, de su significado y de su significación o importancia, da respuestas originales, provoca reflexión, se preocupa y ocupa de generar comprensión.
Son elementos fundamentales de interés pedagógico: el método, la organización del aprendizaje, el contenido, los materiales usados, y también debería ser: la CREATIVIDAD para apuntar a lograr:
Adquisición progresiva de los niveles de razonamiento por parte del alumno
y ... aquello que más falta*:*
- asegurar *la intuición* de los conceptos e ideas abstractos
- *la exploración libre*
- el planteo de *dudas*, no sólo de *respuestas*

El profesor puede dar esa oportunidad

<u>Bibliografía:</u>

Alsina, C. (1995). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Editorial Síntesis.

García, J. y Beltrán, I. (1998). *Geometría y experiencias.* México: Editorial Addison Wesley Longman.

Gutiérrez, A. (1995). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Editorial Síntesis.

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas.* Buenos Aires: Editorial Paidós.

Rodríguez, G. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa.* Sevilla: Editorial Aljibe.
Santaló, L. (1993). *La geometría en la formación de profesores.* Buenos Aires: Editorial Red Olímpica.

Stone, M. (2003). *La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires: Editorial Piadós.

EL APRENDIZAJE ORIENTADO POR PROYECTOS COMO RECURSO PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS: UNA EXPERIENCIA

Liliana Collado, Claudia Guzner y Amalia Kaczuriwsky
Universidad Tecnológica Nacional- Facultad Regional Mendoza- Argentina
claudiaguzner@ciudad.com.ar

Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo-Pensamiento matemático avanzado-Resolución de problemas; Nivel educativo: superior.
Palabras claves: aprendizaje, competencia, indicadores.

RESUMEN

El aprendizaje orientado por proyectos es un enfoque pedagógico multi-metodológico y multi-didáctico, que, a partir de la socialización del conocimiento, privilegia ***un saber hacer o actuar*** frente a tareas que suponen conocimientos, saberes y habilidades que emergen en la interacción que se establece entre el individuo y una determinada situación. Su implementación potencia el pensamiento crítico, la búsqueda de fuentes de información adecuadas, el trabajo cooperativo, las habilidades de comunicación.
El presente trabajo tiene por finalidad presentar los resultados de la puesta en acto de este enfoque, que es llevado adelante en la asignatura Matemática Discreta del primer año de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Regional Mendoza, de la Universidad Tecnológica Nacional.

Introducción
Desde fines de los ´80, el contexto mundial se caracteriza por una rápida transformación social y cultural. En este escenario, la Universidad se ve obligada a reconceptualizar sus procesos de enseñanza aprendizaje, de forma tal que se adecuen a las demandas que establecen las nuevas normas de convivencia y acceso al trabajo.
En consecuencia, la enseñanza de la Matemática en ese nivel debe centrarse no sólo en la transmisión de contenidos, sino también en la posibilidad de aplicarlos a problemas abiertos, comunes y complejos (Schoenfeld, 1991).
Si bien los principios del aprendizaje basado en proyectos no son recientes (Dewey, 1910, Kilpatrick, 1918), la elección de *"actividades con intención*"- entendidas éstas como las que no se circunscriben sólo al aula- provee a los alumnos de verdaderas oportunidades para alcanzar un aprendizaje relevante.
La bibliografía registra experiencias de aprendizaje basado en proyectos realizadas en el nivel básico y medio (Duch, 2004, Ferguson, 1990, Schiefelbein, 1998) pero poco o nada se conoce acerca de su implementación en la enseñanza de la matemática en el nivel superior.
En este ámbito, vemos que el aprendizaje basado en proyectos sostiene el trabajo autónomo de los alumnos, propiciando su interacción con el medio e incrementando su capacidad individual de procesar información, construir elaboraciones teóricas, concepciones, interpretaciones y prácticas propias, y comunicarlas efectivamente. En otras palabras, favorece el desarrollo de competencias matemáticas.
A la luz de estas consideraciones, este trabajo relata una experiencia realizada en la asignatura Matemática Discreta de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Regional Mendoza, de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.

Reflexiones teóricas
Afirmamos que una competencia matemática es una conducta que se expresa en un saber hacer o actuar frente a tareas que plantean requerimientos matemáticos, que supone

conocimientos, saberes y habilidades que emergen en la interacción que se establece entre el individuo y una determinada situación.
Exige desarrollar estrategias que promuevan la explicitación de los modelos, permitiendo el reconocimiento de las similitudes y diferencias que existen entre ellos, para acceder a un mayor grado de complejidad y calidad de los mismos.
Bajo esta concepción, una competencia matemática tiene tres dimensiones:

1. la memoria: identificación y descripción de objetos matemáticos, de atributos, de relaciones, de propiedades y de operaciones;
2. la potencia: construcción de modelos y representaciones, ligada con el deseo de explorar, de investigar, de profundizar, de ampliar, motivada por actividades de aprendizaje que ponen en conflicto lo aprendido;
3. la comunicación: procesos de interacción social, desde los que se construyen los significados (hablar, escuchar) que desencadenan interpretaciones, tratamientos y producciones por parte de los estudiantes en momentos y circunstancias dadas.

Vemos que el aprendizaje basado en proyectos –entendidos éstos como una investigación en profundidad de un tópico- potencia el desarrollo de competencias matemáticas.
Al instrumentarlo en cada una de las siguientes cinco fases que se describen a continuación (Vélez, 1998) es posible relacionar cada una de ellas con alguna de las dimensiones de la competencia matemática (Figura 1).

1. asignación de roles: conformación de equipos de a lo más cinco pares y y generación de normas de convivencia al interior de cada equipo, distribución de responsabilidades para el cumplimiento de cada una de las tareas, designación de un relator, que será el responsable de la comunicación entre el docente director del proyecto y el equipo;
2. información complementaria: presentación a los alumnos, por parte del docente director, de las áreas temáticas a investigar, las que en apariencia, demuestran no tener relación con los contenidos curriculares;
3. espacio de discusión: construcción de la hipótesis del problema –correspondiente al área temática asignada- que cada equipo selecciona, interacción alumno/profesor, alumno/alumno;
4. responsabilidad compartida: búsqueda, al interior del equipo, del marco teórico curricular que subyace en el problema elegido, modelación y resolución dentro de ese marco;
5. análisis creativo: los alumnos defienden los resultados de la investigación realizada, y ofrecen en un foro de pares, las conclusiones obtenidas.

Fases	Dimensión de la competencia
Asignación de Roles	
Información Complementaria	***Reconocer*** teoría y conceptos
Espacio de Discusión	***Relacionar*** teoría y conceptos
Responsabilidad Compartida	***Aplicar*** teorías y conceptos
Análisis Creativo	***Comunicar*** resultados

Figura 1. Fases vs. dimensiones. Fuente: elaboración propia.

La experiencia
La puesta en acto de las ideas descritas conformó el modelo didáctico adoptado en la asignatura Matemática Discreta[1] a partir del ciclo lectivo 2004. En ella, se compatibili-

[1] Asignatura de primer año de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.

zaron cada una de las fases citadas con los pasos sugeridos por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Cuyo –S.E.C.Y T.- para los proyectos de investigación científica- Figura 2-.

FASES	FORMULARIO S.E.C.Y T.
Asignación de Roles	Director. Profesor a cargo del curso Co- director Alumnos investigadores
Información Complementaria	Formulario tipo Campo de aplicación
Espacio de Discusión	Denominación del proyecto Palabras claves: Resumen técnico Estado actual de conocimientos sobre el tema
Responsabilidad Compartida	Fomulación y fundamentación del problema a investigar Objetivos Hipótesis de trabajo Metodología
Análisis Creativo	Resultados esperados Informe final

Figura 2. Esquema de desarrollo de proyecto. Fuente: elaboración propia.

Las áreas temáticas sugeridas para la ejecución del proyecto por parte de los alumnos fueron: ***Diseño de circuitos impresos, el código de Huffman para la compresión de archivos, Almacenamiento y recupero de la información, Diseño eficiente de redes de comunicación,*** y ***Autómatas finitos.*** El contenido curricular subyacente es Teoría de Grafos.

Si bien el protagonismo del desarrollo del proyecto fue de los alumnos, los docentes desempeñamos a la vez un papel muy activo, perfilando los problemas de investigación planteados. Esto es porque en ocasiones los alumnos expusieron temas demasiado amplios. Otras veces, por el contrario, el material resultó muy reducido, haciéndose necesario complementarlo. A partir de lo que los alumnos pusieron en juego, canalizamos sus proyectos hacia aquéllos más promisorios que podrían llevarlos a nuevos y valiosos conocimientos o a la adquisición de importantes habilidades.

La implementación de fases se distribuyó de acuerdo con el cronograma de la Figura 3.

Fase	***1 Roles***	***2 Informar***	***3 Discutir***	***4 Compartir***	***5 Crear***
Fecha	14/03 al 25/3	Semana 28/3 Horario de consulta	Semana 11/4 Horario de clase	Semana 9/5 Horario de clase	Semana 30/5 Horario de clase 18/6 **FORO**

Figura 3. Cronograma de actividades. Fuente: elaboración propia

En este punto es importante señalar que el contenido curricular Teoría de Grafos no fue desarrollado por el docente sino hasta el momento de la institucionalización, que tuvo lugar en la primera parte del FORO.
Ese momento –el del FORO- se constituyó en una instancia de evaluación muy importante, tanto para los alumnos como para los docentes. Los primeros, defendieron los resultados de su investigación, en tanto que los docentes recibimos – a través de una encuesta anónima- las impresiones, opiniones y sugerencias que servirían para retroalimentar la metodología.
En el FORO los trabajos seleccionados para exposición y debate fueron:

- “Diseño eficiente de un cyber en la ciudad de Mendoza”
- “Código de Huffman para la compresión de archivos”
- “Parking asistido”
- “Los árboles como recurso para el almacenamiento y recupero de la información”
- “Estructura de una red computacional en una empresa”

Los resultados

Del análisis de la encuesta – Figura 4- se observa que el 63% de los alumnos manifiesta que la metodología le resulta interesante, a pesar de que el 75 % de ellos tuvieron dificultades durante el desarrollo del proyecto. Esto marca claramente la motivación que producen las prácticas investigativas. Está comprobado que si las personas participan en el establecimiento de la meta – en este caso, la concreción de un proyecto-, es más probable que acepten inclusive un objetivo más difícil que si se les asigna arbitrariamente una tarea. De esta forma, se establecen las bases para el compromiso y se sustenta la creencia individual de que son capaces de realizarla.
En cuanto al tipo de dificultades, el 27% de los encuestados manifiesta dificultad sobre los contenidos. Hay que recordar que los mismos no son explicitados por los docentes, sino que, por el contrario, uno de los objetivos a alcanzar es que los alumnos lleguen al modelo matemático subyacente. Aproximadamente el 13 % de los alumnos manifiesta problemas al interior del grupo.
Finalmente, resulta interesante destacar que más del 50% de los alumnos obtuvo una calificación superior a 5,25 puntos en la tercera evaluación individual escrita, que sobre Teoría de Grafos tuvo lugar con posterioridad al FORO, siendo que, en igual proporción y en evaluaciones anteriores, los mismos alumnos no superaron los 5 puntos.

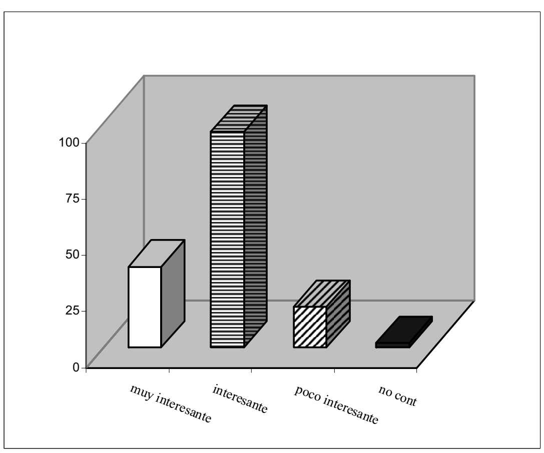


Figura 4.a Grado de satisfacción con la metodología

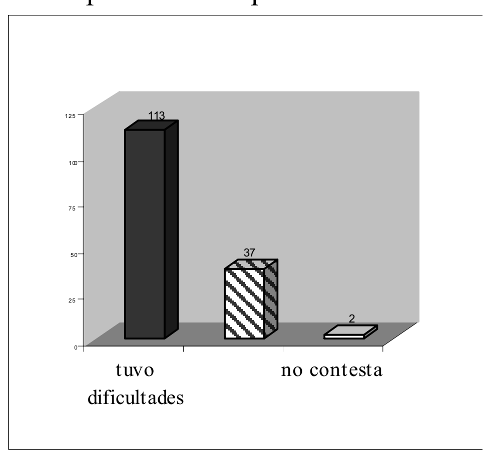


Figura 4 b. Presencia/ausencia de dificultades en el desarrollo del proyecto

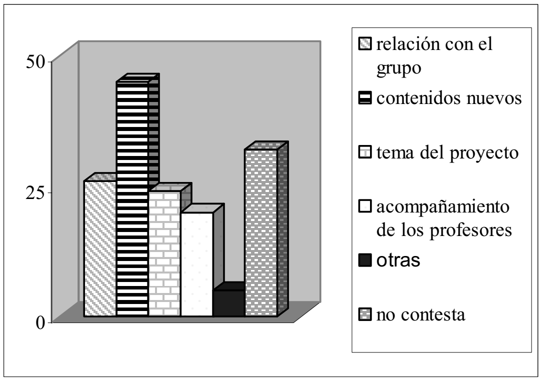


Figura 4 c. Causas de dificultades

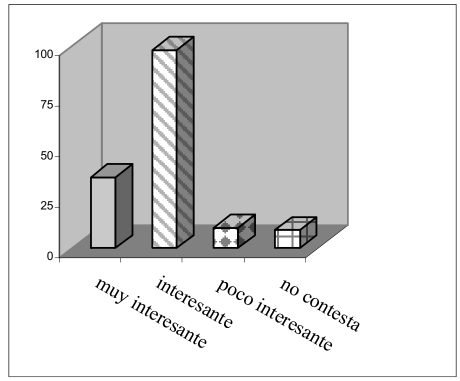


Figura 4 d. Grado de satisfacción con el foro

Figura 4. Opinión de los alumnos. Fuente: elaboración propia

La conclusión

El objetivo de este trabajo ha sido mostrar cómo el ***aprendizaje basado en proyectos*** estimula el nivel de desarrollo de competencias matemáticas en un caso de Educación Superior, reconceptualizando los procesos de enseñanza- aprendizaje.

La hipótesis establecida en la introducción se ve confirmada al mostrar que es factible generar un espacio de trabajo cooperativo cuyas metas son aún más amplias que las del propio aprendizaje de los contenidos curriculares, ya que influye sobre la forma en que:

a. se planifican, gestionan y mejoran las competencias de los alumnos tanto en el ámbito matemático como en el del desarrollo personal,
b. se identifican, desarrollan y amplían los conocimientos de los docentes y sus capacidades para acompañar a los alumnos en la búsqueda de realizaciones concretas,
c. se responsabiliza a los alumnos y se les da autoridad en referencia a la defensa de sus propias prácticas e investigaciones,
d. se organiza la tarea de los docentes alrededor del diálogo abierto con los alumnos para llevar a cabo esta empresa,
e. se reconoce el trabajo de los alumnos al poner en evidencia el mismo a través de una instancia pública como es el FORO, dando pautas claras de respeto para con ellos y de cuidado de sus saberes y proyecciones a futuro.

En síntesis, el ***aprendizaje basado en proyectos*** privilegia en los estudiantes la experimentación de su aprendizaje como un hacer propio, en el cual los docentes tenemos la tarea de asesorar, andamiar, supervisar y evaluar el trabajo personal de cada uno de ellos, en un ambiente de mutuo respeto.

Sostenemos que la implementación de este tipo de metodología es un cambio social, que trasciende la educación formal y se proyecta a futuro. Los resultados obtenidos en nuestra experiencia nos alientan a continuar con la tarea emprendida y nos obliga a “revalorizar el aprendizaje basado en proyectos y ponerlo en un lugar central en nuestras reflexiones y en nuestras acciones pedagógico-didácticas”.

Bibliografía:

Boud, D. (1985). *Problem-based learning in perspective*, in Boud, D J (ed) Problem-Based Learning in *Education for the Professions*. Sydney: Higher Education Research and Development Society of Australia.

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Informe de la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI. Barcelona: Ediciones Grupo Santillana, UNESCO.

Duch, B., Groh, S., Allen, D. (2004) *¿Por qué el Aprendizaje Basado en Problemas? Un Estudio de Casos del Cambio Institucional en la Educación de Pregrado. El poder del Aprendizaje basado en Problemas.* Editado por Duch, B., Groh, S., Allen, D.

Engel, C. (1991). *Not Just a Method But a Way of Learning*, in Boud D and Feletti, G (eds) *The Challenge of Problem Based Learning*. London: Kogan Page

Ferguson, S.; Jessup, E. ; Snow, P.; Stewart, A. y Valente, F. (1990). *Maths Projects & Investigations for years 11 & 12*. Thomas Nelson Australia..

ITESM (2003) *El método de proyectos como técnica didáctica*. Dirección de Investigación y Desarrollo Educativo. Material de Curso. Vicerrectoria Académica, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Guzner, C., Kaczuriwsky, A. y Collado L. (2003): *¿Qué logran los alumnos cuando logran comprender?* Actas del V-Seminario Educación Matemática. Editorial: Universidad Nacional de Luján, Ministerio de Cultura y Educación y UNESCO. ISBN n° 987-20239-1-3 Argentina. 2003. Digitalizado en CD.

Guzner, C., Kaczuriwsky, A. y Collado L. (2003): *El desarrollo de competencias matemáticas: análisis descriptivo de un caso.* Anuario XVI Encuentro Nacional III Internacional sobre la enseñanza de la Matemática. Editorial: Asociación Profesores en carreras de Ingeniería. Argentina. ISBN n° 950-42-0036-2. 2003. Digitalizado en CD.

Norman G, Schmidt HG. (1992): *The psychological basis of problem-based learning: a review of the evidence.* Acad Med; 67: 557-565.

Schoenfel, A. (1991): *La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas.* Ed. Aique. Buenos Aires.

Schiefelbein, E. (1998): *La gran oportunidad para que el profesor cumpla con lo que le demanda la sociedad.* Revista Docencia Colegio de Profesores de Chile Nº 6 . Septiembre Santiago, Chile.

Vélez, A. (1998): *Aprendizaje Basado En Proyectos Colaborativos En La Educación Superior* . Proyecto Conexiones Universidad EAFIT - UPB – COLCIENCIAS.

ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Nélida Priemer – Graciela Lazarte
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Jujuy – Argentina
gerenciarvj@arnet.com.ar – grlazarte@arnet.com.ar –

Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado; Nivel educativo: Superior

Resumen

La definición delta–epsilon de límite de una función en general no es comprendida cabalmente por los estudiantes, quienes frecuentemente separan lo conceptual de lo algorítmico, y por ello, en un intento de mejorar su proceso de enseñanza–aprendizaje, es que hemos diseñado una estrategia didáctica para la enseñanza de este tema para los alumnos del primer año de la Facultad de Ingeniería.Presentamos el diseño de la estrategia, las actividades propuestas y el resultado de la experiencia áulica.

Introducción:

En los cursos de Cálculo se requiere una buena comprensión en los temas por su correlatividad en el desarrollo de la asignatura, y uno de los pilares fundamentales es el tema límite de una función, operación generadora de la derivación y la integración. Este tema en general no es comprendido cabalmente por los estudiantes, quienes frecuentemente separan lo conceptual de lo algorítmico, y por ello, en un intento de mejorar su proceso de enseñanza–aprendizaje, es que hemos diseñado una estrategia didáctica para la enseñanza de este tema para los alumnos del primer año de la Facultad de Ingeniería.

En la enseñanza tradicional los temas que se desarrollan dependen de las definiciones matemáticas de los conceptos involucrados y en particular en el tema límite la definición delta–epsilon resulta poco significativa para los estudiantes, de manera que se pierde valor en su aprendizaje cuando se debe realizar las conexiones entre las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas debido a que " no entiende".

La presencia de prácticas sociales de la actividad humana como aproximar, buscar tendencias y otras, han permitido construir cierto tipo de conocimiento que conduce a la reconstrucción de significados en el área del Cálculo, significación que tuvimos en cuenta a la hora de diseñar esta estrategia.

Marco teórico

Como marco teórico del proceso de enseñanza–aprendizaje se considera la concepción de Vigotsky y de Piaget, la didáctica de la Matemática de Guy Brousseau, quien considera a las estategias áulicas como mediadoras del proceso de enseñanza–aprendizaje y el juego de marcos de Regine Douady.

La metodología de investigación que se ha utilizado para el diseño de esta estrategia se basa en la Ingeniería Didáctica. Se denomina ingeniería didáctica (Artigue, 1989) a una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no puede hacerse cargo. Es importante destacar que el término ingeniería didáctica se utiliza bajo un doble aspecto: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza aprendizaje. En este último, el término ingeniería didáctica, según Douady (1996) designa un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo por un profesor–ingeniero, con el fin de realizar un proceso de proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos y en función de las selecciones y decisiones del profesor.

Diseño de la secuencia didáctica

En este diseño, enmarcado en el proyecto de investigación que se propone mejorar la enseñanza del Cálculo, se ha tenido en cuenta los siguientes lineamientos generales:
- la actividad del alumno es la base fundamental para el aprendizaje,
- el docente dirige sus esfuerzos hacia la búsqueda de la actividad cognoscitiva del alumno, promoviéndola y orientándola ,
- la organización de actividades grupales de manera que las ayudas mutuas permitan superar las dificultades
- el aprendizaje debe ser significativo y autónomo

Se ha organizado la estrategia empleando los componentes funcionales como la motivación, orientación, ejecución y control y se ha tenido en cuenta las etapas orientadoras material, verbal y mental del proceso de asimilación con sus correspondientes niveles en el plano didáctico: familiarización, reproducción, producción y creación.

Metodología

La estrategia se puso en marcha recurriendo a un seminario de tres encuentros de 2 horas cada uno, al que se invitaba a participar a los estudiantes que estaban cursando Análisis Matemático de las distintas carreras de la facultad. Participaron 37 alumnos.
En el primer encuentro se ha familiarizado a los estudiantes respecto a la forma de trabajo en el seminario, condiciones de asistencia y aprobación y se han conformado los grupos de trabajo, los que debían mantenerse en los tres encuentros. Se familiarizó a los alumnos en el empleo de: entorno, entorno reducido, intervalo, inecuación o desigualdades, inecuación con valor absoluto y las relaciones de equivalencia entre ellos.
Las actividades propuestas fueron desarrolladas por los distintos grupos en distintas etapas conforme a su grado de dificultad con los correspondientes controles por parte de los docentes y al final se discutieron los resultados, saltaron los aciertos y los errores, y se institucionalizaron las equivalencias pertinentes.
A modo de ejemplo, mostramos una de las actividades desarrolladas en este encuentro. Cabe aclarar que esta actividad es una de las últimas de la secuencia diseñada para el primer encuentro.

Actividad: Complete la siguiente tabla de manera que cada fila contenga expresiones equivalentes:

Como intervalo	Como entorno	Con notación de valor absoluto
	$x \in E(-5, 3)$	

$x \in (-6, 4)$		
		$0 < \mid x - 3 \mid < 1$
	$x \in E^*(3, 0.02)$	
$x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$		
		$\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$

En el segundo encuentro se trabajó sobre la definición intuitiva de límite, las actividades propuestas transitaron del marco numérico al gráfico y se procuró que los alumnos pudieran expresar con palabras los resultados observados. También se propició la creación de problemas que involucraran límites y el intercambio de los mismos entre los grupos para su resolución y discusión. La resolución de estos problemas fue evaluada por el mismo grupo que la diseñó.

A cada grupo se entregó una tarjeta con las actividades, hubo 5 tarjetas diferentes, de igual consigna pero diferente función . La actividad siguiente es un ejemplo del trabajo realizado en el marco numérico

Actividad

1.- Dada $g(x) = (6x - 6) / (x^3 - 1)$

a) completar las tablas *(emplee seis cifras decimales)*

Nos aproximamos a 1 con valores de x menores que 1 ($x \to 1^-$)

x	0.2	0.5	0.9	0.99	0.995
g (x)					

Nos aproximamos a 1 con valores de x mayores que 1 ($x \to 1^+$)

x	1.8	1.5	1.1	1.01	1.005
g (x)					

b) Emplee los resultados de la tabla para sacar conclusiones respecto a los valores de la función en las proximidades de 1 .

c) Confeccione tablas para valores de x en las proximidades de 1 diferentes a la dada, una por cada integrante del grupo, y en conjunto elaboren conclusiones respecto a los valores de la función en las proximidades de $x_0 = 1$. Observe si las tablas brindan elementos que confirman o contradicen la conclusión anticipada en el punto anterior

d) Exprese en palabras el resultado del trabajo efectuado en los puntos anteriores y formalice esas palabras mediante la operación límite.

e) ¿Qué puede decir del valor de g en $x_0 = 1$?

En el tercer encuentro se plantearon actividades tendientes a encontrar un δ dado un ε determinado, en las cuales se trabajó gráficamente sobre ejemplos donde pudieron encontrar δ para cualquier ε y otros donde solo pudieron hacerlo para algunos ε . Para la expresión matemática de la aproximación a un punto se utilizaron las notaciones trabajadas en la actividad 1.

A modo de ejemplo, mostramos 2 actividades de la secuencia:

Actividad: Dada la función $f(x) = x/2 + 1$

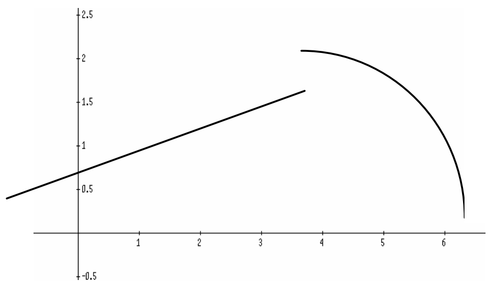
a) Obtener analíticamente el radio δ del entorno reducido de 4 de modo que los valores de f(x) pertenezcan al entorno E (3 , ½)
b) Idem si se quiere que f(x) pertenezca al entorno E (3 , 0.2)
c) Idem si se quiere que f(x) pertenezca al entorno E (3 , ε)
d) Indique con una implicación la relación que se cumple entre el entorno de x obtenido y el entorno de f(x) dado.

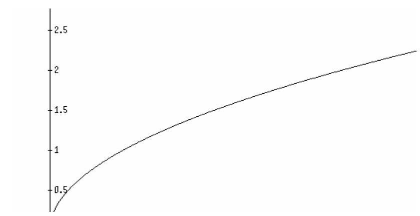
Actividad 4 A: Para el gráfico de cada función f:

a) Obtener gráficamente el radio δ del entorno reducido de x_o de modo que los valores de f(x) correspondientes pertenezcan E (L , ½)
b) Obtener gráficamente δ de modo que se cumpla la implicación:

I) $\forall$ x tal que $x \in E^*(4, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(L, 0.2)$

II) $\forall$ x tal que $0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 0.1$





Los estudiantes desarrollaron las actividades trabajando en pequeños grupos (no más de 4 alumnos).

A cada grupo se entregaron en forma secuencial, tarjetas con las actividades diseñadas para el desarrollo de la estrategia didáctica, en un plenario al final de la clase, se produjo el intercambio y discusión de los resultados de cada grupo además de la institucionalización de los conceptos analizados.

Los grupos se conformaron al azar, los estudiantes se agruparon según como estaban ubicados en el aula.

Desarrollo de las actividades. Comentarios.

En el primer encuentro se observó una buena disposición de los alumnos a trabajar sobre el concepto de límite, estos alumnos ya conocían este concepto debido a que el mismo había sido desarrollado en la asignatura de Cálculo que estaban cursando.

En esta jornada hubo dos momentos donde se procedió a la institucionalización de los conceptos y explicitación de los resultados de las actividades: en el primer momento se analizó el trabajo de los primeros problemas donde se transitaba de la notación de entorno a la de intervalo, en el segundo momento se analizó el trabajo de los problemas que agregaban las notaciones de desigualdad y valor absoluto. Las últimas actividades fueron las integradoras de la jornada, y dejaron preparado el camino para formalizar una aproximación en forma simbólica. Cada grupo debía entregar al día siguiente las actividades resueltas.

En el segundo encuentro, a partir de la presentación de la definición intuitiva de límite, se transitó del marco numérico al gráfico. Se discutió lo que pasaba con la función en el valor de análisis ya que las tarjetas contenían casos diferentes.

Además los grupos debían realizar la siguiente actividad:

Actividad: Proponer un enunciado con 4 condiciones en las que intervenga el límite que permita a los integrantes de otro grupo la representación gráfica de una función que las verifique.

Aquí se produjo el intercambio de enunciados. Dado que hubo aciertos y errores tanto en las resoluciones como en los enunciados propuestos, surgió un debate enriquecedor entre los diferentes grupos.
En el tercer encuentro se desarrollaron actividades diseñadas para que los alumnos descubrieran las exigencias o condiciones para la existencia del límite en términos de ε.
Se observó que al momento de formalizar la definición les resultó más simple expresar la proximidad mediante notación de entorno o bien empleando desigualdades sin valor absoluto.

Opinión de los alumnos

Al finalizar el seminario los estudiantes contestaron en forma individual un cuestionario que contenía preguntas de opinión como así también tres preguntas conceptuales relacionadas con la definición de límite. Se les pedía que opinaran sobre los aspectos positivos y negativos del seminario, sobre el trabajo grupal, sobre la claridad de las actividades propuestas, etc.
Sobre los aspectos positivos del seminario se mencionaron en orden de importancia:

- que fue un aporte para entender algo más del tema
- que valorizaron el trabajo en grupo, el buen diseño de las actividades y el mayor contacto con los docentes para aclarar dudas.

Sobre el trabajo en grupo, 34 de los 37 estudiantes opinaron que fue una buena experiencia para aprender.
Sobre los aspectos negativos los alumnos opinaron que debía haber tenido más duración el seminario, el 30% opinó que no tenía aspectos negativos para destacar. Algunos alumnos expresaron que esperaban que el seminario tratara sobre el cálculo algebraico de límite.
Transcribimos algunas opiniones interesantes vertidas en los cuestionarios mencionados:

. . . aprender de una forma más divertida, me ayudó a comprender más el tema y darme cuenta que tenía un conocimiento superficial a pesar que si me daban un límite, yo lo calculaba, ahora comprendo, no es solamente calcularlo con estrategias algebraicas sino que es más complejo e interesante…

. . . creo que lo bueno de este seminario es que uno puede llegar a profundizar en el significado de los conceptos, en este caso de límite, además no se basa en conceptos teóricos para explicar el mismo, sino con ejercicios que nos permiten ver con más claridad que significa o como se maneja un concepto que parece ser más complicado de lo que es, además tenemos la oportunidad de sacarnos las dudas a medida que avanzábamos y no dejar pasarlas. . .

. . . aporte lo que pensaba y me di cuenta que en algunos casos estaba equivocada. . .

. . . fue muy interesante ya que aprendí lo que no pensaba que iba a entender, que es teoría, como también a analizar los ejercicios antes de resolverlos. . .

Conclusiones

- Se observó que una vez conformados los grupos, hubo una rápida adaptación positiva a esa manera de trabajar en clase.
- En general los estudiantes captaron el sentido de la frase "suficientemente próximo" a un valor dado *(se dieron cuenta que no tenia demasiado sentido analizar la situación en valores medianamente alejados del punto de análisis)*
- Se desarrollaron actividades para que los alumnos descubrieran las exigencias o condiciones para la existencia del límite en términos de ε , en algunos grupos se logró el objetivo: *.. no para cualquier ε se cumple…* dijeron algunos estudiantes, *…no puedo encontrar δ …* dijeron otros.
- Se observó que al momento de formalizar la definición les resultó más simple expresar la proximidad mediante notación de entorno o bien empleando desigualdades sin valor absoluto.
- Las preguntas conceptuales referidas al tema límite del cuestionario fueron respondidas satisfactoriamente por el 86% de los alumnos.

En cuanto a la experiencia de construcción de la definición de límite se emplearon los marcos numérico, gráfico y algebraico. En este caso los marcos numérico y gráfico proporcionan una visión del concepto que debe complementarse con el marco algebraico para formalizar la definición.

Resultados

Por la situación en que actualmente ingresan los estudiantes a la Facultad de Ingeniería consideramos oportuno investigar para mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje del Cálculo.

Durante el desarrollo de las actividades se observó que la estrategia diseñada despierta mayor motivación e interés en el tema en los alumnos, trabajan con más entusiasmo posiblemente porque están compartiendo ideas con sus compañeros, y tienen más confianza en expresar sus opiniones o para pedir explicaciones cuando no entienden, lo que lleva que aprendan a su propio ritmo.

Así el trabajo en grupo para resolver la secuencia didáctica y el plenario final de cada encuentro permite que los alumnos logren una mayor comprensión y resignificación de los conceptos, lo que se observó en las preguntas que formulaban sobre los temas.

El empleo del juego de marcos en esta estrategia favoreció el aprendizaje significativo de los conceptos involucrados a partir de la intuición geométrica o numérica.

Bibliografía

Artigue, M. Douady, R. *et. al.(*1995*) Ingeniería didáctica en educación matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamericana .

Bixio, C. (2001) . *Enseñar a Aprender*. Rosario. Argentina . Homo Sapiens Ediciones

Stewart, J. (1999) *Cálculo. Conceptos y Contextos*. Mexico. International Thomson Editores.

Zill, D. (1987) *Cálculo con Geometría Analítica*. México. Grupo Editorial Iberoamericana.

Edwards, C. y Penney, D. (1996) *Cálculo con Geometría Analítica*. México. Editorial Prentice Hall

EXTREMOS CONDICIONADOS SIN MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Salvador Gigena
Universidades Nacionales de Rosario y de Córdoba – ARGENTINA
sgigena@fceia.unr.edu.ar , sgigena@efn.uncor.edu , sgigena@yahoo.com
Campo de Investigación: Pensamiento matemático avanzado; Nivel Educativo: Superior

Resumen: En este trabajo exponemos un método que permite determinar, y clasificar, los extremos locales condicionados de funciones diferenciables reales que, a la vez, prescinde totalmente del uso de los clásicos Multiplicadores de Lagrange. Tal método se basa en el uso adecuado de las herramientas clásicas del Análisis Matemático (Cálculo) a saber: Teorema de la Función Implícita, Regla de la Cadena (cálculo de las derivadas de funciones compuestas) y, ocasionalmente, Teorema o Fórmula de Taylor.

Introducción histórica

El *método de los Multiplicadores de Lagrange* representa uno de los más importantes mojones del Análisis Matemático, no sólo por su significación intrínseca e histórica, tanto en cuestiones teóricas como prácticas, si no también porque ha sido de uso casi excluyente cuando se trata de determinar y analizar extremos locales condicionados: (Apóstol, 1967; Fleming, 1965; Spring, 1985; & Williamson et al., 1972).
F. Zizza ha descripto dos métodos alternativos que eliminan a los multiplicadores de la prueba (test) de las primeras derivadas, o sea de aquella parte del cálculo en que se determinan los puntos críticos, y lo logra usando formas diferenciales. Sin embargo, él no indica un método alternativo para analizar los puntos críticos en cuanto a que sean máximos, mínimos o puntos de ensilladura locales: (Zizza, 1998).
Con respecto a esto último, i.e., al análisis de puntos críticos, D. Spring ha descripto como clasificar los extremos condicionados usando fuertemente los Multiplicadores de Lagrange: (Spring, 1985); mientras que en S. Gigena, M. Binia y D. Abud se los clasifica sin usar los multiplicadores, pero sólo en lo concerniente a la prueba (test) de las segundas derivadas, ya que aún se supone su utilización para calcular los puntos críticos: (Gigena et al., 2001) .
Es el propósito de este artículo presentar un método comprensivo para determinar y analizar extremos locales condicionados que, al mismo tiempo, representa una alternativa diferente a los tres artículos mencionados, así como a todos los trabajos anteriores sobre el tema: se excluye en tal método todo y cualquier uso de los Multiplicadores de Lagrange y/o de formas diferenciales. Los requerimientos teóricos del método son bastante sencillos: Teorema de la Función Implícita, Regla de la Cadena y, en aquellos casos en que falla la prueba de las segundas derivadas, la Fórmula de Taylor. Esto permitirá, sin duda, su fácil implementación futura en el trabajo áulico por parte tanto de profesores, en la instrucción, como de alumnos en la práctica receptiva.

Planteo y solución propuesta para el Problema

Se trata de implementar un método para determinar y clasificar extremos condicionados, que sea válido para todos los casos dimensionales, y co-dimensionales, posibles. En general tendremos una función $y = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, cuyos extremos deben ser determinados en el caso en que la función f está sujeta a condiciones subsidiarias dadas por un conjunto de ecuaciones $G_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0$, donde $i = 1, 2, ..., m$. Suponemos que las funciones dadas están definidas con suficiente diferenciabilidad en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$: $f : U \to \mathbb{R}$, $G : U \to \mathbb{R}^m$. Luego, el problema es determinar y clasificar los puntos críticos de f restringida al conjunto $S = \{X = (x_1, x_2, ..., x_{n+m}) : G(X) = 0, rango(G'(X)) = m\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ que es, en lenguaje matemático, una *variedad diferenciable inmersa*. Siendo la función definida por $G = (G_1, ..., G_m) : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, con su matriz Jacobiana definida por

$$G'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

y cuyo rango, como indicado, se supone igual a m, i.e., $G'(X)$ tiene m columnas linealmente independientes. Sea $X_0 = (a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+m}) \in S$ y supongamos por conveniencia, en primer lugar y sin pérdida de generalidad, que las m columnas linealmente independientes en $G'(X_0)$ son las últimas (si no fuera así, las variables pueden ser re-ordenadas): $\frac{\partial G}{\partial x_{n+1}}, \frac{\partial G}{\partial x_{n+2}}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_{n+m}}$. Llamando $U_0 = (a_1, ..., a_n)$ y $V_0 = (a_{n+1}, ..., a_{n+m})$, el Teorema de la Función Implícita establece que existe una función diferenciable $h = (h_1, ..., h_m) : N \to \mathbb{R}^m$ definida en un entorno abierto $N \subset \mathbb{R}^n$, de U_0, tal que $h(U_0) = V_0$ y $H(u) = (u, h(u)) \in S, \forall u \in N$. Por lo tanto, tenemos que

$$S \cap (N \times \mathbb{R}^m) = Grafico(h) = Imagen(H).$$

Esto es, la función $H : N \to \mathbb{R}^{n+m}$ efectúa una parametrización de la variedad diferenciable S en un entorno de X_0.

Podemos observar fácilmente que la función (restringida/condicionada)

$$f|_S : S \to \mathbb{R}$$

alcanza una extremidad local (máximo, mínimo o punto de ensilladura en X_0 sí, y sólo sí, la función (no condicionada)

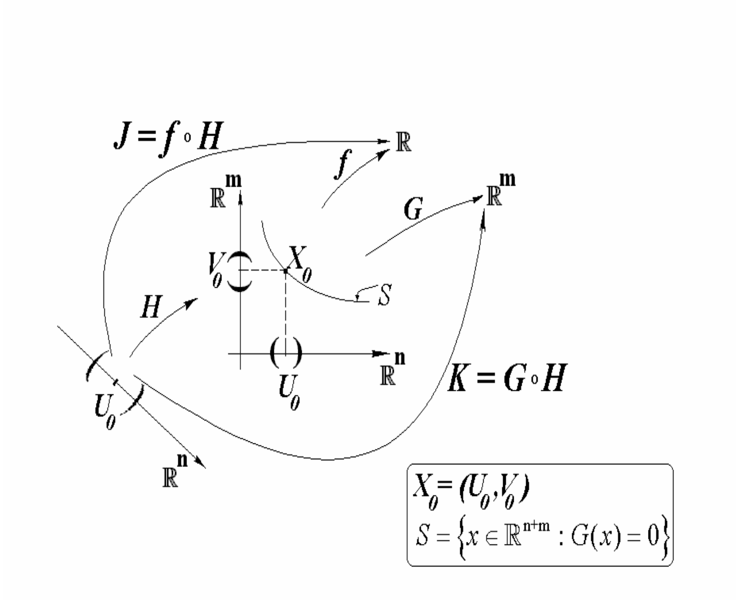
$$J := f \circ H : N \to \mathbb{R}$$

alcanza la misma clase de extremidad local en U_0.

En consecuencia, podemos reducir el problema original a la determinación y análisis de los posibles puntos críticos de la última función, siguiendo los pasos requeridos en el problema correspondiente para extremos libres, <u>no condicionados</u>.

Este último problema sería bastante fácil de resolver si conociéramos la expresión explícita de la función $H(u) = (u, h(u))$.. Sin embargo, como uno puede percibir en la mayoría de los ejemplos, resulta muy difícil, y a veces aún imposible, conseguir tal expresión. Así, en estos casos tenemos que computar las derivadas sucesivas de la función h implícitamente, usando el hecho de la función K obtenida por composición de G con H se anula idénticamente, i.e., $K := G \circ H = G \circ (Id, h) \equiv 0$

en un entorno abierto de $U_0 = (a_1,....,a_n)$, $N \subset \mathbb{R}^n$. Podemos representar toda la situación en el gráfico siguiente:



Recordemos que estamos suponiendo que tanto la función a valores reales f como la función a valores vectoriales G son suficientemente diferenciables. Por ejemplo, tenemos que requerir clase $C^{(2)}$ para desarrollar el test de las segundas derivadas. En tal caso, el gradiente y la matriz Hessiana de $J := f \circ H$ pueden ser calculados como se indica a seguir: denotamos $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a las n primeras coordenadas del punto variable X que tiene coordenadas $X = (x_1,....,x_n,x_{n+1},....,x_{n+m})$ y sean $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ las últimas. Entonces, la función h está definida por : $h(u) = (v_1(u), v_2(u),..., v_m(u))$. Además, denotaremos con G'_v a la matriz cuya $i-e'sima$ fila consiste de las derivadas parciales de G_i respecto a las variables $v_1, v_2,..., v_m$, i.e., en la expresión (1) de la matriz Jacobiana de G, tomamos la submatriz cuadrada formada por las últimas m columnas:

$$G'_v = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial G_1}{\partial v_2} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial G_m}{\partial v_1} & \dfrac{\partial G_m}{\partial v_2} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial v_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_{n+1}} & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial G_m}{\partial x_{n+1}} & \dfrac{\partial G_m}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Así mismo, denotaremos con subíndices a las derivadas sucesivas de las funciones a valores reales y vectoriales, separando con una coma cuando necesario. Por ejemplo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := f_i\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := f_{ij}\,;\ \frac{\partial G}{\partial x_i} := G_i\,;\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} := G_{ij}\,;\ \frac{\partial G_{\alpha-n}}{\partial x_i} := G_{\alpha-n,i}\,;\ \frac{\partial^2 G_{\alpha-n}}{\partial x_i \partial x_j} := G_{\alpha-n,ij}$$

.

Los rangos de variación de los índices serán: letras latinas minúsculas indican variación del índice 1 al n, i.e., $1 \le i, j, k, l... \le n$; letras griegas minúsculas van de $n+1$ a $n+m$, i.e., $n+1 \le \alpha, \beta, \gamma, \lambda, ... \le n+m$. Así, la matriz G'_v puede indistintamente ser escrita como

$$[G'_v] = \left(\frac{\partial G_{\alpha-n}}{\partial v_{\beta-n}}\right) = \left(\frac{\partial G_{\alpha-n}}{\partial x_\beta}\right) = \left(G_{\alpha-n,\beta}\right).$$

Y, puesto que es no-singular, denotaremos a su inversa por $[G'_v]^{-1} := \left(G^{\alpha\beta}\right)$.

Ahora, puesto que la función K se anula idénticamente en un conjunto abierto, i.e., $K(u) := G(u, h(u)) \equiv 0,\ \forall u \in N \subset \mathbb{R}^n$, también se anulan idénticamente todas las derivadas de esta función. En particular, para las primeras derivadas, respecto a u_i, obtenemos, usando también la Regla de la Cadena: $K_{\alpha-n,i} = G_{\alpha-n,i} + \sum_\beta G_{\alpha-n,\beta} h_{\beta-n,i} = 0$.

Entonces, obtenemos que: $h_{\gamma-n,i} = -\sum_\alpha G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,i}$.

En forma similar, del hecho de que las segundas derivadas de K también se anulan :

$$K_{\alpha-n,ij} = G_{\alpha-n,ij} + \sum_\mu G_{\alpha-n,i\mu} h_{\mu-n,j} + \sum_\beta G_{\alpha-n,\beta j} h_{\beta-n,i} + \sum_{\beta,\nu} G_{\alpha-n,\beta\nu} h_{\beta-n,i} h_{\nu-n,j} + \sum_\beta G_{\alpha-n,\beta} h_{\beta-n,ij} = 0$$

también obtenemos

$$h_{\gamma-n,ij} = -\sum_\alpha G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,ij} + \sum_{\alpha,\mu,\rho} G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,i\mu} G^{\mu\rho} G_{\rho-n,j} + \sum_{\alpha,\beta,\rho} G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,\beta j} G^{\beta\rho} G_{\rho-n,i} - \\ - \sum_{\alpha,\beta,\nu,\rho,\mu} G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,\beta\nu} G^{\nu\rho} G_{\rho-n,j} G^{\beta\mu} G_{\mu-n,i} \ .$$

Así, para la función $J = f \circ H$ calculamos las primeras derivadas $\frac{\partial J}{\partial u_i}(u)$:

$$J_i = f_i + \sum_\alpha f_\alpha h_{\alpha-n,i} = f_i - \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha G^{\alpha\beta} G_{\beta-n,i} \ .$$

A seguir, computamos las derivadas de esta última con respecto a la variable u_j, obteniendo a partir de las expresiones anteriores, y usando también nuevamente la Regla de la Cadena, la ecuación que representa cada una de las componentes de la Matriz Hessiana de la función J:

$$J_{ij} = f_{ij} - \sum_{\alpha,\beta} f_{i\alpha} G^{\alpha\beta} G_{\beta-n,j} - \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha j} G^{\alpha\beta} G_{\beta-n,i} + \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} f_{\alpha,\beta} G^{\alpha\mu} G_{\mu-n,i} G^{\beta\nu} G_{\nu-n,j} + \\ + \sum_\gamma f_\gamma \begin{pmatrix} -\sum_\alpha G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,ij} + \sum_{\alpha,\mu,\rho} G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,i\mu} G^{\mu\rho} G_{\rho-n,j} + \sum_{\alpha,\beta,\rho} G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,\beta j} G^{\beta\rho} G_{\rho-n,j} \\ - \sum_{\alpha,\beta,\nu,\rho,\mu} G^{\gamma\alpha} G_{\alpha-n,\beta\nu} G^{\nu\rho} G_{\rho-n,j} G^{\beta\mu} G_{\mu-n,i} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, para determinar los puntos críticos, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} J_i = 0,\ i = 1,2,\dots,n \\ G_{\alpha-n} = 0,\ \alpha - n = 1,2,\dots,m \end{array}\right\}$$

Observemos que éste es un sistema de $n+m$ ecuaciones en las $n+m$ incógnitas representadas por las componentes del punto variable $X=(x_1,....,x_n,x_{n+1},....,x_{n+m})$.
A seguir, para clasificar los puntos críticos encontrados, podemos proceder a analizar la Hessiana $Hess(J):=\left(J_{ij}\right)$, cuyas componentes J_{ij} están descriptas más arriba en términos de las derivadas de las funciones dadas f y G, hasta el segundo orden
Finalmente, en caso de que el test de las segundas derivadas falle, i.e., que no permita obtener la clasificación total, al menos en algunos puntos, podemos proceder a calcular las derivadas parciales de orden superior de la función J y, usando además adecuadamente la Fórmula de Taylor, obtener la deseada clasificación de todos los puntos críticos.

Observaciones:

1) Al comienzo de nuestro argumento supusimos que las m columnas linealmente independientes de la matriz $G'(X_0)$ eran las últimas y que si así no fuera las podríamos re-ordenar. Puesto que puede existir en dicha matriz más de un conjunto de m columnas linealmente independientes será necesario, como es obvio, estudiar todos los otros posibles casos a fin de determinar puntos críticos <u>adicionales</u> de la función f.
2) Como hemos expuesto, el método presentado aquí prescinde del uso de los Multiplicadores de Lagrange para la determinación y clasificación de extremos condicionados. Sin embargo, para ciertas cuestiones de aplicación, como por ejemplo en Economía, puede ser deseable, y aún necesario, la obtención de los valores concretos de los mismos. Pues bien, vamos a demostrar a que los históricos multiplicadores, que no son ya parte del problema, también pueden ser obtenidos como parte de la solución del método aquí expuesto, sin prácticamente esfuerzo significativo adicional En efecto, supongamos haber calculado los puntos críticos y sea X_0 uno de ellos. Luego el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange asegura que existen $\lambda_1,....,\lambda_m$ tales que $\left(f+\lambda_1 G_1+\cdots+\lambda_1 G_1\right)'(X_0)=(0,....,0)$. Puesto que las coordenadas de X_0 son ya conocidas, la última condición representa un sistema lineal de $n+m$ ecuaciones en las m incógnitas $\lambda_1,....,\lambda_m$. Sin embargo, por la suposición hecha en el desarrollo del método, con referencia a tomar las últimas m columnas de $G'(X_0)$ como linealmente independientes y formar la submatriz cuadrada representada en la ecuación (2), podemos a la vez reducir tal sistema, al de m ecuaciones con m incógnitas dado por:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial G_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial G_1}{\partial v_2} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial v_m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial G_m}{\partial v_1} & \dfrac{\partial G_m}{\partial v_2} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial v_m}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial v_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial v_m}\end{bmatrix},$$

donde todas las derivadas están evaluadas en X_0. Por lo tanto, como solución de tal sistema reducido, los multiplicadores se representan a través de la expresión

$$\lambda_{\beta-n}=-\sum_{\alpha} f_{\alpha-n}\left(X_0\right)G^{\alpha\beta}\left(X_0\right).$$

Comparación con los otros métodos

1) F. Zizza ha descrito dos métodos alternativos que eliminan a los multiplicadores de la prueba (test) de las primeras derivadas, o sea de aquella parte del cálculo en que se determinan los puntos críticos, y lo logra usando formas diferenciales. Sin embargo, él no indica un método alternativo para analizar los puntos críticos con respecto a la posibilidad de que sean máximos, mínimos o puntos de ensilladura locales: (Zizza, 1998).
2) Con respecto al análisis de puntos críticos, D. Spring ha descrito como clasificar los extremos condicionados usando fuertemente los Multiplicadores de Lagrange: (Spring, 1985); mientras que S. Gigena, M. Binia y D. Abud los clasifican sin usar los multiplicadores, pero sólo en lo concerniente a la prueba (test) de las segundas derivadas, ya que aún se supone su utilización para calcular los puntos críticos: (Gigena et al., 2001) .
3) En cuanto a los tiempos de computación F. Zizza ha determinado, experimentalmente usando Mathematika, que su método para el test de las primeras derivadas es más rápido que el que usa los multiplicadores (15 a 20 % de este último). El método aquí presentado es, en tal aspecto, prácticamente igual al de Zizza.
4) Además, y como dijéramos, en caso que el test de las segundas derivadas falle en lo concerniente a la clasificación, siempre el método nos permite recurrir a las derivadas superiores.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1967). *Calculus. Volumen II*. Waltham, Massachussetts, USA: Blaisdell Publishing Company.

Fleming, W. (1965). *Functions of Several Variables*. Reading, Massachussetts, USA: Addison-Weslley Publishing Company.

Gigena, S., Binia, M., y Abud, D. (2001). Extremos Condicionados: Una propuesta metodológica para su resolución. *Revista de Educación Matemática 16* (3), pp. 31-53.

Spring, D. (1985). On the Second Derivative Test for Constrained Local Extrema. *American Mathematical Monthly 34*, pp. 631-643.

Williamson, R. Crowell, R. y Trotter, H. (1972). *Calculus of Vector Functions*, *3rd edition*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall Inc..

Zizza, F. (1998). Differential Forms for Constrained Max-Min Problems: Eliminating Lagrange Multipliers. *The College Math Journal 29* (5), pp. 387-396.

DISTINTAS FORMAS DE PENSAR EL INFINITO. CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Virginia Montoro[1] - Nora Scheuer[2]
[1] Centro Regional Bariloche. Universidad Nacional del Comahue (Rep. Argentina)
[2] CONICET – Universidad Nacional del Comahue (Rep. Argentina)
vmontoro@crub.uncoma.edu.ar - vmontoro@gmail.com
Campo de Investigación: Pensamiento Matemático Avanzado ; Nivel Educativo: Superior
Palabras clave: infinito / concepciones / universidad / clasificación

Resumen
Se realizó una clasificación de 120 estudiantes de distintas carreras universitarias en base a sus concepciones sobre la noción de infinito matemático. Se utilizó un método de clasificación jerárquica, posterior a un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) de estos sujetos descriptos por sus respuestas a un cuestionario escrito, individual que indaga sobre está noción; resultando una clasificación en 4 clases. Presentamos la caracterización de las mismas y las posibles ideas asociadas a cada grupo de sujetos, ya sean estas correctas o alternativas; también la vinculación de estas con la carrera que cursan y avance en la misma. Ilustramos cada clase con las justificaciones literales dadas por los sujetos más representativos a fin de mostrar con las propias palabras de los estudiantes las ideas características de las distintas grupos.

INTRODUCCIÓN

En la matemática de los primeros años de universidad se trabaja con diversos conceptos que involucran la noción de infinito como un punto destacable y problemático; este concepto suele utilizarse con diversos significados, ya sea para señalar un *proceso,* como para identificar un *atributo* o como un *objeto.* Es habitual que estos usos y significados se planteen sin un trabajo previo, simultáneo o posterior , como si esta noción resultara parte del sentido común, o fuese "transparente" para la comprensión de los estudiantes.

Sin embargo la historia de las matemáticas nos muestra que el infinito matemático es un concepto poco accesible para la intuición, y que en esta ciencia implicó más de 2000 años de trabajo para ser precisado formalmente mediante la axiomatización. Este concepto, a partir del siglo XX, posee una estructura formal innegable para la mayoría de los matemáticos, sin embargo esto no implica que se haya vuelto más accesible para los estudiantes. En realidad, las estructuras cognoscitivas de estos, construidas a partir de las experiencias cotidianas y escolares con cantidades finitas, no favorecen la asimilación del concepto; más bien se constituyen en un obstáculo para alcanzarlo (Waldegg, 1993).

En las últimas décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Fischbein y cols. (1979), Sierpinska (1985), Cornu (1983), Moreno y Waldegg (1991, 1995), Waldegg (1993) o Artigue (1995), han observado que los estudiantes suelen presentar una comprensión lábil del infinito matemático y que en muchos casos apelan a ideas contradictorias y tienen serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con problemas que implican esta noción (Montoro y de Torres Curth, 1999).

En un trabajo previo al presente realizamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) de las respuestas a un cuestionario aplicado a alumnos universitarios de distintas carreras y niveles de avance en las mismas (sin agrupaciones *a priori*) y que indagaba sobre aspectos básicos de la noción de infinito cardinal como son: la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de combinaciones de un número finito de elementos; la distinción entre infinito y mucho o muy grande y la distinción entre infinito y todo. Mediante este análisis pudimos identificar grupos de estudiantes a los que podían asociarse ciertas concepciones sobre el infinito matemático. Pudimos observar que en el aprendizaje del infinito intervienen procesos semióticos que requieren de la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión matemática (Montoro, 2003). Estos resultados previos hicieron que nos interesásemos en este nuevo estudio, focalizado en establecer alguna tipología de los estudiantes universitarios respecto de sus concepciones sobre estas nociones.

***Objetivo*:** Realizar un clasificación de estudiantes universitarios respectos a sus concepciones sobre aspectos básicos de la noción de infinito matemático. Acotamos el estudio de las concepciones de estos alumnos respecto a aspectos simples de esta noción que no involucren cuestiones o notaciones formales que puedan operar como dificultades suplementarias. Estos son: i) la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de combinaciones de un número finito de elementos; ii) la distinción entre infinito y mucho o muy grande y ii) la distinción entre infinito y todo.

METODOLOGIA

Instrumento de indagación

En vistas a obtener un instrumento que facilitase el estudio en profundidad de las concepciones de los estudiantes acerca de este concepto, se elaboró una serie de preguntas focalizadas de opción múltiple, para ser contestadas en forma individual y por escrito (ver Tabla I en anexo). Las preguntas fueron diseñadas de modo que cada una presentase sólo una opción de respuesta correcta. A fin que la elección de la respuesta a modo cerrado fuera suficientemente informativa para nuestros objetivos, la formulación de las preguntas se basó en el análisis cualitativo de las respuestas de otros estudiantes de primer año de diferentes carreras a un cuestionario preliminar con preguntas abiertas.

Participantes

Ciento veinte alumnos de la Universidad Nacional del Comahue, elegidos teniendo en cuenta la carrera en que estaban inscriptos y el grado de avance en la misma. Se consideró alumno/a ingresante a quienes se encontrasen asistiendo al cursillo de ingreso de su respectiva carrera y avanzado/a a quienes estuviesen cursando las últimas materias de la misma. Se eligieron tres carreras en las cuales el conocimiento matemático presenta una relevancia diferente: Profesorado en Matemática, Licenciatura en Biología y Profesorado de Educación Física (en el sentido de corporal). En la primera se brinda una fuerte formación matemática, llegando, los alumnos de los últimos años a tener un contacto formal con el concepto de infinito; en la segunda se cursan dos asignaturas de matemática superior, sin que ésta sea una disciplina central y por último en Educación Física, la formación matemática es elemental. Los participantes fueron 60 alumnos ingresantes y 60 alumnos avanzados, distribuidos equitativamente en cada una de las tres carreras. El género y las edades quedaron libradas al azar[i].

Procedimientos de análisis

Teniendo en cuenta la gran cantidad de datos con que se contaba, las respuestas a este cuestionario fueron previamente analizadas mediante un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM)[ii] (Benzécri, 1973). Habiendo partido de los sujetos sin clasificar, este análisis nos brindó sugerencias respecto de grupos de estudiantes que compartían las ideas respecto de los aspectos indagados en el cuestionario como así también de posibles relaciones de esos grupos de estudiantes que responden en forma similar el cuestionario y su formación matemática. Posteriormente y tomando a las sujetos descriptos por sus coordenadas en los 4 ejes principales del

AFCM (factores de variabilidad de los modos de respuestas) realizamos una clasificación de los estudiantes.

En forma sintética el método utilizado consiste en un *método jerárquico ascendente* (Ward, 1963) que comienza con una partición del conjunto de los 120 sujetos de manera que cada uno de los sujetos sea el único elemento de una clase y en cada iteración se agrupa en una nueva clase aquellas dos "*más parecidas" (semejantes)*, en el sentido que posean casi las mismas asociaciones con los modos de respuesta. El investigador selecciona en qué iteración cortará el proceso, de manera tal que la conformación de las distintas clases, así obtenidas, tenga sentido en términos del estudio realizado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Analizando el histograma de índices de nivel[iii] correspondiente a la clasificación jerárquica, pudo observarse que a partir de la iteración 235 se agrupan individuos (o grupos de individuos) muy distantes entre sí, por lo que podemos pensar en la conveniencia de hacer una partición en 5, 4 o 3 clases (interrumpiendo las iteraciones en la 235, 236 o 237 respectivamente). Se consideró, como la más conveniente, la clasificación en 4 clases, dado que en la clasificación en tres clases, se observó que se fusionaron las que más adelante se denominan C3 y C2, cuya distinción nos interesó mantener. En la clasificación en cinco clases aparecen clases análogas a las C1, 3 y 4 y la C2 se separa en dos grupos, extrayéndose de ella un grupo de estudiantes que responden NS a las preguntas 4 y 5.

Caracterización de las clases

En la Tabla II presentamos para cada clase resultante, las modalidades de respuesta más frecuentes; las de menor frecuencia; las modalidades de caracterización asociadas; el porcentaje de sujetos que hay en cada clase y un listado de los sujetos mas representativos, (a cada sujeto se le asignó un identificador en el cual la primera letra designa la CARRERA a la cual pertenece el estudiante -B para Biología, M para matemática y EF para Educación Física - y a continuación una I o A según sea Ingresante o Avanzado luego del guión un número que responde al orden en que se lo introdujo en la base de datos).

Tabla II: Modalidades de respuestas más frecuentes y menos frecuentes, ideas asociadas a estas, modalidades de caracterización. (a) Porcentaje aproximado de sujetos que hay en cada clase.

	Modalidades de respuesta asociadas	**CARACTERIZ.**	**%** (a)	**Sujetos más representativos**	**cla/mod -mod/cla**
C1	P9P; P10M; P1NS; P2NS; P4S; P8M; P3N; P5N	E1: entre 17-19 años; INGRESANTES. Se opone a: AVANZ.	20%	EFI-09; EFI-20; MIN-04; BIN-O1; BIN-13; MIN-06; EFI-04; BIN-12; EFA-06	33% 61% 28% 74%
C2	P1N; P8I; P9M; P7M; P3S	ED. FISICA	27%	MIN-16; MIN-18; EFI-07; EFA-01; EFI-10; EFA-03; MIN-17; EFI-13;EFI-11	45% 54%
C3	P8NC; P10N	BIOLOGÏA (¿?)	6%	BIN-15; BAV-03; BAV-04; BIN-07; BAV-05; EFA-08;	
C4	P2S; P7P; P8M ; P9I; P10I; P1S	E3; 24 años o más; MATEMATICA	47%	MIN-1; MAV-6; MAV-01; MAV-18; MAV-07; MAV-14; MAV-02; MAV-19	66% 40% 70% 49%

A continuación realizaremos una caracterización de las clases, presentando las ideas asociadas a los modos de respuesta característicos de cada clase (comparar Tablas I y II); las modalidades de caracterización correspondientes y el porcentaje de sujetos que hay en cada una de ellas. Por último, ilustraremos cada clase con las justificaciones literales dadas por alguno de los sujetos más representativos de esa clase, con el sólo efecto de mostrar con las propias palabras de los estudiantes las ideas que inferimos como características de las distintas grupos de sujetos.

Clase 1: ***No hay infinito posible.*** Correspondiente al 20% de los sujetos, caracterizada por INGRESANTES MENORES DE 19 AÑOS. Tiene asociadas las siguientes ideas

- *no es* posible *con un número finito de elementos (aunque grande y que se repitan) obtener una colección infinita de combinaciones.*
- *con pocos- poco; con muchos-mucho*
- si una colección se presenta como infinita*, en ella debe estar todo*.

Clase 2: ***Infinito es un número enorme.*** Correspondiente al 27% de los sujetos, caracterizada por la carrera de ED. FISICA. Tiene asociada la idea:

- identificación *de infinito con mucho*

Clase 3: ***Con muchísimos elementos me problematizo.*** Correspondiente al 6% de los sujetos, la mayoría estudiantes de Biología. Tiene asociada la idea:

- con muchos elementos de partida me problematizo y no se cual es la extensión de la colección.

Clase 4: ***Puedo tener*** **Infinito**. Correspondiente al 47% de los sujetos, caracterizada por Estudiantes AVANZADOS DE MATEMÁTICA. Tiene asociada la siguiente idea:

- con un número finito de elementos, que se pueden repetir, puedo obtener infinitas combinaciones

Justificaciones literales de los sujetos más representativos:

Clase 1: No hay infinito posible. Sujeto EFI-09

P1NS: *Se podrían realizar más tareas pero no sé si llegaría a 200.000 tareas.*
P2NS: No Justifica
P3N: *Si probamos* ***con todas*** *las posibilidades alguna sería igual. Ahora si obviamos algunas posibilidades no sería infinito*.
P4S: *Porque las letras corresponden a J/U/A/N/M/A/R/I/A/N/O.*
P5N: *Porque si las teclas del abecedario son 28 tiene un límite, o sea que la combinación también tiene un límite.*
P6N: *Porque estamos* ***quitando*** *posibilidades.*
P7P: ***Estamos retirando*** *muchas posibilidades de combinación.*
P8M: *Tendremos muchas combinaciones pero seguimos teniendo limitaciones, por ejemplo no repetir palabras.*
P9M: *Porque tenemos limitaciones en la cantidad de letras.*
P10M: *Sería muy difícil contar todas las combinaciones.*

Las justificaciones de este estudiante hacen patente *la imposibilidad de crear una infinidad a partir de un número finito de elementos* (tomado como una restricción). La mayoría de las justificaciones (en negrita) ponen en evidencia la identificación de *infinito con todo.*

Clase 2: Infinito es una cantidad enorme. Sujeto EFI-10

P1N: *Porque una máquina necesita un idioma rico en palabras para poder realizar tareas y no creo que pueda con solamente tres teclas.*
P2N: *Porque para poder dar una denominación correcta se necesitan* ***más*** *letras.*
P3NS: No Justifica
P4N: *Porque en todo caso estaría la combinación anan que es diferente.*
P5S: *Se pueden lograr infinitas combinaciones*.
P6N: *No porque se sacarían* ***muchas*** *alternativas.*
P7P: *Tendrá pocas combinaciones porque con tan pocas teclas no podrá hacer mucho.*
P8I: *Tendrá* ***infinitas*** *combinaciones.*
P9M: *Tendrá muchas combinaciones.*
P10I: *Tendrá* ***infinitas*** *combinaciones*

En las justificaciones de este estudiante (la negrita es mía) se observa claramente *la identificación de infinito con mucho.* Expresa que para obtener infinitas combinaciones no alcanza con *pocas* letras, se necesitan *más;* y que si quito *muchas* ya no tendré i*nfinitas*. En cambio cuando tengo muchos elementos (15.000.000) en P8 y P10 si obtengo *infinitas* (se repitan o no).

Clase3: Con muchísimos elementos me problematizo. Sujeto BI-7

P1S: *Se podría hacer si existiera o si pudiéramos hacer otro tipo de combinaciones agrupando de a más letras*
P2N*: Pienso que el idioma de máquina es de tipo código pero que no es posible porque tiene que haber una información o una tarea.*
P3S*: Porque quedan más letras que se pueden combinar.*
P4S*: Si están en la palabra JUANMARIANO*
P5NS*: Será un número muy elevado por todas las posibles combinaciones*
P6NS*: Porque ya se está determinando un límite*
P7P*: Va a tener pocas porque no permite alguna de ella*
P8M*: Son muchas por la cantidad de teclas pero no infinitas ya que hay algunas que no se pueden repetir*
P9I*: Porque se pueden hacer más combinaciones con las 3 teclas*
P10NC*: No justifica*

Este estudiante al enfrentarse con todas las combinaciones de muchísimos elementos que se repiten prefiere no contestar, sin embargo responde y justifica todas las otras. Encontramos que algunas respuestas (P9I- P2N) son contradictorias y que las justificaciones en general no aportan claridad a sus respuestas.

Clase 4: Puedo obtener infinito. Sujeto MAV-01

P1S: *Con sólo dos teclas puedo tener infinitas combinaciones, (como con 0 y 1 en el sistema binario).*
P2S*: Al tener infinitas combinaciones siempre se puede crear una combinación para una nueva tarea.*
P3S: *Al nuevo idioma podría sacarle las combinaciones que empiecen con A e igual sería infinito*.
P4S: *Si están las infinitas combinaciones posibles ananá será una de ellas.*
P5S: *Si se cuentan las combinaciones de dos letras y con una a al final . Se pueden agregar infinitas A por lo tanto tiene infinitas combinaciones.*
P6N: *282+283+............+2820.*
P7P: *Son 15 combinaciones*.
P8M*: Lo mismo que en 8.*
P9I: *3+32+33+*....+3n+.....
P10I: Igual 10

Este último estudiante justifica y con gran explicitación todas las respuestas. Se puede observar que expresa sin dudas la *idea con un número finito de elementos puedo obtener infinitas combinaciones (teniendo en cuenta que se puedan repetir).* Las justificaciones a P3, P4 y P6 no aportaría claridad respecto a una posible asimilación de infinito a todo.

CONCLUCIONES

Nuestro estudio realizado en un contexto "hipotético cotidiano" de conteo, nos muestra que la mayoría de los ingresantes y de los estudiantes sin una instrucción específica formal sobre el infinito matemático, poseen ideas confusas y contradictorias frente a esta noción; incluso en aspectos muy elementales como la extensión de colecciones de combinaciones de un número finito de elementos que pueden repetirse. Este aspecto de la influencia del contenido sobre el razonamiento de los jóvenes y adultos sumado a que los estudiantes parecen ser muy propensos a confiar en sus presunciones y las experiencias cotidianas sugiere que una razón de las dificultades para aprender estos conceptos no es solamente su complejidad sino que no tengan un trato explícito y formal con estos conceptos.

Vale decir, que el supuesto imperante en la enseñanza de la matemática universitaria en el que se trata con el concepto de infinito como "transparente" y accesible directamente, en el conocimiento de los estudiantes, puede convertirse en una seria dificultad en el aprendizaje de los conceptos relacionados con el infinito, por lo que se presentaría como necesaria, en la enseñanza matemática en los primeros años de la universidad, una explicitación de las nociones que atañen al infinito matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Ingeniería. Didáctica en Educación Matemática, Artigue, Douady, Moreno, Gómez (Eds). Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. pp 97-140.

Benzécri, J. (1973). *L' Analyse des Dones. Tomo 1: La taxinomie. Tomo 2: L' Analyse des Correspondances.* Paris, Francia: Dunod. (segunda edición 1976).
Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Comceptions et Obstacles*, Thése de Doctorat, Grenoble.

Fischbein, E.; Tirosh, D.; Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, Vol 10*, 3-40

Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics 48,* 239 – 257.

Montoro, V. (2003). *Estudio sobre concepciones de estudiantes universitarios respecto de la noción de infinito matemático*. Tesis de Maestría. Univ. Nac. del Comahue. Argentina.

Montoro, V., de Torres Curth, M. (1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en aprendizaje de la matemática. *Epsilon 15(45),* 357-364.

Moreno Armela L. y Waldegg. G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 22.* (211-231).

Moreno Armela L. y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Revista de Educación Matemática.* Vol 7. Nº1. pp 12-28. México.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*. Vol 6, nº 1. pp.5-67.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l`instruction. *Annales de Didactiques es de Sciences Cognitives* 5 pp19-36. IREM de Strsdbourg.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association 58*. pp 236-244

[i] De los 120 participantes, 64 eran mujeres (F) y 56 hombres (M); 42 estudiantes tenían entre 17 - 19 años (E1), 43 estudiantes, entre 20 - 23 años (E2) y 35 estudiantes, 24 años o más (E3).
[ii] El detalle de la aplicación de este método, o una mayor profundización de la técnica del mismo se puede encontrar en: Lebart, Morineau y Fénelon (1979) o en Crivisqui (1993). El AFCM se realizó con el programa SPAD.N versión 2.5 P. C. (DECISIA, 1994).
[iii] Este índice es una medida de la distancia entre sujetos o grupos de sujetos que se fusionan en la iteración correspondiente.

ESTUDIO TEÓRICO Y EXPERIMENTAL SOBRE DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DEL CONTRASTE DE HIPÓTESIS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

María Inés Rodríguez
Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Fis.-Químicas y Naturales.
Universidad Nacional de Río Cuarto. Córdoba ARGENTINA
mrodriguez@exa.unrc.edu.ar
Campo de Investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria; Nivel Educativo: Superior.

RESUMEN

Existe en la actualidad una demanda creciente de formación estadística, para una variedad cada vez mayor de disciplinas no necesariamente relacionadas con las matemáticas. Es muy compartida la idea de que en esto, tiene mucho que ver, la gran disponibilidad, de microordenadores y paquetes estadísticos fácilmente manejables que posibilitan la aplicación de procedimientos estadísticos complejos de manera rápida. Sin embargo, esta facilidad de aplicación no siempre trae aparejado el uso correcto de las nociones estadísticas empleadas. Mientras que el cálculo estadístico se halla al alcance de la mayor parte de los usuarios, no puede decirse lo mismo de lo que autores como Hawkins (1990), denominan razonamiento estadístico. En este campo, Wild y Pfannkuch (1999), describen un modelo teórico que pretende ser útil para analizar el razonamiento estadístico envuelto en la resolución de problemas. En este trabajo resumimos un proyecto de investigación centrado en la resolución de problemas de contrastes de hipótesis estadísticas, utilizando como referente teórico para el análisis del razonamiento empleado por los estudiantes, el modelo descrito por estos autores.

INTRODUCCIÓN

En el campo de la estadística se recomienda, con carácter general, la enseñanza mediante la realización de proyectos que incluyen la definición del problema, el plan de resolución, la toma de datos, su análisis y conclusiones, que constituyen la solución aportada al problema propuesto. Este largo proceso involucra un ***razonamiento estadístico*** complejo, no definido y, probablemente, difícil de definir. Al respecto, dice Snee (1999), "el desarrollo del razonamiento estadístico es el próximo paso en el desarrollo de la disciplina estadística". Consideramos que es tarea de la investigación educativa específica tratar de dar soluciones a este problema con aportaciones que aproximen al menos, una caracterización del mismo con el fin de que pueda ser empleado en la enseñanza de la estadística, principalmente aunque no exclusivamente, en el nivel universitario. Esta idea comenzó a difundirse en la última década del siglo XX, por algunos miembros de la American Statistical Association (ASA), como así también por investigadores en educación estadística integrantes de la Internacional Association for Statistical Education (IASE).

Por otra parte, encontramos en Vallecillos (1996), que, aunque escasas, existen precedentes de investigaciones que alertan sobre las dificultades específicas que experimentan los estudiantes universitarios en la resolución de problemas y en las aplicaciones de los métodos estadísticos en sus campos de actuación profesional. Muchas veces su origen está situado en errores conceptuales que están relacionados con la epistemología de la propia ciencia o con la enseñanza recibida. En cualquier caso, es la educación estadística la que debe atender a solucionar estos problemas detectados mediante la investigación y su aplicación a la mejora de la enseñanza en las aulas.

En este trabajo se presenta un proyecto de investigación que se está llevando a cabo en la Universidad Nacional de Río Cuarto, Córdoba, Argentina, (aprobado y subsidiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNRC), centrado en la resolución de problemas de contrastes de hipótesis estadísticas. Utilizamos como referente teórico para el análisis, del razonamiento estadístico empleado por los estudiantes, el modelo descrito por Wild y Pfannkuch (1999).

PROBLEMÁTICA

Por lo general todo curso elemental de estadística, incluye el tema de la Inferencia por considerarlo como básico, tanto por su capacidad de ayudar en la toma de decisiones, como en la predicción. Estos dos tipos de cuestiones no son independientes pues a menudo, la toma de decisiones está ligada a algún tipo de predicción, siempre en determinadas condiciones. Así encontramos que los actuales currículos universitarios de casi todas las carreras, contienen prácticamente todos ellos, en sus primeros cursos una asignatura de Estadística Aplicada, que si bien tiene por objetivo, realizar una introducción a los métodos estadísticos más elementales, cabe mencionar al respecto, lo que sostiene Moore (1998): “Uno de los problemas principales en un curso introductorio de estadística a nivel universitario es hacer la transición del análisis de datos a la inferencia”.

Dentro de la Estadística Inferencial los grandes temas de estudio son: los métodos de estimación y el contraste de hipótesis. En este caso, la decisión de estudiar el contraste de hipótesis ha sido tomada teniendo en cuenta razones de tipo didáctico, señaladas por otros investigadores y que compartimos, como así también por considerar que en la actualidad es la metodología inferencial más utilizada por la mayoría de los investigadores de todas las disciplinas, encontrándose grandes confusiones conceptuales en su aplicación, que traen aparejados grandes riesgos en sus conclusiones.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Considerando que gran parte de las dificultades en la utilización de los métodos de inferencia estadística, pueden solucionarse con nuevas propuestas en su enseñanza, se pretende en este trabajo detectar las dificultades que lleva consigo la aplicación por parte de los estudiantes, de los contrastes de hipótesis.

Por lo tanto la investigación se dirige a completar algunos trabajos realizados en el campo de la didáctica de la estadística, sobre errores conceptuales referidos al nivel de significación y a la lógica de los métodos de contrastes de hipótesis, que se presentan en estudiantes universitarios, particularmente en su proceso de resolver problemas. También interesa conocer más de cerca la naturaleza de estos problemas y persigue como meta brindar elementos a los profesores de Estadística y Matemáticas de distintos niveles educativos, que contribuyan a superar algunos obstáculos existentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema. Esta meta se concretará, principalmente, con los objetivos que describimos a continuación.

Objetivos

- Completar los análisis teóricos, conceptuales y procedimentales de la resolución de problemas estadísticos en estudiantes universitarios ya existentes que nos permitirán desplegar la complejidad del tema, aparentemente no trivial. Asimismo, el análisis del concepto de “resolución de problemas” nos proporcionará una información útil para la interpretación de los errores y destrezas de los alumnos.
- Construir para aplicar en una muestra de alumnos un instrumento de determinación de estrategias de resolución, errores y destrezas de los alumnos,

sobre el concepto de contraste de hipótesis con una validez de contenido Thorndike, (1989), que nos permita obtener un diagnóstico que pueda ser comparable con otros resultados obtenidos en otras latitudes.

- Elaborar una propuesta didáctica innovadora, teniendo en cuenta el análisis realizado de las principales concepciones erróneas detectadas, realizando su implementación experimental con una muestra de profesores y alumnos.

MARCO TEÓRICO

Como hemos indicado anteriormente, el razonamiento estadístico implicado en la resolución de problemas del que profesores y alumnos hablan constantemente en las aulas, es algo inaprensible, no definido y, probablemente, difícil de definir. Wild y Pfannkuch (1999) describen una investigación realizada, con el objetivo de conocer la naturaleza del razonamiento estadístico, sobre una muestra de estudiantes de estadística y estadísticos profesionales. Estos autores analizan los procesos de pensamiento implicados en la resolución de problemas estadísticos y, a partir de los datos obtenidos, desarrollan un esquema teórico para explicar el pensamiento estadístico implicado en la investigación experimental. Describen un marco para los patrones de pensamiento implicados en la resolución de problemas y la integración de elementos estadísticos en ellos, que consta de cuatro dimensiones:

Dimensión 1: **Ciclo investigativo**.

El cual comprende: Interpretación del problema, planificación y diseño de la experiencia o muestra, determinación del tipo de datos, análisis de resultados y conclusiones.

Dimensión 2: Tipos de pensamiento.

Plantean por un lado, la presencia de un tipo de pensamiento general: estratégico, con búsqueda de explicaciones y aplicación de técnicas.

Por otro lado, cinco tipos específicos de pensamiento estadístico, que a continuación se describen brevemente:

- ***Reconocimiento de la necesidad de datos*****:** la investigación estadística se basa en la idea de que muchas situaciones reales no pueden ser juzgadas sin la recopilación y el análisis de los datos adecuados. Se debe promover en los estudiantes, explorar los datos por diferentes caminos.
- ***Transnumeración*****:** *"La idea fundamental en la aproximación estadística al aprendizaje es que, formar y cambiar la representación de los datos o aspectos de un sistema, conduce a comprender mejor el sistema. Nosotros hemos acuñado la palabra transnumeración para referirnos a esta idea"*, (Wild y Pfannkuch,1999, pág. 227).

  Este fenómeno ocurre en el proceso de transformación de una representación numérica a otra, que facilite la comprensión. Esto sucede cuando hay una descripción cuantitativa del sistema real, cuando los datos son transformados en el sistema estadístico, y cuando los resúmenes estadísticos se combinan en formas que se relacionan más directamente con el problema real
- ***Consideración de la variación***: el pensamiento estadístico, en cualquier acepción moderna, se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre que, en la mayor parte de las ocasiones procede de la 'variación' o la 'variabilidad'. La variación forma parte del problema concreto que no se reduce a 'medir y modelar', incluye también estrategias de aleatorización.
- ***Modelos estadísticos propios***: cualquier tipo de razonamiento usa modelos. La principal aportación de la estadística al mundo del pensamiento han sido los modelos de pensamiento propios. En particular, los modelos para el diseño de

experimentos han sido desarrollados a partir de modelos matemáticos con la inclusión de componentes aleatorios. Recientemente hay una tendencia creciente a considerar la estadística como ciencia independiente de las matemáticas, Moore (1998), y es necesario extender el alcance de los métodos estadísticos.

- ***Conocimiento del contexto, conocimiento estadístico y síntesis***: los elementos con los que se trabaja en esta disciplina son, el conocimiento del contexto, el estadístico y la información contenida en los datos. El razonamiento consiste en la síntesis de estos tres elementos para producir conocimiento y conjeturas. Muchos sostienen que la estadística es la disciplina que se dedica al estudio de los datos, pero sostiene Moore (1998), "debemos tener presente que los datos no son sólo números sino números en un contexto". Por tal motivo se considera que los estudiantes no pueden adquirir razonamiento estadístico sin conocer ***por qué*** y ***cómo*** fueron obtenidos los datos.

Dimensión 3: Ciclo interrogativo.

Lo describen los autores como un proceso recursivo por el que las ideas previas y la información obtenida se van destilando y encapsulando para obtener la información relevante mientras se va descartando la información inútil.

Dimensión 4: Disposiciones.

Incluyen las aptitudes del resolutor: escepticismo, imaginación, curiosidad y capacidad de observación, apertura de mente, capacidad de profundizar en los significados, ser lógico, con compromiso y perseverancia en la tarea.

Estas cuatro dimensiones operan simultáneamente, es decir, en un determinado momento se puede estar operando en el ciclo investigativo (dimensión 1), manejando aspectos relacionados con la variación (dimensión 2), etc. Finalmente destacan, como importante característica emergente del pensamiento estadístico puesto en juego en la investigación experimental, la integración de la comprensión del problema real y el estadístico.

Por otra parte, Pfannkuch y Rubick (2002), identificando cada uno de estos elementos de razonamiento estadístico, especifican cinco cuestiones que deberían considerarse para determinar la manera en que los estudiantes construyen significados a partir de los datos:

- conocimiento contextual inicial y conocimiento estadístico;
- los estudiantes son capaces de pensar en un nivel más alto de lo que indican las representaciones construidas;
- representar y construir activamente (la activación de un diálogo constante entre los datos y ellos mismos, ayuda a los estudiantes a obtener información de los datos;
- entrelazar pensamiento local y global, y
- el cambio de pensamiento estadístico a través de diferentes representaciones.

METODOLOGÍA

El proyecto de investigación está planteado para ser realizado en las siguientes etapas, encontrándonos en la actualidad desarrollando las dos primeras:

Etapa 1: Es la fase de estudio previo, que comprende los aspectos estadísticos, epistemológicos y didácticos del tema. En particular, en esta fase se está realizando el análisis de los resultados derivados de la investigación de Vallecillos, (1994) y del modelo descrito por Wild y Pfannkuch,(1999).

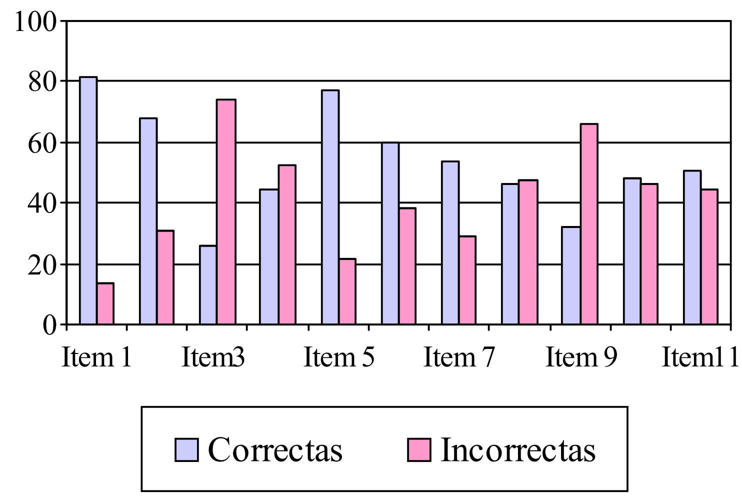
Etapa 2: Construcción de un cuestionario y ensayo en una muestra piloto. Dicho instrumento de recogida de datos es una adaptación del utilizado por Vallecillos, cuya validez y fiabilidad han sido estudiadas y justificadas.
Etapa 3: Elaboración y aplicación de la encuesta definitiva, teniendo en consideración los resultados obtenidos en la muestra piloto. Análisis didáctico y cognitivo de los resultados.
Etapa 4: Comparación de los resultados obtenidos con los publicados por otros investigadores. Elaboración de una ingeniería didáctica innovadora.
Muestra: Utilizamos una muestra voluntaria de alumnos de la Universidad Nacional de Río Cuarto(UNRC) que han cursado la asignatura Estadística durante los años comprendidos entre 2003 y 2005. Esta muestra piloto, está integrada por un total de 96 alumnos, 29 de la carrera de Biología, 22 de Microbiología y 45 de Agronomía.
Cuestionario: Interesados en identificar obstáculos epistemológicos, conceptuales y procedimentales de los alumnos y sus interrelaciones, se ha elaborado una encuesta piloto la cual consta de dos partes. Una destinada a establecer el conocimiento conceptual de los estudiantes, con 11 items, algunos para optar por Verdadero-Falso y otros para elegir la opción correcta. La otra parte la conforman tres problemas de aplicación, contextualizados en el currículo de los estudiantes de la muestra.
Los elementos conceptuales a que hacen referencia los ítems de la encuesta son los siguientes:

- Formulación de hipótesis: Items 1 y 2
- Interpretación del nivel de significación: Items 3, 6 y 10
- Error de tipo I: Item 4
- Establecimiento del nivel de significación: Item 5.
- Distribución muestral del estadístico: Item 7
- Interpretación de resultados: Item 8.
- Definición del nivel de significación: Items 9 y 11.

SÍNTESIS DE RESULTADOS PARCIALES

El siguiente gráfico muestra el porcentaje de respuestas correctas e incorrectas para cada item del cuestionario aplicado en la muestra piloto de 96 alumnos de la UNRC.

Distribución de los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas para cada item



La bibliografía consultada revela la existencia de concepciones erróneas muy generalizadas tanto entre estudiantes universitarios, como entre científicos que usan la inferencia estadística en su trabajo diario. Estas concepciones erróneas se refieren principalmente al nivel de significación, siendo la más generalizada, el no considerarlo como la probabilidad condicional de un suceso. En coincidencia con las investigaciones de Birnbaum (1982), Falk (1986) y de Vallecillos (1994), nosotros hemos identificado en nuestro estudio piloto, que existe gran dificultad en la interpretación del nivel de significación (item 3) y del error de tipo I (item 4). Al respecto, también cabe mencionar, que un error destacable en los estudiantes encuestados fue el de intercambiar los dos términos de la probabilidad condicional. Esto se comprobó con las respuestas a los siguientes ítems planteados:

Item 9**:*_ Un nivel de significación del 5% significa que , en promedio, 5 de cada 100 veces que rechacemos la hipótesis nula estaremos equivocados. ***V/F

Item 11**:* Un nivel de significación del 5% significa que , en promedio, 5 de cada 100 veces que la hipótesis nula es cierta, la rechazaremos. ***V/F

En el item 11 se presenta una interpretación frecuencial del nivel de significación y es correcto, mientras que en el item 9 se han intercambiado los dos sucesos que definen la probabilidad condicional y es incorrecto. Sin embargo sólo el 27,5% de los alumnos de Biología y Microbiología, y el 40% de los alumnos de Agronomía, respondió correctamente el item 9. Mientras que al item 11 lo respondieron correctamente sólo el 57,5% de los alumnos de Biología y Microbiología y el 40% de los de Agronomía. De este modo corroboramos que la mayoría de los estudiantes no son capaces de discriminar entre una probabilidad condicional y su inversa, mientras que gran parte de ellos consideran que ambos ítems son correctos, es decir no distinguen las diferencias entre las dos probabilidades condicionales.

Estos resultados obtenidos nos hace pensar que una de las maneras de corregir estos errores, puede ser introducir innovaciones en la manera de presentar la enseñanza de la probabilidad, en particular, la probabilidad condicional. Por lo tanto una de las innovaciones que estamos estudiando para introducir el año próximo, con miras a evitar estas confusiones en la comprensión e interpretación del nivel de significación, se refiere a la temática de probabilidad.

En cuanto al modelo utilizado, hay tres implicaciones prácticas del mismo que merecen ser mencionadas: Primero los docentes y los investigadores necesitan llegar a un consenso acerca de lo que ellos entienden por *razonamiento estadístico*, para estar en condiciones de comunicarse. Segundo: los docentes necesitan hacer una reflexión crítica acerca de sus modos corrientes de enseñar e identificar áreas que están actuando como barreras para el desarrollo del razonamiento estadístico de los alumnos. Tercero: se deben conocer y reconocer las trabas externas que se imponen a la enseñanza de la estadística. Esto permitirá que docentes e investigadores construyan nuevas maneras de transponer el conocimiento estadístico.

Para terminar, sólo queda agregar que este modelo teórico para describir el razonamiento puesto en juego en la resolución de problemas estadísticos, aporta un esquema que nos permitirá analizar en profundidad las respuestas de los estudiantes y entender las dificultades que encuentran y por qué. Esperamos que la información obtenida nos sirva para desarrollar nuevas propuestas de enseñanza que puedan facilitar la labor de los profesores y mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Birnbaum, I. (1982). Interpreting Statistical Significance. *Teaching Statistics, Vol. 4.* 24-27.

Falk, R. (1986). Misconceptions of Statistical Significance. *Journal of Structural Learning, Vol.9,* 83-96

Hawkins, A. (1990). Success and Failure in Statistical Education. A UK Perspective. *Actas de la ICOTS III* (pp. 1-14). University of Otago, Dunedin, Australia.

Moore, D.S. (1998). *Estadística Aplicada Básica*. Barcelona. Antoni Bosch editor.

Pfannkuch, M., y Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal* 1(2), 4-21.

Snee, R. (1999). Discussion: development and use of statistical thinking: a new era. *Intternational Statistical Review 67(3),* 255-258.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. México: Limusa

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas.* Granada: Comares.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review 67(3),* 223-265.

UNA APLICACIÓN DE BAYES EN LA TOMA DE DECISIONES

Haydeé Blanco
Instituto Nacional Superior del Profesorado "Joaquín V. González"
Buenos Aires, Argentina
fblanc@fibertel.com.ar
Campo de investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria, Nivel educativo: Superior, Metodología: cuantitativa

Resumen

En el presente trabajo se presenta el análisis de una propuesta de aplicación del Teorema de Bayes a la toma de decisiones. Consiste en una investigación realizada a partir del planteo de situaciones en las que el decisor puede contemplar la posibilidad de comprar información adicional que le ayude a delinear, dentro de su visión subjetiva, el comportamiento de una o más variables inciertas estimadas relevantes en su problema. Con los procedimientos que se analizarán en los distintos casos a considerar, el decisor tendrá que calcular el valor esperado de la alternativa óptima en cada matriz de decisión que podría suscitarse ante la posibilidad de cada mensaje. Luego, y sobre la base de la probabilidad de cada mensaje, obtendrá un valor esperado resultante de la distinta combinación de alternativas óptimas según el que acontezca. Ése será el valor esperado calculado si decidiera comprar información.

Problema a investigar

La didáctica de la Matemática en sus distintos campos, ha sido objeto de estudio y análisis, al considerarse, a escala mundial, la adecuación y reforma de su enseñanza, ante el avance científico y la evolución tecnológica.
Nos proponemos trabajar una aplicación del Teorema de Bayes a la toma de decisiones, con alumnos del nivel superior.
Se presenta a continuación la descripción y análisis de una ingeniería didáctica que fue diseñada para guiar las experimentaciones en clase, en el marco de la matemática educativa en temáticas relacionadas con la teoría de la decisión.

Marco teórico

Debemos tener en cuenta que decidir, es una actividad que tiene lugar en nuestra vida permanentemente. Estamos inmersos en el "decidir", lo cual nos distingue de otras especies.
Las decisiones trascendentes son difíciles de tomar, por lo complejas, inciertas, y por la contrariedad que resulta priorizar entre dos posibles resultados. El sujeto decisor debe optar por la alternativa preferida. El problema es que, muchas veces, no puede decir cuál de dos alternativas prefiere, impedimento cuya dificultad se acentúa a raíz de que tales alternativas, al aludir a un tiempo futuro, son inciertas.
La propuesta es la elaboración de un modelo que puede ayudar al sujeto en cuanto decisor. No va a sugerirle qué decidir sino cómo hacerlo.
Las preferencias serán las que el decisor determine de acuerdo al contexto sociocultural en el que está inmerso.

El proceso de decisión bayesiano, es una metadecisión, que consiste en evaluar la compra de información adicional para mejorar las probabilidades que estimó "a priori".

Fase I. Análisis preliminar de la situación a abordar

Este trabajo presenta una propuesta de actividad dirigida a alumnos de 2° año del nivel superior.
Con la incorporación de las nuevas tecnologías al aula, se ofrece al docente la posibilidad de contar con recursos que permiten lograr el manejo de datos con gran facilidad, para lograr finalmente una verdadera comprensión de las informaciones disponibles.

Estudio didáctico

La aplicación del Teorema de Bayes a las decisiones se ve facilitada por la posibilidad de utilizar modelos matemáticos con recursos informáticos. Se trata de aplicaciones usuales que no son abordadas con la frecuencia e importancia con que sería conveniente.

Estudio cognitivo

Desde hace unos años, la utilización de hojas de cálculo ha facilitado el tratamiento de estos problemas.
No es posible quitar la influencia del contexto ni eliminar la incertidumbre; sin embargo, podemos definir un problema, ordenar sus elementos, orientar la búsqueda y elegir una acción entre un conjunto de acciones alternativas.
El analizar distintos casos es fundamental para comprender la metodología.

Fase II. Construir la secuencia didáctica

Primera actividad (construir la matriz de verosimilitud)

El objetivo de esta actividad es organizar los datos en una tabla para una interpretación más clara. El método bayesiano implica evaluar subjetivamente las probabilidades $P(N_j)$ que se denominan "a priori" (*antes* del proceso bayesiano).
En la tabla figuran los estados posibles del universo (N_j) y los mensajes (Z_i), lo que nos permite construir la *matriz de verosimilitud.* Esta matriz relaciona la probabilidad entre Z y N, lo que creo que va a pasar (probabilidad "a priori" $\rightarrow$ afuera del sistema) con lo que me pueden llegar a decir que va a pasar, es la matriz propia del informante.
La situación se va a plantear a través de ejemplos.

Segunda actividad (hallar la probabilidad conjunta)

El objetivo de esta actividad es, frente a los datos organizados, hallar: $P(Z_i \text{ y } N_j) = P(Z_i / N_j) \,.\, P(N_j)$

Las nuevas $P(N_j)$ calculadas en base a los mensajes Z_i (probabilidades "a priori" modificadas por la información adicional) se llaman "a posteriori", por haber sido evaluadas después del proceso bayesiano.
O sea, la probabilidad "a posteriori" es la probabilidad "a priori" evaluada por el decisor.
Tenemos:

Podemos escribir la probabilidad conjunta de dos formas equivalentes:

$P(Z_i \text{ y } N_j) = P(Z_i / N_j) \, . \, P(N_j)$ (1)

$P(Z_i \text{ y } N_j) = P(N_j / Z_i) \, . \, P(Z_i)$ (2)

Se poseen los datos de (1) y se quiere hallar el primer factor del segundo miembro de (2). Por lo tanto, despejando:

$P(N_j / Z_i) = P(Z_i \text{ y } N_j) / P(Z_i)$ (3)

Si se reemplaza el numerador del segundo miembro de (3) por (1), resulta:

$P(N_j / Z_i) = P(Z_i / N_j) \, . \, P(N_j) / P(Z_i)$ (4)

El numerador es un dato conocido (verosimilitud y probabilidad a priori). El denominador:

$P(Z_i) = P(Z_i / N_1) + P(Z_i / N_2) + \ldots.. = \Sigma_j P(Z_i / N_j)$ (5)

Por lo tanto:

$P(N_j / Z_i) = P(Z_i / N_j) \, . \, P(N_j) / \Sigma_j P(Z_i / N_j)$ (6)

De esta forma, se obtienen las probabilidades de los distintos estados dado el mensaje del informante.

Tercera actividad (valor de la información adicional)

El objetivo de esta actividad es determinar la compra o no de la información.
Debemos tener claro que el valor de la información adicional es un *valor esperado* que depende del enfoque subjetivo utilizado por el decisor (no es un monto fijo determinado pero sí lo es, el *precio o el costo de la información).* Si el valor de la información adicional es superior (o igual) a su costo, entonces nos convendrá comprarla. Si es inferior, no nos convendrá.

Conclusiones

- La modelización es un proceso clave muy poco trabajado en el aula y permite a los alumnos comprender la utilidad de los conceptos matemáticos para la resolución de situaciones problemáticas de la realidad.

- Los estudiantes internalizaron el proceso de decisión bayesiano, cuyo objetivo es determinar cual es el importe máximo que el decisor, en una situación de decisión determinada, puede gastar para obtener información adicional con la finalidad de modificar o convalidar la evaluación subjetiva que ha hecho de las probabilidades (a priori).

- No debe olvidarse que la verosimilitud debe obtenerse de fuentes objetivas, a través de investigaciones de campo serias. Una verosimilitud estimada subjetivamente puede introducir errores relevantes.

- Los estudiantes construyeron aprendizajes significativos, demostrando que la incorporación de conceptos estadísticos constituye un recurso de gran utilidad para la formulación de ingenierías didácticas relacionadas con temáticas de la teoría de la decisión.

- La reflexión sobre el trabajo debería ser una tarea cotidiana. Este aprovechamiento de los conceptos estadísticos es fundamental para la comprensión del valor de la información adicional y medición de su cantidad.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Godino, J., Vallecillos A. (1992). *El análisis de datos como útil y objeto de la didáctica de la matemática.* Educación Matemática 4(1), 46-53.

Beekman, G. (1995). *Computación & Informática hoy. Una mirada a la tecnología del mañana*. México: Addison Wesley Iberoamericana.

Blanco, H. (2004). *Estadística, una propuesta de trabajo aprovechando recursos tecnológicos.* En *Premisa* nº 23 (pp. 33-39).

Crespo, C. (2003). *Reflexiones acerca de la computadora como herramienta educativa en la escuela.* En *Boletín de la SOAREM (Sociedad Argentina de Educación Matemática).* No. 18, pp. 12-20.

Hadley, G. (1979). Probabilidad y estadística: una introducción a la Teoría de la Decisión, Fondo de Cultura Económica, México.

ESQUEMAS LOGICO-MATEMÁTICOS EN JUICIOS BAJO INCERTEZA

María Inés Cavallaro, Elsa García Argiz
Instituto de Investig. en Humanidades. CNBA. Universidad de Buenos Aires. Argentina
Direcciones electrónicas: micavall@fi.uba.ar, egargiz@fi.uba.ar
Campo de investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria; Nivel educativo: Medio y Superior.

Abstract
Los esquemas lógico-matemáticos desarrollados durante el crecimiento y formación dentro de un sistema educativo podrían influir y marcar cierta evolución sobre los sesgos del pensamiento probabilístico de los estudiantes, aún cuando éstos no reciban instrucción formal en probabilidades.
Esta investigación ha sido realizada con 152 estudiantes de nivel medio entre 13 y 17 años. Los objetivos de la misma han sido: a) identificar y analizar la influencia de esquemas lógico-matemáticos sobre sesgos intuitivos en juicios bajo incerteza cuando no existe conocimiento probabilístico formal y b) analizar la evolución etaria de estos procesos. La metodología utilizada es mixta. Los instrumentos han sido cuestionarios con preguntas orientadas a la detección de algunos sesgos intuitivos y los esquemas actuantes.

Introducción

Estudios de reconocidos psicólogos cognitivos (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982, Kahneman, 2002) han revelado que los juicios predictivos bajo incerteza están alejados de cualquier norma estadística y se asocian, en general, con ciertas heurísticas intuitivas. En muchos casos, estas heurísticas resultan estrategias eficientes para la predicción, pero en otros, pueden generar errores y falacias.
Según Fischbein y Grossman (1997), las intuiciones están siempre basadas en ciertos esquemas estructurales, es decir, en sistemas organizados de interpretaciones secuenciales y procedimientos vinculados con un cierto nivel de maduración mental y con un suficiente cúmulo de experiencias. Profundizar el conocimiento sobre estos temas, puede ayudar a sentar las bases para el desarrollo de situaciones didácticas tendientes a superar errores y dificultades en el aprendizaje de las probabilidades.
Para detectar y explorar los esquemas actuantes en los juicios probabilísticos intuitivos y en el marco del proyecto de investigación: **Problemas cognitivos en el aprendizaje de las ciencias exactas y experimentales,** se ha realizado una investigación con 150 estudiantes de nivel medio entre 13 y 17 años. Los objetivos de la misma han sido: a) identificar y analizar la influencia de esquemas lógico-matemáticos sobre sesgos y heurísticas intuitivas en los juicios bajo incerteza cuando no existe conocimiento probabilístico formal y b) analizar la evolución de estos procesos con respecto a la edad.
La metodología utilizada es mixta. Los instrumentos han sido cuestionarios con preguntas orientadas a la detección de algunos sesgos intuitivos y los esquemas actuantes. Se han realizado entrevistas clínicas que permiten profundizar en los modelos de pensamiento.

Marco teórico

En general, el ser humano tiene una tendencia a organizar su interacción con el mundo y las ideas a través de una interpretación coherente de los eventos que lo rodean. Con el desarrollo de la edad, la experiencia y como producto de la instrucción formal, se establecen creencias fuertes y estables (Fischbein y Grossman, 1997),. El ser humano confía en principios heurísticos que reducen las tareas complejas a operaciones de criterio más simples (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). Algunos de los principios heurísticos y sesgos del pensamiento probabilístico que se han estudiado en este trabajo de investigación son:

Las falacias de la conjunción y la disyunción: tendencia a sobreestimar la probabilidad de eventos que se producen conjuntamente y a subestimar la probabilidad de eventos disyuntivos.

La incidencia del esquema causal: tendencia a otorgarle a los datos causales mayor impacto que otros datos de igual nivel de información.

Inversión en el eje del tiempo: tendencia a desestimar la estructura estocástica de un problema bajo la influencia del principio de causalidad e irreversibilidad del tiempo profundamente arraigado en la actividad mental.

***Errores asociados a la Representatividad**:* tendencia a estimar la probabilidad de un evento tomando en cuenta cuánto éste representa algún aspecto de la población. Entre otras, puede generar creencias erróneas como el esperar que luego de varias experiencias, a) el evento más probable es el que no se ha producido aún (falacia del jugador) y b) el evento más probable es el que se ha producido más veces. (puede basarse en la asunción implícita o explícita de que las condiciones no fueron honestas).

Metodología.

Muestra: 152 estudiantes de nivel medio entre 13 y 17 años

Instrumento: Cuestionarios con preguntas orientadas a la detección de algunos sesgos intuitivos y los esquemas actuantes**.** Algunas de las preguntas son adaptaciones de problemas propuestos por Kahneman (1982)

1) Miguel arrojó una moneda cinco veces y obtuvo una ceca y cuatro caras. Tira una vez más la moneda.¿ La probabilidad que en la próxima tirada salga cara es mayor, menor o igual a la probabilidad que salga ceca? Explique su respuesta.

2) Se asume que la probabilidad que Juan instale una alarma en su casa si es víctima de un robo es mayor que la probabilidad que instale la alarma si su casa no es robada.¿La probabilidad que su casa sufra un robo si colocó una alarma es mayor, menor o igual a la probabilidad que sea víctima de un robo si no instaló la alarma? Explique su respuesta

3) a) En una bolsa hay dos caramelos de frutilla y dos de limón. Martín extrae un caramelo y ve que es de limón. Sin reponerlo, extrae un segundo caramelo. ¿La probabilidad de que este segundo caramelo sea de limón es menor, mayor o igual que la probabilidad que sea de frutilla? Explique su respuesta.

b) En otra bolsa también hay dos caramelos de frutilla y dos de limón. Pedro extrae un caramelo y lo separa sin mirarlo. Entonces extrae un segundo caramelo que resulta de limón.¿ La probabilidad de que el primer caramelo sea de limón es menor, mayor o igual que la probabilidad que sea de frutilla. Explique su respuesta.

4) Martín es fanático de las películas de Ciencia Ficción. En un Video Club encuentran disponibles dos de sus películas favoritas. a)¿La probabilidad que alquile una de las películas de Ciencia Ficción es mayor, menor o igual que la probabilidad que alquile las dos?

b) La probabilidad que alquile una película de Ciencia Ficción es mayor , menor o igual a la probabilidad que alquile una película de Ciencia Ficción o de cualquier otro género?
Explique sus respuestas
En la **pregunta 1**, la respuesta correcta es Igual. Se observa si se verifican los desvíos esperados en relación con la representatividad (falacias de jugador).
En la **pregunta 2**, la respuesta correcta es Mayor ya que: se informa que
P (A/R) > P (A/ R'), entonces, P (A/R) > P (A). De esta desigualdad sigue que
P (R/A) > P (R/ A')
Se observa si se verifican los sesgos esperados basados en el esquema de causalidad.
En la **pregunta 3a)** Respuesta correcta: Menor. En esta pregunta se espera la respuesta correcta que está de acuerdo con el orden natural del eje del tiempo
En la **pregunta 3b)** Respuesta correcta: Menor. Se observa si la inversión en el eje del tiempo dificulta la conclusión y cuál es el sesgo.
En la **pregunta 4a)** la respuesta correcta es Mayor, y a la **4b)** Menor. Se observa si se verifican los sesgos relativos a la conjunción y disyunción de eventos.
El estudio es descriptivo y explicativo con metodología mixta. Se han realizado entrevistas clínicas en base a los cuestionarios con el objeto de: testear el instrumento y profundizar en los modelos de pensamiento lo que permitió un análisis más adecuado de las respuestas correspondientes a las encuestas realizadas a toda la población de estudio.
El análisis de los datos se ha realizado en dos niveles: el nivel de los juicios y el nivel de las justificaciones.

Resultados y su discusión

PREG 1	1er año (34)	2 año (33)	3er año (26)	4to año (34)	5t año (25)
A Mayor	0 %	12%	0 %	9%	12%
B Menor	3%	6%	4%	0 %	0 %
C Igual (correcta)	97%	82%	92%	91%	88%
D Imp de det.	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
E No contesta	0 %	0 %	4%	0 %	0 %

A nivel de juicios se ve un pequeño decaimiento de respuestas correctas al aumentar la edad, con desvíos hacia las llamadas "falacias del jugador" es decir creer que a) la probabilidad es Menor porque "ya salió muchas veces" o, que se evidencia en los alumnos más jóvenes o b) creer que será mayor porque ya ha ocurrido muchas veces (presuponiendo implícitamente que en realidad no es equiprobable), que se mantiene estable.
Si bien los porcentajes de respuestas correctas son muy altos en todos los cursos y es más alta en el primer año, al nivel de justificaciones se ha observado que en el primer año un 53% de los alumnos, y en el segundo y tercer año, un 40% y un 42% respectivamente, se basan en el hecho de que la situación "*es azarosa*", suponiendo una natural y general equiprobabilidad de los hechos aleatorios. En 4to y 5to año, la mayoría de los alumnos (70% en 4to y 80% en 5to) basa su juicio de igualdad en equiprobabilidad de este evento en particular, independencia de los sucesos a considerar o ambas situaciones.

Es decir, el nivel de racionalidad de la justificación aumenta notablemente, a pesar de no mediar instrucción al respecto al afianzarse los esquemas lógico-matemáticos de los alumnos.

PREG 2	1er año (34)	2daño (33)	3er año (26)	4to año (34)	5t año (25)
A Mayor (correcta)	3%	6%	4%	0 %	0 %
B Menor	39%	61%	38%	35%	52%
C Igual	29%	24%	31%	38%	32%
D Imp de det.	26%	9%	19%	24%	12%
E No contesta	3%	0 %	8%	3%	4%

La respuesta correcta (A: Mayor), aparece con muy bajos porcentajes en todos los cursos, observándose desvíos en dos sentidos, uno, hacia la respuesta (B: Menor) que es consistente con los resultados obtenidos por Kahneman para esta pregunta, pero en esta población, se observa un particular segundo desvío a las respuestas C: Igual y D: imposible de determinar ("*depende*"). Los grupos más sesgados por este tipo de respuesta son el de 2do año y el de 5to año.

Sin embargo, el 2do año la justificaciones a esta respuesta se basan en el hecho de que supone que el ladrón está en conocimiento sobre la alarma (36%), en cambio en los alumnos de 5to, las justificaciones se dividen entre la mencionada (20%) y la basada en la creencia de que si un evento ya ha sucedido (robo), es menos probable que suceda nuevamente (24%) .

En la aseveración inicial del enunciado, la instalación de la alarma aparece como un dato diagnóstico y el robo como dato causal para la subsecuente instalación de la alarma. La desigualdad enunciada coincide con el juicio intuitivo, es decir, el impacto diagnóstico de la alarma incrementa el peso que se da a la probabilidad de robo.

En la pregunta, la colocación de la alarma es el dato causal y es el que dirige fuertemente el juicio sobre la predicción del robo.

En este caso, existe un refuerzo de los esquemas de causalidad basados en el orden temporal. La causa es temporalmente anterior a la consecuencia, lo cual está fuertemente enraizado en el pensamiento humano.

Si bien, este era el sesgo intuitivo esperado y consistente con los hallazgos de los investigadores mencionados, se ha encontrado otra desviación notable en el razonamiento de estos alumnos, con porcentajes similares en los cursos: la consideración de que la probabilidad es Igual.

En la respuesta Igual hay mayormente dos tipos de justificaciones :

a) depende de la decisión de otra persona (el ladrón), b) depende de si el ladrón sabe o no sabe que hay alarma. En ambos tipos de justificación está subyacente el hecho de que el evento es aleatorio y entonces se considera "naturalmente" equiprobable (creencia ya observada en respuestas a la pregunta 1, para los primeros cursos).

En las respuestas D (imp. de determinar), las justificaciones nuevamente se basan en el hecho de que el ladrón sepa o no sobre la existencia de la alarma, la diferencia es que estos estudiantes no consideran equiprobables las situaciones en las cuales consideran que no tienen los suficientes datos para responder.

PREG 3a y b	1er año (34)		2d año (33)		3er año (26)		4to año (34)		5t año (25)	
	3a	3b	3a	3b	3a	3b	3a	3b	3a	3b
A Mayor	0 %	0%	3%	6%	0 %	0 %	0 %	0 %	4%	4%
B Menor	97%	50%	91%	64%	96%	38%	100%	50%	96%	56%
C Igual	3%	50 %	6%	27%	0 %	50%	0 %	44%	0 %	40%
D Imp de det.	0 %	0 %	0 %	0 %	4%	4%	0%	3%	0 %	0 %
E No contesta	0 %	0 %	0 %	3%	0 %	8%	0 %	3%	0 %	0 %

Respuesta correcta: a) B (Menor) , b) B (Menor)

En la pregunta 3a) los porcentajes de respuestas correctas son muy altos en todos los cursos. Esto era lo esperable ya que la respuesta sigue el natural pasaje del tiempo.
Al cambiar el eje temporal en al parte b), manteniendo exactamente la misma estructura estocástica para el problema, las respuestas cambian sustancialmente. Los porcentajes de alumnos que se dieron cuenta de esta estructura común, varían entre 38% y 64% .
En la pregunta 3b) se observa un considerable desvío de juicios hacia las respuestas C (Igual) (40 – 50% en 1, 3, 4, y 5to años y 27% en 2do). Las justificaciones a esta respuesta se basan en que se juzga sobre la condición temporalmente inicial: *"al principio había dos y dos"*. Evidentemente, realizan una simulación mental tratando de seguir el orden natural del tiempo y no logran insertar el dato en este esquema. La idea subyacente en este estilo de pensamiento es que la segunda extracción no pude influír sobre la previa.
Se evidencia aquí un fenómeno profundamente enraizado en la actividad mental: la idea de que un hecho no puede actuar retroactivamente sobre su causa. El orden en que el problema es enunciado como secuencia de eventos no les permite notar la estructura estocástica genuina del mismo. Esta inversión en el tiempo parece contradecir intuiciones muy básicas y es persistente a pesar de el aumento de edad.

PREG 4a y b	1er año (34)		2d año (33)		3er año (26)		4to año (34)		5t año (25)	
	4a	4b	4a	4b	4a	4b	4a	4b	4a	4b
A Mayor	21%	50%	9%	70%	8%	58%	12%	55%	56%	48%
B Menor	15%	15%	16%	21%	16%	15%	15%	15%	4%	32%
C Igual	50%	21%	56%	6%	50%	15%	33%	12%	20%	12%
D Imp de det.	6%	6%	13%	0 %	26%	12%	41%	6%	16%	0 %
E No contesta	8%	8%	6%	3%	0 %	0 %	41%	12%	4%	8%

Respuesta correcta: a) Mayor, b) Menor

En la pregunta 4a) , la respuesta correcta, es decir: la probabilidad de que suceda un evento es Mayor (A) que la probabilidad de la conjunción, aparece en bajos porcentajes en los cuatro primeros cursos y sólo en 5to aparece en un 56% de los alumnos.
En cuanto a los juicios incorrectos, en estos alumnos el desvío no es hacia la respuesta Menor, sino a la respuesta Igual (C), como se observa en el cuadro.

En cuanto a las justificaciones para esta respuesta los más jóvenes generalmente basan su respuesta en la idea ya mencionada de la equiprobabilidad que se le asigna naturalmente a los eventos sobre los cuales se considera que no se tiene información suficiente o dependen de la decisión individual de la persona (“*depende de lo que él decida y por eso es igual” o “Igual porque nada indica que alquile una o dos, depende de factores no expresados aquí)”* . En los cursos superiores, se encuentran también justificaciones del tipo:*“Es igual porque una, dos o las dos, tienen las misma prob (1/3)”*. Partiendo de la idea primitiva de que los sucesos siempre son equiprobables

En la pregunta 4b) de esta pregunta, la respuesta correcta es B (menor), es decir la probabilidad de que suceda un evento es menor que la probabilidad de la disyunción.

Las respuestas correctas varían entre un 15% (1er año) y un 32% (en 5to año), y en todos los cursos la justificación a esta respuesta se realiza, en su mayoría, basándose correctamente en la inclusión de los conjuntos que evalúa.

El desvío predominante es hacia la respuesta Mayor, consistentemente con los hallazgos mencionados por Kahneman y Tversky (1982). En todos los cursos, la justificación a esta respuesta se basa mayoritariamente en la focalización en las preferencias del personaje y en muchos casos el alumno responde de acuerdo a lo que él desearía hacer en una situación similar.

Comentarios finales

En general las respuestas de los alumnos se basan en situaciones ajenas al planteo formal del problema, con fuerte influencia del pensamiento intuitivo por sobre las leyes de la probabilidad.

En el momento de emitir los juicios, las respuestas suelen ser intuitivas, revelando inmediatez y un carácter global (Fischbein & Grossman,1997), sin embargo, se asume que las intuiciones son siempre manipuladas y formadas por un esquema intelectual. En el pedido de justificación, se realiza un llamado explícito a evidenciar los esquemas actuantes. Las justificaciones pueden realizarse en un segundo momento de mayor racionalidad en la cual, la elaboración de la idea comunicable puede interactuar con el juicio previo. De todas formas, las justificaciones hacen un aporte significativo en la comprensión de cómo los esquemas lógico-matemáticos inciden en el aspecto intuitivo.

Los esquemas que se detectan actuando (no siempre favorablemente) sobre las respuestas en estos alumnos son: concepto probabilidad simple, independencia de sucesos, concepto de aleatoriedad, causalidad, temporalidad de la relación causa-efecto.

A nivel de juicios, solamente en la pregunta 4 relativa a la probabilidad de la conjunción y la disyunción comparada con la probabilidad del evento simple, los juicios correctos mejoran en el 5to año, en el resto de los sesgos intuitivos observados, no se evidencia en estos alumnos una evolución notoria hacia las respuestas correctas. El grupo de 2do año resultó atípico con desempeños, con un desempeño significativamente mejor al resto en la pregunta 3b), y un desvío también notable hacia el juicio de que la probabilidad de un evento simple es mayor que la probabilidad de la disyunción, en la pregunta 4b).

En general los niveles de justificación han sufrido evolución con el tiempo. Los alumnos mayores basan sus respuestas en esquemas, que pueden ser erróneos (por ej: tomar como hecho general que cuando un evento ha sucedido, esto disminuye la probabilidad de que suceda nuevamente, grupo 5to, pregunta 2), pero que tiene cierto grado de abstracción y

generalidad que no tienen las respuestas basadas en la apreciación subjetiva de la situación que presentan los alumnos más jóvenes.
Aunque en algunos casos (pregunta 1), el porcentaje de juicios correctos es muy alta, se detecta en las justificaciones creencias erróneas sobre el concepto de aleatoriedad y su vinculación con la probabilidad del evento.
El esquema básico de la probabilidad como cantidad de eventos favorables sobre posibles, parece estar presente en todos los alumnos, se evidencia en la pregunta 1) cuando muchos alumnos como justificación proponen que la probabilidad de cada evento es 1/2, o en la pregunta 3a y b) en las cuales muchos alumnos intentan una respuesta numérica.
El esquema de causalidad, reforzado por la temporalidad de la situación causa-efecto ha incidido fuertemente en los juicios y justificaciones de todos los alumnos.
Si bien, en general se han refrendado en esta población algunos de los sesgos intutivos conocidos en el pensamiento probabilístico y estudiados por Kahneman y Tversky (1982) , Kahneman (2002), aparecen otro sesgo importante de mencionar: la asignación natural de igualdad de probabilidad a eventos sobre los cuales se considera que se tiene poca información o son absolutamente imprevisibles como la decisión de determinado ser humano. Este efecto pudo observarse claramente en las respuestas y justificaciones a las preguntas 1, 2, 4a). El concepto de aleatoriedad no parece estar afianzado en estos alumnos, ni siquiera en los mayores.

Referencias:

Fischbein, E. & Grossman, A.(1997). “Schematas and Intuitions in combinatorial reasoning”. *Educational studies in Mathematics* 34. pp 27-47. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Tversky, A.& Kahneman, D.(1982) “Judgment under uncertainty: Heuristic and biases”. En Kahneman, D., Slovic, P, Tversky, A. (eds) *Judgment under uncertainty: Heuristic and biases.* Cambridge University Press, Cambridge

Kahneman, D. (2002) Maps of bounded rationality: a perspective on intuitive judgment and choice. *Nobel Prize Lecture*. http://nobelprize.org/economics/laureates/2002/kahnemann-lecture.pdf

ELABORACIÓN DE ESTRATEGIAS PARA LA MODELIZACIÓN. UN ESTUDIO SOBRE LOS PROCESOS INVOLUCRADOS

María Inés Cavallaro. Marta Anaya. Cristina Dominguez
Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires. Argentina
micavall@fi.uba.ar, manaya@fi.uba.ar, mdominguez@caece.edu.ar
Campo de investigación: Modelos Matemáticos-Modelos Mentales; Nivel Educativo: Superior

Abstract

En esta investigación, realizada con alumnos de ingeniería en sus primeros cursos en el marco del proyecto de Modelización y Enseñanza desarrollado en FIUBA, se han detectado y analizado las dificultades de los estudiantes en el diseño de estrategias para la modelización de situaciones en contexto. En particular, se ha explorado la posible intervención de tres meta-procesos: la formulación (consciente o inconsciente) del modelo mental que estructura la situación contextual, la elección de representaciones internas y de las relaciones e interacciones asociadas a las mismas y de un sistema controlador y evaluador de esas elecciones.

Introducción

Algunas de las problemáticas planteadas en el ICMI Study 14 Discussion Document (2002) están vinculadas a la actividad desplegada por los estudiantes durante la modelización y al rol de la matemática en el desarrollo de las habilidades respectivas. En este sentido, Berry&Houston (2004) han considerado al rol de las herramientas, el trabajo con representaciones y la formulación de secuencias de acciones para la resolución del problema, como factores importantes para la modelización matemática.

La elaboración de un modelo eficiente, que permita resolver una situación problemática o predecir eventos está estrechamente vinculada con la habilidad para elaborar estrategias que pueden tener lugar en la representación mental del contexto real (etapa de la estructuración del problema) o en el contexto matemático (matematización).

Es decir, durante la elaboración de la estrategia podrían intervenir tres meta-procesos:

- La formulación (consciente o inconsciente) del modelo mental que estructura la situación contextual. La interpretación y uso de la información forma parte de este proceso.
- La elección de las representaciones internas y sus asociaciones. La creatividad, la flexibilidad para desplegar distintos tipos de razonamiento y la disponibilidad y manejo de saberes previos son factores importantes en este proceso.
- Un sistema controlador y evaluador del propio modelo y de las elecciones mencionadas.

Siguiendo estas conjeturas y dentro de la teoría fundamentada en datos (1994), se ha realizado una investigación con alumnos de ingeniería en sus primeros cursos.

Esta investigación, realizada en el marco del proyecto de Modelización y Enseñanza desarrollado en FIUBA, ha tenido por objeto detectar y analizar las dificultades de los estudiantes en el diseño de estrategias para la modelización de problemas reales y, en particular, explorar los meta-procesos anteriormente mencionados.

El instrumento ha sido un cuestionario con situaciones problemáticas de distintas características, no stadard para estos alumnos. La metodología empleada ha sido mixta y se encuadra dentro de los estudios descriptivos y explicativos.

Los resultados de este trabajo sentarán bases para la elaboración de diseños de tareas dirigidas a los alumnos de ingeniería que permitan impulsar y favorecer el desarrollo de las habilidades para la modelización.

Consideraciones teóricas:
Los conceptos de modelización , problema, situación real, modelo matemático se usan de acuerdo a las definiciones establecidas en el Icmi Study 14 Document (2000).
El rol de las habilidades en la formulación de estrategias para el modelado han sido interpretadas siguiendo las ideas más generales sobre creatividad en matemática expuestas por Ervynk (1992).
La intervención y disponibilidad del conocimiento en relación con la memoria se han analizado en el marco de las ideas expuestas por Brainerd y Reyna (2001).
En cuanto a las diferentes clases de conocimiento matemático (conceptual y procedimental) se analizó de acuerdo con las ideas de Hiebert y Lefevre (1986).

Metodología:
Estudio descriptivo – explicativo con metodología de análisis mixta.

Muestra: 40 estudiantes de ingeniería en sus primeros cursos (19 – 20 años) que han aprobado un primer curso de cálculo y álgebra y están cursando Cálculo en varias variables.

Instrumento: Cuestionario con cuatro problemas resueltos en forma presencial.

1) Cómo harías para estimar la altura de una montaña? Qué elementos o conocimientos debieras disponer para hacerlo? Si los tuvieras, describe paso por paso lo que harías.
2) En una fiesta se produjo una tentativa de homicidio.
La policía, interrogó a 18 personas presentes en el momento del crimen. Se les preguntó: si habían oído un disparo y si habían visto que alguien huía. 10 personas oyeron un disparo, 6 contestaron que no habían visto a alguien huyendo, 5 personas contestaron no vieron ni escucharon nada irregular.
¿Cuántas personas contestaron oyeron el disparo y vieron a alguien que huía?
¿Cuántas personas escucharon el disparo pero no vieron que alguien huía?
¿Cuántas no escucharon el disparon pero sí vieron a alguien huyendo?
3) Se tienen 9 monedas de igual aspecto y peso salvo una de ellas que pesa diferente. Se tiene sólo una balanza de dos platillos para pesarlas pero no se puede pesar más de 4 monedas por platillo, ni se puede utilizar más de 3 veces la balanza. Explicá cómo determinarías cuál es la moneda de distinto peso y si ésta pesa más o menos que las demás.
4) El 7 de mayo de 1992, el transbordador especial Endeavour fue lanzado con la finalidad de instalar un Nuevo motor de impulso en un satélite Intelsat de comunicaciones. Se obtuvieron los siguientes datos de la velocidad de transboradador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido: (a continuación se mencionan velocidades para 8 valores distintos del tiempo marcando las distintas etapas de la puesta en órbita)
a) Cómo harías para calcular aproximadamente la velocidad del transbordador a los 40 segundos de iniciado el lanzamiento?, a los 90 segundos?, a los 3 minutos?.
b) Cómo harías para estimar la altura alcanzada al minuto de haber sido lanzado?

c) Cómo harías para estimar la evolución de la aceleración del transbordador y en qué momentos se produce la mayor aceleración?

Los problemas seleccionados requieren distintos niveles de conocimientos matemáticos básicos que deben ser combinados en una forma posiblemente nueva para el estudiante que genera la estrategia. Se han tenido en cuenta problemas en los que se observan fundamentalmente estrategias de organización, estructuración y diagramación de la información y el uso secuencial de información obtenida en cada paso, simulación mental y control de procesos (problemas 2 y 3), en los que se observen las restricciones sobre las inferencias realizadas y cuáles pueden ser las dificultades asociadas.
En los problemas 1 y 4 se observará la traducción y matematízación de una situación contextual con control de factibilidad , la manipulación de datos con distinto grado de complejidad y uso de herramientas matemáticas a nivel conceptual y procedimental y se analizará cómo y con qué extensión y restricciones estos conocimientos son evocados.

Resultados y su discusión

Algunos resultados relevantes para el **Problema 1):**

Contexto físico	*Contexto Matemático. Trigonometría 51%*			*No contesta*	*Factibilidad*		
30%	*Preciso*	*Imprec.*	*Incorr.*	*19%*	*Fact.*	*Poco Fac.*	*No Fact.*
	6%	*30%*	*15%*		*6%*	*60%*	*15%*

El 81% que responde, evidencia comprender el enunciado. El 36% contesta correctamente en el entorno matemático aunque con muy poca precisión evidenciando un manejo pobre de la herramienta matemática. Sólo el 6% usa estrategias un poco más elaboradas.
Los conocimientos matemáticos utilizados son trigonometría sobre un solo triángulo rectángulo y trigonometría sobre dos triángulos .
En general evocan los conocimientos físicos o matemáticos relevantes para la resolución pero no tienen en cuenta restricciones del contexto real. Los métodos sugeridos por el 66% de los alumnos (entre matemáticos y físicos) son poco o no factibles pues un 34% sugiere medir la distancia al "centro" de la montaña y un 28% sugiere subirse a la montaña, lo que evidencia disociación entre el modelo y el contexto real.

A4: "Sabiendo que por cada 100 metros de altura la temperatura baja un grado, mediría la temperatura en la base de la montaña, luego subiría , mediría la temperatura en la cima de la montaña , y así sabría más ó menos la altura que tiene la montaña".
A17: "Desde el lugar donde me encuentro , mido el ángulo que pasa por la punta y el piso, y la distancia a la que me encuentro del centro de la base de la montaña, y uso trigonometría".

Parecería que aceptaran la simplificación más rápida de la situación aunque ésta no se adecúe al problema real. Evidentemente, no hay una simulación mental de lo propuesto.

Problema 2)

Resp. correcta	Oyeron	No Oyeron	Totales
Vieron	9	3	12
No vieron	1	(5)	(6)
Totales	(10)	8	(18)

a) 9 b) 1 c) 3

Responde bien				No resp.	Diagrama
a	b	c	las tres		
12,5 %	0%	47%	9%	22%	12,5% (bien: 3%)

La estructura de resolución de este problema se basa fundamentalmente en la selección de aquella parte de la información dada que permite deducir una información no explicitada. La gran mayoría (69%) colocó respuestas erróneas sin especificar ni mostrar su estrategia. Los resultados parecen estar sesgados por la facilidad con la que se visualiza la situación por medio de una operación mental simple, y/o por la facilidad con la cual ciertas asociaciones podrían ser traídas a la mente.
En este caso, el esquema mental más simple pareció ser el de restar al total (18) los que no vieron ni escucharon (5) (intersección de dos subclases), obteniéndose los 13 que vieron o escucharon. Este primer resultado conduce a la respuesta correcta (3) en la última pregunta cuando de esos 13 (vieron u oyeron) se resta el dato inicial 10 (oyeron). Esto es, de una subclase, se conoce el cardinal de un subconjunto y se pide el otro. Ese podría ser el motivo por el cual el 47% de los alumnos contesta correctamente esta pregunta.
A partir de la consideración que eligen como inicial, las operaciones mentales requeridas para contestar las otras dos preguntas parecen ser más complejas, ya que deben discriminarse de una subclase (oyeron) los dos cardinales, usando datos sobre las uniones.
Si la situación fuese diagramada, no habría diferencia entre las dificultades de las operaciones mentales involucradas. Sin embargo, sólo un 12.5% intenta diagramar y el 3% lo hace correctamente. El diagrama requiere un nivel de abstracción más alto al organizar la información, reconociendo la existencia de dos conjuntos particionados en subclases.

Problema 3)

El 84% de los estudiantes respondió esta pregunta. Este porcentaje se repartió entre un 38% que hicieron la selección adecuada (3 grupos de 3 monedas) , y un 36% que hicieron otra selección que no les permitió resolver el problema.

Estrategia (Selección)		**Representación**	**Detecta lote**	**Detecta moneda**	**Detecta el peso**	**Respeta las Condiciones del problema (3 pesadas)**	**Asume que tiene + o - peso**
3 grupos de 3	34 %	14 %	10 %	4 %	2 %	12 %	4 %
2 de 4cambia a 3 de 3	4%	4 %	2 %	2 %		2 %	2 %
2 de 4	32%	6 %	2%	1 %		8 %	22%
Otros (2y2)	4%	2%				2 %	2 %
No contesta	26%						

Las dificultades observadas en la resolución de este problema se relacionaron con *las restricciones* respecto al número limitado de mediciones (número máximo de pesadas) que desconoció el 50% de los estudiantes. Se observó que el 30 % de los estudiantes supuso que si un platillo estaba más bajo (o más alto) entonces una de las monedas de ese platillo era la diferente y resultaba más pesada (o respectivamente más liviana):

" Pesa más <=> la balanza se inclina a favor del platillo que contiene la moneda deseada;" (A2).

Estos estudiantes no parecen percibir que la moneda diferente podría tener una relación de peso opuesta a la de su suposicion. Es decir no pueden considerar todas las posibilidades.
Hubo dificultades tanto en la identificación del lote en que se encuentra la moneda diferente (60%), en la identificación de la moneda diferente (67%) y en la identificación de su peso (72%). Sólo el 35 % de los estudiantes realizó algún tipo de representación.
Los estudiantes suelen seguir el proceso iniciado pero no siempre logran completarlo dado que la consideración permanente de alternativas opuestas y complementarias queda interrumpida por un "supuesto" o un olvido, en el primer caso se trataría de un "desvío" que permite finalizar "autoconvincentemente" la línea de razonamiento y en el segundo caso faltaría un patrón de razonamiento por refutación.

Problema 4)
La dificultad de este problema consistió en que se presentaron los datos de una función y su derivada en forma discreta. Sólo el 31% de los alumnos propone el trabajo discreto para el cálculo aproximado de velocidades de a), y el 16%, para contestar preguntas relativas a la distancia y la aceleración. Un 44% de los alumnos no responden ningún ítem.

Propone o supone expresión analítica de la función			Trabajo discreto				gráfico	No responde (44%)
Indica cómo hallarla	No indica	Total	Interp. lineal	Extrap.	Integral discreta	Deriv discreta		
a. 9%	12,5%	21.5%	31%	9%	--	3%	9%	--
b. 9%	28%	37%	16%	--	12.5%	---	--	3%
c. 6%	19%	25%	--	--	--	12.5%	3%	19%

El 56% que responde, ha comprendido el enunciado, lo que se pide y distingue datos e incógnitas. Sólo un 22% de los alumnos consideran todas las restricciones del problema entre las soluciones en el contexto discreto y las soluciones propuestas por vía analítica. El problema es interpretado esencialmente en el contexto matemático. Se observa una fuerte tendencia al trabajo analítico-simbólico aunque no preciso y muchas veces incorrecto.
Los conceptos matemáticos evocados son: cuadrados mínimos (9%), que mencionan sin detallar el procedimiento, interpolación lineal (31%), en la cual se detectan errores, como linealizar a partir de un solo dato y calcular de esta forma todas las preguntas asociadas.
Ninguno hace mención a las limitaciones o inexactitudes de los métodos que propone.
Es evidente que muchos alumnos tienen muy internalizada esta representación de las funciones, que es en general la que suele realizarse en los cursos de análisis, y no logran manipular los datos más allá de interpolaciones lineales.

El trabajo directo con los datos interpolando o extrapolando parece más accesible que el trabajo de extraer información relevante y procesarla para contestar preguntas relativas a conceptos que no están explícitos en los datos sino que requieren restricciones. Esto explica el cambio de porcentajes entre el ítem a) y los ítems b y c).

Comentarios finales

- **En cuanto al modelo mental, la representación interna de la situación y el uso de la información.**

En general los alumnos han comprendido la situación problemática y han estructurado la resolución en forma adecuada. Sin embargo, la elección de los conceptos en forma más refinada para la resolución ha evidenciado dificultades.
El modelo mental desplegado en cada situación parece ser el más simple que guarde coherencia con la situación, lo cual es consistente con la teoría de Brainerd y Reyna (2001).
Al evocarse situaciones más conocidas (problemas 1 y 4), se produce una resonancia con conocimientos previos y esto hace que el alumno centre su atención en recordar situaciones previas y restablecer modelos conocidos. Una vez elegido un contexto de resolución, la atención se pone en estos principios evocados olvidando las condiciones del problema.
También se observaron dificultades en la estructuración de la información y razonamiento secuencial aún en casos en que no se requerían conocimientos previos para la resolución.
Por ejemplo, en el problema 2 se observó que no logran un modelo mental conjuntista que les permita manipular simultáneamente condiciones de inclusión, conjunción y disyunción.
En la situación que se requiere simulación mental y control de los procesos (problema 3), las dificultades se encuentraron en el proceso de selección y desarrollo posterior.

- **En cuanto a la elección de estrategias, uso de los conocimientos previos, relaciones, inferencias, y recursos representacionales.**

Dentro el modelo contextual sobre el cual razona, parecería que el alumno busca en su memoria el conocimiento que mejor le resuene con lo pedido (problemas 1 y 4, trigonometría, o derivadas e integrales). Llegado a este punto, y aún habiendo seleccionado herramientas que pueden ser adecuadas para la matematización, puede suceder que falle el aspecto procedimental, o se busque el procedimiento más simple en detrimento de las restricciones de factibilidad del problema real, que son fácilmente sacrificadas.
La falta de recursos representacionales no permitirían estructurar la información y "economizar" recursos mentales, memoria y poder de razonamiento que es una de las características de la organización de la memoria (problemas 2 y 3).
La correcta diagramación o representación de este tipo de problema permite almacenar la información de estructuras más complejas que tienden a desintegrarse más rápidamente en la memoria (Brainerd y Reyna, 2001) y de esa manera al no quedar almacenada la correspondiente representación, el estudiante no puede disponer de esa información, de ahí que estos estudiantes no hayan podido "recorrer" todas las alternativas, limitándose a recorrer a lo sumo una parte del razonamiento (problema 3).

- E**n cuanto a los procesos de control y factibilidad** , se ha observado que la sobre-simplificación de las situaciones, hace que los controles sobre los propios procesos fallen. Esta sobre-simplificación podría deberse a: la falta de conocimientos procedimentales sobre el modelo que el mismo alumno plantea, a las restricciones de "economía" impuestas

por la organización de la memoria y a la falta de estructuración y diagramación de la información (lo cual demanda considerable grado de abtracción).
Finalmente, para lograr una mejora en la habilidad para el modelado y resolución de situaciones problemáticas parecen necesarias las siguientes componentes:
a) Conocimientos (al menos elementales) del contexto de trabajo, un modelo mental que estructure internamente, en una primera instancia, la situación planteada.
b) Conocimiento de herramientas de trabajo, es decir, procedimientos y secuencias de procedimientos que permiten lograr determinados fines y un equilibrio adecuado entre conocimientos procedimentales y conceptuales (Hiebert y Lefevre, 1986).
c) Sistema de representación adecuado junto con la capacidad para interactuar entre sistemas . Los distintos sistemas de representación debieran ser explícitamente trabajados en el entorno de la clase para favorecer el desarrollo de la habilidad para abstraer y codificar información en un nivel que permita una actividad mental más eficiente.
d) Intuición e imaginación para elegir y combinar los elementos mencionados en una estrategia que lleve a la resolución del problema.
e) Sistema regulador y controlador de las elecciones realizadas para que la estrategia resulte coherente, eficaz y factible.
Estas componentes, cuyo despliegue evidencia habilidades del que modela, pueden favorecerse a partir de la práctica sobre diversas situaciones no standard que favorezcan las asociaciones entre conocimientos y el desarrollo de distintos tipos de razonamiento. En este sentido, la matemática no sólo oferta conocimientos a nivel informativo para algunas resoluciones, sino algunas estructuras de razonamiento (representacional, secuencial, etc.).

Referencias:
Blum, W. *et al*, (2002) "ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion document", *Educational Studies in Mathematics - Discussion Document*, 51(1, 2). Kluwer Academic Publishers, pp. 149-171 .

Berry J., Houston K., (2004) "Investigating student working styles in mathematical modellong activities". *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education.* Study Conference in Dortmund (Germany) , Pre-Conference Volume. pp.35-40.

Brainerd, C. y Reyna, V. (2001). "Fuzzy-trace theory: Dual processes in memory, reasoning, and congnitive neuroscience". *Advances in Child Development Behavior*, Vol. 28, pp 49-100

Ervynck, G. (1991) "Mathematical Creativity", *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (Ed.), KluwerAcademic Publishers, Dordrecht, pp. 42-53.

Hiebert, J., Lefevre, P. (1986), "Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: an Introductory Analysis", *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case Of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, N.J. pp.1-23.

Strauss, A. & Corbin, J.(1994). "Grounded theory methodology: an overview". Chap 17 in *Handbook of Qualitative Research* .Richardson.

DE LA SUMA "DETERMINÍSTICA" A LA SUMA ALEATORIA : UNA TRANSICIÓN CON DIFICULTADES

Raúl Katz[1,2] – Marta Massa[2]
[1]Facultad Regional Rosario –Universidad Tecnológica Nacional – Argentina
[2]Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario
rdkatz@fceia.unr.edu.ar – mmassa@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria; Nivel educativo: Superior

Resumen
Se reporta un estudio exploratorio, de tipo cualitativo e interpretativo, del razonamiento de estudiantes universitarios ante problemas que requieren la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (SVAIID). Se discuten comparativamente los resultados de la resolución de un mismo problema realizada por tres grupos (I, II y III). Sobre el grupo III se aplicó una secuencia didáctica diseñada para generar una ruptura con el pensamiento puramente determinístico. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes de los grupos I y II consideran válida la propiedad $\sum_{1}^{n} Xi = nXi$ para tales variables, situación que se constituye en un obstáculo para internalizar el concepto de SVAIID. Esto se atenúa significativamente en el Grupo III, permitiendo reconocer aspectos de interés didáctico en la estrategia aplicada.

Introducción
En las últimas décadas ha crecido notablemente el interés por la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, incorporándose de forma generalizada, no solamente a las diferentes carreras universitarias, debido a su carácter instrumental para otras disciplinas, sino también en la currícula de la escuela media[1]. Esto fue acompañado por un impulso en las investigaciones educativas. Estudios sobre el razonamiento aleatorio ha tenido un gran auge en el campo de la Psicología. Kahneman, Slovic, y Tversky (cit. en Díaz Godino et al.,1996) han puesto de manifiesto la existencia de errores sistemáticos, con sesgos en la intuición ante situaciones de tipo probabilístico, siendo uno de los más estudiados la heurística de la representatividad. Fischbein y Gazit (cit. en Serrano et al., 1998) analizaron otro error típico denominado "falacia del jugador".
Estos sesgos no son ajenos a nuestros alumnos. Entre otros errores encontramos: la identificación de sucesos excluyentes con independientes, la asociación condicionalidad – causalidad, la no aceptación de que un suceso posterior sea condicionante de uno anterior, coincidiendo con resultados comunicados por Sánchez (1996). Un error que nos ha interesado indagar por su reiteración en distintos ámbitos universitarios, está relacionado con la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (SVAIID). Este error se suele encontrar ante problemas como el siguiente:

> *El espesor de una lámina metálica en mm. es una variable aleatoria X normalmente distribuida con $\mu_X = 0.05$ y $\sigma_X = 0.05$. El espesor de una lámina de papel aislante en mm. es una variable aleatoria Y normalmente distribuida con $\mu_Y = 0.05$ y $\sigma_Y = 0.02$. Exprese el espesor del núcleo de un transformador que consta de 50 capas de láminas metálicas y 49 láminas de papel aislante.*

[1] Actualmente, en Argentina, la escuela media comprende el 3º ciclo de la Enseñanza General Básica y la Educación Polimodal

Ante esta propuesta los estudiantes incurren en el error de interpretar dicho espesor a través de la variable 50X+49Y en lugar de $\sum_{1}^{50} Xi + \sum_{1}^{49} Yi$ (donde *Xi* e *Yi* denotan respectivamente las variables aleatorias espesor de la iésima lámina metálica y espesor de la iésima lámina de papel aislante).
Se presenta en este reporte el avance de la investigación, que forma parte de una tesis de maestría, en la que se analizan las actuaciones de los estudiantes ante problemas que requieren la SVAIID, sus razonamientos, los posibles obstáculos y el efecto de secuencias didácticas que permitan contribuir a superar tales dificultades en el aula. La investigación está orientada a encontrar respuestas a los siguientes interrogantes:

- ¿es el error que se observa consecuencia de la ruptura que se produce cuando se introduce el razonamiento aleatorio en un proceso de enseñanza y aprendizaje en el cual predomina el razonamiento deductivo o enfoques algorítmicos?
- ¿existen aspectos del lenguaje que afectan el aprendizaje?

Algunos referentes teóricos que orientan la investigación
En el contexto didáctico, Brousseau (1983) establece "…en un análisis didáctico, los errores no son entendidos como meras fallas de los alumnos sino más bien como síntomas de las naturalezas de las concepciones que subyacen en sus actividades matemáticas". En este sentido la noción de error está relacionada con la noción de obstáculo epistemológico desarrollada por Bachelard (1938). Es así que el error se constituye en un elemento sobre el cual debe operarse a nivel de enseñanza para contribuir a sus superación efectiva.
Brousseau otorga al obstáculo el carácter de conocimiento y no una falta de él, atribuyéndole un rol importante en la adaptación de respuestas ante situaciones nuevas, la resistencia manifiesta ante contradicciones y su persistencia e interferencia esporádica aún cuando se lo haya reconocido. Brousseau distingue tres tipos de obstáculos:

- ✓ ontogenéticos: debidos a las características del desarrollo del individuo.
- ✓ didácticos: resultantes de las elecciones al establecer la situación de enseñanza.
- ✓ epistemológicos: intrínsecamente relacionados el significado del concepto.

Asumimos que la construcción de un conocimiento no es lineal, sino compleja, con avances y retrocesos, continuidades y rupturas, en función de los obstáculos encontrados y la manera de actuar ante ellos. El conocimiento previo es determinante en el progresivo dominio de un campo conceptual, pero también puede, a veces, ser un impedimento. En la enseñanza es preciso identificar aquellos conocimientos previos que pueden actuar como enlace cognitivo y aquéllos sobre los que hay que provocar las rupturas necesarias para evitar se constituyan en obstáculos epistemológicos.

Diseño de la investigación
Metodología: De acuerdo con la naturaleza del objeto de estudio: *la actuación de los estudiantes ante diferentes tipos de problemas que impliquen la SVAIID*, la implementación metodológica adoptada para el desarrollo de la tesis es esencialmente cualitativa, con un enfoque interpretativo, si bien se efectúan algunos análisis porcentuales sobre las características definidas. El mismo supone que las personas actúan en función de sus creencias, conocimientos previos y valoración, con formas de pensamientos y estrategias construidas dentro de una dinámica de experiencias enriquecidas o empobrecidas por la mediación de otros durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Su comportamiento y sus acciones tienen siempre un sentido, un significado que debe ser develado en el propio proceso de la investigación.
El perfil interpretativo que se adoptó implicó enfoques:

a) del análisis del discurso, para estudiar las producciones escritas de los estudiantes y las transcripciones de registros orales grabados,
b) de la investigación - acción en el aula a fin de registrar y contrastar información dentro de los contextos académicos en que se produce la actividad de enseñanza - aprendizaje. La misma se desarrolló en el espacio físico y académico de un Taller de Estadística y Probabilidad, gestionado en la Facultad Regional Rosario para el desarrollo de la tesis, ofrecido a estudiantes que cursaron la asignatura pero no la aprobaron.

En el Taller se revisaron los contenidos de la asignatura, se indagaron las formas de razonamiento asociadas con la SVAIID y se generaron permanentemente acciones deliberadas y estratégicamente planificadas con el propósito de promover nuevas conceptualizaciones o modificar las concepciones erróneas. Se procuró que las propuestas de aprendizaje fueran accesibles y desarrollaran la autoconfianza en el estudiante.
El lenguaje fue considerado un elemento importante en el desarrollo del Taller. Por tal motivo, se incitó a los estudiantes para que permanentemente explicitaran sus ideas, ya sea en forma verbal o escrita, por considerarse que las manifestaciones lingüísticas y los acontecimientos que tenían lugar en la interacción didáctica eran determinantes de lo que aprendían. La aparición y puesta de manifiesto de un error posibilitó la reflexión crítica, la corrección permanente (aunque fuera colectiva) y fue el punto de partida para posteriores actividades.
Asimismo se los comprometió a explicitar sus puntos de vista y a la vez analizar con atención las ideas de sus compañeros. Esta instancia los obligó a reflexionar sobre sus propios errores y sobre los errores ajenos, lo cual resultó propicio para que comenzaran a apropiarse parcialmente de los conceptos y símbolos del tema.
La comprensión de un concepto abstracto, como lo es el de la SVAIID y el manejo de su simbología, requiere que se respeten los tiempos de los estudiantes. Por ello la actividad del Taller procuró respetar sus tiempos de aprendizaje. Lo importante era la construcción de los conocimientos sobre la base de responsabilidades compartidas.

Se utilizaron diferentes técnicas para recoger información, a saber:
<u>Etapa I:</u> exploratoria de tipo diagnóstica para sondear los conocimientos previos y formas de razonamiento al iniciar el Taller y que podían incidir en la estructuración de los conceptos de SVAIID. Se aplicó un cuestionario con algunos ítems que se tomaron de estudios realizadas por Lecoutre, Fischbein y Konold (cit. en Serrano et al., 1998).
<u>Etapa II:</u> seguimiento de la evolución de los aprendizajes de los contenidos previos a la SVAIID. Se analizó la resolución de problemas especialmente diseñados.
<u>Etapa III:</u> momento central de la investigación en el cual se trabajó con la SVAIID. Se registró la resolución de problemas realizada por los alumnos del Taller, con distintos formatos (lingüístico, simbólico y gráfico), luego de desarrollar sistemáticamente estrategias didácticas específicamente diseñadas para superar los obstáculos detectados. Primero se analizó la resolución de problemas realizada por todos los alumnos del Taller a fin de identificar las actitudes para afrontar los problemas, los procedimientos de resolución, las hipótesis formuladas y las concepciones que puedan obstaculizar o favorecer sus resoluciones. Se compararon las actuaciones con las realizadas al resolver los mismos problemas por estudiantes, de la FCEIA (Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura – UNR) en dos momentos diferentes: uno, inmediatamente después de la enseñanza del tema SVAIID en el aula en un curso regular[2], permitiendo

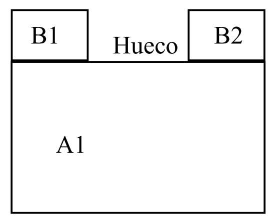
[2] Se entiende por curso regular a aquel que se desarrolla en el tiempo y modalidad de cursado teórico-

el trabajo a "carpeta abierta" y, otro, inmediatamente después de aprobar la asignatura Probabilidad y Estadística en una mesa de examen. Estos últimos grupos respondieron a una enseñanza tradicional, desarrollada en los tiempos académicos y apoyados por los materiales didácticos y la bibliografía de la cátedra. Este análisis comparativo, se complementó con un estudio de casos sobre 8 estudiantes del Taller, tratando de abarcar con un enfoque holístico un amplio espectro de situaciones problemáticas. En este reporte se presentan los resultados de la instancia comparativa de la etapa III.

Sujetos: Se trabajó con tres grupos de estudiantes universitarios. El grupo I estuvo compuesto por 10 estudiantes del Profesorado y de la Licenciatura en Matemática de la FCEIA, que cursaban la asignatura Probabilidad y Estadística. El grupo II estuvo integrado por 12 estudiantes de Ingeniería Civil y Agrimensura de la FCEIA, que accedieron a participar al concluir el examen final de la asignatura homónima. El grupo III estaba integrado por 28 estudiantes de Ingeniería Química, Mecánica y Eléctrica de la Facultad Regional Rosario (UTN), que participaban del Taller. Los contenidos y la bibliografía utilizada por los tres grupos eran equivalentes.

Instrumento: Para el estudio comparativo se utilizó el siguiente problema extraído de Montgomery y Runger (1996), con ligeras variaciones para salvar cuestiones de traducción. El problema presenta una gráfica que reproduce la situación presentada con un texto en el cual se utilizan notaciones simbólicas y números. Tiene una estructura *dato-pregunta/consigna.* Sólo se proporciona la información necesaria y suficiente.

Sobre un bloque de tipo A se colocan dos bloques de tipo B (denotados con B1 y B2) como se muestra en la figura. El ancho de los bloques de tipo A varía aleatoriamente con media 10 y desviación estándar 0.5. El ancho de los bloques de tipo B varía aleatoriamente con media 3 y desviación estándar 0.3. Sea Z la variable aleatoria ancho del hueco comprendido entre los bloques B1 y B2. Calcule E (Z) y V (Z)



Aplicación del instrumento y procesamiento de la información: El problema fue aplicado a los tres grupos quienes tuvieron media hora para resolverlo. Para el análisis de las producciones escritas se definieron a priori las siguientes dimensiones y categorías. Las modalidades surgieron del análisis de los protocolos de resolución:

Dimensiones	Categorías	Modalidades
Definición expresa de las variables "componentes" de una muestra aleatoria simple	Expresión del *ancho de los dos bloques* como variable	Lo expresa previo a definir la variable ancho del hueco
		Lo expresa cuando necesita definir la variable ancho del hueco
		No expresa
	Define las variables B_i ó Y_i (DV)	Define
		No define
		No corresponde
Expresión de una variable aleatoria como función de otras	Expresión del *ancho del hueco*	Expresa
		No expresa.
	Expresión del *ancho total de dos bloques de tipo B* (AT)	2B ó 2Y
		$B_1+B_2=2B$ ó $Y_1+Y_2=2Y$
		B_1+B_2 ó Y_1+Y_2

práctica establecido en las planificaciones anuales para el plan vigente.

Aplicación de propiedades	Aplicación de la propiedad de la esperanza	Aplica correctamente
		Aplica incorrectamente o no resuelve
	Aplicación de la propiedad de variancia (PV)	Aplica correctamente
		Aplica incorrectamente o no resuelve
Hipótesis involucradas	Valoración de la hipótesis de la independencia de variables en el cálculo de la variancia (VHI)	Valora explícitamente
		No valora o no resuelve
	Incorporación de hipótesis ad-hoc (HAD)	Incorpora
		No incorpora
Inclusión de elementos confusos (no claros) en el proceso de resolución		Presencia de elementos
		Ausencia

Las producciones escritas fueron analizadas, asociando las modalidades correspondientes a las distintas categorías, organizándose las matrices de datos de cada grupo, a través del consenso previamente logrado entre ambos investigadores.

Resultados e interpretación de los mismos

En el siguiente cuadro se sintetizan los resultados encontrados para las categorías donde se pudieron detectar actuaciones diferentes, significativas para su análisis comparativo:

Categoría	**Modalidades**	**Grupo I (10 casos)**	**Grupo II (12 casos)**	**Grupo III (28 casos)**
HAD	incorpora	2 (20%)	2 (17%)	3 (11%)
	no incorpora	8 (80%)	10 (83%)	25 (89%)
AT	2B ó 2Y	9 (90%)	4 (33%)	6 (21%)
	$B_1+B_2=2B$ ó $Y_1+Y_2=2Y$	0 (0%)	2 (17%)	1 (4%)
	B_1+B_2 ó Y_1+Y_2	1 (10%)	6 (50%)	21 (75%)
DV	define	1 (10%)	2 (17%)	6 (21%)
	no define	0 (0%)	7 (58%)	15 (54%)
	no corresponde	9 (90%)	3 (25%)	7 (25%)
PV	correcto	7 (70%)	8 (67%)	22 (79%)
	incorrecto-no responde	3 (30%)	4 (38%)	6 (21%)
VHI	valora	4 (40%)	3 (25%)	3 (11%)
	no valora-no resuelve	6 (60%)	9 (75%)	25 (89%)

Los resultados muestran diferencias de actuación en los tres grupos. El Grupo I, a pesar de trabajar a "libro abierto", comente un error común en el 90% de los casos: expresan la variable *ancho total de dos bloques de tipo B* como 2B ó 2Y siendo B ó Y el ancho de un bloque de tipo B. En el grupo II este error se presenta sólo en el 50 % de los casos y en el grupo III se reduce al 25 %. Las justificaciones de los estudiantes en las entrevistas sugieren, para el Grupo I, que no están considerando variables aleatorias, sino entidades fijas, determinadas y genéricas: el *ancho* de un bloque es considerado como una propiedad propia del bloque y no una característica cuyos valores observados en la totalidad de los bloques se distribuye siguiendo cierto comportamiento. Esto puede interpretarse como la persistencia de un razonamiento de tipo determinístico que actúa como obstáculo para captar el carácter aleatorio de la variable *ancho*. Ante la intervención del investigador para que se analice qué ocurriría si se midiesen los anchos de los bloques, los estudiantes son capaces de reconocer que no necesariamente serán iguales, si bien persiste la dificultad para expresarlo con una notación formal.

En relación con la categoría AT, se observa que los estudiantes del Grupo I reflejan claramente el razonamiento determinístico mencionado al expresar el ancho total de dos bloques como 2B ó 2Y. En el Grupo II se reduce esta tendencia como consecuencia de una mayor experiencia adquirida durante el cursado completo de la asignatura y un estudio integrador de la misma para la instancia de examen final. El Grupo III muestra una superación de este obstáculo promovido intencionalmente en el Taller y las múltiples situaciones didácticas abordadas en el mismo. En un menor porcentaje, se registran estudiantes de los Grupos II y III que expresan $B_1+B_2=2B$ ó $Y_1+Y_2=2Y$. Esto se interpreta como la dificultad para diferenciar variables aleatorias idénticamente distribuidas, que tienen en el caso de las variables continuas la misma curva de densidad, con variables aleatorias iguales. Esta dificultad se reduce ostensiblemente en el grupo III que ha tenido más oportunidades para reflexionar al respecto.

Se observa una significativa mejora (uso de expresiones correctas B_1+B_2 ó Y_1+Y_2) como consecuencia de la metodología específica del Taller.

Otra dificultad generalizada se observa en la definición de las variables aleatorias cuando éstas constituyen una muestra aleatoria simple de otra variable. Los alumnos, por lo general, no definen las variables Y_i : ancho del iésimo bloque. En algunos casos ni siquiera las expresan simbólicamente, pero introducen sus esperanzas y variancias al resolver el problema. Esto merece ser profundizado en la investigación indagando las relaciones entre la conceptualización y la simbolización ya que, según señala Duval (1999), la aprehensión conceptual de un objeto es inseparable del desarrollo de simbolismos específicos para representarlo, efectuándose el desarrollo de las representaciones mentales como una interiorización de las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos.

Otro error, no frecuente pero común en los tres grupos, es suponer distribución normal para aquellas variables aleatorias en que sólo se explicitan su esperanza y variancia o desviación estándar, como si éstos fuesen datos exclusivos de tal distribución.

Los alumnos de Ingeniería muestran una tendencia bastante generalizada a priorizar el resultado de una operación al aplicar una propiedad, y no las condiciones bajo las cuales ese resultado tiene sentido. La mayoría de estos alumnos no explicitan la hipótesis de independencia entre variables aleatorias al calcular la variancia de una suma.

Conclusiones

En relación a la SVAIID, las actividades desarrolladas en el taller y el tiempo destinado a reflexionar e interpretar han sido el puente para la aprehensión de un concepto que presenta dificultades intrínsecas. Estas reflexiones no siempre las realiza un alumno durante su estudio independiente en un formato tradicional de una clase expositiva, acotada en el tiempo en función del contenido curricular. Los estudiantes que centran su aprendizaje en un proceso de "autogestión parcial" suelen desplazar la labor interpretativa por una ejercitación prolongada que afianza la rutina, en desmedro de una comprensión. Cuando esto ocurre la frecuencia de aparición del error es mayor. La comprensión de la SVAIID no se genera de manera rápida, sino que se va construyendo paso a paso en el transcurso del tiempo. Exige que los estudiantes interactúen entre sí y con el profesor para promover la negociación de significados.

En algunos casos se observa en las producciones escritas de los estudiantes el logro de manipulaciones simbólicas que les permite obtener respuestas apropiadas, pero en el momento de las entrevistas se pudo constatar que éstas no se corresponden con un aprendizaje significativo. La creencia de que se comprende porque se tiene posibilidades de calcular constituye un obstáculo para mejorar o alcanzar la conceptualización. Consideramos que desde lo didáctico deben promoverse procesos reflexivos de modo que los estudiantes sometan a análisis al propio pensamiento y así validar o modificar sus propias concepciones. Es en este marco donde debe identificar los obstáculos y generar la ruptura con el pensamiento puramente determinístico para dar lugar a una estructura más amplia que incluya el pensamiento aleatorio y de este modo transitar de la "suma determinística" a la suma aleatoria.

Bibliografía

Bachelard, G. (1980). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2) ,*65-198.

Díaz Godino, J., Batanero, M. C., Cañizares M. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid, España: Síntesis.

Montgomery, D., Runger, G. (1996). *Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería*. México: McGraw Hill.

Sánchez, E. (1996). *Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción de independencia estocástica en profesores de bachillerato: Un estudio de casos*. Tesis de Doctorado, Instituto Politécnico Nacional, México.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. y Cañizares, M. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. *Revista de Educación Matemática,10 (1),* 7-23.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS..... UN CAMINO PARA APRENDER A APRENDER

García Zatti, Mónica - Suhit, Gloria
Colegio La Inmaculada / Facultad Regional Bahía Blanca - U.T.N. Argentina
garciazatti@yahoo.com.ar, gsuhit@criba.edu.ar

Campo de Investigación: Resolución de problemas; Nivel Educativo: Medio Superior
Palabras claves: Resolución de problemas / Autoaprendizaje / Constructivismo

RESUMEN

En una sociedad con continuos cambios científicos y tecnológicos, la Educación Matemática debe plantearse la necesidad de formar personas creativas, innovadoras, flexibles, con capacidad para construir nuevos y viables significados, que les permitan enfrentar situaciones de incertidumbre y de continuos cambios. Desde esta perspectiva y en nuestro carácter de mediadores entre los alumnos y el conocimiento, tenemos una tarea ineludible: enseñarles a aprender a aprender.
En este trabajo queremos compartir nuestra experiencia de elaboración, implementación y evaluación de un Taller de Resolución de Problemas y reflexionar sobre las posibilidades que ofrece la metodología de resolución de problemas como un medio que favorece el desarrollo de capacidades y competencias necesarias para el autoaprendizaje.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La matemática como ciencia constituida se caracteriza por su precisión, por su carácter formal y abstracto, por su naturaleza deductiva y por su organización, a menudo, axiomática. Sin embargo tanto en su desarrollo histórico como en la apropiación individual por los alumnos, la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta, de la intuición y de las aproximaciones inductivas necesarias para la resolución de problemas particulares. La experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real, es un paso previo para la formalización. Los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y analizar qué sucede…son los pasos necesarios para elaborar principios y teorías. Esta fase inductiva es la que orienta al matemático si el proceso de construcción del conocimiento transita por el camino correcto. La deducción formal suele aparecer en una etapa posterior.
Si reflexionamos sobre nuestra práctica docente, se puede observar que los procedimientos inductivos se relegan a segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático.
Y como afirma Alan Schoenfeld (1995) esta presentación de la matemática hace que "nuestros alumnos piensen que de la matemática ya se sabe todo y que, …, debe ser repetido todo hasta que se aprenda. No existe la emoción por descubrir algo nuevo, sino (simplemente) la satisfacción de adquirir ciertas habilidades,… y lo que aún es más importante, no tienen idea de que "entender" la matemática significa hacerse preguntas hasta que las cosas tengan sentido; en vez de ello para los alumnos significa reproducir pasivamente lo que se les ha enseñado".
Sostiene que "podemos y debemos introducir a nuestros alumnos en la experiencia de ejercitar la matemática como la conoce el matemático".

Observa que " es preocupante el hecho de que los alumnos rara vez se dan cuenta de que son capaces de pensar, de que pueden observar cómo piensan y de que al reflexionar sobre sus éxitos y sus fracasos, pueden mejorar su rendimiento en lo que a resolución de problemas se refiere".
Plantea que "la auténtica ayuda que podemos prestar a nuestros alumnos, tanto los que han elegido matemáticas como carrera, como los que nunca volveremos a ver, es facilitarles las técnicas mentales que podrán usar después de que hayan realizado los exámenes finales… No existe una disciplina mejor para aprender lo que "comprender" significa."
Por lo tanto sugiere que en todos los niveles la enseñanza de las matemáticas deberían incluirse oportunidades para la exposición por parte del profesor, la discusión entre profesor y alumno y entre los propios alumnos, el trabajo práctico apropiado, la consolidación y práctica de técnicas y rutinas fundamentales, la resolución de problemas, incluida la aplicación de la matemática a situaciones de la vida diaria y el trabajo de investigación.

En nuestro carácter de mediadores entre los alumnos y el conocimiento, tenemos una tarea ineludible: enseñarles ***a aprender a aprender***, proceso que supone la adquisición gradual de conocimientos procedimentales (Ausubel, 1983).
Los conocimientos procedimentales designan un conjunto de acciones, de formas de actuar y de llegar a resolver tareas, hacen referencia a las actuaciones para solucionar problemas, para llegar a objetivos o metas, para satisfacer propósitos y para conseguir nuevos aprendizajes. Se trata de conocimientos referidos al saber hacer cosas.
Un buen camino para organizar la enseñanza – aprendizaje de los procedimientos consiste en practicar la **metodología de resolución de problemas,** ya que en todo proceso de resolución de problemas surgen los procedimientos básicos: observar, identificar, interpretar, describir, comparar, clasificar, definir, graficar, analizar, inferir, hipotetizar, explicar, demostrar, fundamentar, resolver, …

La palabra problema se utiliza frecuentemente en educación matemática para indicar cuestiones de diferente naturaleza que debe resolver el alumno.
Podemos acordar que el término **problema** designa una situación matemática o extra matemática que no siempre es accesible inmediatamente, que puede admitir una, ninguna o varias soluciones, distintas vías de aproximación, que exige buscar, investigar, relacionar (IPN; 2001), y que además: "Para resolver un problema es necesario conocer el campo específico al que se refiere el problema, saber regular y controlar dichos conocimientos y afrontarlos con las actitudes matemáticas adecuadas .Esta tarea individual está impregnada de emociones que están presentes de formas diversas a lo largo del proceso de resolución y de bloqueos cognitivos, afectivos y socioculturales" (Callejo,1995)

¿POR QUÉ Y PARA QUÉ LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Si convenimos que "**saber** "matemática es "**saber hacer**" y siguiendo a Coll, en (Palacios, Coll y Marchesi, 1990), "saber hacer consiste en saber interactuar con símbolos, representaciones, ideas, imágenes, conceptos y se construye sobre el desarrollo de estrategias superiores del pensamiento", la enseñanza - aprendizaje a través de la ***resolución de problemas*** nos proporciona un camino para lograr esta meta.

¿Por qué?
Porque pone el énfasis en los ***procesos de pensamiento***, en los ***procesos de aprendizaje*** y toma los contenidos matemáticos como el medio privilegiado para adquirir formas de pensamiento eficaces.

¿Para qué?
Este tipo de enseñanza- aprendizaje, aplicable a todas las edades, favorece entre otros aspectos, que el alumno (Guzmán, 1994)

- ejercite su creatividad
- active su capacidad mental
- reflexione sobre su propio proceso de pensamiento
- se divierta con su propia actividad mental
- adquiera confianza en sí mismo
- se prepare para resolver otros problemas de la ciencia y de la vida cotidiana
- se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia
- se integre en grupos de trabajo que favorezcan actividades de cooperación, solidaridad, confrontación de ideas, así como el saber escuchar y respetar los tiempos y opiniones de los demás

Aunque existen diferentes concepciones para el abordaje de esta problemática pueden encontrarse puntos de vista coincidentes sobre dos aspectos: *la enseñanza de la resolución de problemas es una tarea pedagógica complicada,* porque deben considerarse múltiples aspectos que conllevan a que el aprendiz sea eficiente resolviendo problemas y ésta *produce un aprendizaje significativo* si lo enfrenta a situaciones para las cuales no conoce la vía de cómo resolverlas.
Entre los múltiples trabajos sobre esta temática se pueden destacar:

- ✓ los centrados en el enfoque heurístico de la enseñanza de la resolución de problemas, donde se destacan autores como (Polya, 1985) (Schoenfeld, 1995).
- ✓ los que se enmarcan en el enfoque socio- cultural de Vigotsky y proponen la enseñanza problémica o enseñanza por medio de la resolución de problemas , donde el aprendiz es sometido sistemáticamente al enfrentamiento de tareas que lo hacen pensar, indagar, contrastar, formular hipótesis y verificar los resultados, tratando que se simule, a escala del aula , la labor científica (Vigotsky, 1995).

¿CÓMO ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS?

Esta experiencia se desarrolló en el colegio La Inmaculada, Bahía Blanca, Argentina, durante los meses de septiembre, octubre y noviembre de 2004, bajo el formato de taller, en horario a contraturno y participaron de la misma alumnos que cursaban 3º año del nivel polimodal de todas las orientaciones. La participación de los alumnos fue voluntaria y, en principio, se conformaron cuatro comisiones de aproximadamente 15 estudiantes. Dichas comisiones estuvieron a cargo de dos profesores del área, se reunieron una vez por semana en encuentros de, aproximadamente, dos horas de duración.
Los alumnos dispusieron de un material que fue especialmente diseñado para este taller. Este material contaba con algunas sugerencias y reflexiones acerca de la resolución de problemas y con una selección de problemas a resolver, y para la elaboración del mismo se

tuvieron en cuenta diferentes aportes: (Antón, 1994), (Callejo, 1995) (Guzmán, 1994) (IPN, 2001) (Masón, 1989) (Mayer, 1983) (Nickerson, 1990) (Polya, 1985) (Pozo, 1995) (Schoenfeld, 1995)

El objetivo de esta experiencia era que los alumnos reflexionaran sobre lo que ellos consideraban que era un problema y luego, en los sucesivos encuentros y mediante diferentes situaciones problemáticas, ir desarrollando estrategias de resolución de problemas.

Sabemos que el proceso de resolución de problemas constituye una unidad orgánica, por tanto, cualquier fraccionamiento del proceso es artificial. No obstante, a los efectos didácticos, puede ayudarnos considerar etapas en la resolución. Por eso sugerimos a los alumnos los siguientes pasos (Guzmán, 1994):

1) FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA	▪ Antes de hacer nada . trata de entender ▪ No te apresures, trabaja con tranquilidad ▪ Imagina los elementos del problema ▪ Trata de tener en claro la situación de partida, la de llegada y lo que debes lograr. ▪ Busca información que te pueda ayudar ▪ Trabaja con interés
2) BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS	▪ Anota las ideas que se te ocurran ▪ Comienza a desarrollar las ideas cuando poseas varias.
3) LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA	▪ Desarrolla las ideas de la etapa anterior ▪ Procura no mezclarlas ▪ Trabaja con flexibilidad en las situaciones que más se complican ▪ Si consideras que llegaste al final , observa con detenimiento la solución que obtienes
4) REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONCLUSIONES	▪ Examina con detenimiento el camino que has seguido ▪ ¿Cómo llegaste a la solución? Y si no fue posible ¿por qué no llegaste a la solución? ▪ Trata de entender por qué fue posible llegar al resultado ▪ Busca , si es posible, otro camino más sencillo u otro modo de resolverlo ▪ Intenta trasladar el método a otras situaciones ▪ Reflexiona sobre tus estados de ánimo, tu proceso de pensamiento y saca conclusiones para el futuro

Para trabajar en estos encuentros se seleccionaron cuatro estrategias generales. Optamos por aquellas que considerábamos fundamentales, a partir de las cuales se podían desarrollar otras más específicas, y por aquellas que se podían complementar mejor con las estrategias de resolución de los alumnos. Las estrategias seleccionadas fueron (Antón, 1994):

- *Comenzar por lo fácil, simplificar, particularizar.* Consiste en pasar de considerar un conjunto de objetos dado a uno más pequeño contenido en el conjunto. La particularización puede hacerse al azar para entender el significado del problema o de forma sistemática para preparar el camino hacia objetivos más ambiciosos. Puede afectar a los datos, las incógnitas y su aplicación a unos o a otros depende del tipo de problema a resolver

- *Experimentar (ensayo y error), buscar regularidades.* Las propiedades de un conjunto de números, figuras, objetos en general se pueden intuir cuando observamos la presencia de casos particulares. Por lo tanto, la forma de averiguar si una propiedad es común a varios de elementos consiste en experimentar con algunos de ellos. En la utilización del ensayo y error conviene contrastar cada respuesta para comprobar si estamos más cerca o más lejos del objetivo planteado.

- *Analogía, semejanza.* A medida que se adquiere una cierta experiencia resolviendo problemas es probable que se encuentren situaciones que se parecen a otras que ya se han trabajando. Ante cualquier situación nueva debemos preguntarnos ¿a qué nos recuerda? ¿es como aquella otra? ¿en qué se parece a aquel problema? Es muy bueno recordar dichas situaciones y analizar si es posible aplicarlas para el nuevo problema.

- *Suponer el problema resuelto.* Existen situaciones donde el camino es más sencillo al recorrerlo desde el final al comienzo, es decir, considerando el problema resuelto. Al imaginar el problema resuelto aparecen los datos y relaciones más próximos a los que buscamos y más fácilmente encontramos el camino desde donde nos encontramos a donde queremos llegar

RESULTADOS, CONCLUSIONES, TRABAJO FUTURO

Durante la implementación de este taller se observó una deserción importante de alumnos. Los motivos que manifestaron los alumnos fueron de distinta índole:

- La época del año, sobre fin del tercer trimestre, cuando más tiempo debían dedicarse al estudio de las materias curriculares.
- El horario del taller, que afectaba otras actividades extracurriculares.
- El no estar acostumbrados a la forma de trabajo de las sesiones, no expositivas, y el tipo de actividades planteadas: expresión verbal de los procesos de pensamiento, debate en grupo de idea, respeto los tiempos personales, flexibilidad para cambiar de estrategia o modificarla en el curso de la resolución……que requieren un aprendizaje de estas habilidades y formas de trabajo.

Por lo tanto es fundamental fomentar un clima de libertad para la comunicación para que vayan superando los bloqueos, que tienen su origen en diversos planos- cognitivo, afectivo, sociocultural - y que impiden percibir los problemas de forma adecuada o encontrar un camino para su solución (Antón, 1994).
Desde nuestra experiencia, con este y otros grupos, usando la **metodología de resolución de problemas,** podemos concluir que se puede aprender a resolver problemas, que se puede

favorecer este aprendizaje, pero es difícil enseñar porque el modo de abordar la resolución de problemas es algo muy personal.
Por lo tanto es necesario ayudar a cada estudiante a descubrir su propio estilo, sus capacidades, sus limitaciones, es decir, no se trata de transmitir métodos, reglas, "trucos", sino favorecer el análisis , discusión y crítica de los **procesos de resolución,** que les permitan **entender su razonamiento, aumentar la confianza en sus habilidades matemáticas y su seguridad para alcanzar un conocimiento más completo.**

REFERENCIAS

Antón, J., González, F., González, C., Llorente, J., Montamarta, J., Rodríguez, J. y Ruiz, M. (1994). *Taller de Matemáticas*. España, Madrid: Nancea, S. A. de ediciones.

Ausubel, D. y Novak, H. (1983). *Psicología Educativa*. México: Trillas.

Callejo, M. (1995). *Club matemático para la diversidad.* España, Madrid: Narcea.

Guzmán, M (1994). *Para pensar mejor*. España, Madrid: Pirámide.

Instituto Politécnico Nacional (2001) *Álgebra para Nivel Medio Superior*, México: Instituto Politécnico Nacional.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, R. (1989) *Pensar matemáticamente* España, Madrid: Labor. M.E.C.

Mayer, R (1983) *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* España, Barcelona: Paidós.

Nickerson, R. (1990) *Enseñar a pensar.* España, Madrid: Paidós.

Palacios, J., Coll, C. y Marchesi, A. (compiladores) (1990) *Desarrollo psicológico y educación* Vol. II. Madrid: Alianza

Polya, G. (1985) *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Pozo, J. y otros (1995) *La solución de problemas.* Argentina: Santillana. Aula XXI

Schoenfeld A.(1995) *Ideas y tendencias en la resolución de problemas.* Argentina: O.M.A.

Vigotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje. :* Paidós Editor

ENSEÑANZA DE UNA ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN EJEMPLO DE OPTIMIZACIÓN

Clarisa Noemí Berman y Ana María Narvaez
Facultad Regional Mendoza. UTN – Escuela Ing. Gabriel del Mazo
robertopapini@supernet.com.ar - anarvaez@fcemail.uncu.edu.ar
Campo de Investigación: Resolución de problemas; Nivel educativo: Medio y Superior

1 RESUMEN

El objetivo de la presente investigación – acción es la enseñanza de una estrategia de resolución de problemas para alumnos del nivel medio superior argentino (polimodal y primer año de la universidad) que involucra cambios de registro de representación semiótica (Duval, 1999). Ahora bien ¿es necesario implementar la enseñanza de una estrategia para resolver problemas? La respuesta ha sido afirmativa en vistas de un control de entrada o prueba de prerrequisitos realizada a los estudiantes de tercer año de polimodal de una escuela técnica de la provincia de Mendoza. A partir de dicho instrumento se diseñó una situación problema didáctica, pues la misma se basa en la funcionalidad de los conocimientos que ella involucra, provocando modificaciones en la conducta del alumno y favoreciendo la aparición de los conceptos deseados.

2 ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Entre los antecedentes de esta investigación se cuenta con los trabajos de Regine Douady sobre el cálculo del área de un rectángulo de perímetro dado; el trabajo *Aprender (por medio de) la resolución de problemas* de Roland Charnay (1990/91); *Empleo de funciones en situación de modelización* de Luisa Ruiz Higueras (1998) y la práctica docente de las investigadoras durante más de 20 años de enseñanza de la Matemática en ambos niveles.
El marco teórico privilegiado en nuestra investigación es la Teoría de Juegos de Marcos de Regine Douady (Douady, 1986) que introduce la noción de marco.
En esta investigación también se ha considerado la teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval (Duval, 1999). Se entiende por registro, en esta teoría, un sistema de signos. Las matemáticas constituyen un cuerpo de conocimiento en el cual la movilización de una pluralidad de registros de representación semiótica es visible y necesaria. En las representaciones semióticas entran en juego tres aspectos: el aspecto **estructural,** el aspecto **fenomenológico** y el **funcional.**
En el presente trabajo hemos considerado el registro verbal, el registro tabla, el gráfico y el algebraico para el diseño de la situación problema.

3 METODOLOGÍA

Se ha empleado la metodología de investigación *ingeniería didáctica.* La ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, esto es sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. La metodología ingeniería didáctica se caracteriza por las siguientes fases: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación.

4 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Se propone esta investigación con el fin de implementar una estrategia de enseñanza de resolución de problemas para lograr:

- familiarizar a los estudiantes con la articulación entre los registros verbal, gráfico, algebraico y
- demostrar a los profesores que la articulación de registros debe formar parte de los objetivos de la enseñanza en el nivel elegido.

5 CONSTRUCCIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Se han tenido en cuenta el campo de conocimiento del alumno, las distintas etapas en el aprendizaje (aproximación o apropiación de la situación, aprendizaje propiamente dicho), el dominio de las herramientas necesarias para abordar esta nueva situación, el análisis de las producciones de los alumnos y las variables didácticas (Guillaume, 1991).

Aproximación o apropiación de la situación

Se diseñó una situación diagnóstico para observar la forma en que nuestros alumnos se desenvuelven en el tratamiento de ejercicios y problemas, en esta etapa se espera que los mismos resuelvan en forma autónoma las situaciones planteadas, permitiéndonos interpretar errores, detectar las falencias que manifiestan al abordar situaciones y verificar la necesidad o no de la enseñanza de una estrategia de resolución.
Se le dio a los alumnos una serie de tres ejercicios y seis problemas sobre los cuales decidían la forma de resolución. Esta etapa nos permitió obtener información suficiente para establecer la necesidad de plantear una situación didáctica particular para la enseñanza de una estrategia de resolución de problemas e informarnos qué privilegian nuestros alumnos al intentar resolver una situación.

Conclusión del control de entrada: El análisis de la respuesta de los alumnos revela que los mismos solo podían realizar cálculos mecánicos, es decir, pudieron resolver ejercicios. Asimismo, se observó una marcada tendencia a operar sin metas claras, por ejemplo un estudiante dijo *"No sabía que hacer, no podía sacar la cuenta"*
De un total de 29 alumnos, 27 pudieron resolver solamente los ejercicios, no los problemas.
Creemos que el comportamiento de los estudiantes frente a la situación planteada es consecuencia de la falta de interpretación y de un análisis crítico de los enunciados, producto de una enseñanza algorítmica, mecánica y rutinaria y de las exigencias de las evaluaciones, agravado por un tratamiento de contenidos aislados.

Aprendizaje propiamente dicho

Teniendo en cuenta los prerrequisitos de los estudiantes al momento de la presente experimentación, la epistemología, la opinión de especialistas y la pregunta de esta investigación *¿La estrategia propuesta ayuda a los alumnos a superar las restricciones que los limitan para resolver problemas?,* se diseñó una situación didáctica.

Nuestra propuesta contiene etapas que ponen en juego acciones para interpretar el problema, seleccionar una estrategia de resolución, permitiendo validarla mediante la articulación de los distintos registros.
Se pretende que los alumnos constaten la importancia de una lectura comprensiva, fomentando la búsqueda de la información explícita o implícita que ofrece el problema, el tratamiento de concepciones erróneas y la posibilidad de interrelación de los registros.
La experiencia frente al aula nos ha permitido observar que el tratamiento de la resolución de problemas, y la articulación de registros no es en el alumno tan evidente como lo suponemos los docentes, falencia que se ha detectado no sólo en el nivel medio sino también en los primeros años de la universidad
Esta situación es un aporte en la enseñanza realizada, fruto de una investigación didáctica intencional.

En la hora de clase destinada al tema objeto de estudio les fue planteada a los alumnos una *situación didáctica particular* en el sentido de Douady, es decir aquella que corresponde como mínimo a la fase de acción de los estudiantes.
Las intenciones didácticas consideradas para el diseño fueron:

- Facilitar las fases de interpretación, comprensión, análisis, elaboración de hipótesis y justificación de las mismas.
- Facilitar la elaboración de un posible plan de resolución y justificación del mismo.
- Aplicar la estrategia de solución elegida, contrastar hipótesis planteadas y verificar la solución hallada.
- Comunicar razonablemente el resultado obtenido.
- Valorar la utilidad de la estrategia.
- Tomar conciencia de que la matemática es una ciencia dinámica.
- Tomar conciencia de que el hombre en todos los tiempos ha contribuido a la cultura matemática.

En la concepción de la secuencia se decidió actuar sobre las siguientes variables macro – didácticas o globales, definidas por M. Artigue (1995) como las variables manipuladas por el docente para hacer evolucionar el comportamiento de los alumnos en la organización global de la secuencia:

- Variables ligadas a la dimensión cognitiva:

Se concibe una secuencia de enseñanza que articule los registros algebraico, geométrico, numérico y el del lenguaje natural, haciendo representaciones y tratamiento de conjeturas en dichos registros de representación semiótica.

- Variables ligadas al contenido:

En la secuencia los ejes del desarrollo fueron la elección de funciones polinómicas de segundo grado, dado que satisfacen la condición de continuidad en IR y, posteriormente se utilizarán para abordar otra estrategia de resolución que involucra el concepto de derivada. También esta clase de funciones permite hacer la articulación de la enseñanza de una estrategia en la resolución de problemas con el primer año de la universidad.
Se privilegió que el conjunto solución fuese no entero, para la puesta en acto del registro gráfico y algebraico.

Otro eje fue el relativo al análisis de las características geométricas de la función de segundo grado.
Se tuvieron en cuenta los conceptos de variables y constantes, funciones y reconocimiento de dominios de definición de las funciones, en particular las polinómicas y sus restricciones según el contexto del problema.
En el marco geométrico se enfatiza el concepto de perímetro y área de cuadriláteros.

- Variables ligadas al proceso de enseñanza – aprendizaje:

(a) La secuencia se concibe de forma tal que se articulen e integren nociones dadas previamente en Geometría y Matemática coordinando temas que suelen abordarse y tratarse de forma separada, pero que desde el punto de vista matemático sostienen relaciones de significado.

(b) Limitar la complejidad en la resolución algebraica, no dando ejercicios que involucren desarrollos que requieran más competencias que las que se sabe poseen los alumnos.

(c) La secuencia se concibe de manera que el alumno pueda continuamente verificar sus respuestas en función de las actividades siguientes.

En la concepción de la secuencia de enseñanza, es relevante para esta investigación destacar el énfasis otorgado a ciertos aspectos, considerados como innovaciones, respecto de la enseñanza tradicionalmente dada a estudiantes de este nivel.
Ahora bien ¿por qué realizar estas innovaciones? y ¿con qué intenciones?
La respuesta es para lograr mejor comprensión e interpretación del tema y mejores competencias en los estudiantes que se enfrentarán a problemas propios del campo de la ciencia y técnica del currículo correspondiente a sus futuras profesiones.

Experiencia

La experiencia se efectúo simultáneamente en dos cursos de 3º año del polimodal (17 –18 años) de una Escuela Técnica en la especialidad Mecánica y Electrónica. La primera propuesta, como se dijo anteriormente, tiene como objetivo realizar un control de entrada, es decir evaluar los conocimientos de los alumnos con respecto a la resolución de problemas. Los estudiantes trabajaron en forma individual y grupal de manera espontánea en dos clases de 90 minutos cada una y también en horario extra clase. La tarea estuvo diseñada de tal manera que la investigadora registrara todo lo observado con respecto al quehacer de los alumnos en las clases presenciales.

En referencia a la segunda etapa:

En esta etapa se les entrega una situación problema similar a una de las situaciones de la primera etapa orientándolos en el objetivo de la clase. Se destinaron 3 clases de 45 minutos cada una.

En la siguiente tabla se resumen las fases, las expectativas de logro y el saber hacer de los estudiantes.

FASES	ACTIVIDAD	EXPECTATIVAS DE LOGRO	SABER HACER
FASE DE COMPRENSIÓN	Búsqueda e interpretación de información	Búsqueda de información. Interpretación de la información. Reorganización de la información.	Lectura superficial del enunciado. Observación incompleta de datos. Falta de reconocimiento de los datos. No organizan la información.
	Verificación	Modificar lo realizado hasta el momento	Revisan y corrigen.
FASE DE ANÁLISIS DE DATOS	Análisis de la información	Validación de las hipótesis del estudiante.	Justificaciones insuficientes de las hipótesis en un primer momento. Visualizar en ejemplos que ellos proponen la pertinencia de las hipótesis planteadas.
	Verificación	Desechar las hipótesis incorrectas	
	Reorganización de la información	Establecer relaciones entre los elementos implícitos en el problema	Relacionan los datos explícitos con los implícitos
FASE DE EJECUCIÓN DEL PLAN	Elección de una estrategia de resolución	Elegir alguna de las estrategias propuestas	Eligen y aplican una estrategia. En el registro por tabla no utilizan dominios correctos. Se observa , en general, manejo de pocos datos en la tabla.
	Verificación de la solución resolviendo de otro modo	Contrastar correctamente las soluciones obtenidas con distintas estrategias en distintos registros.	Reconocen la respuesta en el gráfico. Grafican de manera incompleta la parábola. Trabajan con variable continua. No escriben correctamente la expresión algebraica. No establecen las condiciones para que un cuadrilátero sea rectángulo. No es espontánea la relación entre el área y el perímetro.
	Comunicación escrita de los resultados	Informar el resultado obtenido en forma escrita utilizando cualquier registro	Reconocen y aceptan los errores cometidos en las distintas actividades. Expresan la respuesta correcta en distintos registros, realizando articulaciones.

6 CONCLUSIONES

Con esta investigación se puede establecer que la articulación entre distintos registros de representación semiótica no es espontánea, verificándose que la interpretación en el lenguaje algebraico es la de mayor dificultad. Sin embargo cuando logran modelizar el problema en dicho registro sostienen que es el más eficiente y eficaz para resolver la situación. Esta propuesta nos indica, en función de los resultados analizados, la necesidad de encarar este tipo de actividad didáctica que involucra la articulación entre los distintos registros de representación semiótica desde los primeros cursos.

Un aporte de este trabajo está en que la enseñanza de una estrategia de resolución de problemas, si bien está pautada, tiene la suficiente flexibilidad como para que el estudiante en cada paso vaya verificando sus conjeturas y realice un proceso de realimentación continuo que lo prepara a "aprender a aprender".

La etapa de comunicación es considerada relevante en este trabajo, puesto que el alumno, en general tiene muchas dificultades en la comunicación escrita. Usan un vocabulario no adecuado, por ejemplo expresan: *"Punto mayor" ; "Porque la parábola marca la mayor área".*

En este trabajo se observa la poca sensibilidad de los alumnos a la contradicción, lo cual nos hace reflexionar en nuestra tarea docente, es decir deberíamos ser más explícitos en los conceptos y tratar de contextualizar las tareas para que el estudiante pueda internalizar los conceptos.

Al terminar la resolución de la situación planteada, los logros de los estudiantes son:

. Identificar los elementos del problema y lo que pide el problema.
. Establecer relaciones y deshechar hipótesis incorrectas.
. Comparar registros tabulares y gráficos.
. Articular, aunque de forma insuficiente el registro gráfico y el algebraico.
. Analizar el concepto de dominio de una función.
. Identificar gráficamente la solución del problema.
. Distinguir distintas estrategias de resolución y seleccionar la óptima.
. Controlar y verificar resultados.
. Interés en la actividad.
. Favorecer su autoestima dado que la situación le permite entender y relacionar conceptos.

De los 29 alumnos uno sólo dijo que la actividad no lo beneficiaba porque no entendía nada, para el resto la actividad ha sido beneficiosa.

7 REFLEXIÓN

Es necesario que los docentes de matemática desarrollen en los alumnos estrategias denominadas metacognitivas, que son aquellas que favorecen el control de quien aprende, de sus propias ideas, de sus aciertos y errores y de la modificación que se produce en el proceso de aprendizaje en relación con sus ideas anteriores (Panizza, Sadosvky, 1994).

8 EXTENSIONES

Esta actividad se extiende al contexto del análisis diferencial para alumnos de primer año de la universidad, lo cual permite el doble objetivo de articular con el siguiente nivel educativo y reformular la situación planteada. Fundamentamos esta prolongación en las palabras de Charnay (1994) que dice "*La cuestión esencial en la enseñanza de la matemática es como hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno, es imprescindible que el sea capaz no sólo de rehacer o repetir sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transformar sus conocimientos para resolver nuevos problemas"*.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En p. Gómez (ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33-59). México: Grupo editorial Iberoamericano.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista de educación matemática.* 12 (1). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Clemens, O'Daffer, Cooney (1989) *geometría.* México: Addison Wesley Logman.

Charnay, R. (1994). *Aprender por medio de la resolución de problemas.* Didáctica de la matemática. Buenos Aires: Piados.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Universidad del valle. Instituto de educación y pedagogía. Grupo de educación matemática.

Guillaume, J. (1991). *La conception de situationes didactiques de college.* Construction de savoirs mathematiques de college. Inrp

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: universidad de Jaén.

DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DEL ALUMNO INGRESANTE A INGENIERÍA AGRONÓMICA

Sastre Vázquez, Patricia; Boubée, Carolina; Rey, A. M. Graciela
Facultad de Agronomía. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Azul. Argentina.
psastre@faa.unicen.edu.ar; cboubee@faa.unicen.edu.ar; grey@faa.unicen.edu.ar
Campo de Investigación: Resolución de problemas; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

Una forma de identificar las capacidades del alumno ingresante al nivel universitario es mediante una evaluación diagnóstica, que permita saber cuál es su estado cognoscitivo y actitudinal, para luego ajustar la acción a sus características. Este trabajo analiza la prueba inicial tomada a los alumnos ingresantes a la Facultad de Agronomía de la UNCPBA, Argentina. La evaluación contenía dos partes: 1) ejercicios que incluían capacidades matemáticas básicas, y 2) situaciones problemáticas contextualizadas, ya que la resolución de problemas provee el contexto para desarrollar capacidades matemáticas y llevar a cabo un aprendizaje conceptual. Los resultados muestran que los alumnos no poseen las habilidades necesarias para la resolución de problemas, aunque pueden reproducir conocimientos en contextos similares a los del proceso de enseñanza.

INTRODUCCION

Hoy se sostiene la necesidad de plantear una educación que tienda a la adquisición y desarrollo de competencias por parte de los sujetos. En el sector educativo de la Argentina se asume explícitamente esa intención, cuando se señala que los Contenidos Básicos Comunes "se orientarán a la formación de competencias" (Ministerio de Cultura y Educación de Argentina, 1994), entendiendo por tales "las capacidades complejas, que poseen distintos grados de integración y se ponen de manifiesto en una gran variedad de situaciones correspondientes a los diversos ámbitos de la vida humana, personal y social."

En este marco, el debate se centra en la selección de las competencias a las que debe orientarse la formación brindada por el sector educativo en general, así como la selección de las que deberán ser priorizadas por la educación universitaria en sus diferentes opciones. La base para tal selección habrá de contemplar la situación real de los alumnos. Los estudios existentes indican que pocos alumnos presentan un desarrollo de capacidades que les permitiera desenvolverse eficazmente en el nivel universitario (Felipe y cols. 1998).

La resolución de problemas juega un papel trascendental en esta nueva aproximación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. “Saber matemática” es “hacer matemática”, es resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas, de manera inteligible, justificada y razonada, pudiendo argumentar la resolución.

En el nivel pre – universitario no siempre se logra la comprensión conceptual por parte de los alumnos, alcanzando tan sólo, y no siempre, cierta habilidad para aplicar los contenidos que han aprendido en contextos similares a los que dieron origen a dicho aprendizaje.

Al momento del ingreso al nivel universitario es muy útil evaluar al alumno, intentando identificar y comprender su realidad. La evaluación es una parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se evalúa para comprender y, en definitiva, para cambiar y mejorar.

Una de las funciones de la evaluación es su función pedagógica, de regulación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, es decir, de reconocimiento de los cambios que se han de introducir progresivamente en este proceso. Se trata de adaptar la intervención educativa a las necesidades concretas en cada momento.

La evaluación como diagnóstico permite saber cuál es el estado cognoscitivo y actitudinal de los alumnos. Esta diagnosis permitirá ajustar la acción a sus características y situación. El diagnóstico inicial permite saber de qué punto se parte, cuáles son los conocimientos previos de los alumnos, qué tipo de concepciones tienen. Se podrán identificar errores, para su posterior análisis y tratamiento.

La función diagnóstica de la evaluación, permite alcanzar un doble objetivo:

- complementa la información referida a etapas o ciclos educativos anteriores
- sirve de base para los procesos de toma de decisiones futuras en todas o cualquiera de las etapas o ciclos educativos.

Al momento de ingresar a la Universidad, la evaluación diagnóstica inicial permite identificar qué herramientas matemáticas tiene a su disposición el alumno, cuáles son sus conocimientos de base.

Los problemas que presentan los alumnos de primer año de la Facultad son un reflejo de las dificultades existentes desde hace varios años, en la articulación entre la enseñanza media y la superior, lo cual incide de forma relevante en la enseñanza de la matemática, ya que se necesita de un dominio adecuado de los conocimientos y habilidades precedentes para poder afrontar con éxito los nuevos contenidos. Sin embargo, estas dificultades no son exclusivas del área matemática. Numerosos estudios han intentado determinar cuál es la asimilación de conocimientos y la formación de habilidades en las diferentes asignaturas, y casi todos ellos han constatado insuficiencias en la formación básica de los estudiantes, identificando falencias tales como: falta de dominio de los conceptos básicos y la acumulación formal de ellos, falta de habilidades para el análisis y resolución de problemas, deficiente capacidad de aplicación, e insuficiente desarrollo de la capacidad creadora. En los estudiantes que arriban al primer año también tienen lugar problemas relacionados con la organización y distribución del tiempo de autopreparación de las asignaturas.

El análisis de los resultados del diagnóstico de capacidades de los alumnos ingresantes a la Facultad de Agronomía de la UNCPBA se plantea con el fin de identificar capacidades y dificultades de los actuales alumnos ingresantes, referidas a operatoria matemática, e interpretación y resolución de situaciones problemáticas, para adaptar la intervención educativa a la situación real.

METODOLOGIA

Este trabajo es de carácter descriptivo, y se focaliza en el análisis de la evaluación diagnóstica de matemática, llevada a cabo a los 177 alumnos ingresantes a las distintas carreras de la Facultad de Agronomía de Azul, perteneciente a la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina, en el año 2004.

La herramienta utilizada para el diagnóstico fue una prueba escrita inicial, de resolución individual, en la que se incluyeron diferentes actividades destinadas a evaluar algunas capacidades cognoscitivas básicas, referidas al campo matemático. Los contenidos eran conocidos por los alumnos, dado su tratamiento en los niveles previos del sistema educativo. Con esto se trató de evitar que el contenido funcionara como un obstaculizador de la puesta en acción de las capacidades intelectuales a indagar.

Dichas capacidades básicas se seleccionaron teniendo en cuenta las futuras necesidades de los alumnos, tanto referidas al área matemática específicamente, como a otras asignaturas que la utilizan como herramienta auxiliar y básica.

Esta evaluación se estructuró en dos partes, aunque cabe aclarar que los alumnos desconocían esta división:

- Una primera parte con ejercicios referidos a la operatoria numérica y al reconocimiento de unidades para diferentes magnitudes;
- La segunda parte, con situaciones problemáticas contextualizadas, que incluían básicamente conceptos geométricos e interpretación de gráficos de funciones.

Se utilizó una grilla de corrección, discriminando las capacidades evaluadas en cada ítem, categorizando cualitativamente la información, y cuantificándola mediante el análisis de frecuencias y el cálculo de porcentajes.

Los datos obtenidos se procesaron con un paquete estadístico, y se obtuvieron las frecuencias de aparición de cada categoría considerada para la evaluación de las capacidades en cuestión.

RESULTADOS

A continuación se incluye una tabla con los resultados obtenidos para las distintas capacidades evaluadas. Cabe aclarar que la no – respuesta por parte del alumno se categorizó como "sin dato":

F: Frecuencia

<u>Primera Parte</u>: Ejercicios referidos a operatoria numérica y unidades de medidas.

Capacidades	BIEN		REGULAR		MAL		SIN DATO		TOTAL	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
Operar con términos semejantes en ecuaciones lineales	**165**	**93,2**			6	3,4	6	3,4	177	100
Operar en el conjunto de los números enteros.	**146**	**82,5**			25	14,1	6	3,4	177	100
Reconocer operaciones inversas	**155**	**87,6**			16	9	6	3,4	177	100
Sumar fracciones	**72**	**40,7**	69	39	32	18,1	4	2,3	177	100
Identificar cuadrado de un binomio	**100**	**56,5**			70	39,5	7	4	177	100
Calcular porcentaje	**91**	**51,4**	3	1,7	60	33,9	23	13	177	100
Reconocer unidades de longitud	75	42,4			**90**	**50,8**	12	6,8	177	100
Reconocer unidades de área	80	45,2	**86**	**48,6**	8	4,5	3	1,7	177	100
Reconocer unidades de volumen	56	31,6	**87**	**49,2**	29	16,4	5	2,8	177	100
Reconocer unidades de tiempo	**152**	**85,9**			24	13,6	1	0,6	177	100

Reconocer unidades de temperatura	**135**	**76,3**	39	22,1	1	0,6	2	1,1	177	100
Reconocer unidades de velocidad	47	26,6			**130**	**73,4**			177	100
Reducir unidades de longitud	41	23,2			37	20,9	**99**	**55,9**	177	100

<u>Segunda Parte</u>: Problemas que referidos a nociones geométricas e interpretación de gráficos de funciones.

Capacidades	BIEN		REGULAR		MAL		SIN DATO		TOTAL	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
Reconocer propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo	57	32,2	9	5,1	50	28,2	**61**	**34,5**	177	100
Aplicar Teorema de Pitágoras	44	24,9	2	1,1	**89**	**50,3**	42	23,7	177	100
Manejar escalas	57	32,2			32	18,1	**88**	**49,7**	177	100
Calcular perímetro de un rectángulo	33	18,6	13	7,3	31	17,5	**100**	**56,5**	177	100
Calcular área de un rectángulo	23	13	11	6,2	35	19,8	**108**	**61**	177	100
Calcular volumen de un prisma	6	3,4	7	4	23	13	**141**	**79,7**	177	100
Operar con unidades de longitud, área y volumen	35	19,8			23	13	**119**	**67,2**	177	100
Identificar variables	**109**	**61,6**			41	23,2	27	15,3	177	100
Reconocer unidades de las variables	**114**	**64,4**			35	19,8	28	15,8	177	100
Reconocer dependencia entre variables	**65**	**36,7**			49	27,7	63	35,6	177	100
Encontrar, gráficamente, la imagen de un valor	**165**	**93,2**			4	2,3	8	4,5	177	100
Encontrar, gráficamente, los ceros de una función	**159**	**89,8**			9	5,1	9	5,1	177	100
Encontrar, gráficamente, intersecciones entre funciones	72	40,7	**88**	**49,7**	8	4,5	9	5,1	177	100
Encontrar, gráficamente, el mínimo de una función	**142**	**80,2**			24	13,6	11	6,2	177	100

Encontrar, gráficamente, el máximo de una función	**156**	**88,1**			11	6,2	10	5,6	177	100

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo permiten hacer un análisis cuantitativo, basándonos en las frecuencias y sus porcentajes, de respuestas correctas o no, que dieron los alumnos, para así identificar las habilidades previas con que cuentan. El diagnóstico de capacidades previas del ingresante es de suma importancia para adecuar la acción posterior de enseñanza, a sus características particulares.

- En cuanto a la primera parte de la evaluación diagnóstica, se observa que entre un 6,8% y un 20,4% de los alumnos opera mal o no resuelve los ejercicios referidos a ecuaciones lineales, números enteros y racionales. El 43,5% de los evaluados no resuelve el cuadrado de una suma, siendo el error más frecuente la aplicación de la propiedad distributiva de la potencia respecto de la suma.
  Es llamativo que el 46,9% no sea capaz de calcular porcentaje, conocimiento básico y de gran utilidad en el desarrollo de los alumnos. Desconocen o confunden unidades de medida, especialmente de velocidad (73,4%) y de longitud (57,6%). Sobre esta magnitud, un alto porcentaje (55,9%) no es capaz de reducir sus unidades, y un 20,9% lo hace mal.
- En cuanto a la segunda parte del diagnóstico, lo más notorio son los altos porcentajes de alumnos, entre un 23,7% y un 79,7%, que no responden las situaciones referidas a nociones geométricas, básicas y cotidianas en su mayoría. Con referencia a la interpretación de gráficos de funciones, la mayor dificultad que se observa está vinculada con el reconocimiento de la dependencia entre variables (27,7% lo hace mal, y 35,6% no lo hace).
- Una observación adicional es la referida a la dificultad de los alumnos para interpretar los enunciados de las situaciones problemáticas. En el momento de la evaluación un alto número de alumnos plantea preguntas o dudas tales como: “¿qué me pide con este problema?”, “no entiendo lo que dice”, etc. Esta falencia se reconoce en la mayoría de los ingresantes, y es compartida con el resto de las disciplinas. El déficit de los alumnos en el área de Lengua, que es básica para la comprensión y conceptualización del resto de las áreas, es un aspecto a tener en cuenta y que debe mejorarse, fundamentalmente mediante un trabajo conjunto entre los docentes de todas las áreas.

Los resultados del diagnóstico muestran que los alumnos manejan mejor la operatoria numérica, plasmada en ejercicios descontextualizados, mientras que al enfrentarse a situaciones problemáticas, un alto porcentaje no las resuelve, o lo hace mal. El alumno ingresante no posee las habilidades necesarias para el análisis, comprensión y resolución de problemas, aunque es capaz de reproducir conocimientos en un contexto similar al del proceso de enseñanza. Es capaz de resolver ejercicios (aunque no todos los que se le presenten), pero no de analizar situaciones problemáticas, realidad a tener en cuenta para ajustar la acción educativa.

BIBLIOGRAFÍA

Santos, M. (1996). *Evaluación Educativa. Un enfoque práctico de la evaluación de alumnos, profesores, centros educativos y materiales didácticos.* Tomo 2. Magisterio del Río de la Plata. Argentina.

Stufflebeam, D. y Shinkfield, A. (1987). *Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica.* Barcelona: Paidos/MEC.

Gascón, J. (1994). *El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática*. En revista: Educación Matemática. 6(3).

Felipe, A.; Gallarreta, S. y Merino, G. (1998). Capacidades intelectuales en el nivel universitario: su diagnóstico mediante pruebas de lápiz y papel. Contexto Educativo. *Revista de Educación y Nuevas tecnologías*. Año IV. No. 24

Filmus, D. (1994). *El papel de la educación frente a los desafíos de las transformaciones científico-tecnológicas*. En: ¿Para qué sirve la Escuela?. Tesis Grupo Editorial Norma, Buenos Aires. Argentina.

Felipe, A.; Gallarreta, S. y Merino, G. (1998). *Intellectual competences in the university level: capacity to form explicit hypothesis*. Biocell, 22 (2), pp.12-13.

ANALISIS DE LA IMPLEMENTACION DE UNA ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS

Lucía Martín de Pero - María A. Pérez de del Negro
Facultad de Ciencias Económicas - Universidad Nacional de Tucumán –Argentina.
Dirección electrónica: lmartin@herrera.unt.edu.ar - mperez200@hotmail.com
Campo de Investigación: Resolución de Problemas. - Nivel Educativo: Superior

Resumen
El presente trabajo surge con el propósito de ayudar a los alumnos a desarrollar el pensamiento, en particular, la capacidad parar resolver los problemas que se plantean en las clases. Es así como se decide incorporar en las clases de Cálculo Diferencial materiales de enseñanza con énfasis en mejorar las estrategias que utilizan los estudiantes cuando resuelven problemas. Se utilizaron como marco teórico los aportes que a la teoría constructivista realizaron Piaget, Vigotsky y Ausubel, citados por Carretero M. (2001), Sanjurjo, L. y Vera, M. (2003), así como sugerencias de investigadores en el área de la resolución de problemas de matemática: Polya, G. (1972), Campistrous, L. (1993), Poggioli, L. (2002).
Para la investigación se trabajó con dos grupos de alumnos: experimental y control, seleccionados aleatoriamente entre las comisiones de trabajos prácticos de la asignatura. Se procuró conocer las creencias de los estudiantes respecto a la resolución de problemas y en base a ello se decidió ayudarlos mediante la utilización de una ***Guía con ideas e impulsos didácticos para pensar y resolver problemas***.

Introducción

Esta experiencia es la continuación de una investigación que se realiza con los alumnos de Introducción al Análisis Matemático, asignatura que se imparte en primer año de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNT y que abarca los contenidos: funciones, límite, continuidad, derivada y sus aplicaciones.
Así, se determinó que una de las mayores dificultades que tienen los alumnos en el proceso de resolución de problemas es la identificación de conceptos previos, lo cual tiende a reafirmar lo expresado por el constructivismo en el sentido de que el conocimiento no es una copia de la realidad sino una construcción del ser humano que se realiza con los esquemas que ya posee. Además de la identificación de los conceptos previos, el uso de un razonamiento válido es otra de las dificultades con que los alumnos se enfrentan en el proceso de resolución de un problema. Por lo tanto, los aspectos que se necesitan considerar con el propósito de mejorar los procedimientos que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas son:

- Incorporación de conocimientos previos ante un nuevo tema a desarrolllar.
- Presentación a los estudiantes de un camino que le ayude a solucionar los problemas.

Estas conclusiones se utilizaron como elementos de relevancia para comenzar a implementar los medios que permitan al estudiante conocer y manejar estrategias que les ayuden a resolver problemas.
Los problemas se plantean en las clases como motivación, como desarrollo, para provocar producción de conocimientos y habilidades, para aplicarlos en diferentes contextos, para abrir nuevos interrogantes y para la evaluación de los aprendizajes. Se observa la necesidad de que el alumno acepte los problemas como suyos, se haga cargo de investigar las soluciones, elegir alternativas, compararlas, discutirlas y elaborar pruebas para que una vez que el aprendizaje se produzca, sea capaz de repetir,

resignificar, adaptar y transferir sus conocimientos a la resolución de situaciones nuevas.
De tal modo que resolver un problema implique que el individuo entienda lo que hizo y pueda explicar porqué sus acciones fueron correctas o apropiadas. Esta es una alternativa de enseñanza que recupera los beneficios, tanto de los modelos tradicionales en cuanto al valor asignado al conocimiento y al rol del docente como experto que asesora y orienta, como así también de los modelos activos al confiar en las posibilidades de los alumnos y otorgarles un lugar protagónico.
De acuerdo al marco teórico considerado, las estrategias para resolver problemas se adquieren a través de actividades compartidas, de una internalización progresiva de instrumentos mediadores, se decide así, la instrumentación de una ***Guía con ideas e impulsos didácticos para pensar y resolver problemas*** para que sea utilizada durante la resolución de las situaciones planteadas en las clases. Con tal motivo se formaron dos grupos con los alumnos; el experimental donde los estudiantes fueron adiestrados en el uso de procedimientos adecuados para resolver problemas mientras que el grupo restante se utilizó como control de la situación.
Del estudio realizado surge la necesidad de producir cambios orientadores en la práctica docente, presentándoles a los alumnos estrategias generales para resolver problemas con el fin de contribuir a fomentar sus formas de pensar. Además la importancia de que en la Guía de ayuda se manifiesten los conocimientos previos y una reseña de contenidos teóricos mínimos necesarios para cada uno de los temas a desarrollar.

Diseño teórico y metodológico

La tarea realizada se fundamenta en la perspectiva constructivista con el propósito de que el alumno logre el aprendizaje de conceptos y teorías así como la aplicación significativa de los mismos.
Ausubel, (citado por Carretero, M. 2001), analiza la dinámica del aprendizaje dentro de la concepción cognoscitivista y constructivista, en términos de estrategias de instrucción, que debe elaborar e implementar el mediador del aprendizaje y las derivadas de esa acción, que son *las estrategias de aprendizaje*. Su interés se centra especialmente en conocer las ideas previas de los estudiantes antes de iniciar nuevos aprendizajes, es decir, revelar la estructura de significados que poseen los sujetos con el propósito de establecer aprendizajes que no se presenten en forma aislada ni arbitraria. Pone el acento en los procesos de reestructuración que se producen debido a la interacción entre las estructuras que el sujeto ya posee y la nueva información.
Piaget, (citado por Sanjurjo, L. y Vera, M. 2003), considera el aprendizaje como un continuo proceso de construcción en el que sujeto y objeto se relacionan activamente y se modifican mutuamente, ideas que explica a través de los conceptos de *equilibración y adaptación*.
Los conceptos centrales de la teoría de Vigotsky, (citado por Sanjurjo, L. y Vera, M. 2003), son los de *actividad* y de *mediadores*. La experiencia de *aprendizaje mediado* es la manera en la que los estímulos remitidos por el ambiente son transformados por un agente mediador. Los tres componentes de la interacción mediada son: el *organismo receptor*, el *estímulo* y el *mediador*. El efecto de la experiencia de aprendizaje mediado es la creación en los receptores de una disposición, de una propensión actitudinal para beneficiarse de la exposición directa a los estímulos. Esto se puede traducir en: "mediar para enseñar a aprender". A su vez Vigotsky posibilita la intervención del docente ya que otorga una especial importancia a los procesos de instrucción a través de la *zona de desarrollo próximo*.

La posición que se pretende rescatar en esta propuesta es la de proporcionar al alumno una estrategia de solución de problemas a través de un proceder generalizado, por medio del cual el alumno deje de ser *objeto* de enseñanza y pase a ser *sujeto* de aprendizaje. De esta forma, solucionar un problema se reduce a buscar vías didácticas para que el alumno interiorice el procedimiento y no sea el profesor el que dirige la solución del problema.

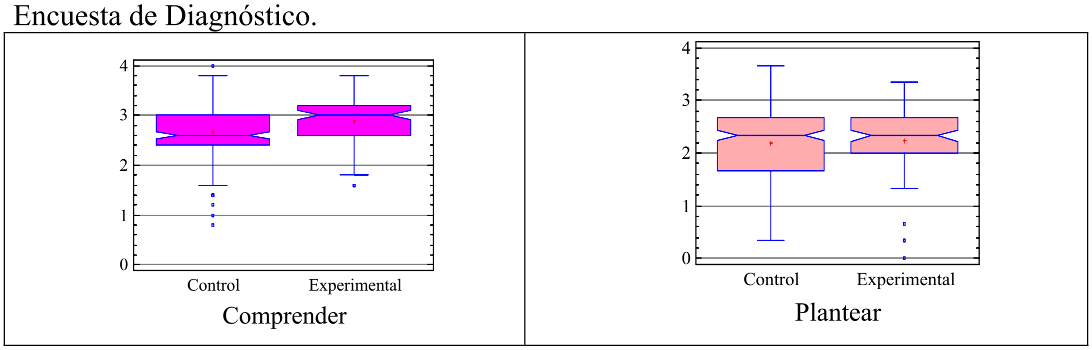
Tomando como base el marco teórico precedente se decide continuar la investigación. Así, al comienzo del cursado de la asignatura se entregó a los alumnos un cuestionario, diseñado con el propósito de conocer si existían diferencias en sus sistemas de creencias en relación con la matemática y la resolución de problemas. Dadas las condiciones de homogeneidad de ambos grupos se hizo posible implementar para los alumnos pertenecientes al grupo experimental una ***Guía con ideas e impulsos didácticos para pensar y resolver problemas***, para iniciarlos en el conocimiento y manejo de los pasos a seguir en el proceso de resolución de problemas. En dicha Guía se presentaron diferentes interrogantes con indicaciones y sugerencias sobre los posibles procedimientos a utilizar para entender la situación planteada en un problema, determinar vías de solución, ejecutarlas de manera práctica y evaluar el proceso y los resultados del problema de tal modo que le sirvan de ayuda para afianzar sus conocimientos. También se presentaron problemas resueltos siguiendo los pasos: comprender, plantear, ejecutar y verificar (Polya, G. 1972) y un procedimiento generalizado relacionado con los tres momentos fundamentales de la Actividad: orientación, ejecución y control (Campistrous, L. & Rizo, C. 2000).

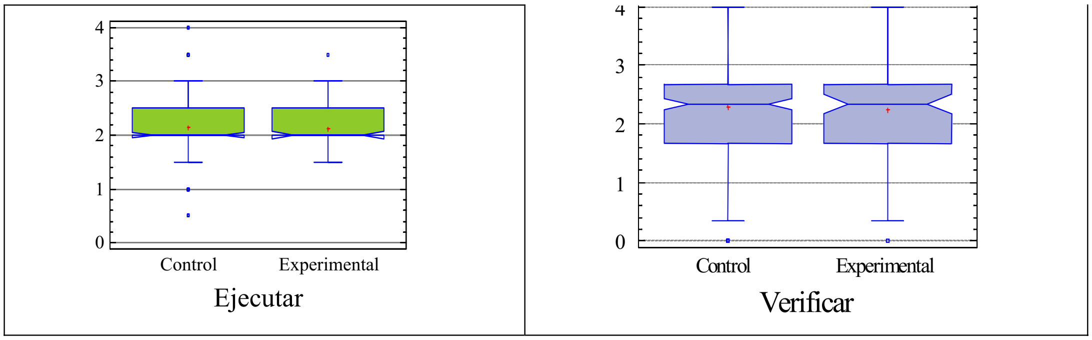
En la experiencia se trabajó con una muestra de 418 alumnos extraída de una población de 1095 estudiantes que cursaron la asignatura en el año 2003; los alumnos se distribuyeron en comisiones de clases prácticas con las que, seleccionadas al azar, se formaron dos grupos de estudiantes. Al grupo experimental constituido por 202 alumnos se les presentó la Guía, mientras que el grupo restante, formado por 216 alumnos, trabajó en la forma tradicional y se utilizó como control de las situación.

Análisis de los Resultados

En la figura Nº1 se presenta un gráfico donde se observa la valoración que los alumnos dan a los pasos a seguir en la resolución, según como ellos creen, cuando enfrentan una situación problemática. Para este diagnóstico se procesó la información obtenida de un cuestionario realizado a todos los estudiantes seleccionados para realizar la experiencia. Se trabajó con la Escala Tipo Likert, también llamada "escala aditiva" porque los resultados de las afirmaciones individuales se suman para presentar un puntaje total.

<u>**Figura Nº1**</u>: ***Valoración de los pasos seguidos en la resolución de los problemas, según los alumnos de los grupos experimental y de control. Año 2003.*** Fuentes: Encuesta de Diagnóstico.





Se utilizó la prueba no paramétrica de rangos promedios de KrusKal Wallis y luego la de comparaciones múltiples de rango para grupos independientes no necesariamente del mismo tamaño que hayan sido extraídos de la misma población. Este análisis se realizó con los alumnos pertenecientes a los dos grupos: experimental y control, resultando no haber diferencias significativas entre ambos grupos cuando expresan lo que creen realizar cuando deben resolver un problema respecto de cada uno de los pasos a seguir, lo que permite probar la *homogeneidad* de los mismos.

La guía de ayuda fue analizada por el docente en las clases y utilizada por los estudiantes cada vez que se resolvían problemas. La experiencia consistió en presentar a los estudiantes problemas de aplicación a la economía que debían resolver y se llevó a cabo en dos etapas que se realizaron con una diferencia de 30 días, considerando que los alumnos habían asimilados los contenidos conceptuales correspondientes al primer y segundo parcial respectivamente. En la primer etapa se presentaron dos problemas de economía relativos a los temas funciones lineales y cuadráticas y en la segunda etapa relativos a los temas optimización de funciones trabajando con las funciones costo e ingreso.

En cada uno de las etapas en que los alumnos debían resolver problemas referidos a la economía, se evaluó la variable dependiente *habilidad para resolver problemas*, considerando las dimensiones e indicadores con sus correspondientes medidas de acuerdo a lo que se presenta en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº1*: Habilidad para resolver problemas*

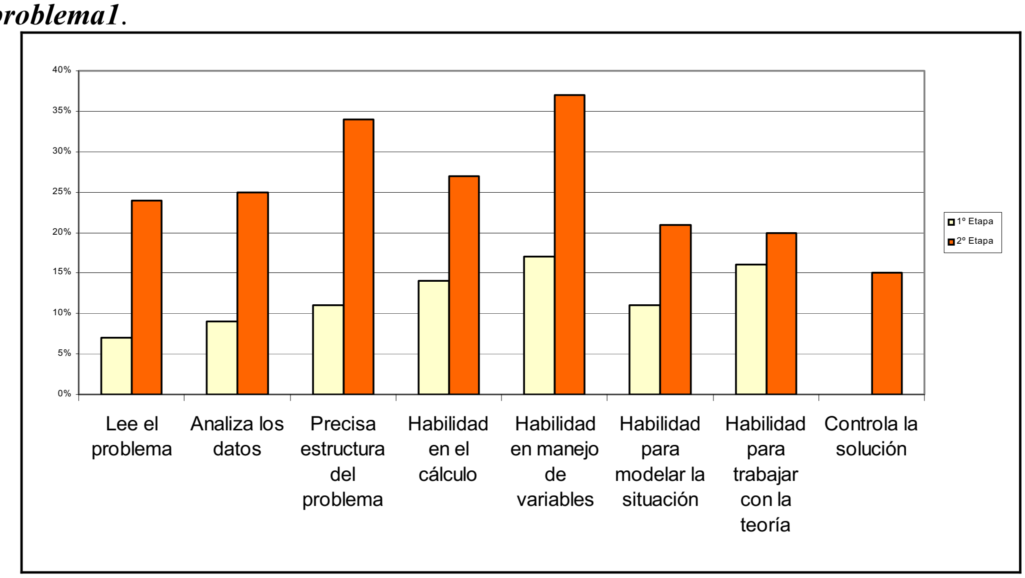
Dimensiones	Indicadores
Análisis inicial del problema	*Lee el problema*: si interpreta la situación planteada. *Analiza los datos*: si reconoce los datos. *Precisa la estructura del problema*: si diferencia datos, condiciones y exigencias.
Ejecuta de manera práctica la vía de solución	*Habilidad en el cálculo*: si realiza operaciones fundamentales del cálculo sin errores. *Habilidad en el trabajo con variables*: si realiza operaciones algebraicas sin errores. *Habilidad para modelar la situación*: si representa coherentemente las exigencias. *Habilidad para trabajar con la teoría*: si reconoce los conceptos teóricos.
Controla la solución realizada	*Si verifica el razonamiento empleado.* *Si verifica el resultado.*

Se aplicó el Test de Igualdad de Proporciones, entre las proporciones de indicadores que los estudiantes pertenecientes a ambos grupos habían realizado favorablemente cuando resolvieron el problema 1 en cada una de las etapas de la experiencia. En el cuadro Nº2 se muestran las diferencia entre los porcentajes de cada uno de los grupos y los resultados del test para cada uno de los indicadores en el problema 1 en las dos etapas, además la figura Nº 2 pretende visualizar esas diferencias.

Cuadro Nº2*: Diferencias entre los porcentajes de alumnos del grupo experimental y grupo control que realizan los pasos en cada una de las etapas en problema1*. Fuentes: Encuesta de Constatación 1 y 2.

Problema 1	**1ª etapa**		**2ª etapa**	
	%	Valor de P	%	Valor de P
Análisis inicial del problema				
Lee el problema	7	P=0.0154	24	P<0.0001
Analiza los datos	9	P=0.0074	25	P<0.0001
Precisa estructura del problema	11	P=0.0004	34	P<0.0001
Ejecuta la vía de solución				
Habilidad en el cálculo	14	P=0.0012	**27**	P<0.001
Habilidad en manejo de variables	17	P<0.0001	**37**	P<0.0001
Habilidad para modelar la situación	11	P=0.0056	**21**	P<0.006
Habilidad para trabajar con la teoría	16	P=0.0001	**20**	P<0.0001
Controla la solución realizada				
Controla la solución	0		15	P<0.0001

Figura Nº2: ***Diferencias entre los porcentajes de alumnos del grupo experimental y grupo control que realizan los pasos de Polya en cada una de las etapas del problema1***.



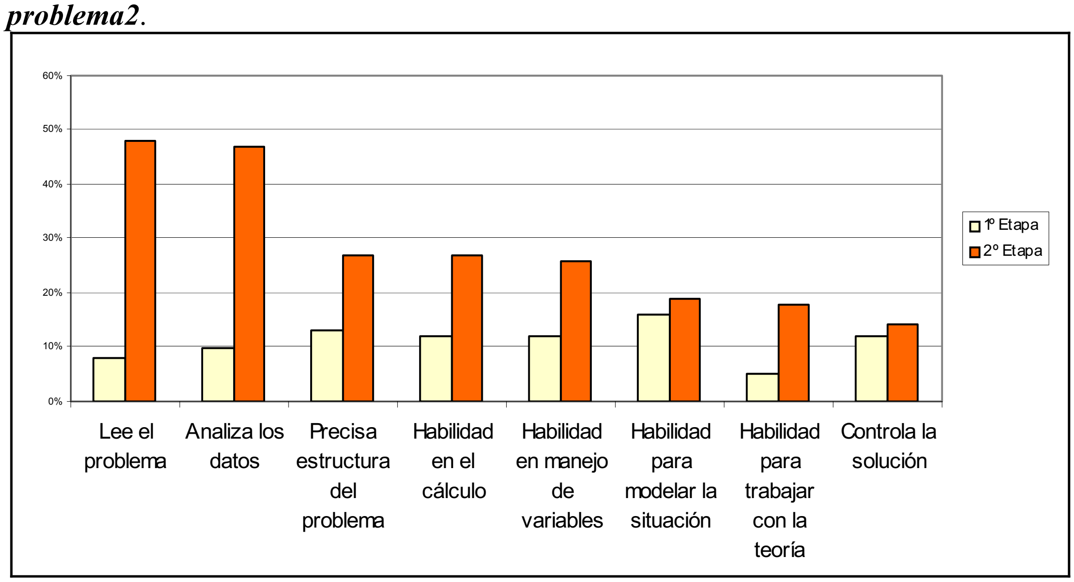
Las diferencias a favor del grupo experimental son importantes en ambas etapas, excepto cuando "controlan la solución" en la 1º etapa. Estas diferencias se acentúan en la 2º etapa, donde el alumno ya tiene un adiestramiento con la guía, pero es necesario destacar que la dimensión correspondiente a "ejecutar de manera práctica la vía de solución" son habilidades que el alumno requiere de un proceso de asimilación para incorporarlas, cómo se verá en el problema 2 en sus dos etapas.

En el cuadro Nº3 se muestran las diferencia entre los porcentajes de cada uno de los grupos y los resultados del test para cada uno de los indicadores en el problema Nº2 en las dos etapas, además la gráfico Nº 3 pretende visualizar esas diferencias.

Cuadro Nº3***: Diferencias entre los porcentajes de alumnos del grupo experimental y grupo control que realizan los pasos en cada una de las etapas en problema2*****.** Fuentes: Encuesta de Constatación 1 y 2.

Problema 2	Primera etapa		Segunda etapa	
	%	Valor de P	%	Valor de P
Análisis inicial del problema				
Lee el problema	8	P=0.0154	48	P<0.0001
Analiza los datos	10	P=0.0074	47	P<0.0001
Precisa estructura del problema	13	P=0.0004	27	P<0.0001
Ejecuta de manera práctica la vía de solución				
Habilidad en el cálculo	12	P<0.0001	**27**	P<0.0001
Habilidad en manejo de variables	12	P<0,0001	**26**	P<0.0001
Habilidad para modelar la situación	16	P<0.0001	**19**	P<0.0001
Habilidad para trabajar con la teoría	5	P=0.020	**18**	P<0.0001
Controla la solución realizada				
Controla la solución	12	P<0,0001	14	P<0.0001

Figura Nº 3***: Diferencias entre los porcentajes de alumnos del grupo experimental y grupo control que realizan los pasos de Polya en cada una de las etapas del problema2*****.**



De los resultados anteriores se puede ver que las tendencias se mantienen y que aparentemente se acentúan las diferencias entre el grupo experimental y el grupo control.

En ambos problemas las diferencias porcentuales son mayores en la 2º etapa que en la 1º, en especial para algunos indicadores como por ejemplo: realizar el análisis inicial del problema, cálculos y manejo de variables, no obstante, la habilidad para modelar la situación planteada y trabajar con la teoría muestran diferencias de menor magnitud. El análisis anterior permite concluir que los estudiantes hacen un mejor manejo de aquellas acciones cuyo proceso de fijación es más rápido.

A fin de que las conclusiones obtenidas sean avaladas, los problemas 1 y 2 que se entregaron a los alumnos tanto en la primera como en la segunda etapa presentan situaciones con grados similares de dificultad con el objetivo de contrastar el efecto de la guía.
En consecuencia, la aplicación reiterada de la Guía puede llevar a mejorar las habilidades de los alumnos para solucionar problemas de matemática, pero el bajo dominio de los conocimientos teóricos de la asignatura parece impedir que avance en la adquisición de todas las habilidades necesarias para alcanzar con éxito el objetivo. Por ende, se hace necesario afianzar los recursos cognitivos.
Lo anteriormente expresado muestra que la proporción de alumnos que sigue los pasos de Polya es *mayor* en el grupo experimental que en el de control, lo cual se interpreta como un efecto significativo de la Guía empleada en las clases, es decir, cumple su objetivo: "adiestrar" a los alumnos en la resolución de problemas de cálculo.

Conclusiones

- La incorporación en las clases de Cálculo de una *Guía con ideas e impulsos didácticos para pensar y resolver problemas* constituye un medio de aprendizaje que facilita el proceso de adquisición de estrategias para la resolución de problemas, al mismo tiempo que motiva a los estudiantes, y favorece globalmente, al proceso de construcción y asimilación de los conocimientos.
- Se pudo observar que el uso de la Guía con estrategias para ayudar a los alumnos a resolver problemas es un valioso instrumento en manos de los docentes por cuanto mejora la capacidad de pensamiento, decisión y ejecución de los alumnos.
- Si se pretende que los alumnos de cálculo puedan obtener la solución de un problema de matemática es necesario generar un procedimiento mediante el cual el alumno combine sus conocimientos previos, estrategias y conceptos para llegar a la solución de un problema.
- Resulta fundamental implementar sistemas de enseñanza que permitan que el alumno piense, razone y reflexione antes de actuar, evitando así la tendencia de los adolescentes a la ejecución por imitación, brindando de este modo una mayor posibilidad para formar la habilidad de resolver problemas.
- No cabe duda que la elección y utilización de materiales de enseñanza representan decisiones básicas para lograr la coherencia de la actuación docente, son herramientas que, en manos del docente se convierten en mediadores del aprendizaje del alumnado. Utilizados sistemáticamente y con criterios prefijados, facilitan la tarea del profesor, tanto en lo que se refiere a la planificación, como al desarrollo y la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Amestoy, M. (1988). *Desarrollo de habilidades de pensamiento: Razonamiento verbal y solución de problemas*. México: Trillas.

Cabañas, M.. (2000). *Los problemas. ¿Cómo Enseño a Resolverlos?* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica - S.A. de C.V.

Campistrous, L. & Rizo C. (2000). *Tecnología, resolución de problemas y didáctica de la Matemática*. La Habana. Cuba: Ministerio de Educación.

Carretero, M. (2001). *Constructivismo y Educación.* Argentina: Aique. Grupo Editor S. A.

Martín de Pero, L. (2004). *Organización del proceso de aprendizaje del cálculo diferencial de funciones de una variable real utilizando estrategias para la resolución de problemas*. Tesis de Magíster - Universidad Nacional de Tucumán - Argentina.

Pifarré, M & Samuy, J. (2001). "La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto". En *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 297-308.

Poggioli, L. (2002). *Estrategias de resolución de problema*. *Serie Enseñando a apr*ender. [En red] febrero 2005. Disponible en: www.fpolar.org.ve/poggioli/poggio05.htm

Polya, G. (1972). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas. S.A.

Pozo, J. (1999). *La Solución de Problemas*. Argentina: Santillana.

Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sanjurjo, L. y Vera, M. (2003). *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior*. Argentina: Ediciones Homosapiens.

Siegel, S. y Castellán, N. (1995). *Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta*. México: Editorial Trillas.

ANALISIS DEL CARÁCTER PREDICTIVO DE UN MODELO DIFUSO PARA LA EVALUACION DEL APRENDIZAJE

Rafael Alejandro Espín Andrade[1], María Inés Lecich[2], Susana Ruiz[2], Ana María Chillemi[2], María del Carmen Berenguer[2].
1. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cuba
2. Universidad Nacional de San Juan, Argentina
espin@ind.ispjae.edu.cu

Campo de Investigación: Tecnología avanzada, Nivel Educativo: Superior

Resumen:

El presente trabajo da continuidad a un trabajo anterior que propone un sistema de ayuda a la calificación basado en la Lógica Difusa, orientado a criterios [Espín (2001)] que a través de un análisis de incidencia basado en el modelo relacional borroso, permite lograr un balance adecuado de los pares dialécticos del proceso de evaluación, tomando distancia de las posiciones extremas

El propósito de dar calificaciones intermedias con utilidad predictiva, que permita una labor de control efectiva, había sido enunciado en aquella etapa inicial, y aquí se explica un experimento realizado, con el propósito de validar el carácter predictivo buscado, de un modelo que resultó del perfeccionamiento del modelo inicial.

I. Introducción:

Los enfoques relacionados con la evaluación del aprendizaje y su realización práctica suelen estar polarizados en posiciones extremas, que se expresan en los siguientes pares dialécticos:

- Cualitativo - Cuantitativo
- Subjetivo – Objetivo
- Formativo – Sumativo

De una parte suelen hacerse enfoques que buscan el análisis a profundidad, destacan la idiosincrasia y la riqueza de la situación educativa y concluyen con la imposibilidad de atraparla cuantitativamente; atribuyen generalmente un papel relevante a las personalidades interactuantes y postulan la imposibilidad de medir teniendo en cuenta los aspectos medulares; hacen énfasis en el papel formativo visto desde una óptica interna.

De otra parte está el enfoque tecnicista, eficientista, con base pragmática y positivista, que se preocupe por una objetividad y cientificidad basada en la neutralidad de la evaluación y en la rigurosidad de la medición, resaltando esa necesidad en base al papel sumativo, que enfatiza la conclusión, el cierre, el resultado del proceso con propósitos externos como las funciones sociales de selección, certificación al saber, jerarquización y promoción [González (2000)].

La calificación suele ser abordada de dos maneras diferentes; o bien a través del normotipo orientado a criterio que tiene un enfoque más cualitativo; y el normotipo orientado a normas, que pretende ``medir´´ el cumplimiento de las mismas.

La medición ha sido criticada con razón, no tanto por la imposibilidad apriorística de ser llevada a cabo; como por la manera en que hasta ahora se ha hecho.

Las críticas esenciales están orientadas a la arbitrariedad de:

- los rasgos que se ``miden´´ que suelen ser no esenciales, debido a la imposibilidad de hacerlo con los esenciales.
- La forma en que se realiza la medición, que no suele ser sustentable desde el punto de vista matemático.

Sobre este último aspecto es lo más común utilizar modelos aditivos, que ponderan arbitrariamente los objetivos, utilizando ``claves´´ que lo mismo perjudican a estudiantes con buenos desempeños, que favorecen a los que no lo merecen. Desde el punto de vista teórico, una teoría afín al establecimiento de modelos aditivos de preferencias, la teoría normativa de la decisión, establece requisitos para su aplicación difícilmente argumentables de manera general en el problema multiatributo que nos ocupa, donde los atributos son los distintos objetivos de enseñanza.

Dos importantes objeciones teórico-aplicadas al uso de modelos aditivos en la medición del aprendizaje son:

1. El nivel de insatisfacción de un objetivo de enseñanza no puede ser compensado siempre por la satisfacción de otro.
2. Los 'pesos de los atributos' - que simplificadamente pudieran identificarse con el número de puntos de cada pregunta- no pueden ser asignados directamente de manera coherente, lo que es común en la práctica docente. [French (1986)].

Los sistemas de Inteligencia Artificial, y en particular los que usan Lógica Difusa [Shimiza (1995), Shimiza(1996)], utilizan sistemas basados en reglas para integrar unos pocos criterios referidos a aspectos u objetivos que deben constituirse en reglas particulares para cada asignatura o proceso a calificar. Por otra parte, las calificaciones dadas en etapas intermedias del proceso no constituyen un criterio predictivo o de alerta del desempeño futuro del estudiante.

El presente trabajo da continuidad a un trabajo anterior que propone un sistema de ayuda a la calificación basado en la Lógica Difusa, orientado a criterios [Espín (2001)] que a través de un análisis de incidencia basado en el modelo relacional borroso, permite lograr un balance adecuado de los pares dialécticos del proceso de evaluación, tomando distancia de las posiciones extremas

El propósito de dar calificaciones intermedias con utilidad predictiva, que permita una labor de control efectiva, había sido enunciado en aquella etapa inicial, y aquí se explica un experimento realizado, con el propósito de validar el carácter predictivo buscado de un modelo que resultó del perfeccionamiento del modelo inicial.

II. La Lógica Difusa Compensatoria

La utilización del Paradigma de la Lógica Difusa en cada vez más ramas de la ciencia fundamental y aplicada, constituye una auténtica revolución científica que está teniendo lugar en nuestros tiempos [Dubois (1980)]. .

El potencial de la Lógica Difusa para traducir del lenguaje natural a un lenguaje formal, ha sido clave para su proliferación y su éxito; y es una oportunidad grande para la creación de modelos a partir del conocimiento, y en particular para acercarse a la ciencia contextualmente significativa [Núñez (1999)], que disciplinas emergentes como la Matemática Educativa propugnan [Cantoral (2000)].

Ella ha recibido críticas desde las posiciones de la Teoría de la medición y la Teoría normativa de la decisión, porque aún sus resultados prácticos no tienen un respaldo teórico

que tenga en cuenta suficientemente los importantes precedentes que ellas constituyen [French (1986)].
Tales objeciones están en la base de las inconsistencias de algunos modelos obtenidos por traducción del lenguaje natural, por lo que se requieren esfuerzos teóricos para eliminarlas.
La Lógica Difusa Compensatoria es un sistema lógico multivalente que logra avances significativos en la dirección apuntada [Espín (2005)] renunciando a varios axiomas clásicos en este tipo de sistemas para lograr una lógica idempotente y "sensible", resultado imposible bajo las premisas clásicas.
Al mismo tiempo la axiomática que satisface hace posible de manera natural el trabajo de traducción del lenguaje natural al de la Lógica incluidos los predicados extensos, si estos surgen del proceso de modelación, lo que ha sido comprobado de manera práctica.
Se garantiza con este modelo de decisión la combinación efectiva de elementos intangibles valorados a través de expertos considerando escalas categoriales de veracidad, con información cuantitativa, que aporta valores de verdad a través de predicados definidos convenientemente a partir de tal información.
La Lógica Difusa Compensatoria ha sido aplicada en la Modelación de Problemas asociados a la Toma de Decisiones Organizacionales y la Educación, habiendo demostrado su superioridad en los problemas que ha abordado, en comparación con otros sistemas [Espín (1999), Espín (2000), Espín (2002)].

III. El experimento

Detalladamente el objetivo de la presente investigación fue desde su concepción inicial obtener modelos matemáticos basados en la Lógica Difusa para:

- medir la importancia de cada objetivo de una asignatura teniendo en cuenta la incidencia directa o indirecta del mismo sobre los restantes objetivos.
- calificar cada alumno a partir de las valoraciones de su profesor sobre su satisfacción en cada uno de los objetivos
- medir la predisposición de cada alumno a obtener una determinada calificación, a partir del criterio del profesor sobre el cumplimiento de los objetivos ya abordados sobre los que se tiene información.

Para validar el logro del tercer objetivo, se aplicó el modelo modificado a la evaluación de los alumnos que cursaron la asignatura Álgebra Lineal de la carrera Ingeniería Automática del Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", Cuba. La experiencia se llevó a cabo con cuatro grupos de aproximadamente quince estudiantes cada uno.
A continuación se describe el algoritmo de aplicación del modelo, siendo ilustrado con los los resultados de uno de los grupos:

1. Luego de formulados los nueve objetivos objeto de la evaluación, se confecciona una matriz de incidencias directas en la que cada elemento, representa la valoración, otorgada por el docente, de "cuán cierto es que el objetivo i incide directamente sobre el objetivo j".

2. Se introducen los valores u_i , que representan la importancia intrínseca que el docente atribuye a cada objetivo. Esta valoración es obtenida a través de las respuestas a la pregunta "cuán cierto es que el objetivo i es importante".

3. Se calcula la incidencia directa o indirecta del objetivo i sobre el objetivo j, valorando el siguiente predicado: $I^*_{ij} = \exists k(I_{ik} \wedge I_{kj}) \vee I_{ij}$

4. Se calcula la importancia del objetivo i.

$$I_i = \left(\mu_i \wedge \underset{j \neq i}{\exists j} : \left(\mu_j \wedge I^*_{ij} \right) \right)$$

5. El docente confecciona una tabla para evaluar los nueve objetivos, en la que cada elemento, representa la valoración de "cuán cierto es que el alumno x se merece la calificación **Buena** en el objetivo i".

En la última columna se muestra el valor de la calificación final que se obtiene valorando el siguiente predicado

$$C(x) = \forall i \left[I_i \to O_i(x) \right]$$

Grupo 1	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	V(C(x))
Alumno 1	1	1	.6	.9	1	1	1	1	.9	0.6980
Alumno 2	1	1	1	.9	.6	1	1	1	.6	0.6919
Alumno 3	1	1	.6	1	0	.8	1	.7	.8	0.6164
Alumno 4	1	0	1	.6	0	.6	1	.8	1	0.4325
Alumno 5	1	.5	.5	.8	0	.6	1	1	1	0.5526
Alumno 6	1	1	1	1	1	1	1	.9	1	0.7351
Alumno 7	1	0	1	.6	1	1	1	1	1	0.5122
Alumno 8	0	0	.1	.7	0	.6	.5	0	0	0.2056
Alumno 9	1	1	1	1	0	1	1	.9	1	0.6755
Alumno 10	1	.9	1	.9	1	1	1	1	.6	0.6960
Alumno 11	1	1	1	1	1	.7	1	.5	.6	0.6610
Alumno 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Alumno 13	1	0	1	.6	0	1	1	.8	.6	0.4554
Alumno 14	0	0	0	.5	0	.6	0	0	0	0.1822

6. Se confecciona una nueva tabla que vincula cada alumno con sus calificaciones. Los valores obtenidos en 5, se consignan en la columna encabezada por BUENA.

Las columnas encabezadas por EXCELENTE, MUY BUENA Y SATISFACTORIO, se corresponden con el cubo, el cuadrado y la raíz cuadrada de $C(x)$, respectivamente.

Alumnos	Excelente	Muy Buena	Buena	Satisfactorio
1	0.3400	0.4872	**0.6980**	0.8354
2	0.3312	0.4787	**0.6919**	0.8318
3	0.2341	0.3799	**0.6164**	0.7851
4	0.0809	0.1871	0.4325	**0.6577**
5	0.1688	0.3054	**0.5526**	0.7434
6	0.3972	**0.5403**	0.7351	0.8574
7	0.1344	0.2624	**0.5122**	0.7157
8	0.0087	0.0423	0.2056	0.4534
9	0.3083	0.4563	**0.6755**	0.8219
10	0.3372	0.4845	**0.6960**	0.8343
11	0.2888	0.4369	**0.6610**	0.8130
12	0	0	0	0
13	0.0945	0.2074	0.4554	**0.6749**
14	0.0060	0.0332	0.1822	0.4268

7. Para cada alumno, se elige entre los valores que sobrepasen 0.5 en la matriz del apartado 6, aquél que corresponda a la categoría mayor de calificación (valores resaltados en negrita).

8. Con la finalidad de analizar el carácter predictivo del modelo, se consideran evaluados los objetivos 1 a 7 y se intenta predecir la calificación para los objetivos 8 y 9. Para ello se usa el siguiente predicado: $O'_i(x) = \underset{j=1..(i-1)}{\forall j} \in Y\left(I^*_{ij} \rightarrow O_j(x)\right)$

9. Se predice la calificación final $C'(x)$, para cada alumno, usando

$$C'(x) = \forall i\left[I_i \rightarrow O_i(x)\right]$$

, donde $O_i(x) = O_i(x)$ para $i \in \{1,2,...,7\}$ y $O_i(x) = O'_i(x)$ para $i \in \{8,9\}$.

10. Siguiendo el mismo procedimiento que el indicado en el paso 7, se obtiene el siguiente cuadro.

Alumnos	Calificación otorgada por la Predicción	Calificación otorgada por el Modelo directamente
1	Bueno	Bueno
2	Bueno	Bueno
3	Bueno	Bueno
4	Satisfactorio	Satisfactorio

5	Bueno	Bueno
6	Muy Bueno	Muy Bueno
7	Satisfactorio	Bueno
8	No satisfactorio	No satisfactorio
9	Bueno	Bueno
10	Bueno	Bueno
11	Bueno	Bueno
12	No satisfactorio	No satisfactorio
13	Satisfactorio	Satisfactorio
14	No satisfactorio	No satisfactorio

Como se observa, los resultados fueron a simple vista, muy favorables. Solo uno de los alumnos del grupo 1 obtendría una calificación diferente a la predicha, difiriendo solo en un valor de la escala; ello se comportó de manera similar en todos los grupos.
La veracidad de que los resultados son equivalentes, o sea que:

$$. \qquad \forall x : C(x) \equiv C'(x)$$

fue la siguiente en cada uno de los grupos:
Grupo 1 :V(Ho)=0.5373 ; Grupo 2 : V(Ho)= 0.5058 ; Grupo 3 : V(Ho)= 0.5291 ; Grupo V(Ho)= 0.5237, lo cual significa que los resultados para todos los grupos son equivalentes, debido a que tal afirmación es más verdadera que falsa en todos ellos.

IV. Conclusiones

1. Se observó que las calificaciones que se predijeron y las obtenidas por el alumno, resultaron equivalentes según la implicación de Zadeh, bajo la Lógica Compensatoria.
Los valores de verdad de la equivalencia no fueron altos, una hipótesis plausible e interesante es que la retroalimentación asociada al modelo pudo modificar la conducta del alumno respecto del proceso de aprendizaje y mejorar su rendimiento.
2. No obstante modificaciones razonables evaluadas preliminarmente, ofrecen aun mejores resultados.

Bibliografía

Cantoral, R *et al* (2000) Desarrollo del pensamiento matemático. México. Editorial Trillas.

Dubois, D. y Prade, H. (1980): Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press Inc

Espín R. 'Análisis difuso de coaliciones II'. *Revista Investigación Operacional.* Universidad de la Habana. N^0 3. 2000.

Espín R. y Fernandez E. (1999) Fuzzy Logic Model of Bargaining. *Foundation of Computing and Decision Sciences(FCDS)*. Poznan., 3(3).

Espín, R. y Fernández E. (2000) Análisis difuso de coaliciones I. *Revista Investigación Operacional*. Universidad de la Habana. No. 2.

Espín, R. y Lecich M.. (2001) Taller de aplicaciones educativas de la Lógica Difusa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* No. 14.

Espín, R. (2002) Modelos para la Administración Lógica de la empresa. Memorias de la Conferencia Iberoamericana de Informática, Sistemática y Cibernética CISCI 2002. Orlando. Florida.

Espín, R, y otros (2005) 'Compensatory Logic: A Fuzzy Approach to Decision Making' Proceedings of EUSFLAT Congress. Barcelona. España.

French S. (1986). ``Decision Theory:: An Introduction to the Mathematics of Rationality´´NY-Brisbane –Toronto. Halsted Press.

González, M. (2000). Monografía: Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria. CEPES. Universidad de la Habana. Cuba.

Nuñez, J. (1999): La Ciencia y la Tecnología como procesos sociales. Editorial Feliz Varela. La Habana.

Shimuza, S. & Yamashita , H. (1995) An educational Evaluation System Applying Fuzzy Theory. XI Fuzzy Systems Symposium.

Shimuza, S. & Yamashita, H. (1996) Educational Evaluation of Calligraphy: Applying Fuzzy Reasoning. International Congress of Soft Computing IV.

LA VISUALIZACIÓN COMO ESTRATEGIA PARA LA COMPRENSIÓN

Gloria N. Suhit
Facultad Regional Bahía Blanca – U.T.N. - Argentina
gsuhit@criba.edu.ar
Campo de Investigación: Visualización; Nivel Educativo: Medio y Superior
Palabras clave: visualización, constructivismo

RESUMEN
En este trabajo se muestran los primeros pasos del proyecto de investigación que tiene como meta el diseño de una propuesta para la enseñanza – aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral (de una variable). Se espera que su implementación, entre otros aspectos, mejore la **comprensión de los conceptos** fundamentales del Cálculo a través del **tratamiento y conversión de las distintas representaciones de los conceptos,** promueva el uso de la **visualización matemática** como estrategia para la formación adecuada de los conceptos, sirva de soporte a los estilos de matematización de las materias de las carreras de ingeniería
La propuesta focaliza su acento en la **visualización,** considerando que la visualización matemática favorece un enfoque global, integrador, de las representaciones de varios sistemas, facilitando la formación adecuada de los conceptos y la resolución de problemas no rutinarios.

INTRODUCCIÓN

Los problemas relacionados con el aprendizaje de la matemática, de la matemática necesaria tanto para la vida diaria como para el desarrollo del pensamiento matemático y la valoración por esta forma de pensamiento, tienen diversos orígenes y se sitúan en diferentes niveles.
Coincidiendo con los resultados de numerosas investigaciones es posible aseverar que en la mayoría de los cursos y en los distintos niveles, prevalece:

- ✓ La presentación de la disciplina como algo acabado, cerrado y alejado de la realidad.
- ✓ El uso de métodos didácticos apoyados fuertemente en la *memoria* y la *algoritmia,* sobre valorando los precedimientos analíticos
- ✓ Una *excesiva prioridad al marco algebraico o al numérico*, dejando de lado la utilización de los significados en los dominios verbal y visual
- ✓ *Lo exámenes* donde se evalúan las competencias correspondientes a los dominios algebraico y/o numérico
- ✓ El *estilo expositivo* en el desarrollo de la clase, que estimula un *aprendizaje pasivo.* Los alumnos se habitúan a la recepción de los conocimientos y no se los orienta a generarlos
- ✓ El desarrollo *lineal de los temas*, que aún guardando relaciones entre sí, no le son debidamente destacadas al estudiante, por lo que éste no los incorpora como un todo integrado, como un sistema que da cuenta de la lógica de la disciplina

características de una enseñanza acorde con la concepción formalista de la matemática, posición filosófica dominante hasta hace poco tiempo.

Para esta visión lo importante es que el alumno *aprenda matemática,* interesa que *domine un conjunto de técnicas cada vez más complejas y variadas* y sea capaz de aplicarlas tanto dentro como fuera de la matemática, ***en lugar de que se esfuerce por obtener significados personales a través de la educación matemática***..

La experiencia muestra que este modelo de transmisión del conocimiento no asegura que el mismo es incorporado tal como se lo enseña y fundamentalmente que los alumnos tienen grandes dificultades para transferir esos conocimientos "supuestamente aprendidos" a nuevas situaciones.
En particular, en los últimos años, numerosas investigaciones realizadas sobre la enseñanza de los principios del Cálculo muestran que, si bien los estudiantes pueden realizar en forma mecánica algunos cálculos de derivadas e integrales y resolver problemas rutinarios, no dominan los aspectos conceptuales fundamentales de este campo de la matemática, aún los que acreditan el curso.
En concordancia con investigaciones sobre esta temática y las continuas observaciones de los docentes de otras áreas sobre la deficiente preparación en matemática de los estudiantes, es importante destacar ,como lo afirma Pulido (2004) "**el bajo nivel de articulación entre lo que se enseña en los cursos de Cálculo y la manera cómo este conocimiento (la matematización) participa en otras áreas de la ciencia donde el Cálculo debe ser el soporte"**
También es fundamental tener presente que los conceptos matemáticos, a diferencia de los de otras disciplinas, no se pueden abordar directamente, por lo que se requieren formas que los representen. Algunos autores han mencionado la importancia de las diferentes representaciones semióticas en la adquisición de un concepto y su incidencia en la resolución de problemas, entre otros: Duval (1998), Hitt(1998) .

El conocimiento de esta realidad nos plantea la necesidad de indagar y reflexionar sobre: el proceso didáctico en la construcción de los conceptos básicos del Cálculo y en particular la incidencia de la visualización matemática como estrategia para la comprensión con el objetivo de elaborar una propuesta para mejorar la enseñanza – aprendizaje del Cálculo Diferencial que, entre otros aspectos

- favorezca la **comprensión de los conceptos** fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral a través del **tratamiento y conversión de las distintas representaciones de los conceptos.**
- facilite el **aprendizaje significativo** mediante una **enseñanza sistémica de las habilidades básicas de la matemática**
- sirva de soporte a los **estilos de matematización** de las materias de las carreras de ingeniería

para finalmente implementarla en nuestros cursos de primer año de ingeniería

MARCO TEÓRICO

La teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (según el análisis de Moreira, 2000), la teoría de las representaciones de Duval (1998) (retomada en Hitt ,1998) y las tendencias actuales en filosofía de la matemática conforman el marco teórico desde donde iniciamos nuestro camino.

Actualmente se le reconoce un triple carácter a la matemática : ***como actividad humana***, comprometida con la resolución de ciertas situaciones problemáticas; ***como lenguaje simbólico*** y ***como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido***, emergente de la actividad de matematización,

Si se considera a *la matemática como una construcción humana* que surge como consecuencia de la necesidad del hombre para dar respuesta a ciertos problemas, que pueden referirse al mundo natural y social o bien pueden ser internos a la propia disciplina, se plantea la necesidad de establecer un acercamiento a la génesis y desarrollo histórico de los conceptos, con la intención de analizar como surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías,…) reconocer los usos sociales a los que están asociados desde sus orígenes y mostrar cómo, para dar solución a los problemas, la matemática diseña "**modelos**" como recurso metodológico de conocimiento, interpretación y/o explicación de la realidad.
También, como ya lo mencionamos, es importante tener presente que los conceptos matemáticos, a diferencia de los de otras disciplinas, no se pueden abordar directamente, por lo que se requieren formas que los representen.
Por lo tanto es fundamental considerar el desarrollo y los valiosos aportes de la teoría relacionada a la aprehensión de los objetos matemáticos a través del tratamiento y conversión de las representaciones de estos objetos.
Investigaciones sobre visualización matemática y el papel de las imágenes mentales han puesto de manifiesto la importancia del uso y coordinación de diversos registros de representación semiótica para la formación adecuada de los conceptos.
En este sentido Duval (1998) destaca que: " *el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación."*
Pero si la coordinación de varios registros de representación semiótica aparece como fundamental para la aprehensión conceptual de los conceptos, es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones.
Al respecto Duval (1998) señala: "*La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión"*

Por lo tanto la distinción entre un objeto y su representación, es un punto estratégico para la comprensión de la matemática. Duval(1998) lo subraya : *"no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación………pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy distintas".*

En este contexto, es posible afirmar que, como lo sugiere Duval (1998) :

*"El análisis de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas y de los obstáculos a los cuales se enfrentan los alumnos , conduce a reconocer que se deben al hecho que no hay **noésis sin sémiosis** ……., es decir, sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, recursos que implica la coordinación de esos sistemas semióticos por parte del sujeto mismo"*

En tanto se puede observar, en los diferentes niveles de enseñanza, que se quiere enseñar matemática como si la sémiosis***(****aprehensión o producción de una*

representación semiótica) fuera una operación sin valor con respecto a la néosis *(aprehensión conceptual de un objeto)*.
Entendiendo el aprendizaje como construcción del conocimiento, se reconoce la elaboración personal del mismo, como también que conocer implica también comprender de tal forma que permita compartir con otros el conocimiento. Por lo tanto en esta interacción juega un rol fundamental la negociación de significados, porque facilita la socialización de los significados personales, proceso en el que los "otros significativos", los agentes culturales, son elementos imprescindibles para provocar los reajustes en los conocimientos y favorecer la construcción de *aprendizajes significativos*.
La propuesta de **aprendizaje significativo** (en contraposición a rutinario, mecánico, de consignas) se basa en el principio, que formula Ausubel (1983) : ***"El factor más importante que influencia el aprendizaje es aquello que el aprendiz ya sabe, averíguese eso y actúese en consecuencia"***
El **aprendizaje significativo es un proceso personal de elaboración de significados**, por lo tanto se trata de encontrar la forma de ponernos en contacto con lo que el alumno ya sabe, interactuar con ese conocimiento para resignificarlo y, a partir de allí, posibilitar nuevas construcciones.
La ***interacción*** con los procesos a partir de los cuales es posible construir los conceptos es lo que permite reconstruir una serie de ***relaciones***, diferenciaciones o interacciones de los conocimientos previos para construir los nuevos.
Si acordamos que la construcción del conocimiento es un proceso, que no es lineal, … que tiene avances y retrocesos, avances y rupturas …… entonces la ayuda pedagógica mediante la cual el docente orienta al alumno a construir significados y a atribuir sentido a lo que aprende también debe concebirse como un proceso: proporcionando al alumno una información organizada y estructurada, ofreciéndole modelos de acción a imitar, formulando indicaciones y sugerencias más o menos detalladas para resolver ciertas tareas o permitiéndole que elija y desarrolle de forma totalmente autónoma determinadas actividades de aprendizaje.

En síntesis, siguiendo a Ausubel, la tarea docente debe consistir en programar las actividades y situaciones adecuadas que permitan conectar activamente la estructura conceptual de la disciplina con la estructura previa del alumno,

PRIMEROS PASOS DEL DISEÑO

En nuestra propuesta, apoyándonos en las consideraciones precedentes, le otorgamos gran importancia al lenguaje gráfico e intentamos establecer una fuerte correlación entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico, ya que la visualización matemática permite una visión global, integradora, de las representaciones de varios sistemas.
Partimos de la premisa que **comprender un concepto matemático** consiste en conocer sus principales **representaciones**, el significado de cada una de ellas, operar con las reglas internas de cada sistema, **convertir o traducir unas representaciones en otras** y le otorgamos **gran importancia al lenguaje gráfico**, intentando establecer un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. (Cantoral et al, 2003)
Por otra parte no asumimos la existencia de los objetos matemáticos sin un uso, sin un proceso de significación y de resignificación progresiva. Así , por ejemplo, el **concepto**

de derivada tiene un alto grado de complejidad y sólo puede comprenderse dentro de una red simultánea de otros conceptos.

Comprender la diferenciación supone comprender el concepto de función, y éste, la noción de variable, la cual supone el concepto de número y fundamentalmente, al enfoque que se le da al concepto de límite, principal obstáculo del concepto derivada

Reconstruimos el concepto de derivada, siguiendo su génesis histórica, como una primera introducción al concepto de límite de una función. Mediante una serie de situaciones geométricas y numéricas se obtiene una primera aproximación a los límites en relación con la variación de las funciones. Aunque aquí también aparecen los obstáculos epistemológicos del concepto de límite, este aparece como un instrumento que permite resolver el problema de cómo varía la función en un punto y se evitan parte de los aspectos formales.

Para introducir el concepto de derivada utilizamos, acordando con la propuesta de Azcárate (1996), la siguiente secuencia:

- Situaciones geométricas y numéricas que permitan una aproximación al concepto de límite
- Tasa media de variación
- Velocidad media
- Tasa media de variación y pendiente de una recta
- Cuerdas y tangentes
- Tasa instantánea de variación
- Velocidad instantánea
- Función derivada de una función.

Y considerando el significado de la derivada en un punto como

a) pendiente de la recta tangente b) medida de la variación instantánea de la función en dicho punto

calculamos, a partir de la gráfica, la derivada de las funciones elementales.

El planteo de diversas situaciones problemáticas nos permite inferir algunas reglas básicas del cálculo diferencial

En esta primera etapa intentamos dar significado a los resultados que se obtienen. Las reglas de derivación de funciones compuestas, inversas, de productos y cocientes entre funciones, se trabajan en una segunda etapa, después de formalizar el concepto de límite .

Quedan también pendientes los contenidos relativos a los procesos de integración, cuyo análisis se realizará en el próximo periodo lectivo.

A modo de síntesis podemos concluir que, fundamentalmente centramos la atención en las nociones matemáticas, no como objetos ya construidos, sino como herramientas que permitan a los alumnos abordar eficaz y efectivamente los problemas de su área de interés, teniendo presente que la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral se proyecta a futuros usuarios del tema, no hacia expertos del mismo.

BIBLIOGRAFIA

Ausubel, D.; Novak, J. ; Hanesian,H. (1983) *Psicología Educativa : un punto de vista cognoscitivo.* México Editorial Trillas.

Moreira, Marco A. (2000) *Aprendizaje significativo : teoría y práctica.* Madrid. Visor.

Duval,R. (1998) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp173-201) México. Grupo Editorial Iberoamericano.

Azcárate, C. y Deulofeu, J.(1996) *Funciones y gráficas*. Madrid. Editorial Síntesis.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanis, J.; Rodriguez, R.; Garza, A. (2000) *Desarrollo del pensamiento matemático*. Madrid. Editorial Trillas.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) *FUNCIONES : visualización y pensamiento matemático*. Prentice Hall. México.

Hitt, F. (1998) Visualización matemática: representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 10, N° 2 .México. Grupo Editorial Iberoamérica. S.A

Pulido, R. (2004) *Matemática educativa en la Ingenieria.* Conferencia especial RELME 19.Uruguay

IDENTIFICACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS SEMIÓTICOS EN UNA TAREA DE GEOMETRÍA

Carlos Parodi, Estela Rechimont, Nora Ferreyra
Facultad de Ingeniería, Facultad Ciencias Exactas y Naturales (U.N.L.Pam) Argentina.
parodic@ing.unlpam.edu.ar Rechimont@exactas.unlpam.edu.ar – francis@cpenet.com.ar
Campo de Investigación: Didáctica de la Matemática

Resumen
En el marco de una investigación sobre dificultades en el aprendizaje de temas de matemática, tratamos de identificar los significados semióticos que se ponen en juego en actividades que involucran procesos de demostración. En esta ocasión nuestra investigación recae sobre un tema de geometría desarrollado en el texto "Matemática 9 EGB" (Andrés, 2001). Este análisis es una etapa previa de un análisis ontológico-semiótico que aportará al análisis didáctico-matemático elementos que permitan identificar el sistema de entidades en juego en el estudio de semejanzas de triángulos y que involucra un proceso de demostración. La técnica propia de dicho análisis semiótico permite vislumbrar los significados presentes en la actividad que está siendo analizada y muestra la complejidad que encierra la noción en cuestión.

Introducción

La técnica que involucra el análisis ontológico - semiótico nos permite vislumbrar los significados presentes en la actividad matemática particular que esta siendo analizada. Este análisis es considerado por Godino "microscópico", sin embargo su amplitud no queda reducida a una actividad puntual como es el uso de términos y expresiones, sino que desde una mirada más general, este análisis nos permite "*describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular*" [Godino, 2004]

En el marco de una investigación sobre las dificultades en el aprendizaje de algunos temas de matemática y en particular en los procesos de argumentación, justificación o fundamentación de conceptos presentes en la solución de algunas situaciones - problemas, hemos querido identificar los significados (Godino 2004) que se ponen en juego en estas actividades matemáticas, principalmente en una actividad que involucre procesos de demostración.

En este proyecto comenzamos por disponer de textos correspondientes a lo que actualmente es el Tercer Ciclo de EGB editados en distintas épocas en nuestro país, en la que sobre algunos contenidos de geometría tratan los procesos argumentativos con herramientas geométricas similares pero dando a la demostración enfoques diferentes. En esta ocasión hicimos el análisis tomando un texto en particular "Matemática 9 EGB" (Andrés, M y otros, 2001), cuya elección correspondió a su mayor implementación en el aula, y en el que se registra la actividad matemática desarrollada que nos interesa, la semejanza de triángulos.

Unidades semióticas y significado institucional

Este análisis consistirá en descomponer la actividad matemática del texto en unidades y subunidades que J. Godino (2004) llama *Unidades semiótica*. Cada una de las unidades están caracterizadas por contener algunos de los seis tipos de funciones semióticas que "atendiendo al plano del contenido (significado)" [Godino, 2004] designa como: *Significado lingüístico*, *significado situacional*, *significado conceptual*, *significado preposicional*, *significado actuativo* y *significado argumentativo*.

Haremos una breve descripción de cada uno de ellos rescatando ejemplos del texto seleccionado y del contenido matemático elegido para hacer el respectivo análisis.

a) *Significado lingüístico*: cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico.

Por ejemplo: el símbolo $\overset{\Delta}{abc}$ hace referencia a un triángulo cuyos vértices son nombrados con las letras **a**, **b** y **c**.

b) *Significado situacional*: cuando el objeto final es una situación - problema.
Por ejemplo: la expresión "El triángulo azul está construido *en escala* a partir del amarillo, o sea que tiene igual forma pero diferente tamaño." acompañado de la gráfica correspondiente nos remite a la situación - problema de determinar la semejanza entre los triángulos intervinientes.

c) S*ignificado conceptual*: diremos que una correspondencia semiótica es de tipo conceptual cuando su contenido es un concepto - definición.
Por ejemplo: en la expresión "Dos triángulos son semejantes si tienen: ..." la palabra "triángulo" nos remite a un concepto - definición.

d) *Significado proposicional*: cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto.
Por ejemplo: las expresiones "sus ángulos respectivamente iguales" y "sus lados correspondientes proporcionales" nos remiten a relacionar diferentes conceptos como ser el de ángulos y ángulos iguales.

e) *Significado actuativo*: diremos que una función semiótica es de tipo actuativo cuando su contenido es una acción u operación.

Por ejemplo: la expresión "en el triángulo $\overset{\Delta}{xyz}$ trazamos el segmento $\overline{uv}$, (paralelo a $\overline{yz}$), ... " su contenido es una acción que nos remite al trazado de un segmento paralelo a otro.

f) *Significado argumentativo*: cuando el contenido de la función semiótica es una argumentación.
Por ejemplo: la expresión "aplicamos el teorema de Thales" se refiere a una argumentación que en este caso fue previamente trabajado.

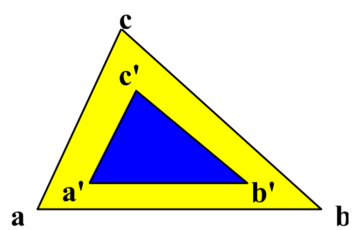
En esta ocasión nuestra investigación recae sobre la exposición de un tema en el libro de texto "Matemática 9 EGB" (Andrés, M y otros, 2001) enfocando nuestro estudio sobre la faceta institucional ya que se ponen en juego objetos institucionales que son utilizados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Haremos una identificación de los significados semióticos, pero no incluiremos una descripción del *significado institucional de referencia* para el objeto considerado. Ya que un análisis ontológico - semiótico de un texto requiere no solo de la descomposición en *unidades*, sino que se deberán identificar las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos (Godino, 2004).
Este análisis es una etapa previa de un análisis ontológico - semiótico y que aportará al análisis didáctico - matemático elementos que permitan identificar el sistema de entidades en juego en el estudio de semejanzas de triángulos y que involucra un proceso de demostración. Si bien este análisis está orientado a describir el *significado*

institucional pretendido no dispondremos del patrón de referencia correspondiente (*significado institucional de referencia)*
Este análisis, que tiene el carácter de un análisis a priori, nos mostrará la complejidad que encierra esta noción y principalmente un proceso de demostración.

<u>Unidades Primarias de Análisis</u>
Se transcriben del texto correspondiente las diferentes Unidades y Subunidades en que han sido clasificadas y fueron identificadas con el símbolo (1). Seguido de lo cual se desarrollan cada una de las unidades semióticas correspondientes identificando los tipos de funciones semióticas involucradas.

Unidad 0
U.0. El título **Triángulos Semejantes** nos introduce a la faceta que identificamos como sistémico (compuesto) al considerarlo compuesto por entidades mas simples con cierta organización, sin embargo puede ser una faceta elemental (unitaria) no solo por ser el primer objeto del capítulo correspondiente a "Semejanzas y trigonometría" sino que acompañan al sistema de prácticas operatorias e incluso discursivas de todo el capítulo.

Unidad 1
1 El triángulo azul está construido *en escala* a partir del amarillo, o sea que tiene igual forma pero diferente tamaño.♦



U1. Si bien la situación planteada no responde a una situación real, en el sentido que los triángulos no parten, por ejemplo, de lo que podría ser una superficie de terreno triangular inscripta en otra de mayor tamaño, constituye un *significado situacional* ya que en el texto presenta una situación en la que se encuentran triángulos inscriptos representados en una gráfica. Observamos que el *significado conceptual* de triángulo se remite a un concepto antes trabajado al igual que cuando hace referencia a la escala.
En esta ocasión habla de "igual forma" como así también de "igual tamaño", conceptos que son mas bien intuitivos a los efectos de describir la gráfica presentada que constituye en este caso el *significado lingüístico* utilizado por los autores.

Unidad 2
1 Los llamamos **triángulos semejantes**, y lo simbolizamos así:

$$\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'} \ ♦$$

U2. Evidentemente el *significado lingüístico* utilizado permite hacer corresponder su designación en lengua natural con símbolos que encierran su propio significado. Por un lado $\overset{\Delta}{abc}$ al igual que $\overset{\Delta}{a'b'c'}$ nos describe dos triángulos y su distinción no puede ser dejada de lado al estudiante. Es decir que el hecho de diferenciarlos con las comillas deberían abstraer la idea de distinción (en este caso evidente por la gráfica) pero que encierra la posibilidad de que sus vértices coincidan, en cuyo caso no tan evidentes. Además nos remite a actuar escribiendo $\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'}$ en situaciones que los triángulos fuesen semejantes. Éste *significado actuativo* encierra otro de los significados lingüísticos que corresponde al símbolo **" ~ "**.
Unidad 3
1 Dos triángulos son semejantes si tienen:

- Sus ángulos respectivamente iguales: $\hat{a} = \hat{a}'$; $\hat{b} = \hat{b}'$; $\hat{c} = \hat{c}'$
- Sus lados correspondientes proporcionales $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{\overline{a'b'}}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{\overline{b'c'}}} = \dfrac{\overline{ca}}{\overline{\overline{c'a'}}}$ ♦

U3. En esta ocasión descompondremos en dos subunidades **U3-1** "Sus ángulos respectivamente iguales: $\hat{a} = \hat{a}'$; $\hat{b} = \hat{b}'$; $\hat{c} = \hat{c}'$" y **U3-2** "Sus lados correspondientes proporcionales $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{\overline{a'b'}}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{\overline{b'c'}}} = \dfrac{\overline{ca}}{\overline{\overline{c'a'}}}$". En ambos casos los *significados actuativos* son evidentes ya que por ejemplo cuando dos ángulos sean iguales al trabajar, sobre triángulos semejantes, deberán expresar $\hat{a} = \hat{a}'$.

U3-1. Cuando nos referimos a "ángulo" está presente el *significado conceptual* al haber trabajado la definición correspondiente, incluso su *significado lingüístico* "â".

U3-2. El *significado conceptual* "lados", "correspondientes" y "proporcionales" involucra también al *significado proposicional* ya que deberán ser relacionados después de haber sido trabajados individualmente.

Unidad 4

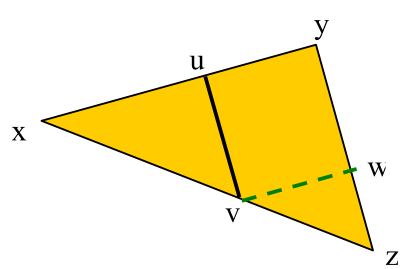
1 Para construir un triángulo semejante a otro, podemos trazar una paralela a uno de los lados que corte a los otros dos, o a sus prolongaciones. ♦

U4. Esta Unidad está cargada de *significados conceptuales* cuando ser refiere a la construcción de triángulos, trazar una paralela a un lado que corte a los otros dos o a sus prolongaciones, sin olvidarnos de los *significados actuativos* que ellas encierran.

Nos remite a una situación en la que se quiere representar unos objetos matemáticos, la construcción no solo del triángulo sino de paralelas y secantes, que nos permite poner en evidencia los *significados situacionales*.

Unidad 5

1 En el triángulo $\overset{\Delta}{xyz}$ trazamos el segmento $\overline{uv}$, (paralelo a $\overline{yz}$), y se forma el nuevo triángulo $\overset{\Delta}{xuv}$. ♦



U5. Si bien los *significados actuativos* están mas evidentes, al requerir una construcción determinada haciendo uso de ciertos objetos matemáticos, aparece la expresión "segmentos" que claramente se enmarca dentro del *significado conceptual* además de poder identificar los triángulos que en la figura se irán construyendo. Es decir parece evidente la identificación de los triángulos pero que encierra una dificultad que no siempre está al alcance del alumno.

Unidad 6

Demostremos que los triángulos obtenidos son semejantes.

Trazamos el segmento auxiliar $\overline{vw}$ (paralelo a $\overline{xy}$).

Aplicamos el teorema de Thales. ♦

U6. Nuevamente los *significados lingüísticos* se presentan, pero principalmente rescatamos por primera vez un *significado argumentativo* al referirse al "Teorema de Thales" que involucra, sin embargo, todos aquellos *significados conceptuales* además de "segmento auxiliar" entre otros.

Unidad 7

1 $$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ las transversales son } \overline{xy} \text{ y } \overline{xz} \\ \bullet \text{ las paralelas son } \overline{yz} \text{ y } \overline{uv} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Entonces}: \frac{\overline{xy}}{xu} = \frac{\overline{xz}}{xv} \qquad \boxed{\mathbf{I}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ las transversales son } \overline{xy} \text{ y } \overline{xz} \\ \bullet \text{ las paralelas son } \overline{yz} \text{ y } \overline{uv} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Entonces}: \frac{\overline{xy}}{xu} = \frac{\overline{xz}}{xv} \qquad \boxed{\mathbf{II}}$$

$$\text{Observen que } \overline{yw} = \overline{uv}: \frac{\overline{xz}}{xv} = \frac{\overline{yz}}{uv} \quad \blacklozenge$$

U7. Los *significados conceptuales* como "transversales", "paralelas" se encuentran inmersos en una serie de símbolos que encierran sus *significados lingüísticos*, no sólo al referirnos a los segmentos, igualdad entre segmentos sino que la proporcionalidad está muy presente. No es de descartar la influencia que las llaves pueden en esta ocasión representar para los alumnos a la hora de comprender el desarrollo descripto.

Unidad 8

1 De $\boxed{\mathbf{I}}$ y $\boxed{\mathbf{II}}$ concluimos que los lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{\overline{xy}}{xu} = \frac{\overline{xz}}{xv} = \frac{\overline{yz}}{uv} \ \blacklozenge$$

U8. Dentro de *significado preposicional* en que se puede insertar esta expresión observamos que tanto los *significados conceptuales* como "correspondientes" y "proporcionales" se vinculan los correspondientes *significados lingüísticos* que en ella aparecen.

Unidad 9

1 Además, los ángulos son respectivamente iguales: $\hat{x}$, por ser ángulo común, y los otros por ser correspondientes entre paralelas. ♦

U9. Si bien se repiten los *significados conceptuales* antes utilizados, en esta ocasión nos remite a los que llaman "ángulo común" y "correspondientes entre paralelas", en el primer caso no encontramos una descripción que se le corresponda, por lo que se puede desprender que de la observación el alumno pueda vislumbrar esta idea de "ángulo común", algo que creemos no es del todo evidente, y para el segundo caso ("correspondiente entre paralelas") fue trabajado con anterioridad.

Unidad 10

1 Por lo tanto, los triángulos $\overset{\Delta}{xyz}$ y $\overset{\Delta}{xuv}$ son semejantes, como queríamos demostrar. ♦

U10. Esta unidad involucra una serie de *significados* (*conceptual*, *lingüísticos*) pero rescatamos principalmente el *significado proposicional* ya que deberá relacionar lo descripto en la Unidad 9 para los triángulos involucrados, con la definición de triángulos semejantes.

Comentarios Finales

Con éste análisis se evidencia la complejidad de los significados presentes a que se enfrentan las personas involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta diversidad semiótica puede agudizar las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio y crear obstáculos a la hora de querer demostrar e incluso validar su propia conjetura.

Incorporar un análisis de las respuestas de los alumnos nos permitirá comprobar la complejidad no sólo semiótica sino ontológica de una actividad matemática tan poco elemental como el proceso de demostración a la que no se está acostumbrado a trabajar. De esta manera los procesos de abstracción y razonamiento en estas actividades quedan expuestos a revisiones en lo referente al lenguaje, a los procesos de interpretación y la variedad de objetos en juego en la enseñanza y aprendizaje de las demostraciones.

Hemos descripto los tipos de funciones semióticas propuestas por Godino, que nos permitió proponer una interpretación del conocimiento y comprensión de la demostración de semejanza de triángulo por parte del sujeto (institución) en términos de las funciones semióticas descriptas que el sujeto puedo establecer.

J. Godino (2003) apoya la idea de que "la semiótica tiene el potencial de ofrecer la base para una teoría unificada de la educación matemática" y considera que una semiótica apropiada y complementada con otras herramientas teóricas que considere una diversidad de objetos en juego en toda actividad matemática, desempeña un papel esencial en las investigaciones en didáctica de las matemáticas. Su incorporación a nuestras investigaciones sobre los procesos de justificación, esperamos que aporten explicaciones de las dificultades y limitaciones de su aprendizaje basados en la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos en juego.

Bibliografía

Andrés, M., Kaczor, P., Latorre, M. y Piñeiro, G. (2001). Matemática 9 E.G.B. Editorial Santillana.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significados Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14 n|3, pp. 325-355.*

Godino, J. (2003). Teoría De Las Funciones Semióticas: Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Servicio de reprografía de la Facultad de Ciencias. Universidad de Granada. Granado.

Godino, J. Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperable en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/.

PROPUESTAS INNOVADORAS PARA EL APRENDIZAJE Y LA EVALUACIÓN

Daniela Müller, Adriana Engler, Silvia Vrancken, Marcela Hecklein
Facultad de Ciencias Agrarias – Universidad Nacional del Litoral – Argentina
E–mail: dmuller@fca.unl.edu.ar

Campo de investigación: Incorporación de distintas perspectivas; Nivel Educativo: Superior

Resumen

Sucesivas modificaciones en el plan de estudios de la carrera, dificultades en el aprendizaje de Matemática, una escasa transferencia de conocimientos a situaciones nuevas, entre otros, fueron el motor que nos impulsó a cambiar la metodología de trabajo en Matemática y a diseñar e implementar distintas actividades de aprendizaje y de evaluación complementarias a las que se realizan en el aula. El objetivo principal fue, que cada una de ellas constituyera, para el alumno, una ocasión para el seguimiento de su trabajo y para nosotras, la posibilidad de corregir los principales errores que se detectaran, implementando de manera inmediata distintas estrategias didácticas.
En este trabajo se describen las actividades realizadas y las estrategias implementadas.

Introducción

La utilización de medios informáticos en el contexto educativo implica reflexionar sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Las nuevas tecnologías por si mismas no generan nada, todo dependerá de cómo las integremos en nuestra práctica pedagógica.
Como establece Corredor (2003), “El desarrollo de la educación dependerá de los avances que se den en la sociedad en la que estamos inmersos, pero también dependerá de lo que nosotros, como protagonistas del proceso educativo, seamos capaces de crear y poner al servicio de aquellos a quienes estamos formando y que, consecuentemente serán los responsables de mejorar la calidad de vida y de la sociedad.”
Tanto las nuevas tecnologías como la computadora en sí sólo deben entenderse como una herramienta más al servicio de la educación, una herramienta especial que integra otros medios audiovisuales y que, gracias a las telecomunicaciones, permite la interconexión de datos.
Creemos que utilizando las nuevas tecnologías en el aula, tratando de aprovechar el potencial didáctico de ellas, admitiendo sus bondades, pero realizando a la vez una crítica de sus limitaciones, podremos ofrecerles a los alumnos instrumentos válidos para el ejercicio de una práctica reflexiva y los elementos necesarios para comprender el entorno tecnológico y social en el que les tocará vivir en el futuro.
¿Por qué decidimos introducir principalmente el uso de recursos informáticos como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de algunos temas?
La utilización de los recursos tecnológicos ofrece nuevas posibilidades: permite realizar representaciones de carácter visual y su utilización de manera dinámica. Su uso posibilita que el alumno fije la atención en los aspectos conceptuales, facilitan la tarea meramente técnica conservando de esa manera la importancia de los significados de los conceptos en juego.
También, en los últimos seis años, el plan de estudios de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias dependiente de la Universidad Nacional del Litoral, ha sufrido modificaciones que implicaron una reducción en la carga horaria semanal de Matemática I. Además, desde hace varios años, observamos en nuestros alumnos,

ingresantes a la facultad, dificultades en el aprendizaje y una escasa transferencia de conocimientos a nuevas situaciones.
Estos aspectos nos movilizaron a cambiar la metodología de trabajo y a buscar otras alternativas tendientes a mejorar la calidad de la enseñanza diseñando métodos activos que estimulen la participación y el compromiso de los docentes y de los alumnos. Fue así que generamos un espacio de resolución de actividades "optativas" complementarias a las que se realizan en el aula y que abarcan diversas aplicaciones.
El objetivo principal fue que cada actividad que realicen los alumnos constituya una ocasión para el seguimiento de su trabajo, la detección de las dificultades que se presentan y la determinación de los progresos y logros alcanzados. También, como docentes, identificando los principales errores que cometen, implementar distintas estrategias didácticas para tratar de corregirlos.
Las actividades que se realizaron fueron las siguientes:

- Discusión de guías de estudio sobre el tema funciones con el uso de un graficador matemático.
- Análisis de páginas web sobre conceptos teóricos y prácticos de matrices.
- Reforzar los contenidos teóricos y aplicaciones prácticas mediante el uso de un programa tutorial sobre sistemas de ecuaciones.
- Utilización de un software de generación automática de evaluaciones desarrollado por integrantes de la cátedra, al igual que el anterior.
- Resolución escrita de autoevaluaciones integrando los contenidos de una unidad.

Metodología

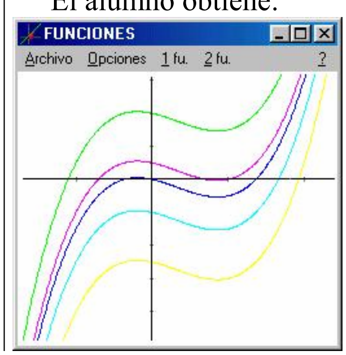
Las actividades se realizaron en el Gabinete de Informática de la Facultad que dispone de veinte equipos conectados a internet y capacidad para cuarenta alumnos, lo que posibilita la realización de actividades en grupos de a dos.
A continuación se describen las actividades realizadas y la forma en que se implementaron.

- *Guías de estudio sobre funciones*:

El contenido de las mismas permite el estudio básico de las gráficas de las funciones escalares algebraicas y trascendentes observando las principales características de su comportamiento de acuerdo a las transformaciones que se obtienen al modificar uno o más de sus parámetros. Los ejercicios están redactados para ser resueltos utilizando el graficador matemático "Funciones para Windows" que es un programa tipo shareware que puede obtenerse gratuitamente desde la página http://www.lagares.org.
Se presenta a modo de ejemplo, uno de los ejercicios de la guía de estudio correspondiente a funciones escalares algebraicas que deben completar, junto a la representación gráfica que obtiene el alumno en la computadora:

1) a) Represente gráficamente la función
$f(x) = 2x^3 - x - 2x^2$
b) Represente gráficamente las siguientes funciones en el mismo sistema coordenado y en el orden dado:
b_1) $g(x) = f(x) + 4$ b_2) $h(x) = f(x) +1$
b_3) $i(x) = f(x) -2$ b_4) $j(x) = f(x) - 5$
Observe las gráficas y complete: Se ha representado siempre la misma función pero variando ....
Si en general se representa $y = f(x) + c$, ¿cómo influye el parámetro c sobre la gráfica de $y = f(x)$?.

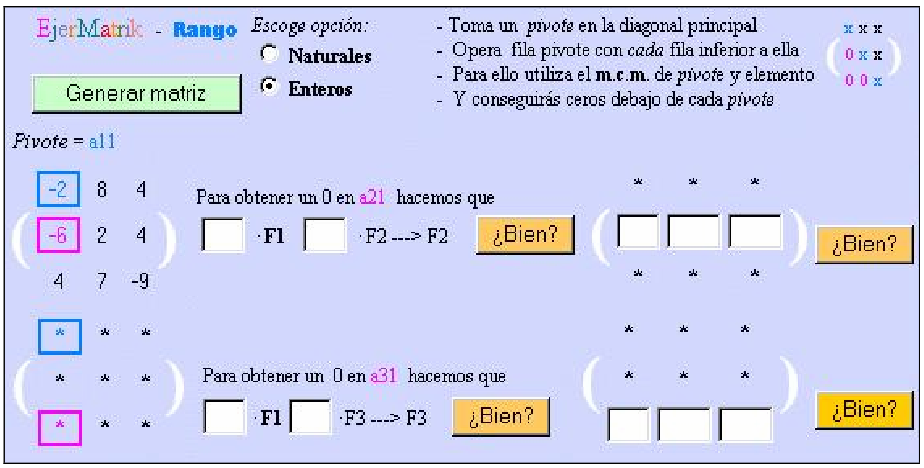
El alumno obtiene:



Al resolver estos ejercicios con ayuda del programa, el alumno primero representa la función y a partir de la misma, analiza sus características, realizando el proceso inverso al del aula donde para representar gráficamente una función debía primero analizar sus características. Esto contribuye a que pueda detectar errores, modificar sus conocimientos erróneos y afianzar los correctos.

- *Páginas web sobre matrices y sistemas de ecuaciones*:

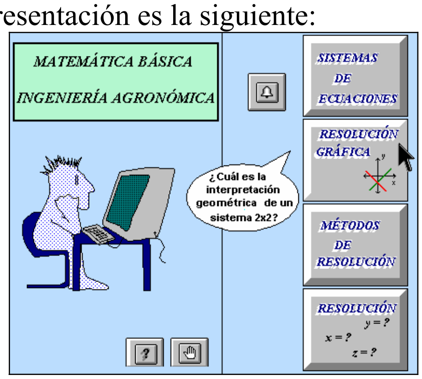
Finalizado el estudio de matrices y habiendo resuelto los ejercicios, los alumnos concurren al Gabinete de Informática para trabajar sobre la página de internet referida a álgebra matricial que está disponible en http://fresno.pntic.mec.es/~jvaamond.
Una de las páginas referidas al cálculo del rango de una matriz se presenta de manera resumida a continuación:



El contenido de la misma está orientado a reforzar definiciones y afianzar el trabajo algebraico con matrices. También cuenta con un generador automático de ejercicios para resolver y de exámenes de autoevaluación, ambos organizados en diferentes niveles de dificultad.
Cada actividad se realiza de manera interactiva y es inmediatamente corregida lo que favorece el análisis y revisión de los errores que el alumno comete.

- *Programa tutorial sobre sistema de ecuaciones*:

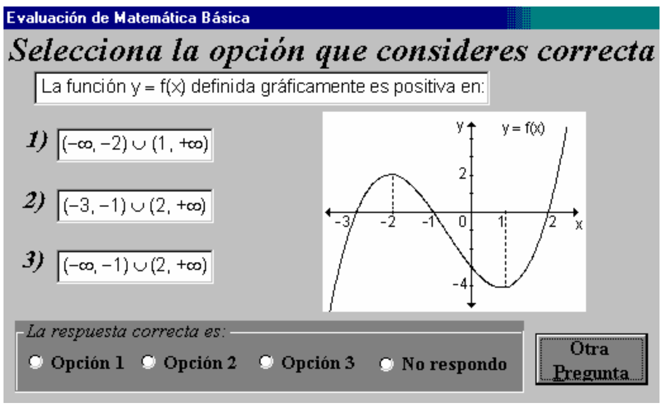
Desarrollamos un programa educativo de apoyo para el tema "Sistemas de ecuaciones lineales". A través de distintas pantallas y siguiendo un orden lógico, se presentan comentarios, información, definiciones, ejemplos y gráficos. La pantalla de presentación es la siguiente:



Las cuatro opciones son independientes y el alumno puede ingresar a las mismas las veces que lo desee. Al elegir cualquiera de ellas se accede a otra donde se presentan definiciones, ejemplos, propiedades y gráficos. Dentro de las mismas, mediante palabras resaltadas, puede realizar actividades cuya resolución le permite verificar el aprendizaje alcanzado.

Los alumnos trabajan de a dos en el Gabinete de Informática, una vez que se ha desarrollado por completo el tema en clase. Se familiarizan primero con procedimientos y reglas prácticas de trabajo y discuten sobre definiciones, operaciones elementales y su aplicación práctica.

➭ *Software de generación automática de evaluaciones*:
Desarrollamos un programa computacional en el que se generan, de manera automática y aleatoria, pruebas de opción múltiple para todos de los temas de Matemática I. Al ejecutarlo, la docente selecciona, dentro del total de preguntas disponibles correspondientes a cada uno de los temas, la cantidad que desea incluir en la evaluación. Luego se genera, de manera inmediata y aleatoria, un cuestionario con preguntas a las que el alumno puede responder de manera no secuencial.



Cada una de las preguntas son del tipo de opción múltiple con tres opciones que requieren un análisis cuidadoso tanto del enunciado como de las distintas respuestas alternativas.
Al finalizar la evaluación, el alumno puede observar su rendimiento ya que se les presenta en una pantalla la pregunta respondida, la opción seleccionada y la corrección de la misma.
El propósito de este programa fue el de utilizarlo para que los alumnos realicen autoevaluaciones de los temas de la asignatura al finalizar el desarrollo de los mismos, pero no con fines evaluativos, sino que con el objetivo de formarlos en la regulación de sus propios procesos de pensamiento y de aprendizaje, para que puedan determinar su nivel de conocimiento sobre el tema, tomar conciencia de su preparación y detectar aquellos aspectos en los que presentan dificultades.
Con la copia impresa de su rendimiento, discutimos con cada uno de los alumnos las respuestas incorrectas tratando de que sean ellos los que respondan el por qué de esa elección, conduciéndolos mediante interrogatorios guiados a que descubran su error y elijan la correcta.

➭ *Autoevaluaciones*:
Las autoevaluaciones constan de ejercicios y problemas que integran los contenidos de cada uno de los temas que se desarrollan en Matemática Básica. Una vez que se han realizado todas las actividades, aplicaciones prácticas y resolución de problemas, les solicitamos a los alumnos que realicen de manera individual y escrita la autoevaluación correspondiente.
Las corregimos marcando con una cruz las respuestas erróneas y tildando las correctas. Luego son devueltos la clase siguiente para que cada alumno pueda observar su trabajo. Se busca generar un momento de discusión sobre las distintas respuestas en el que los alumnos expongan las justificaciones matemáticas que sustentan un procedimiento algebraico. El objetivo principal de esta actividad es el de fomentar en los alumnos el autocontrol y la autoevaluación de su aprendizaje valorando el trabajo realizado e identificando aquellos aspectos que debe reforzar o corregir.

Todas las actividades descriptas se desarrollaron durante el primer cuatrimestre del año 2005. Si bien fueron planteadas como no obligatorias, en promedio asistieron 64 alumnos a cada una de ellas.

Resultados

De la observación del trabajo de los alumnos, puede decirse que el ambiente en el cual se desarrollaron todas las actividades generó situaciones productivas pues fueron ellos quienes presentaron las justificaciones matemáticas que sustentaban un procedimiento algebraico o la elección de una respuesta y quienes resaltaron la aparición de un error como un aspecto necesario de ser corregido y no con la actitud de tener que sancionarlo. Toda esta interacción ayudó a los alumnos a clarificar su proceso de reflexión y en todo momento manifestaron la necesidad de mejorar su actividad de aprendizaje.
Para evaluar la metodología utilizada, una vez finalizadas todas las experiencias se realizó una encuesta en la que se indagó sobre las apreciaciones personales sobre la importancia y preferencia sobre cada una de las actividades realizadas y en particular la opinión sobre la realización frecuente de autoevaluaciones.
Del análisis de esta encuesta, el 100% de los alumnos considera de gran utilidad todas las actividades y justifican su respuesta diciendo que realizarlas les permitió reforzar su aprendizaje, descubrir concepciones erróneas y disipar sus dudas. El 18,75% considera de gran utilidad la rápida visualización de las gráficas de las funciones utilizando el graficador matemático para comprender mejor las transformaciones que sufren las mismas al modificar alguno de sus parámetros. El 15,25% expresa su preferencia por las páginas de internet, el 36% considera que todas resultaron importantes y el 30% manifiesta mayor interés por el uso del programa que genera autoevaluaciones. Con respecto al mismo, algunos de sus comentarios se refieren a la importancia de su utilización de manera frecuente para adquirir confianza en sí mismos, mejorar el aprendizaje y la comprensión, tomar conocimiento de las falencias y errores cometidos y como estímulo al estudio constante.

Reflexiones

En varias ocasiones, los primeros resultados no satisfactorios que obtienen los alumnos, constituyen un aspecto negativo que en general los conduce a abandonar, a adoptar una actitud de mínimo esfuerzo o de rechazo hacia la Matemática. Esto podría evitarse comenzando con la manifestación explícita y convencida de que los resultados "negativos" no son tales, sino que sirven para detectar las principales dificultades en el aprendizaje y, a partir de ellas, comenzar a trabajar en conjunto para poder superarlas.
Todas las estrategias didácticas que podamos utilizar deben orientarse hacia el planteo de actividades que permitan obtener mejores resultados en el aprendizaje y crear un clima de actitudes positivas hacia la Matemática. Cuanto más amplias y complejas sean las relaciones que se establezcan, mayor será la capacidad de los alumnos de utilizarlas en situaciones cotidianas, en la construcción de nuevos significados y en el establecimiento de nuevas relaciones.
Al diseñar las actividades descriptas, la principal característica que quisimos impartirles para que jueguen un papel orientador e impulsador del trabajo de los alumnos, es que ellos puedan percibirlas como ayuda real, generadora de expectativas positivas. Consideramos sumamente importante también, transmitir nuestro interés por el progreso de los alumnos y el convencimiento de que un trabajo adecuado terminará produciendo buenos resultados, aún cuando inicialmente aparezcan dificultades.

Bibliografía

Corredor, M. (2003). *El profesor como facilitador y guía en ambientes virtuales de aprendizaje*. [en red]. Mayo 2005. Disponible en: http://docencia.udea.edu.co/lms/moodle/mod/resource/view.php

Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M. (2005). *Funciones.* Santa Fe, Argentina: Centro de Publicaciones. Universidad Nacional del Litoral.

Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M. (2005). *Álgebra.* Santa Fe, Argentina: Centro de Publicaciones. Universidad Nacional del Litoral.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemática. Una integración de perspectivas*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gimeno, J. y Pérez, Á. (1994). Tercera Edición. *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid: Ediciones Morata.

Masingila, J. (1997). Evaluación: una herramienta para enseñar y para aprender. *Revista UNO. Volumen 11*. Barcelona: Editorial Grao.

Parra, C., Saiz, I. (comp.). (1998) – Sexta reimpresión. Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Editorial Piadós.

Rico, L. (1997). La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria. Barcelona: Editorial Horsori.

Santos, M. (1996). Evaluación Educativa. Buenos Aires: Editorial Magisterio del Río de la Plata.

¿DE QUE FORMA PUEDE SER USADA LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA?

Lics. Marta Gómez de Estofán, Dora M. Fernández de Musomecci, Ida C. Kempf de Gil
Facultad de Ciencias Económicas - Universidad Nacional de Tucumán – Argentina
maestofan@uolsinectis.com.ar; dfernandez@herrera.unt.edu.ar; ogil@herrera.unt.edu.ar

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo señalar y reflexionar acerca del rol que desempeña la enseñanza de la Historia de la Matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina; puesto que con el estudio de la misma, el profesor puede lograr ampliar el universo cultural de los alumnos, desarrollar hábitos de lectura, perfeccionar habilidades investigativas y hacer acopio de un vocabulario más amplio en la asignatura. Las situaciones Históricas se deben ofrecer a los estudiantes, con el objetivo de dejar en ellos no solo el contenido matemático que les presenta, sino también las vivencias emocionales que repercuten en la formación de valores y el agradecimiento a quienes han trabajado en favor de la humanidad.

INTRODUCCIÓN

Desde el principio de su existencia la matemática ha contribuido de modo efectivo al desarrollo integral de la cultura humana. Esta disciplina es, en definitiva una exploración de las diversas estructuras complejas del universo y el "*análisis de estas estructuras no ha sido en general un mero ejercicio especulativo o académico, sino un ejercicio práctico en el que se ha buscado afanosamente la utilidad y el progreso de la cultura*" (de Guzmán, Miguel -1996).
Con respecto a las ciencias en general, Kuhn, niño terrible de la historia y la filosofía de la ciencia afirmó: *"Si se considera la historia como algo más que un depósito de anécdotas o cronologías, puede producir una transformación decisiva de la imagen que tenemos actualmente de la ciencia"*(**T. S. Kuhn,** "La estructura de las revoluciones científicas"-México 1975 – FCE –p 20)
Las contribuciones de la matemática a la cultura humana no sólo han sido extraordinarias y asombrosamente variadas, sino que seguramente lo seguirán siendo en el futuro. Alfred N. Whitehead, uno de los grandes matemáticos y filósofos de nuestro siglo, dijo: "*Si la civilización continúa avanzando, en los próximos 2000 años la novedad predominante en el pensamiento humano será el señorío de la intelección matemática"*. (Science and the Moderm World – New York –Mac Millan 1925a – Cambridge –University Press 1926)
Por todo esto y mucho más, es que el objetivo de este trabajo, es señalar y reflexionar acerca del rol que desempeña la enseñanza de la Historia de la Matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.

Consideraciones generales

Los últimos treinta años han sido escenario de cambios muy profundos en la enseñanza de las matemáticas. Los esfuerzos que los expertos en didáctica de la matemática han realizado y siguen realizando para encontrar modelos adecuados nos muestra que la enseñanza de esta disciplina vive una situación de experimentación y cambio permanente. Si nos preguntamos: ¿cómo debería tener lugar el proceso de aprendizaje matemático en los distintos niveles?, podríamos responder: "de una manera semejante a la que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, de la misma forma que un matemático activo plantea en términos matemáticos un problema de la vida real". Es por ello que en los últimos años se ha incrementado el interés por el rol de la historia de la matemática para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la materia y en esto han colaborado los matemáticos, quienes han cuidado de su propia historia más que otro grupo de científicos. Es que la Historia de la Matemática es un campo de trabajo que brinda a los docentes la posibilidad de reconocer, y por lo tanto aplicar en el trabajo con los alumnos, que la matemática en su desarrollo ha acumulado un enorme conjunto de hechos que permiten aseverar que los conceptos que la sustentan, tienen su procedencia en la práctica vinculada a los procesos reales del mundo y a la existencia de la sociedad civilizada. Por ejemplo, el surgimiento de la geometría está indisolublemente ligado a los problemas de las inundaciones provocadas por la crecida del río Nilo y a la construcción de las pirámides de Egipto.

La historia no puede ser una simple acumulación de documentos: las interpretaciones están siempre presentes, y deben estarlo para que el efecto tenga mensaje e interés. Es por ello que la historia de la ciencia en general y de la matemática en particular, no puede ser un repertorio de anécdotas con el cual entretener a los alumnos; debe ser propósito del profesor de matemática dejar en ellos la idea fundamental de que el mundo es cognoscible, que la Matemática se originó por la abstracción de la realidad objetiva y que existen relaciones importantes entre el desarrollo matemático y el desarrollo de la sociedad.

Las Fortalezas de la Historia

Es evidente que la historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas; los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas que pretendemos transmitir, sabremos perfectamente cuales son sus consecuencias, las aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir y la situación reciente de las teorías que han derivado de ellas.

Debemos mencionar sus "*virtudes conceptuales y epistemológicas",* puesto que la historia supone un desafío a nuestra capacidad de comprender al situarnos frente al trabajo de auténticos gigantes del pensamiento, y frente a la enorme dificultad de entender y reconstruir los caminos que ellos recorrieron. Pone en tela de juicio ideas que a menudo nos son muy familiares, colabora en darles sentido al conocer su origen y los roles que han desarrollado, y nos permite advertir las dificultades epistemológicas de los conceptos que hoy llegan a parecernos "triviales". Aún más, a veces la historia contribuye a cuestionar ideas bien establecidas, especialmente cuando conocemos las discusiones que las mismas han causado y las distintas alternativas que entonces se propusieron. Por todas esas razones, la historia es una herramienta utilísima en la educación, ya que nos ayuda a completar nuestra comprensión de los conceptos y los resultados, a prever dificultades y evitar suposiciones ingenuas, en suma, a elaborar un mapa del conocimiento.

Adquisición del conocimiento a través de los procesos típicos del pensamiento matemático y del aprendizaje activo

La enseñanza de la Matemática requiere de los procesos didácticos que faciliten la actividad de los alumnos dentro de los contenidos de esta ciencia a partir de la exposición sistemática del profesor. No se debe ignorar que los estudiantes se encuentran bajo la acción de un proceso de “adquisición de conocimientos” por lo que **no** debemos ofrecerles un "sistema totalmente acabado" de ellos. La instrucción matemática debe dirigirse de manera que el alumno tenga ocasiones de acercarse a la rica experiencia del conocimiento, del "descubrimiento", de la "investigación". Al enfrentar a nuestros estudiantes con los problemas que engendraron las ideas que queremos transmitir, estimulamos en ellos la búsqueda autónoma, el propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas y de problemas interesantes relacionados con situaciones que surgen de modo natural.

El acercamiento inicial se puede hacer a través del intento directo de una modelización de la realidad en la que el profesor sabe que han de aparecer las estructuras matemáticas en cuestión. Se puede acudir para ello a las otras ciencias que hacen uso de las matemáticas, a circunstancias de la realidad cotidiana o bien a la presentación de juegos tratables matemáticamente, de los que en más de una ocasión a lo largo de la historia han surgido ideas matemáticas de gran profundidad. De esta manera estaríamos estimulando a los estudiantes a transformarse en el sujeto activo de su propio aprendizaje

Por supuesto que no podemos esperar que nuestros alumnos descubran en un par de semanas lo que la humanidad elaboró, tal vez, a lo largo de varios siglos de trabajo intenso de mentes muy brillantes. Pero es cierto que la búsqueda con guía, sin aniquilar el placer de descubrir, es un objetivo alcanzable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la detección de técnicas concretas, de estrategias útiles de pensamiento en el campo en cuestión y de su transmisión a los estudiantes.

El porqué de la importancia del conocimiento de la Historia de la Matemática.

La ciencia encuentra en la historia la atalaya privilegiada desde la cual explicar con total sentido su actualidad; ya que la misma muestra cómo la ciencia es, al fin y al cabo, una construcción humana y, como tal, relativa.

La Historia de la Matemática y las experiencias actuales ofrecen ejemplos variados en los cuales se prueba que la formación de conceptos y teorías completas no están vinculadas a causas externas del mundo, sino al desarrollo lógico y puro de los razonamientos matemáticos. Por ejemplo, la Trigonometría como rama independiente de la Matemática, está unida a los trabajos de la construcción de canales para la irrigación fluvial de los pueblos de la región mesopotámica y a los efectos de los trabajos en materia astronómica que durante siglos tuvo en los hombres antiguos un gran valor; así como los procesos de perfeccionamiento de los cálculos y la conformación de una teoría de los logaritmos no pueden separarse del famoso trabajo del "calculador de arena" de Arquímedes.

Se puede usar la Historia en la enseñanza de la matemática de muchas formas y con muy variados propósitos: para el perfeccionamiento didáctico del profesor, como herramienta metodológica, con un rol motivador para introducir diferentes temas o áreas del conocimiento matemático y también, porque no, para hacer más apreciables las componentes estéticas que abundan en matemáticas y no siempre resultan fáciles de visualizar.

Para el perfeccionamiento didáctico del profesor . . .

Los docentes de matemáticas sabemos que para muchos, la matemática constituye un Universo abstracto, extraño y lejano, patrimonio de unos pocos genios; un mundo alejado de la realidad de cada época, con una existencia independiente al devenir de la historia. Nada más lejos de la verdad, ya que en cualquier momento histórico las ideas matemáticas que se han desarrollado han pretendido responder a los problemas concretos de cada época.

Una visión histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. También nos proporciona una visión dinámica de la evolución de esta ciencia aproximándonos a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos y por motivaciones muy distintas, nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento, etc. ... así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras.

Por todo lo anteriormente expresado resulta evidente que un cierto nivel de conocimiento de la historia de la matemática, debe formar parte indispensable de los conocimientos del profesor de matemática de cualquier nivel; no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino principalmente porque la misma le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia en general y de la matemática en particular.

La Historia de la Matemática como elemento educativo y motivacional.
Como herramienta metodológica . . .

Si bien el valor del conocimiento histórico no consiste en tener una batería de anécdotas curiosas, para entretener a nuestros alumnos a fin de hacer un alto en el camino.. a pesar de que la Historia es realmente rica en anécdotas jugosas; tampoco debe limitarse a la manera tradicional de entender la historia que puede resumirse en preguntas del tipo:

- *¿En que año apareció la fórmula que nos permite calcular la potencia enésima de un binomio? (Cronología);*
- *¿Quien la descubrió? (Cronología y disputa de prioridades)*
- *¿Qué curiosidades o anécdotas pueden contarse de tal personaje? (anecdotario),*

ya que esta manera de concebirla pierde de vista la dimensión histórica de las cosas; y la historia da mucho más de sí y su papel es muy importante en la articulación de los conocimientos matemáticos.

Con el estudio de la Historia de la Matemática el profesor amplía el universo cultural de sus alumnos, desarrolla en ellos hábitos de lectura, perfecciona habilidades investigativas y hace acopio de un vocabulario mayor en la asignatura.

Con un rol motivador . . . .

Es obvio que si limitáramos nuestra educación matemática a una mera presentación de los resultados que componen el edificio puramente teórico que se ha desarrollado en tal intento, estaríamos prescindiendo del gran poder motivador que la modelización y las aplicaciones poseen.

Así, a través de preguntas como las siguientes: *¿ En qué problemas se originó y desarrolló cierta área de la matemática?; ¿Cuales fueron las fuerzas motrices que*

llevaron a los matemáticos a plantearse tales problemas?; ¿ Porqué el descubrimiento fue tan importante y, a la vez, tan oculto como para que sus contemporáneos no lo vislumbraran?; es posible introducir diferentes temas o áreas del conocimiento matemático. Muchos tuvimos la experiencia de cómo la utilización adecuada de aspectos históricos hace más atractivos los temas de que se habla, suministrando grandes dosis de motivación y sentido.
De ahí que la Matemática, la metodología de su enseñanza y su historia, como ciencias, se pueden valorar como conocimientos científicos enlazados en el proceso de la instrucción y la educación de los jóvenes.

Para hacer más apreciables las componentes estéticas que abundan en matemáticas . .

A inicios del siglo XIII, Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, trabajaba en un problema acerca de cómo crecería una población de conejos bajo condiciones ideales. Para simplificar las cosas, consideró que tenía una pareja de conejos jóvenes, en un campo con recursos ilimitados, sin depredadores y que todos los conejos sobrevivían. Supuso además que en cada camada nacerían dos conejos, los cuales serian nuevamente una pareja. Y que cada pareja recién nacida debía crecer durante un mes para poder reproducirse. Siguiendo estas reglas, llegó a la conclusión de que comenzando con una pareja de conejos, después de un mes tendría dos, al mes siguiente 3, luego 5 y luego 8. Cada mes se obtenía un número de parejas igual a la suma de los dos meses anteriores. El conjunto de números así obtenidos dio lugar a una sucesión, cuyos quince primeros términos son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 y 610 que le llamó la atención.
Saquemos este grupo de números del contexto del problema y lo presentemos como un objeto matemático sujeto a cierta notación caracterizada por sus propiedades y generalizaciones. Escrita de manera general nuestra sucesión tiene la forma:

$$\boldsymbol{F_1} = 1,\ \boldsymbol{F_2} = 1 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F_n} = \boldsymbol{F_{n-1}} + \boldsymbol{F_{n-2}}$$

Fibonacci dedicó un capítulo de uno de sus libros a esta sucesión, pero no se preocupó en buscar ejemplos en la naturaleza que se comportaran de igual manera. De hecho hay especies que crecen tal y como supuso Fibonacci. Bajo condiciones normales algunas especies de palomas ponen dos huevos, de los cuales, salvo excepciones, nacen siempre un macho y una hembra, además, en cautiverio, la pareja de pichones que nace forma una pareja al crecer. El tiempo de incubación es de dos semanas y los padres cuidan de los pichones por otras dos, mes después del cual vuelven a empollar. Esto sin duda se ajusta más al ejemplo anterior, y si ninguna paloma muere, la población crecería según la sucesión de Fibonacci, aumentando un término cada dos meses.

Analicemos ahora una sucesión particular, la representaremos con la letra $\boldsymbol{R}$ y su definición explícita está dada por: $\boldsymbol{R_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, lo cual significa que los términos de esta sucesión están formados por la razón entre dos términos sucesivos de la Sucesión de Fibonacci. Sus primeros valores son:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\boldsymbol{F_n}$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$\boldsymbol{R_n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$	$\frac{144}{89}$	$\frac{233}{144}$	

Si obtenemos la expansión decimal de cada una de estas razones, observamos lo siguiente:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R_n	1	2	1.5	1.6667	1.6	1.625	1.6158	1.61905	1.61765	1.61818	1.61798

Estas expansiones decimales empiezan rápidamente a parecerse mucho entre sí; a medida que tomamos el valor decimal para términos R_n cada vez más lejanos (valores mayores de *n*), por ejemplo para R_{98} y R_{99}, sus valores son prácticamente iguales pues tienen en común, además de su parte entera, ***¡los primeros 39 lugares de su expansión decimal !***

Lo anterior nos permite hacer énfasis en uno de los más sorprendentes hechos de los números de Fibonacci; conforme avanzamos en la sucesión de Fibonacci, las razones entre términos consecutivos se acercan más y más a un número específico. Este número se denota mediante la letra griega ϕ y como hemos visto, aproximando su valor con tres cifras decimales es: 1.618. El número ϕ ha jugado un importante papel en el arte, se le conoce como **la razón dorada,**. posiblemente es el más notable después de π. Es tan notable que tiene su propio nombre: ϕ(Fi); posiblemente en honor a Fidias quien consistentemente la usó para obtener las mejores proporciones en sus esculturas y en los frisos del Partenón, así como en el Partenón mismo.

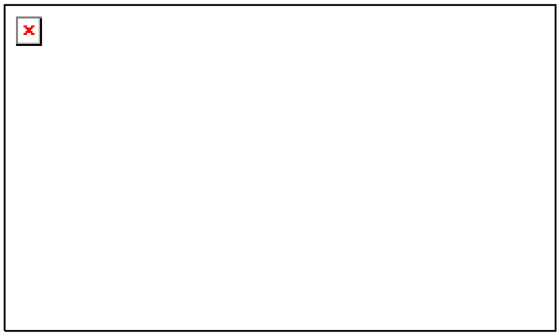
Se pueden encontrar rastros de él, tanto en las pirámides de Egipto como el edificio de las Naciones Unidas de New York. También aparece en las estructuras básicas de las sonatas de Beethoven, así como en los trabajos de Debussy y Schubert. Stradivarius lo usaba para calcular la ubicación exacta de los oídos o efes en la construcción de sus famosos violines. La estrella de cinco puntas o pentáculo, determinada por cinco líneas, se divide automáticamente en segmentos iguales a la *Divina Proporción*. Leonardo da Vinci lo usó en el hombre de Vitrubio, desnudo masculino, llamado así en honor a M. Vitrubio que utilizó la sección dorada o número de oro en su obra De Arquitecture.

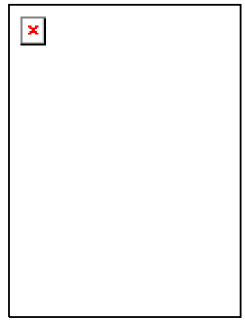
A pesar de que la teoría de los números es considerada la más inútil de las ramas de la Matemática, existe una correspondencia notable en el hecho de que los números de la serie de Fibonacci y la espiral logarítmica ocurran frecuentemente en la naturaleza. El ejemplo más notorio es la filotaxia (disposición que tiene las hojas alrededor de un tallo), espiral de ciertas plantas y se refiere a la ordenación de sus hojas de manera helicoidal como consecuencia del desarrollo de las mismas que brotan una a una y crecen donde el espacio disponible entre ellas es mayor. La filotaxia se representa por una fracción en la cual el numerador es el número de vueltas alrededor del tallo y el denominador el número de hojas, ramas o espinas en ese recorrido. Lo asombroso, es que en todos los casos estos números son términos de las serie de Fibonacci. Además, el número de pétalos en ciertas flores suele ser miembro de la serie: lila (3), ranúnculo (5), espuela (8), caléndula (13), aster (21) y varios tipos de margaritas (34, 55, 89). La espiral logarítmica se encuentra también, en la concha que construye a medida que va creciendo el caracol nautilus o los retorcidos cuernos de algunos animales.

Los números de Fibonacci son ejemplos perfectos de suceciones recurrentes o conjuntos recursivos, aquellos que a partir de dos elementos y gracias a una regla recursiva, se obtiene un conjunto infinito de números.

Sobre la espiral logarítmica

Sus lados tienen medidas tales, que al establecer la razón entre ellas, resultan números muy próximos a la razón dorada.





Caracol nautilius

CONCLUSIONES

La crisis de los fundamentos de principio de siglo empujó al matemático hacia el formalismo y el énfasis sobre el rigor, dejando de lado la intuición en la construcción de su ciencia. El haber adoptado este criterio para la enseñanza de las matemáticas tuvo, en general malas consecuencias y trajo como resultado que en la actualidad, la enseñanza de la misma se efectúe a través de una transmisión casi dogmática Es por esto que al adoptar el enfoque histórico se estaría dando un gran avance, al proporcionar a la estructura afectiva del alumno el estado de motivación e interés propicio para el aprendizaje.

Si logramos establecer un lazo entre nuestros alumnos y la época y el personaje relacionado, con los conceptos estudiados, si los alumnos conocieran la evolución de los conceptos aprendidos en clase, si conocieran las motivaciones y las dudas que experimentaron los sabios de aquel entonces quizá podrían sentir un poco como propio el concepto o idea que deben aprender..

Si con este tipo de presentaciones pudiéramos despertar más interés en nuestros estudiantes, por descubrir, descifrar y reproducir el maravilloso mundo que nos rodea, usando los conocimientos matemáticos que estén a su alcance, ellos se sentirían asombrados y atónitos y nosotros, nos daríamos cuenta por que elegimos hacer docencia.

La historia de la matemática nos pone frente a una gran aventura del pensamiento, una gran aventura humana. Vale la pena que la cultivemos.

BIBLIOGRAFÍA

Kasner, E. y Newman, J. (1995) *Matemática e Imaginación*- Hyspamérica Ediciones Argentinas – S.A.

Masini, G. (1980) - *El Romance de los Números*- Printer Industria Gráfica S.A.- España
Rey, Abel-*El apogeo de la Ciencia Técnica Griega* -1ª Edic. Especial –UTEHA

De Guzmán, M. (1996)-*El pensamiento del matemático en la educación matemática*-Conferencia en el octavo Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8 (Sevilla 1996)

Navarro, J. (1963)- *La Nueva Matemática* -Salvat Editores –S.A.- Barcelona
T. S. Kuhn, "La estructura de las revoluciones científicas"-México 1975 – FCE

EVALUACIÓN DEL ASPECTO PROPEDÉUTICO DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN EL CICLO MEDIO

Virginia Bernardi[1]. Horacio A. Caraballo[1]. Cecilia Z. González[2]. Leticia Lapasta[1]. Marcela Lopez[1]

1. Colegio Nacional "Rafael Hernández". Universidad Nacional de La Plata. Argentina.
2. Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

horacio@netverk.com.ar

Campo de investigación: Evaluación del aprendizaje matemático; Nivel educativo: Medio

Resumen

En este trabajo se muestra la implementación, los resultados y las conclusiones de una prueba piloto para evaluar el valor propedéutico del aprendizaje matemático de todo el ciclo medio, teniendo en cuenta los requerimientos del ingreso universitario.

Introducción

El Colegio Nacional "Rafael Hernández" de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) es una escuela de enseñanza media que comprende una matricula de 1600 alumnos (12 a 17 años de edad) que depende directamente de la presidencia de la universidad. Está orientada a la investigación, desarrollo de experiencias pedagógicas innovadoras y a la transferencia educativa.

El propósito general de la actividad que se describe en este trabajo fue evaluar el rendimiento de los alumnos del 3er. año del ciclo superior en matemática, desde un punto de vista propedéutico tomando como referencia los requisitos mínimos exigidos para emprender los estudios universitarios.

Se utilizó como herramienta la prueba de ingreso a la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales (FCAyF) de la UNLP. En general las pruebas de ingreso de matemática a las distintas facultades de nuestra universidad son similares e involucran la mayoría de los temas desarrollados durante la educación media.

Dicha prueba se tomó a todos los alumnos del último año, en total 251, de manera simultánea el día 12 de octubre de 2004.

Los alumnos fueron notificados de esta evaluación con muy poca anticipación, menos de una semana, con el propósito de indagar a modo diagnóstico, los saberes específicos adquiridos. De esta manera intentamos estimar el remanente cognitivo producto del aprendizaje matemático del ciclo completo con la limitación evidente que impone el tipo examen elegido. No contemplamos los aspectos de la aplicación y la integración de distintos conceptos a la resolución o modelización de situaciones complejas que se deja para otra etapa de esta investigación.

Articulación

Se establecieron contactos con la cátedra de Matemática de la FCAyF, que proporcionó material y algunos datos estadísticos que se utilizaron como comparación.

El objetivo primordial del ingreso a la FCAyF es actualizar y afianzar algunos conocimientos que ya fueron adquiridos por el alumno en la escuela secundaria. Es necesaria esta nivelación para garantizar un conjunto de saberes y competencias mínimo que permitan el correcto desarrollo de los cursos de Matemática del primer año.

En particular la facultad busca que los alumnos: operen sin dificultad en los distintos conjuntos numéricos, puedan operar con polinomios y factorear expresiones algebraicas, resuelvan ecuaciones y sistemas de ecuaciones y que puedan utilizar este formalismo para plantear y resolver problemas, manejen las funciones trigonométricas y que a través de la resolución de triángulos puedan abordar problemas geométricos concretos, manejen las funciones exponenciales y logarítmicas. También se persigue como objetivo general el valorar la adquisición de saberes matemáticos para interpretar modelar y resolver situaciones concretas.
El material que aportó la FCAyF consistió en uno de sus exámenes y la metodología para la corrección y la devolución. Con referencia a esto último, la corrección y la devolución del examen nos parece que es superadora respecto de las pruebas de opciones múltiples.

El examen

A continuación se muestran los ejercicios y la tabla de resultados múltiples del examen utilizado. Por motivos de espacio y conveniencia se han suprimido el encabezado y las instrucciones del principio y se han comprimido un poco los ejercicios. Este examen consiste en veinte ejercicios muy simples que deben ser resueltos en un plazo de dos horas.

Dados los polinomios: $P_1 = 2x^3 – 5x + 2$ $P_2 = x – 3$ $P_3 = x^2 + 3x +6$
(1) Indicar el **cociente** de la división P_1 / P_2 **(2)** Indicar el **resto** de la división P_1 / P_3
(3) Factorear: $3x^3 + 18x^2 + 27x$ **(4)** Factorear: $4x^3 – 36x$
(5) Factorear y simplificar: $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x}\cdot\frac{x^3-4x}{x+2}$
(6) Hallar la ecuación de la recta (**y = mx + b**) que pasa por los puntos: (1, 3) ; (2, 5).
(7) Hallar el punto de intersección $\mathbf{x_1}$ $\mathbf{y_1}$ de las rectas: $y + 3x = 19$ $2y = 4x – 12$
(8) La ecuación: $(4d + 2)(z + 1) + 2z = 2d$, tiene por solución $z = – 2$. ¿Cuál es el valor de **d**? **(9)** El perímetro de un rectángulo es 26 unidades. El largo mide 5 unidades más que el ancho. Calcular el largo $\mathbf{x_1}$ y el ancho $\mathbf{x_2}$. **(10)** Indicar el valor de $\mathbf{x_1}$ que satisfaga la ecuación: $\frac{1}{8}(32x +16) –28 = 2 [-\frac{1}{4}(8x – 16) + 3]$
Indicar el valor de $\mathbf{x_1}$ que es solución de la ecuación:
(11) $\log_3(– 4x + 5) = 2^3 – 6$ **(12)** $64^{4x – 1} – 16 = 0$ **(13)** $\log_5(x + 24) – \log_5 x = \log_3 9$
Indicar los valores $\mathbf{x_1}$ $\mathbf{x_2}$ que son soluciones de la ecuación:
(14) $2x^2 – 5x = x^2 – 3x$ **(15)** $x^2 + 4x – 10 = 2x + 5$
(16) Calcular cuanto mide la diagonal, **d** , de un rectángulo cuyos lados miden 3 y 7 unidades, tomar dos decimales. Criterio de redondeo: si el dígito de las milésimas es mayor o igual a 5 el dígito de las centésimas se incrementa en 1; si el dígito de las milésimas es menor a 5 el dígito de las centésimas no cambia. **(17)** Indicar cuanto mide la hipotenusa, **d** , de un triángulo rectángulo si uno de sus ángulos es de 38º y el cateto opuesto a este ángulo mide 17 unidades. Igual criterio de redondeo que en el ejercicio anterior. **(18)** Calcular cuanto mide el cateto opuesto, **d** , al ángulo de 40º en un triángulo rectángulo si la hipotenusa mide 23 unidades. Igual criterio de redondeo que en el ejercicio (16).

(19) Indicar la medida de la altura, **d** , de un poste vertical si su sombra es de 12 unidades cuando el ángulo de elevación del sol sobre la horizontal es de 27º. Igual criterio de redondeo que el ejercicio (16).

(20) En un triángulo rectángulo, calcular el ángulo, , opuesto al cateto que mide 32 unidades si el cateto adyacente mide 58 unidades. Expresar el ángulo en grados y minutos, redondeando del siguiente modo: si los segundos son 30 o mas incrementar 1 minuto; si los segundos son menos que 30 dejar los minutos como están.

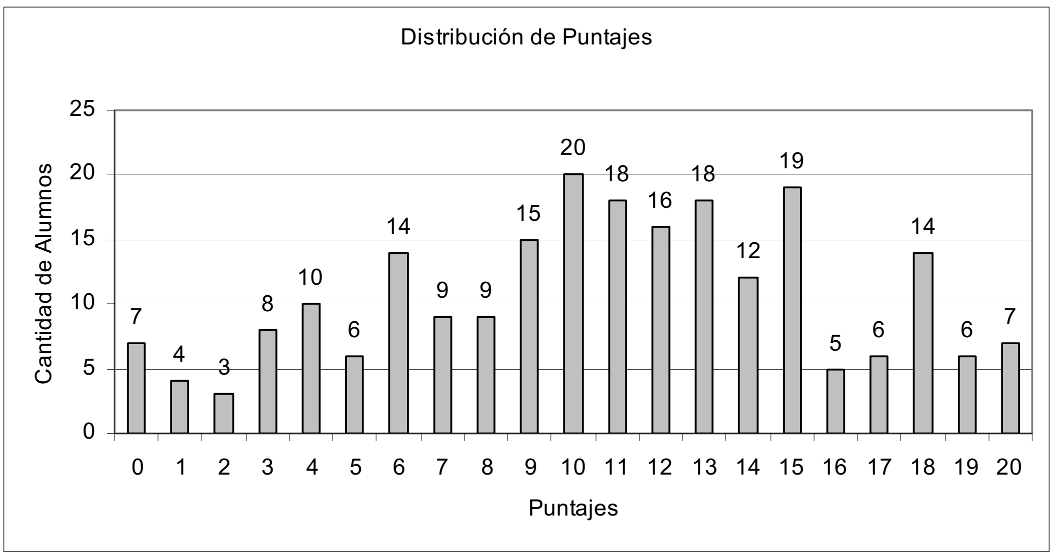
Respuesta	**Nº**	Respuesta	**Nº**	Respuesta	**Nº**	Respuesta	**Nº**	Respuesta	**Nº**
$(x+2)^2$		$2x^2+6x+13$		$d = 7$		$y = 6x + 8$		$x+8$	
$(x-3)(x+3)$		$x_1= -5$ $x_2= 4$		$x+38$		$3(x+3)^2$		□= 66º 32´	
$3(x+4)^2$		□= 28º 53´		$(x-1)(x+3)$		$2x^3+8x+11$		$x_1=3$ $y_1= 3$	
$x_1=5$ $y_1= 4$		$x_1=9$ $x_2= 4$		$d = -1$		$3x(x+3)^2$		$x_1 = 5$	
$2x^2+6x+1$		$y = 6x + 1$		$x_1=2$ $y_1= 9$		$y = 2x + 1$		$(x+7)^2$	
$y = 2x + 6$		$(x-2)(x+2)$		$22x^2+6x+1$		$x_1 = 3/14$		$x_1 = 1$	
$d = 138$		$x_1 = 3$		$x_1=0$ $x_2=2$		$d = 27{,}61$		$x_1 = 5/12$	
$x_1=3$ $x_2= -5$		□= 26º 22´		$x_1 = 32$		$x_1 = -1$		$y = 2x + 12$	
$d = 6{,}41$		$x_1=10$ $x_2=6$		$x_1=8$ $y_1=14$		$x_1=9$ $x_2= -2$		$2x+2$	
□= 26º 52´		$x_1=7$ $y_1= 3$		$d = 7{,}62$		□= 39º 58´		$d = 6{,}11$	
$d = 38$		$2x+57$		$d = 14{,}78$		$x_1=1$ $x_2= -9$		$x_1 = 4$	

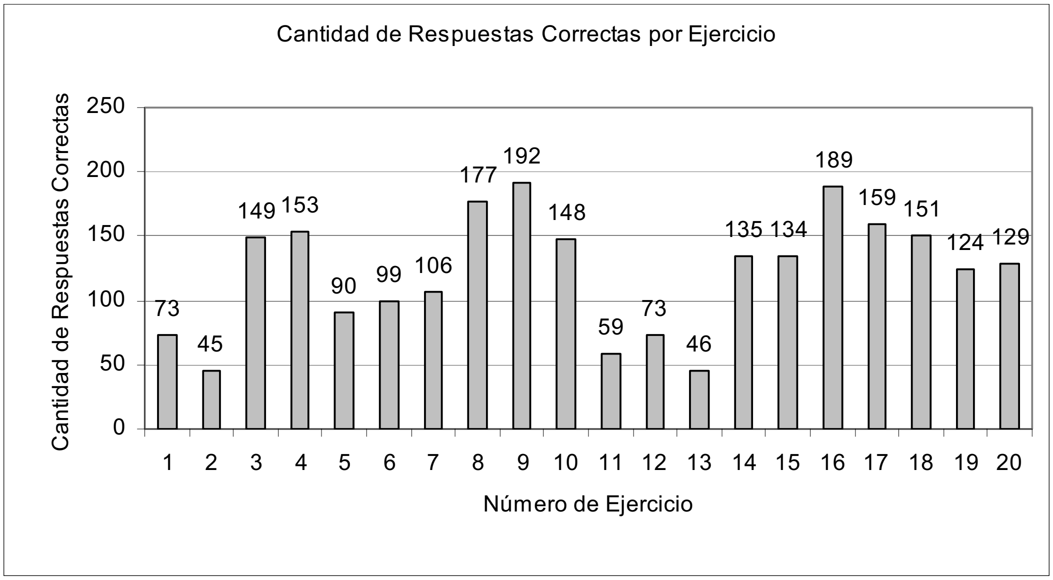
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

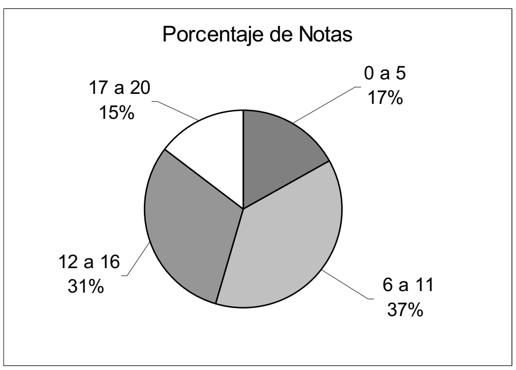
En la tabla de resultados se buscan las respuestas y coloca a la derecha de cada una, en la columna **Nº** el número de ejercicio correspondiente. No se pueden repetir números en la tabla. Las veinte respuestas correctas figuran en la tabla. Para corregir se coloca una máscara sobre la tabla que descubre los resultados correctos, los aciertos y errores se indican con unos y ceros, respectivamente, en la tabla de dos filas que sigue. La nota es simplemente la suma de la grilla. Los alumnos deben entregar todas las hojas en las que trabajan, esto permite dos cosas: la primera es la devolución del examen, esto es, luego de publicados los resultados se pueden consultar los errores cometidos con un docente encargado; la segunda es el control de los procesos de resolución de algunos ejercicios que se deseen analizar.

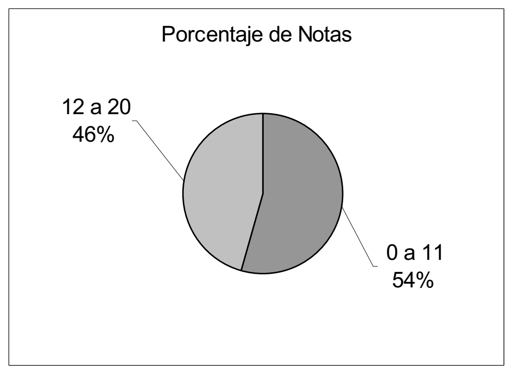
Resultados

Se resumen los resultados mostrando los gráficos de distribución de puntaje, cantidad de respuestas correctas por ejercicio y de "aprobados", las comillas obedecen a que en nuestra prueba la nota no se tuvo en cuenta para ningún tipo de acreditación, los doce puntos sobre veinte son el requisito de la facultad para aprobar a sus ingresantes.
Respecto de la distribución de las notas, se cumplieron las expectativas de obtener lo que consideramos un buen resultado teniendo en cuenta que los alumnos no se prepararon para rendir el examen, no fue obligatorio y la nota no tenía ningún valor administrativo.
La cantidad de respuestas correctas por ejercicio debe leerse teniendo en cuenta que la numeración de los ejercicios se corresponde casi por completo con el orden cronológico en el que los alumnos aprendieron los temas, llama la atención el bajo rendimiento en la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.









Los últimos cuatro ejercicios tuvieron un rendimiento menor al esperado teniendo en cuenta que, si bien la resolución de triángulos era de dos años atrás, el estudio de las funciones trigonométricas era reciente.
Los resultados obtenidos se compararon de diversos modos, por ejemplo se contrastaron las notas con la elección de las carreras que los alumnos habían manifestado en una encuesta previa. Se comparó también el desempeño de los alumnos que habían tomado algún curso optativo de matemática.

Conclusiones

Desde el punto de vista docente esta experiencia permitió la reflexión sobre la propia práctica, el diseño de contenidos, la elección de los mismos y se realizó en el marco de un proceso de articulación con las unidades académicas superiores, para luego poder tomar decisiones que favorezcan el futuro desempeño de los alumnos.
Para los alumnos la pequeña conmoción que se creó fue tomada como desafío y les sirvió para tener una medida de logros y falencias en general.
Cabe destacar la colaboración y el compromiso de los alumnos, de los profesores del último año de matemática y de los ayudantes del departamento de Ciencias Exactas que fueron los actores centrales de esta experiencia.

BIBLIOGRAFÍA

Angulo, J. (1995). Calidad educativa, calidad docente y gestión en Frigerio, De aquí y de allá: textos sobre la institución educativa y su dirección. Kapelusz, Buenos Aires.

Caraballo, H. y González, C. (2000). Proyecto de Articulación. Matemática Ingreso 2000. Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. En IX Encuentro Nacional – I Internacional Sobre Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería. Facultad Regional Concepción del Uruguay UTN, Entre Ríos, República Argentina.

Perez, R y Martinez, L. (1992), Evaluación de centros y calidad educativa. Madrid, Ed. Cincel.

EL CURRICULUM OCULTO DE UNA EXPERIENCIA AULICA

Jacobo de Costilla, Mirta Graciela.
Facultad de Ciencias Económicas (FCE). Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Argentina.
mcostilla@herrera.unt.edu.ar

Campo de Investigación: "Incorporación de distintas perspectivas en la Enseñanza de la Matemática"; Nivel Educativo: Superior

RESUMEN

En el año 2004, en una de las comisiones de Trabajos Prácticos de la asignatura Algebra de la FCE de la UNT, elegida al azar, se llevó a cabo una experiencia como parte de un trabajo de investigación. Los resultados obtenidos no sólo fueron satisfactorios a nivel rendimiento, sino muy ricos en vivencias. Por ello, en este trabajo se muestran los aspectos relevantes que conformaron el ***curriculum oculto*** de dicha experiencia, es decir, "el *curriculum* latente o tácito, no explicitado por el sistema o institución, que comprende el conjunto de aprendizajes no previstos que de forma asistemática y no intencional tienen lugar en el medio escolar" (Palladino, E., 1998). Tenerlo en cuenta significa aprovechar toda la riqueza del proceso enseñanza–aprendizaje, que lleva a valorar y disfrutar cada vez más la tarea docente.

INTRODUCCIÓN

Los docentes universitarios conocemos muy bien la situación que presentan los estudiantes de primer año. Particularmente en Matemática se pueden mencionar: escasa retención de los conocimientos adquiridos, débil desarrollo de las habilidades necesarias y falta de hábitos de estudio, lo cual nos habla de un bajo grado de reflexión, de independencia y de generalización. A esto se suma el período de transición por el cual pasan los alumnos al ingresar a la Universidad, visible en su comportamiento desde que se inscriben en la carrera de su elección. Terminaron el ciclo secundario pero la mayoría se comporta como si continuara en él. Tienen la inmadurez y al mismo tiempo la frescura de la juventud. Tienen muchos temores y al mismo tiempo muchas ganas de afrontar este nuevo reto que les presenta la vida. La FCE se enfrenta cada año no sólo con estas situaciones, sino con el problema de la masividad, ya que es una de las Facultades con más alto número de alumnos inscriptos. Álgebra es una de las asignaturas de primer año y una de las dos materias precorrelativa del resto; por ende, todo inscripto es alumno de la misma. Un aporte, que sumará al de otros tantos colegas, es una experiencia docente realizada en el año 2004, como parte de un trabajo de investigación. La misma consistió en un cambio de metodología reflejada en la instrumentación de un sistema de tareas sobre la Enseñanza Problémica para la asignatura Algebra. Esto trajo aparejado una particular manera de cursado que influyó favorablemente en la relación entre los alumnos, entre los alumnos y la docente a cargo de la experiencia, y entre los alumnos y la institución. Este trabajo muestra los aspectos relevantes correspondientes al *curriculum oculto* de dicha experiencia, al cual "lo integran un conjunto de mensajes implícitos en las formas de transmitir el curriculum explícito, en la organización misma de las actividades de enseñanza y en las relaciones institucionales que sustentan el proceso escolar" (Elsie Rockwell, 1981). Conocer el *curriculum* oculto implica abordar centralmente el proceso escolar como un conjunto de prácticas institucionalizadas históricamente, dentro del cual el *curriculum* manifiesto constituye sólo un nivel normativo.

IMPORTANCIA DEL TRABAJO

La experiencia de donde se desprende este trabajo se realizó en el primer trimestre del año 2004, mediante un cambio de metodología que consistió en pasar de la modalidad de clases teóricas y clases prácticas, a **clases teórico-prácticas**, y de una enseñanza tradicional a la enseñanza problémica, no implementada comúnmente por docentes universitarios. Para ello, fue necesario todo un trabajo previo realizado durante los meses de Diciembre de 2003 y Enero de 2004. Es así que entre el 16 de Febrero y el 7 de Mayo de 2004, un grupo de alumnos elegidos al azar, compartió una experiencia relacional extraordinaria, que dio frutos muy importantes. Se pretende mostrar en este trabajo, la riqueza de las situaciones recogidas en dicha experiencia, algunas de las cuales y muchas otras se presentan seguramente en nuestro diario accionar como docentes y que suelen perderse de vista puesto que, al no formar parte de una planificación directa, sus resultados no son evaluados ni reconocidos.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para el tratamiento metodológico de la experiencia se tomaron como sustento tanto los métodos y categorías de la Enseñanza Problémica como las Teorías Cognitivas del aprendizaje; para este trabajo, en particular, se consideraron, además, los tratados sobre *Curriculum* en su aspecto de *curriculum oculto.*

De acuerdo a la información existente, la **Enseñanza Problémica** es uno de los modelos de aprendizaje con mayor tendencia a ser utilizado en todos los niveles educacionales y en diferentes asignaturas, sobre todo en países de América Latina.

Las **categorías** fundamentales de la enseñanza problémica **son**: la situación problémica, el problema docente, las tareas y preguntas problémicas y lo problémico. Las categorías de la enseñanza problémica, en el plano didáctico, cobran vida mediante los **métodos problémicos** de enseñanza. Ellos son: la exposición problémica, la búsqueda parcial, la conversación heurística y el método investigativo.

En cuanto a las **Teorías cognitivas** del aprendizaje, en especial se tuvieron en cuenta las Teorías de la Asimilación, de la Actividad y de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales.

Particularmente, para este trabajo se consideraron los distintos tratados sobre ***curriculum oculto.*** El término *curriculum* proviene de la palabra latina *currere*, que hace referencia a carrera, a un recorrido que debe ser realizado y, por derivación, a su representación o presentación. La escolaridad es un recorrido para los alumnos y el *curriculum* es su relleno, su contenido, la guía de su progreso por la escolaridad. La elaboración del *curriculum* supone un proceso de toma de decisiones que deben ser justificadas y también tener argumentos válidos en relación con las finalidades de la educación, con la intención de asegurar coherencia entre éstas y el diseño. Las mencionadas decisiones se refieren a qué, cuándo y cómo enseñar, y qué, cómo y cuándo evaluar. La sistematización de problemas y soluciones a que dan lugar esos interrogantes son preocupaciones didácticas, organizativas, sociales, políticas y filosóficas. El *curriculum* es, por lo tanto, un ámbito de interacción donde se entrecruzan procesos, agentes y ámbitos diversos. Sólo en este marco es posible captar su valor real. Para clarificar el *curriculum real* que recibe el alumno, resulta fundamental considerar que la realidad no se reduce a lo que parece evidente de forma más inmediata, sino que es preciso escudriñar en ella, descubrir lo que no es manifiesto. La enseñanza no se reduce a lo que los programas oficiales o lo mismos profesores dicen que quieren transmitir. Una cosa es lo que a los profesores se les dice que tienen que enseñar, otra es lo que ellos creen o dicen que enseñan y otra distinta lo que los alumnos aprenden. ¿En cuál de éstos encontramos una imagen más precisa de lo que es la realidad? Los tres aportan algo. Esta forma de proceder está de acuerdo con lo que los didactas definen como “transposición didáctica”, es decir, transitar desde el saber sabio al saber enseñado y, de éste, al saber aprendido. El resultado que se obtenga de las dos primeras imágenes forma el *curriculum manifiesto*. Pero la experiencia de aprendizaje del alumno ni se reduce, ni se ajusta, a la suma de ambas versiones. Al lado del *curriculum* que se dice estar desarrollando, expresando ideales e intenciones, existe otro al que se denomina ***oculto***. En la experiencia práctica que tienen los alumnos se mezclan o interaccionan ambos; es en esa experiencia donde encontraremos el *curriculum real* (Gimeno Sacristán-Pérez Gómez, 1994). La expresión *curriculum oculto* fue utilizada por primera vez por Philip W. Jackson en 1968, para referirse a “aquellos componentes, dimensiones o contenidos como la transmisión de valores y de normas, formación de actitudes, prácticas de convivencia, etc., esenciales para el funcionamiento de la escuela” (E. Palladino, 1998). Eisner, Elliot W. define al *curriculum oculto* o implícito como “ese conjunto penetrante y omnipresente de expectativas y reglas que definen la escolarización como un sistema cultural que por sí mismo enseña lecciones importantes” (Gimeno Sacristán - Pérez Gómez, 1994). Teniendo en cuenta los comentarios que realizan los docentes acerca de su propio trabajo como profesionales y a todo lo que sucede en el interior de las aulas, P. Jackson en su obra “La vida en las aulas” (1975) advierte que la enseñanza es una actividad más compleja de lo que la mayoría de las personas piensan. E. Palladino (1998) considera que habría que considerar las peculiaridades de lo que sucede en el aula, algunas de las cuales son: * la *multidimensionalidad*: en el aula suceden gran cantidad de acontecimientos; * la *simultaneidad*: en el aula suceden muchas cosas al mismo tiempo; * la *inmediatez*: las acciones de los integrantes de una clase se desarrollan a un ritmo muy rápido; * la *imprevisibilidad*: en una clase suceden acontecimientos no previstos; * la *publicidad*: la clase es pública; todo lo que sucede en la misma es publicitado; * la *historia*: una clase implica la acumulación de experiencias, rutinas, normas, etc. El alumno, mientras está en situación de escolarización, tiene experiencias muy diversas: aprende conocimientos, habilidades, comportamientos diversos, a sentir, a adaptarse y sobrevivir, a pensar, a valorar, a respetar, etc. En el ambiente escolar, las relaciones sociales, la distribución del tiempo y del espacio, las relaciones de autoridad, el uso de premios y castigos, el clima de evaluación, constituyen todo un *curriculum oculto* que el alumno debe superar si quiere avanzar con éxito. El *curriculum oculto* de las prácticas escolares tiene una dimensión socio-política innegable que se relaciona con las funciones de socialización que tiene la escuela dentro de la sociedad. Hábitos de orden, puntualidad, corrección, respeto, competición-colaboración, docilidad y conformidad son, entre otros, aspectos inculcados consciente o inconscientemente por la escuela. Los mensajes que se derivan del *curriculum oculto* no son ajenos a los conflictos sociales: los papeles de los sexos en la cultura, el ejercicio de la autoridad y del poder, los mecanismos de distribución de la riqueza, las posiciones de grupos sociales, políticos, raciales, religiosos, etc. Las obligaciones que el *curriculum oculto* impone a los alumnos son tan importantes o más para ellos, para su supervivencia y éxito en la escuela, que las del programa o explícito, como lo son también para los mismos profesores. Por ello, el *curriculum oculto* se debe analizar desde una doble perspectiva: los cambios internos en los alumnos y el efecto social, político y económico. Comprender la enseñanza, su planificación, los contenidos, la interacción docente-alumnos, etc., requiere plantearse todos los elementos en la perspectiva de los dos tipos de *curriculum*. Al abordar de esta manera el proceso escolar se generan nuevas preguntas de investigación. En este caso, el interés no fue evaluar la realidad escolar en función de parámetros normativos, sino más bien analizar y reconstruir la lógica propia del proceso, que, entre otras cosas, funciona como filtro selectivo frente a las disposiciones oficiales.

EL CURRICULUM OCULTO EN LA EXPERIENCIA REALIZADA

En la única comisión donde se realizó la experiencia se dictaron clases teórico-prácticas, de modo que los alumnos de la misma asistieron **todos los días** a dichas clases, obviamente, con los mismos compañeros y con la misma docente; esto significó un total de 56 clases de aproximadamente **2 1/2 hs** cada una. En esta comisión no se admitieron alumnos recursantes.
Finalizado el trimestre, finalizó la experiencia. Al analizar los resultados de la misma, empezaron a surgir aspectos que nada tenían que ver con los objetivos propuestos, es decir, con el *curriculum manifiesto*. Dichos aspectos fueron surgiendo del análisis del Diario de clases (donde se consignaron las experiencias de cada una de las clases), de las respuestas a preguntas abiertas realizadas a los alumnos en la última encuesta realezada, de los resultados de una técnica empleada: **PNI** (**P**ositivo, **N**egativo, **I**nteresante) y de la experiencia en las clases de la docente a cargo de dicha comisión. Todo esto significó una riqueza que iba mucho más allá del rendimiento académico evaluado a través de los exámenes parciales, y que tenía que ver con el *curriculum oculto* de la experiencia, algunos de cuyos aspectos son los siguientes:

VALORES LOGRADOS

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, nada es aséptico o neutral. No existe la técnica al margen de los valores, sino que siempre implica la opción ante dilemas. P. Jackson al referirse al *curriculum oculto*, mencionaba, entre otros componentes, la transmisión de valores y de normas y la formación de actitudes en las personas que intervienen en el proceso educativo, siendo necesario e interesante analizar los cambios internos que se producen en ellas (E. Palladino, 1998).

❖ Al respecto, podemos mencionar algunos de los **valores logrados por los alumnos**, **desde el punto de vista personal:**

- Uno de ellos es la **capacidad para evaluar el dictado de las clases**, lo cual nos habla de las expectativas con las que entraron a la Facultad, de lo que esperaban o no, de lo que deseaban o no. Realmente, los alumnos son "jueces naturales", implacables a la hora de resaltar tanto lo positivo como lo negativo de las situaciones que les toca vivir.
- Todo el potencial personal que se iban descubriendo a lo largo de las clases, logró que adquirieran **seguridad en sí mismos** y que supieran reaccionar ante las situaciones que se les presentaba en clase, defendiendo posturas y criterios.
- Por otra parte, al aprender a razonar de otra manera y al tener que poner en juego todos sus talentos, fueron valorando y evaluando sus propias capacidades, logrando así una visión más amplia que los llevó a realizar un **autoanálisis** y, por ende, una **autoevaluación** bastante certera, tanto personal como grupal.
- Ante la necesidad de aprobar la asignatura y al concluir, después de su análisis personal, que debían romper la inercia que traían del secundario, que todo lo que se propongan lo pueden lograr sólo con esfuerzo, **lograron** descubrir **pautas para estudiar más y mejor.** Así, fueron adquiriendo hábitos de orden y de estudio, y aprendiendo a distribuir su tiempo de la manera más conveniente.

- El asistir a clases despertó o acrecentó en los alumnos la preocupación, la necesidad o el deseo de una formación intelectual acorde a la meta que se propusieron al inscribirse en la Facultad, lo cual los llevó a considerar al estudio no como un sacrificio sino como una inversión ya que redundará en su propio beneficio. Esta situación influenció en varios aspectos de su vida, no sólo a nivel estudio, de modo que **lograron** una **relación** más estrecha **entre la vida universitaria y la extra-universitaria.**

❖ Por supuesto, no sólo los alumnos resultaron favorecidos, sino también **la docente,** que se enriqueció al establecer contacto con los jóvenes, en un proceso de retroalimentación en donde también **logra valores** sin habérselo propuesto, como resultado de toda una experiencia de vida, de la formación permanente y del amor hacia la tarea desempeñada.

- El **clima de confianza** logrado en las clases es uno de ellos, lo cual permitió disfrutar de las clases y sentirse cómodo en ellas, dejando de lado, tanto alumnos como docente, el temor o las prevenciones iniciales, propio del inicio de una nueva etapa.
- Esto también llevó a una **valoración de la docente por parte de los alumnos**. Se llega a descubrir que el alumno es el más exigente de los evaluadores que tiene un docente y que espera de sus mayores (docentes o no), una serie de actitudes coherentes con lo que predican: respeto, cumplimiento de la palabra empeñada, dedicación, estudio, organización, simpatía, comprensión, puntualidad, transmisibilidad, motivación, capacidad de adaptación, humildad para reconocer cuando se equivoca, etc.

❖ También se adquirieron **valores desde el punto de vista "académico".**
Obviamente, para los alumnos no es lo mismo asistir a clases multitudinarias, en donde pocos o ninguno sabe quién es quién, que participar en una comisión donde empiezan a ser reconocidos, interpelados, identificados por sus actitudes, donde se nota su ausencia.

- A través de la nueva metodología **se lograron clases** interesantes y dinámicas, **no rutinarias,** lo cual hizo menos arduo el estudio y ayudó a mantener una atención constante.
- Por otra parte, también **se logró que el alumno superara el temor de pasar al pizarrón,** situación bastante tensionante al principio, hasta que fueron perdiendo la vergüenza y el temor al ridículo al sentirse apoyados por la docente.
- Los métodos problémicos empleados, particularmente el de búsqueda parcial, trajo aparejado el **trabajo en grupos**, situación aprovechada en varias oportunidades y que fue pasible de **evaluación por parte del alumno**, siendo éste muy crítico y reconociendo en este tipo de método tanto los aspectos positivos como los negativos.
- La metodología implementada, en sus categorías y en sus métodos, benefició también al alumno en su **capacidad de adaptación a la vida universitaria**, por las tareas que debía realizar.
- Del mismo modo, al trabajar con materiales didácticos, como diarios y revistas que ellos mismos traían, y al poder aplicar los conceptos adquiridos, empezaron a sentir el **gusto por la Matemática** y a **lograr un aprendizaje significativo** al comprender y encontrarle sentido a la materia, descubriendo el por qué de cada tema, su esencia.
- Debido a la política de la Facultad de que Algebra o Contabilidad I sean materias precorrelativas del resto, desde hace algunos años se viene dando en la FCE el fenómeno de "hacerse preparar por profesores particulares". En este caso, favorecidos por la metodología empleada, la mayoría de los alumnos **no** tuvo **necesidad de ayuda extra-áulica** (cabe aclarar que, al principio, varios asistían a profesores particulares y al cabo de un tiempo dejaron de hacerlo).

❖ Fue muy rica la experiencia a **nivel Relaciones Sociales.** Se pusieron de manifiesto en las clases las peculiaridades ya mencionadas de lo que sucede en el aula: la multidimensionalidad, la simultaneidad, la imprevisibilidad, la publicidad y la historia.

▪ La confluencia de todo esto, la metodología empleada, el trato de la docente hacia el alumno, el espacio físico adecuado y el hecho de tener clases todos los días, trajo aparejado un **alto grado de relación alumno-alumno y docente-alumno.**

▪ Por otra parte, también puede considerarse como un logro no esperado, el **proceso de "ritualización"** de la interacción docente-alumno, que, bien aprovechado, permitió marcar límites claros y una mejor organización de base del grupo (Elsie Rockwell, 1981).

RELACIÓN CON LAS DIFICULTADES

P. Jackson, en su obra ya mencionada ("La vida en las alulas"), afirma que el *curriculum oculto* tiene más estrecha relación con las dificultades del alumno que con sus éxitos, porque es ahí donde mejor se aprecian las exigencias de adaptación a los requerimientos que la institución les plantea.

▪ Entre las dificultades que enfrentaron los alumnos, se pueden mencionar las **barreras sociales y económicas,** que sobre todo, al principio, fueron motivo de prevenciones entre ellos. Era notoria la diferencia entre los alumnos en el aspecto social, económico y cultural.

▪ También fue una dificultad para los estudiantes, la **política de la Facultad** al establecer el régimen de cursado trimestral para la asignatura, el sistema de condicionalidad, etc.

▪ Las **presiones familiares** también actuaron a modo de dificultad, puesto que el alumno no procedía libremente, según su querer, su vocación, sus capacidades, sino conforme a los requerimientos de su familia.

▪ Por otra parte, los **miedos e inseguridades** de los alumnos, derivados, entre otras, de situaciones psicológicas y sociales, también influyeron negativamente en el desenvolvimiento de los mismos. Esta inseguridad también derivaba en la mayoría, de una **base matemática insuficiente** y de una **falta de hábitos de estudio** sumamente notorias.

▪ Para E. Rockwell , no hay que olvidar que uno de los contenidos más importantes en los procesos de socialización, es el entrenamiento continuo en la "lectura" o "captación" de las reglas implícitas en diferentes situaciones institucionales. Dos de los muchos dominios en los que se da este proceso de socialización es en el trato con la autoridad y la participación en el proceso de trabajo. El alumno debe comprender cómo se está definiendo cada situación a través de pistas y señas que se dan en la interacción; es así como el alumno debe **adaptarse a las reglas de juego**, lo que genera también en ellos una dificultad; éstas le indican qué es lo correcto, cómo actuar en relación a la clase y a la institución, cuáles son los límites, etc.

CONCLUSIÓN

Conocer el *curriculum oculto*, implica abordar centralmente el proceso escolar como un conjunto de relaciones y prácticas institucionalizadas históricamente, dentro del cual el *curriculum manifiesto* constituye sólo un nivel normativo. Dicho *curriculum* se integra a otro, que si bien es *oculto* desde cierta perspectiva, es el más real desde la perspectiva de quienes participan en el proceso educativo. La reconstrucción del *curriculum oculto* requiere un análisis cuidadoso del material descriptivo de lo que sucede cotidianamente en las aulas; su contenido no es evidente y se superponen , en una misma acción, varias dimensiones formativas. De ahí la importancia de reconstruir la enseñanza, no a partir de los documentos que explicitan su deber ser, sino a partir del análisis de su expresión concreta y cotidiana. Tener en cuenta el *curriculum oculto* significa aprovechar, al máximo, la riqueza del proceso enseñanza-aprendizaje que nos llevará a valorar y disfrutar cada vez más de nuestra preciosa tarea como docentes.

BIBLIOGRAFÍA:

Gimeno, J. y Pérez, A. (1994). *Comprender y transformar la Enseñanza.* S.L. Madrid: : Ediciones Morata.

Palladino, E. (1998). *Diseños Curriculares y Calidad Educativa.* Buenos Aires: Editorial Espacio.

Rockwell, E. (1981). Dimensiones Formativas de la Escolarización Primaria en México. *Dialogando*, 1-18.

Martínez, M. (1986). *Categorías, Principios y Métodos de la Enseñanza Problémica.* La Habana. Cuba.

Vigotsky, L. (1988). ***El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.*** México: Grupo Editorial Grijalbo.
Ausubel, D. y Otros (1988). *Psicología Educativa.* México: Ediciones Trillas.

Talízina, N. (1988). *Psicología de la Enseñanza (Biblioteca de Psicología Soviética).* Editorial Progreso. Moscú.

APRENDIENDO A APRENDER MATEMATICA

Andrada, Nora; Dal Bianco, Nydia; López, Julio; Torroba, María Estela
Universidad Nacional de la Pampa – Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar – nandrada@exactas.unlpam.edu.ar

Campo de Investigación: Metodologías de estudio; Nivel Educativo: Medio superior

Resumen

Comentaremos aquí la experiencia realizada con un grupo de alumnos del último curso del Nivel Medio – Polimodal, en el desarrollo del Curso - Taller "Aprendiendo a aprender Matemática". En el Taller se abordaron distintas alternativas de trabajo involucrando tipos de estrategias de aprendizaje que resultaba novedosas y no conocidas por los estudiantes.
Las estrategias aplicadas fueron: toma de notas a partir de una clase expositiva, análisis discusión y comentarios sobre ellas; lectura comprensiva de textos no matemáticos y matemáticos, con posterior análisis de contenidos, conceptos, distintos registros de representación, etc.; resolución de problemas y argumentación de las soluciones, formulación de nuevos problemas y aplicaciones a situaciones cotidianas.

Introducción

La Subcomisión de Matemática de la Comisión de Articulación entre Nivel Medio - Polimodal y Universidad, desarrolló un proyecto de trabajo con alumnos que cursaban el último año de su formación de nivel medio. Se trató del dictado del Taller "Aprendiendo a Aprender Matemática", con el objeto de trabajar con los alumnos una serie de estrategias de abordaje del aprendizaje de contenidos propios del área matemática y analizar luego si su aplicación, a la hora de concretar los estudios universitarios, muestra una mejora de rendimientos sobre los de quienes no han accedido a esta experiencia.
En segundo término se pretendió observar si el trabajo con alguna de las estrategias que se pensaron resultaban adecuadas o convenientes en su aplicación al concretar estudios universitarios, pudiendo proponerse por un lado a los docentes de nivel medio para que las empleen ya en esa etapa de formación, optimizando sus aportes al tomar contacto con ellos lo antes posible, y por otro, útiles de aplicar en grupos de alumnos numerosos donde gran parte de la tarea que implica el proceso educativo, suele quedar reservada para que sea encarada en forma personal en un esfuerzo de auto aprendizaje.
Esta Subcomisión integrada actualmente, por cuatro docentes de la Universidad Nacional de La Pampa., que prestan servicios en las Facultades de Ciencias Exactas y Naturales y en la de Ciencias Económicas y Jurídicas, con notoria antigüedad de trabajo en asignaturas de primer año de carreras universitarias (algunos en carreras propias del área y otros en materias que tienen a la Matemática como una de las áreas de conocimientos que integran su plan de estudios), han podido observar una lamentable evolución hacia rendimientos cada vez más pobres en sus alumnos.
Para no repetir la consabida generación de expresiones que trasladan y deslindan responsabilidades en uno u otro de los niveles de enseñanza involucrados en el paso de una etapa educativa a la otra, este grupo estimó conveniente intentar alguna experiencia compartida entre los dos, en la búsqueda de algunas conclusiones que, de resultar positivas, convendría socializarlas en el ámbito de la comunidad educativa, sin diferencia entre esos mencionados niveles de pertenencia de unos y otros.

Desarrollo de la propuesta

Diseñamos entonces una propuesta de trabajo que sintéticamente adopta el siguiente plan y se concreta con los procedimientos descriptos.
Seleccionamos estrategias de aprendizaje habituales como lo son la toma de notas a partir de una clase expositiva, la lectura de textos matemáticos, la lectura de textos corrientes cuyos contenidos plantean situaciones propias del área de conocimientos de la Matemática, la resolución de problemas y su argumentación y defensa de las soluciones elaboradas por los alumnos y el ejercicio del razonamiento lógico a través de planteos denominados de ingenio, abordando a través de ellas cuestiones fundamentalmente de tipo algebraico, geométrico y de transformación de expresiones en diferentes lenguajes de uso en este tipo de ciencias como son el literal, el simbólico, el gráfico y otros.
Organizamos entonces un conjunto de reuniones semanales de dos horas reloj cada una, destinando dos jornadas para trabajar con cada una de las estrategias aludidas, agregando otras dos reuniones destinadas a concretar una evaluación diagnóstica inicial del grupo de alumnos (la primera de las reuniones de la serie) y otra para realizar una evaluación diagnóstica final (luego de concretadas todas las reuniones previstas).
La prueba diagnóstica para la evaluación inicial tenía como objetivo obtener información sobre capacidades, habilidades, aptitudes y actitudes que los involucrados exteriorizan poseer o no disponer, y en el primer caso, el grado de dominio de las mismas.
En forma paralela y para evitar posibles desvíos generados por la concreción de la experiencia, en el mismo momento de formulación de la evaluación diagnóstica inicial se preparó también el instrumento que se utilizaría para concretar la evaluación diagnóstica final. Esta pretendió recoger igual información que en la inicial, para determinar si de la comparación de ambas podía generarse alguna conclusión que mostrara si los alumnos han logrado mejoras o perjuicios derivados de la toma de conciencia y ejercicio con las estrategias que se les propuso.
De todos modos, durante el desarrollo de la propuesta, se fueron realizando observaciones de los comportamientos exteriorizados y de los cambios observados en los asistentes como para determinar posibles asociaciones entre el trabajo propuesto y dichas modificaciones puestas de manifiesto por los asistentes.
Digamos a propósito de éstos, que se trabajó con un grupo de cuarenta alumnos del último año de educación Polimodal y bastante heterogéneo, desde el rendimiento previo en materias del área como de extracciones económico-sociales. En este último sentido requerimos que quienes se involucraran en el grupo de trabajo, fueran alumnos que tenían la decisión de continuar carreras universitarias que incluyen alguna asignatura de Matemática en su currícula, y por razones de seguimiento, dentro de lo posible, en la propia universidad local para permitir precisamente la obtención de ese tipo de información sobre su evolución futura.
Fue a través del Ministerio de Educación provincial que se concretó la selección de alumnos de sus establecimientos, e hicieron lo propio las autoridades universitarias del colegio secundario de su dependencia.
El curso se desarrolló bajo la metodología de Taller, o sea con participación activa de los asistentes, intercambiando entre los conductores y los integrantes del grupo, y entre ellos mismos, y aportando cada uno al ámbito de trabajo, tanto sus aciertos como sus dudas o dificultades para intentar encarar una formación en un marco cooperativo o colaboracionista y en equipo. Las dos ocasiones destinadas a evaluación diagnóstica (la inicial y la final) se concretaron con un trabajo realizado en forma individual.

En la primera reunión se propuso a los alumnos el trabajo con juegos seleccionados adecuadamente para que en la solución de los mismos debieran ponerse en juego razonamientos que les permitieran encontrar, por ejemplo estrategias ganadoras o estrategias de optimización de tiempos en la consecución del resultado del juego, o también ardides que debidamente pensados, estén destinados a inducir a posibles contrincantes en decisiones erróneas para ellos, pero acertadas para los intereses de quien las puso en práctica. Algunos de esos juegos obligaron a que se trabaje en grupos y otros a hacerlo en forma individual, pero en definitiva, todos terminaron socializando las cuestiones que resultaron ventajosas para buenos resultados en el juego o bien perjudiciales para el mismo.
Sobre el final de la reunión se intentó abstraer lo que se había realizado para llevar a los asistentes a tomar conciencia de que en realidad en esos juegos, lo que se hizo, fue poner en práctica algunas cuestiones que regularmente surgen de conceptos matemáticos que ellos mismos conocen y que probablemente no tuvieron presentes a la hora de jugar. Se les propuso luego, que en grupos o en forma individual, y como tarea extra áulica, concreten otros juegos que se les suministraron, intentando generar iguales conclusiones que las alcanzadas en la reunión tanto en cuanto a los propios juegos como en la abstracción practicada.
En la siguiente reunión se continuó el trabajo con esta estrategia de juegos, pero ahora realizando una socialización y debate de lo que ellos mismos pudieron observar con su trabajo fuera de aula, teniendo en cuenta principalmente las cuestiones vinculadas al razonamiento lógico (deductivo o inductivo) y planteando alternativas que los obligaron a reformularlos por alteración de condiciones u obligándolos a repensar, todo ello en forma compartida.
Con criterio similar al descrito para las dos primeras reuniones, se concretaron otras dos, pero en este caso destinadas a la lectura de textos de difusión corriente (propios de revistas, diarios, etc.) en los que se incluyen temas propios del área matemática que debieron conocerse o al menos obligaran al lector a interpretar para poder lograr la comprensión del artículo o texto correspondiente. En la primera de estas dos reuniones se trabajó en forma compartida la lectura y la interpretación del texto, sobre la base de una selección realizada al efecto. Se propusieron algunos planteos vinculados al texto o artículo considerado, para intentar lograr la transferencia de conocimientos a nuevas situaciones o casos. Al finalizar la reunión se hizo entrega de un segundo artículo del tipo, acompañado con una batería de cuestiones a analizar, pero para ser concretado en forma extra áulica. De este modo, la siguiente reunión se profundizó la tarea pero ahora sobre lo que los propios asistentes descubrieron y realizaron al pretender repetir la experiencia anterior compartida.
Otras dos reuniones se reservaron para la lectura de un texto netamente matemático, para lo que se seleccionó de un libro un tema que no requería más conocimientos previos que los sumamente básicos y que seguramente tenían todos los asistentes, pero que tampoco resultara tan simple como para que algunos de los asistentes fuera un repaso formal de algo que ya conocen. También en este caso se plantearon actividades para verificar la comprensión y en base a las mismas y durante la etapa de lectura, se fueron marcando cuestiones particulares propias de esta estrategia y que resultaron novedosas o al menos diferentes de cuando la misma se aplica en otras áreas del conocimiento, como podrían ser las ciencias sociales. También esta reunión se acompañó de otra en la que se trabajó con la misma estrategia y actividades similares, en base a las producciones y dificultades que los asistentes pudieron exteriorizar desde su abordaje de la lectura de otro texto matemático.

Los dos siguientes encuentros se dedicaron a la estrategia de aprendizaje conocida como "*resolución de problemas*", seguramente de interés para todos los asistentes. En esta instancia se prestó especial atención a la traducción de un lenguaje a otro, a la anticipación de posibles soluciones, a la determinación de los resultados matemáticos distinguiéndolos de los viables y también de los definitivos para el problema planteado, a la argumentación y defensa del procedimiento seguido por cada alumno, ente otras cuestiones. Esta experiencia se concretó a partir de una guía de problemas adecuadamente seleccionados para que en los mismos se pusieran en juego diferentes tipos de razonamiento, diferentes estrategias de abordaje y distintas capacidades al servicio, precisamente, del logro de las soluciones requeridas.
Como tarea extra áulica se formuló una serie adicional de problemas similares a los trabajados en forma cooperativa en la reunión. Sobre las dificultades y planteos de los asistentes, en la última de las reuniones previas a la evaluación diagnóstica final, se ampliaron comentarios sobre esta forma de trabajo.
Una primera lectura de la evaluación diagnóstica final, una simple comparación con la inicial del mismo asistente y la observación de la participación de cada uno de ellos en el transcurso del Taller, permitió concretar una primera tarea de cierre de la experiencia.
Se llevó a cabo una reunión con presencia de todos los asistentes al Taller para volcar en ella las observaciones que merecieron especial atención o cita a los fines de la experiencia y escuchar también de parte de ellos sus comentarios y conclusiones. Al finalizar este intercambio se invitó a los asistentes a que en el futuro y sobre todo en el transcurso del siguiente año, nos mantuvieran informados de sus resultados, logros y dificultades en lo que hayan definitivamente iniciado.
Una más detenida observación de toda la documentación que se ha generado en el curso y de todas las impresiones de los integrantes del equipo docente que condujo la experiencia, realimentada con las opiniones, sugerencias, pareceres y en definitiva, impresiones sobre la misma exteriorizadas por los asistentes, permitió producir un informe detallado y fundado sobre los resultados y conclusiones de la experiencia. El mismo se elevó para su conocimiento y eventual opinión a las autoridades del área académica de la universidad a través de la Comisión de Articulación aludida.

Observaciones

Destacamos el grado de convocatoria que ha tenido la experiencia ya que el número de asistentes, lejos de disminuir mostró una tendencia a crecer desde su inicio.
Una segunda cuestión que se ha detectado es que en principio se pensó en que cada reunión durara dos horas reloj como se expresó antes, pero que se hiciera un intervalo de 5 minutos luego de transcurrida la primera hora de la misma, previendo que resultaría sumamente pesado a quienes no tienen hábito de clases de tal duración. El hecho de que cada vez que proponíamos el recreo nadie se alejaba del aula en que trabajábamos, sino que seguían con lo que estábamos analizando, en el mismo grupo o incorporándose a otro, lo que derivó en que suspendiéramos el recreo planeado utilizando ahora las dos horas completas para el desarrollo de cada clase.
Una tercera cuestión que puede mencionarse es que cada reunión se iniciaba con un interés general y manifiesto alrededor de las propuestas de trabajo extra áulico recomendado, que muestra sin duda alguna que se involucraron en la propuesta en forma notoria. Se exterioriza una catarata de participaciones (acertadas o no, pero no limitadas para nada) frente a cada planteo, pregunta, variante que uno propone al revisar los avances de sus trabajos. En general debían interrumpirse en algún momento la atención sobre las propuestas extra áulicas, porque de otro modo nos veríamos

imposibilitados de concretar las etapas del proyecto planeadas. Así a modo de ejemplo puede decirse que las dos reuniones previstas para el trabajo con artículos o textos de difusión masiva y contenido matemático terminó ocupando el total de tres reuniones, y sin duda alguna, de haberlo permitido, bien podría haber ocupado por lo menos una más.
Una docente de las que integra el equipo que está concretando la experiencia, trabaja simultáneamente en un establecimiento de educación media del que estaban participando algunos alumnos. Ella pudo constatar en más de una oportunidad, que durante el recreo de clases y en los pasillos de ese colegio, había varios alumnos involucrados en la resolución de cuestiones planteadas en el Taller, incluso alumnos ajenos a la experiencia, pero sumamente atrapados por las propuestas que se volcaron en el seno del mismo.

Conclusiones

- ✓ El Curso – Taller en general y en particular las diferentes estrategias abordadas, resultaron interesantes y motivadoras para todos los participantes.
- ✓ Las propuestas como la que describimos en este trabajo, que representan un desafío, muestran a los estudiantes mucho más interesados que las actividades que sólo implican aplicar procedimientos conocidos y tal vez tediosos de ejecutar.
- ✓ La iniciación en la argumentación y justificación de soluciones, podría potenciarse iniciando esta metodología mucho antes y dando continuidad a su práctica.

Bibliografía

Ausubel, D; Novak, J. y Hanesian, H. *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Editorial Trillas.

Asimov, I. (2000) *De los números y su historia*. Editorial El Ateneo. Buenos Aires.

Duval, R (1955). *Semiosis et pensée humaine. Registres semiotiques et apprendissages intellectuels.* Editorial Peter Lang S.A.

Godino, J. *Copmpetencias y Comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen?* España.

Hitt, F. y Hernández, A. (2000). *Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles medio, superior y universitario.* Departamento de Matemática Educativa. Universidad de Granada.

Parra, C. y Saiz, I. (compiladoras) (1994). *Didáctica de la matemática. Apuntes y reflexiones.* Editorial Paidós Educador.

Polya, G. (1994). *Como plantear y resolver problemas.* Serie de matemáticas. Editorial Trillas.

Señeriz, S. (1972). *Método heurístico de resolución de problemas*. Cuadernillos Universitarios. Universidad Nacional del Comahue.

EVALUACION DE UNA PROPUESTA PARTICIPATIVA

Cirilo, Marta I.; Verón, Mercedes; Molina, Marta L.; Pérez, María A.
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
E-mail: mcirilo@herrera.unt.edu.ar, mveron@herrera.unt.edu.ar ,

Campo de investigación: Incorporación de distintas perspectivas en la enseñanza de la Matemática; Nivel Educativo: Superior.

Resumen:

Este trabajo analiza los resultados obtenidos en el dictado diferenciado de la Asignatura Análisis Matemático en el 2º Cuatrimestre del año 2004 en la FACE, en el que los alumnos que regularizaron la materia en el Primer Cuatrimestre tienen la posibilidad de alcanzar la promoción de la misma.
La evaluación del Proyecto arroja un significativo número de alumnos promocionados. Además de importantes elementos para tener en cuenta en futuras acciones tendientes a mejorar la enseñanza del Cálculo, buscando rendimientos académicos superiores.

Introducción

En el Segundo Cuatrimestre del 2004 se implementó una experiencia pedagógica innovadora que consistió en el dictado de la asignatura Análisis Matemático con **modalidad semi-presencial**, donde se llevaron a cabo una serie de estrategias metodológicas no presenciales que buscaban desarrollar en los estudiantes que regularizaron la asignatura en el Primer cuatrimestre, el estudio independiente y la autonomía en la regulación de su propio aprendizaje, a fin de lograr la promoción.
El principal objetivo de este trabajo es evaluar los resultados de esta experiencia a fin de realizar las acciones necesarias, con la mirada puesta en mejorar el nivel y calidad del rendimiento académico, disminuir la deserción y optimizar el uso de los recursos disponibles, siempre en el marco del Proyecto de Investigación **"Educación Superior y Desarrollo Regional -¿Eficiencia económica versus Desarrollo Humano?"**aprobado por el CIUNT.

Razones para la innovación

Desde el año 1996 debido a la implementación del régimen combinado de promoción de la materia o regularización de trabajos prácticos, aproximadamente un 15% de los alumnos regulares se inscriben nuevamente a fin de lograr su promoción.
La inscripción anual de la Asignatura Análisis Matemático en el 1er. Cuatrimestre, de más de 1200 alumnos, con una relación docente alumno menor de un centésimo habla claramente de la imposibilidad real de establecer un proceso de comunicación personalizada; es por ello que seleccionamos como destinatarios del curso a los alumnos que regularizaron, y que no promocionaron la misma. El hecho de que los asistentes a este curso regularizaron la materia en el cuatrimestre anterior, implica la presencia de numerosos **conocimientos** e **ideas "previas"** (los primeros aluden a nociones correctas, las últimas hacen referencia a conceptos, opiniones, etc. con los que el alumno cuenta y que pueden no corresponderse con la realidad) que ayudan a una comunicación bidireccional entre docente y alumno enjundiosa no sólo en cuanto al flujo sino también al contenido. Esta situación enfrenta al docente al desafío de corregir conceptos arraigados aunque erróneos procurando también enriquecer los encuentros mediante los aportes de los alumnos. El hecho de trabajar **con grupos reducidos de alumnos**

permite brindar una atención personalizada y realizar una evaluación permanente de los mismos.

Características del curso semipresencial

Este curso presenta las siguientes particularidades:

- Un encuentro presencial por semana a fin de que los inscriptos cursaran las materias del 2do. Cuatrimestre sin dificultad.
- Flexibilización de la dedicación horaria a la asignatura (tanto para los encuentros presenciales como para las tareas de campo) a fin, de que los alumnos pudieran responder con su propio ritmo y con sus horarios disponibles.
- Elección de cuatro horarios diferentes a fin de que los alumnos puedan asistir a los encuentros presenciales sin inconvenientes (superposición horaria de clases prácticas, problemas laborales, etc.) contribuyendo de esta manera a crear un ambiente más distendido.
- Propuestas de actividades para los encuentros no-presenciales con material curricular específicamente preparado para tal fin y buceo bibliográfico.
- Asistencia tutorial sistemática de carácter personalizado, a fin de consolidar el aprendizaje de conceptos fundamentales de la asignatura.

El tipo de evaluación que se tuvo en cuenta especialmente fue la **procesual o formativa.** Se realizaron evaluaciones con **controles de lectura semanales.** La evaluación **final o sumativa** estuvo contemplada en los tres exámenes parciales y sus respectivos recuperatorios.

Para este dictado, se inscribieron 118 (ciento dieciocho) alumnos interesados, 8 (ocho) de los cuales eran alumnos regulares de años anteriores por lo cual no pudieron participar de este dictado especial. El curso se inició con 110 diez alumnos distribuidos en cuatro comisiones de 24 a 30 alumnos cada una de ellas. Se realizó una reunión inicial donde les explicamos los objetivos, metodología, tipos de evaluaciones, etc. que contemplaba la nueva experiencia, como así también nuestro interés académico de que en el ciclo básico de las carreras que se cursan en la facultad, los alumnos adquieran las competencias y destrezas necesarias para desarrollar la habilidad más poderosa que tiene la persona: **aprender, desaprender y reaprender** para adaptarse a los cambios y ser eficaz en un contexto de permanente transformación**.**

Como se realizó una evaluación permanente en los encuentros presenciales notamos que, inmediatamente iniciado el dictado, algunos alumnos no se adaptaron a las condiciones del trabajo independiente y no rindieron los controles de lectura propuestos para cada encuentro presencial. Es así que realizaron el primer examen parcial 92 alumnos. Al final del cuatrimestre 68 alumnos(o sea alrededor de un 74%) lograron promocionar la materia.

Análisis de la Información

Se confeccionó un cuestionario que consideraba aspectos del cursado referidos a:

- Alumnos regulares que accedieron al cursado.
- Metodología de cursado.
- Asistencia a clases de consultas.
- Relaciones existentes entre los aspectos anteriores.

Este mismo se impartió a los alumnos en condiciones de rendir el tercer examen parcial y fue respondido por 65 alumnos.

En el cuadro Nº 1 se puede observar que un 63% de alumnos cursó la asignatura por primera vez en el 1º cuatrimestre del 2004, el resto (un 37%) cursó la asignatura entre 2 y 4 veces en años anteriores.

De los alumnos que accedieron a este cursado, (cuadro Nº 2) un 64.6 % nunca rindió examen final, el resto (un 35,4%) desaprobó el mismo entre 1 y 3 veces.

Cuadro Nº1: Distribución del Nº de veces que cursó la asignatura.

Nº de Veces	Frecuencia %
1	63.1
2	20.0
3	12.3
4	4.6
total	$100_{(65)}$

Cuadro Nº2: Distribución del Nº de veces que rindió el examen final

Nº de Veces	Frecuencia %
ninguna	64.6
1	27.7
2	4.6
3	3.1
total	$100_{(65)}$

FUENTE : Encuesta Cátedra Análisis Matemático FACE.2004

Para relacionar las variables anteriores se las dicotomizó de la siguiente manera: "cursó una vez la asignatura"-"cursó más de una vez la asignatura"
"no han rendido examen final"-"han rendido alguna vez examen final", respectivamente. El resultado de la relación entre ellas se muestra en el cuadro siguiente.

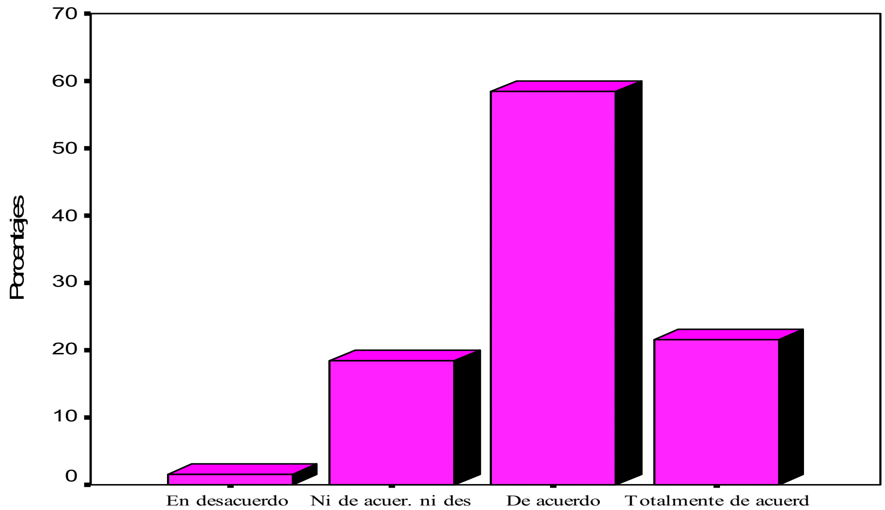
Cuadro Nº 3: Relación entre las variables "Veces que cursó la materia"y "Veces que rindió el examen final"

"han rendido alguna vez el examen final"	"cursó más de una vez la asignatura"		Total (%)	χ_1^2=3,55
	No (%)	Sí(%)		
No(%)	46.2	**18.4**	64.6	Valor de p=0,0594 <0.10
Sí(%)	17.0	**18.5**	35.4	
Total(%)	63.1	**36.9**	$100_{(65)}$	

FUENTE : Encuesta Cátedra Análisis Matemático FACE.2004

Un 46.1% de los alumnos no ha rendido ninguna vez el examen final y cursó una vez la asignatura, un 18.4% ha cursado más de una vez y no rindió nunca examen final y un 18,5 % sí rindió examen final y cursó más de una vez la asignatura. Estas dos ultimas cantidades nos muestran una predisposición de los alumnos a cursar más de una vez la asignatura evitando rendir el examen final (36.9%).

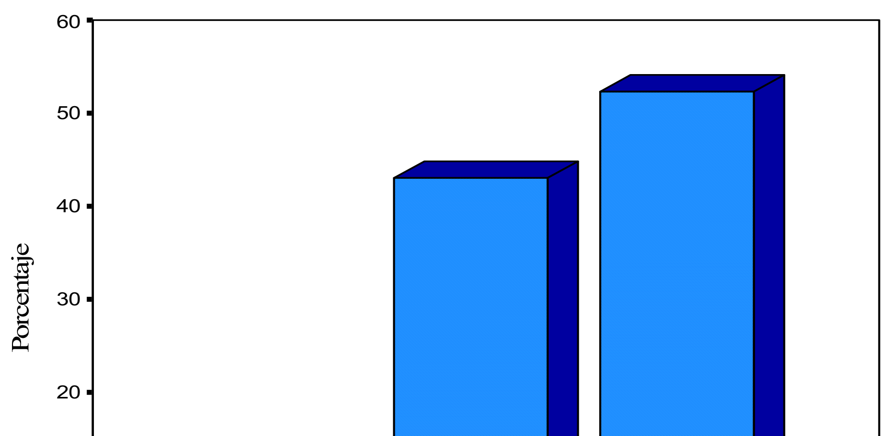
Gráfico Nº 1: Opinión sobre si la frecuencia de realización de los encuentros presenciales fue suficiente



FUENTE: Encuesta Cátedra Análisis Matemático FACE.2004

En el gráfico Nº 1, el 80 % de los alumnos contestó que le pareció suficiente la frecuencia de los encuentros presenciales. Sólo a un 1 % dicha frecuencia le pareció insuficiente.

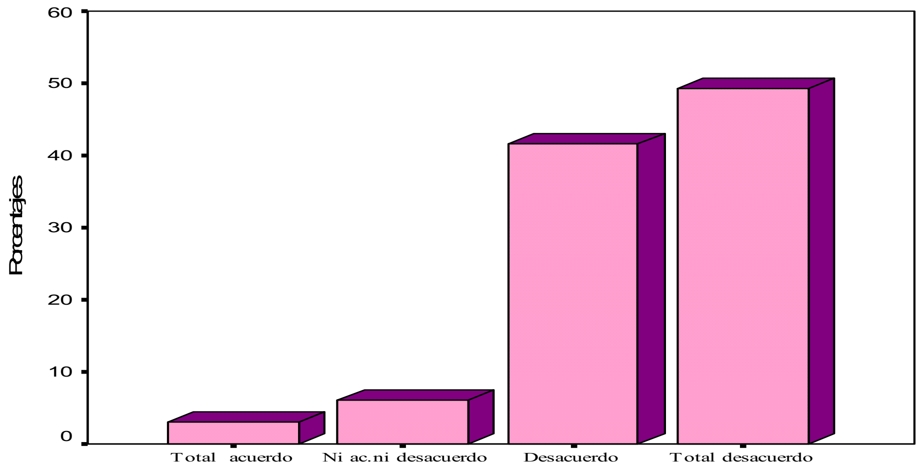
Gráfico Nº 2: Opinión sobre si la modalidad implementada en este cuatrimestre fue adecuada.



FUENTE: Encuesta Cátedra Análisis Matemático FACE.2004

Podemos apreciar que la gran mayoría de los alumnos (95 %) opina que la modalidad implementada en este cuatrimestre es adecuada y totalmente adecuada.

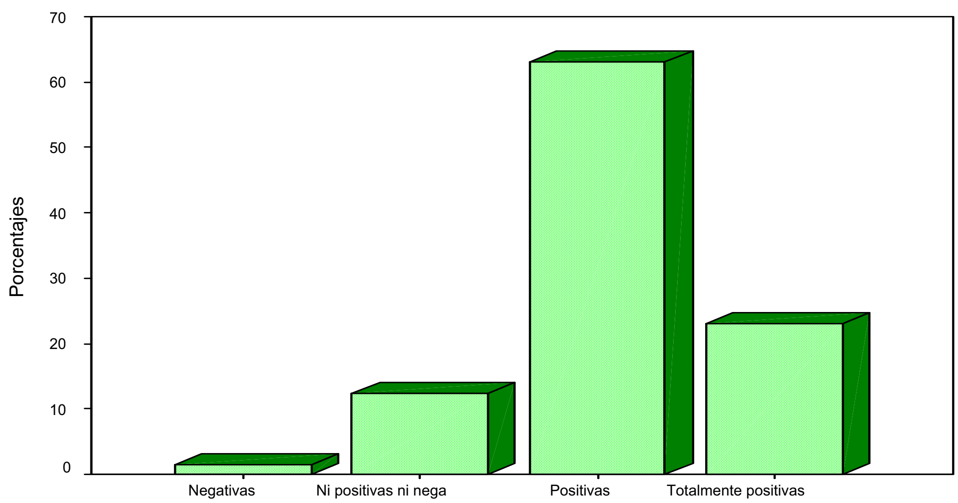
Gráfica Nº 3: Opinión sobre "Si el material preparado para los encuentros presenciales fue inútil".



FUENTE : Encuesta Cátedra Análisis Matemático FACE.2004

Es notable destacar el hecho de que al 90 % de los alumnos el material de trabajo preparado para los encuentros presenciales le pareció útil o muy útil.

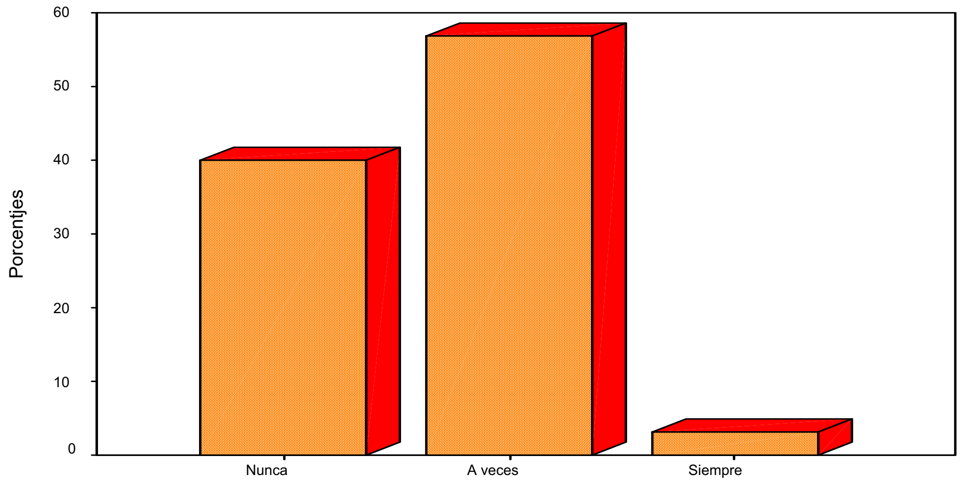
Gráfico Nº4: Opinión sobre "Si las evaluaciones por controles de lectura periódicas fueron negativas"



FUENTE : Encuesta Cátedra Análisis Matemático FACE.2004

Las Evaluaciones por controles de lectura fueron totalmente aceptadas por los alumnos, el 86 % de los alumnos las considera positivas o altamente positivas, a pesar de que ellas exigen un mayor esfuerzo por parte de ellos.

Gráfica Nº 5: Distribución Porcentual sobre la asistencia a las clases de tutoriales



FUENTE : Encuesta Cátedra Análisis Matemático FACE.2004

El 40 % de los alumnos nunca asistió a las clases tutoriales y un 56 % asiste algunas veces. Así mismo queremos comentar que los alumnos contestaron que las causas por las que no necesitan asistir a clases tutoriales es que ya les es suficiente el material de trabajo y los encuentros presenciales.

Comentarios finales

Consideramos que la experiencia pedagógica expuesta constituye una importante propuesta educativa dada la pertinencia de sus objetivos a la temática del curso, la adecuación de sus contenidos a los objetivos propuestos, la utilidad de la metodología, los recursos y las actividades en función de los contenidos, así como también la conveniencia de las distintas formas de evaluación previstas.
Representa una valiosa alternativa intermedia en el camino de evolución que se desarrolla en el campo de la educación a distancia. La modalidad a distancia no es fácil si se la piensa en un contexto socioeconómico crítico, en una institución sin una historia de experiencias previas que den gradualidad al proceso y con alumnos que no traen incorporada una autonomía de sus aprendizajes. Creemos, entonces, que la realización de un curso semipresencial es un paso inicial, necesario y aconsejable en la evolución mencionada: no implica tanto riesgo como entrar de lleno a la modalidad a distancia, mostrando antecedentes previos exitosos.
Por otra parte, consideramos que la implementación de un sitio Web de la Cátedra puede constituir una conveniente etapa previa que ayude en este proceso gradual de incorporación de la educación a distancia. Aún con fines meramente informativos, a modo de "cartelera virtual", un sitio así contribuirá a vencer gran parte de obstáculos, allanando el camino para la aceptación de recursos de tecnología educativa de mayor complejidad.

Bibliografía

Araújo, J. y Chadwick, C. (1988) *Tecnología Educacional. Teorías de la instrucción*. Barcelona: Paidós.

Dirección de Estadísticas Universitarias de la U.N.T. y Cátedra de Estadística de la FACE de la U.N.T, (2003) .*La U.N.T. en Cifras*, Período 2000-2002, Tucumán.

García, A. (2001) *La educación a distancia. De la teoría a la práctica.* Ariel, Barcelona.

Gimeno, S, y Pérez, A. (1993) *Comprender y transformar la enseñanza*. Morata, Madrid.

Hidalgo, G. (1993). *Un modelo operativo para la Enseñanza a Distancia*. Revista Iberoamericana de Educación Superior a Distancia, Vol. VI, U.N.E.D.

Hopkins, K., Hopkins, B. y Glass, G. (1997). *Estadística básica para las Ciencias Sociales y del comportamiento*. Prentice Hall, Buenos Aires

Mena, M. y Bonta, M. J. (1993). *A Distancia: Cursado Alternativo de las Materias de Grado.* Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires

Ministerio De Educación, Ciencia Y Tecnología (1995) "*Ley de Educación Superior, Nº 24521*", Boletín Oficial Nº 28.204, Argentina.

CÓMO SUPERAR LOS OBSTÁCULOS QUE PLANTEA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (PRIMERA ETAPA)

Mg. Lois, Alejandro; Milevicich, Liliana
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Gral. Pacheco. Argentina
alelois@ciudad.com.ar , lmilevicich@ciudad.com.ar

Campo de investigación: Aprendizaje de las matemáticas; Nivel educativo: Superior

Resumen

El análisis de errores tiene un doble interés: por una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos.
Este trabajo, desarrollado en el ámbito de la Facultad Regional Gral. Pacheco, se circunscribe a los alumnos de primer año de las carreras de ingeniería. En él se pretende describir los errores en matemática que cometen los alumnos a partir de una amplia pero no exclusiva categorización de los mismos.

Objetivo

Este trabajo, desarrollado en el ámbito de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Pacheco, se circunscribe a los alumnos de primer año de las carreras de ingeniería. En él se pretende describir los errores, asociados a las dificultades, en matemática que cometen los alumnos a partir de una amplia pero no exclusiva categorización de los mismos.

Introducción

Durante mucho tiempo, psicólogos, psicopedagogos y educadores en general, creían que los mecanismos del aprendizaje, descubiertos en situaciones de experimentación, en el marco de la Psicología Genética podían transferirse directamente al aula, y que eran garantía de que los alumnos a través de ellos aprenderían a resolver problemas, alejándolos, de este modo, de la posibilidad de vincularlos con los sistemas y conceptos propios de las áreas específicas del saber.
Con el devenir del tiempo se comprendió que un problema matemático, es una situación que implica un objetivo a conseguir, sólo si es aceptada como problema por alguien; sin esta aceptación, el problema no existe. Debe representar un reto a las capacidades de quien intenta resolverlo, y ser interesante en sí mismo. La resolución del mismo es un proceso de acontecimientos: aceptar un desafío, formular las preguntas adecuadas, clarificar el objetivo, definir y llevar a cabo el plan de acción y finalmente evaluar la solución a partir de una visión retrospectiva de la misma.(Polya, 1995) En ello se ponen de manifiesto las técnicas, habilidades, estrategias y actitudes personales de cada individuo.
Así las ventajas del componente heurístico en la enseñanza de la matemática, se pueden resumir en:

-Autonomía para resolver sus propios problemas.
-Los procesos de adaptación a los cambios de la ciencia y de la cultura no se hacen obsoletos, fuera de uso.
-El trabajo puede ser atrayente, divertido, satisfactorio y creativo.
-No se limita sólo al mundo de las matemáticas.
En este contexto, la aparición de dificultades y errores en los aprendizajes es más notorio.

¿Qué es el error?

El error es la manifestación de la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, y no solamente, como consecuencia de una falta específica de conocimiento. Forma parte del aprendizaje, ya que indica el grado de acercamiento al conocimiento.

¿Cómo se relaciona el error con las dificultades u obstáculos?

El aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos que son de diferente naturalezas. Algunas tienen su origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.
Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

Naturaleza de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas. En general algunos alumnos, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas.
Estas dificultades que se dan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son de naturaleza diferente y se pueden abordar, obviamente, desde perspectivas distintas.
Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas. (Romberg, 1993)
a) *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas* ***(D1)***
La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje de las matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos. Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión.
b) *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático* ***(D2)***
Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático.
Siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, el aspecto deductivo formal. El abandono de las demostraciones formales en algunos programas de matemáticas del nivel medio se ha estimado como adecuado, pero esto no incluye el abandono sobre el pensamiento lógico; es decir, la capacidad para seguir un argumento lógico, siendo esta incapacidad una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje de esta ciencia. El abandonar ciertas demostraciones formales en beneficio de una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas, no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamiento lógico, por ser éste una destreza de alto nivel que resulta necesario para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.
c) *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza* ***(D3)***
Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza.
La institución escolar debe propiciar una organización escolar que tienda a reducir las

dificultades del aprendizaje de las matemáticas dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza. Esta organización afecta tanto a los elementos espacio-temporales como a los agrupamientos en clases homogéneas o heterogéneas, de acuerdo con. sus habilidades en matemáticas.
La organización curricular en matemáticas puede originar diferentes dificultades en el aprendizaje de las mismas. Los elementos básicos a considerar como dificultades en el currículo de matemáticas son: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.
Por último, los métodos de enseñanza deben estar ligados tanto a los elementos organizativos de la institución escolar, como a la organización curricular. Varios son los aspectos a considerar: por ejemplo, el lenguaje, que debe adaptarse a las capacidades y comprensión de los alumnos; la secuenciación de las unidades de aprendizaje que debe estar adaptada a la lógica interna de las matemáticas; el respeto a las individualidades que tiene que ver con los ritmos de trabajo en clase, los recursos y la representación adecuada.
d) *Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos* ***(D4)***
La posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos. Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza.
e) *Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales* ***(D5)***
Sabemos que a muchos estudiantes, incluyendo a algunos de los más capacitados, no les gustan las matemáticas. Muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ellas. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas por la sociedad en general.
Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos.

Un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta.
En general, aceptamos que incluso la mayoría de los alumnos que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en matemáticas, ocultan probablemente serios errores conceptuales que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. Creemos necesario diagnosticar y tratar mucho más seriamente los errores de los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones problémicas, para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas.
La interpretación y análisis de los errores cometidos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas puede enriquecerse con el apoyo de algunas teorías de la psicología educativa, algunas de ellas se refieren a determinados procesos que se dan en la matemática. La posición cognitiva sugiere que la mente del alumno no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en la mente del alumno un cierto equilibrio. ¿Cuáles son, entonces, las razones que motivan la adquisición de un nuevo conocimiento?. Dos parecen las razones básicas a tener en cuenta en la adquisición de un nuevo conocimiento. Primero, el nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno y para ello debe contestar a preguntas que él se ha hecho a sí mismo, o por lo menos recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente, es decir, el alumno debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor. Y segundo, el saber anterior produce modelos implícitos que a veces son favorables

con el nuevo conocimiento matemático y que, por tanto, hay que explicitarlos, y otras veces, al contrario, son un obstáculo. En ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total. (Bachelard, 1991)

Estrategias de prevención y remedios

Analizar las dificultades del aprendizaje de las matemáticas en término de prevención y diseño de situaciones remediales supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas.
En este sentido, y en cuanto a estrategias inmediatas, creemos que será necesario prestar atención a un mayor intercambio en clase. El pensamiento de cada uno se construye en confrontación con los demás, de ahí la necesidad de favorecer el intercambio constante, la reflexión acerca de lo que pasó y de comparar los procedimientos utilizados.
También creemos necesario prestar atención a las ideas previas que traen los alumnos, más aún, en algunos casos será necesario recurrir al diseño de estrategias que contemplen el uso de analogías para recuperarlas.
Por otra parte, se deberán introducir actividades que favorezcan los procesos reflexivas sobre los propios errores.

Metodología

Se trabajó sobre una población de 132 alumnos, correspondiente a la totalidad de alumnos de cinco cursos de primer año de ingeniería de la Facultad Regional Gral. Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional. Nuestra muestra fueron las evaluaciones sumativas correspondientes a la asignatura Análisis Matemático I, un bimestre después de haberse iniciado el cursado de la asignatura, cuya modalidad es de 5 horas semanales. En estos exámenes se pretendía evaluar competencias matemáticas indicadoras del nivel de aprendizaje logrado en "funciones y modelos" y "límite y su aplicación". Cabe aclarar que, las mismas no fueron diseñadas con el propósito de producir situaciones favorables para la producción de un determinado tipo de error.
El total de 132 exámenes fueron etiquetados teniendo en cuenta que habían sido estructurados en 4 temarios diferentes pero equivalentes, en cuanto a las competencias que se pretendía evaluar.
Analizamos detalladamente cada problema resuelto por los alumnos y elaboramos, con estos datos, una categorización de errores que contemplan los casos con mayor frecuencia de aparición. Para ello, tuvimos en cuenta los errores correspondientes a las estrategias utilizadas para resolver problemas, la elección de las herramientas necesarias y su utilización.
Creemos oportuno aclarar que no fueron categorizados sólo casos aislados que constituyen menos de un 3 % del total de errores encontrados.
Por otra parte, omitimos la gran variedad de ejemplos de errores a partir de los cuales elaboramos esta categorización observando el tamaño máximo de la presentación. Sin embargo, consideramos que es un material adecuado para posteriores análisis.

Las categorías establecidas se pueden ver en la tabla 1.

E1	Falta de Control. Casos más frecuentes: enunciados mal copiados, modificación de la operación a realizar a partir de un signo mal copiado al pasar de una etapa a otra en un desarrollo algebraico, omisión de términos en un desarrollo algebraico
E2	Aplicación de una propiedad o teorema sin verificar hipótesis
E3	Inferencia y / o validación de propiedades o resultados a partir de gráficos o tablas
E4	Resolución incorrecta de ecuaciones
E5	Aplicación incorrecta de las propiedades de las operaciones. Caso más frecuente: propiedad distributiva de una operación respecto de otra.
E6	Interpretación incorrecta de las consignas o enunciados
E7	Aplicación de estrategias de resolución inadecuadas
E8	Omisión del análisis exhaustivo de todos los casos posibles. Caso más frecuente: problemas donde intervienen inecuaciones o valor absoluto
E9	"Invención" de propiedades y aplicación de las mismas

TABLA 1

Esto nos permitió asociar la taxonomía establecida a una o más dificultades, de la siguiente manera, tal como se muestra en la tabla 2

Taxonomía de error	Categorías de dificultades asociadas
E1	D3 D5
E2	D3 D4
E3	D3 D4
E4	D1 D3
E5	D3
E6	D3 D5
E7	D2
E8	D1 D2
E9	D2 D3

TABLA 2

Resultados

La tabla 3 muestra en la primera fila, el total de veces que aparece cada tipo de error y la razón entre la cantidad total de cada clase de error y el total de evaluaciones revisadas en la segunda y tercera fila. En principio, consideramos aceptable una razón de 0,40 errores de cada tipo por examen e inaceptable una razón superior a ese valor.

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
73	81	36	18	20	66	72	39	16
		0,27	0,14	0,15			0,30	0,12
0,55	0,61				0,50	0,55		

TABLA 3

Conclusiones

Los errores categorizados com E!, E2, E6 y E7, esto es: la falta de control, la aplicación de propiedades sin verificar hipótesis, la interpretación incorrecta de las consignas o enunciados y la aplicación de estrategias de resolución inadecuadas, han sido los errores más comunes.
Creemos que será necesario prestar fundamental atención a ellos, en cuanto a la selección y aplicación de estrategias apropiadas.

Referencias bibliográficas

Blanco, L. (2001). Programación de la asignatura: Intervención en dificultades de aprendizaje en matemáticas para el curso académico 2000-2001. España: Facultad de Educación de Badajoz.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial Aique. Buenos Aires.

Di Blasi, M., Espro F, Lois A, Milevicich L , (2003). *Estudio preliminar sobre errores.* Trabajo presentado en el EMCI III Internacional, San Miguel de Tucumán, Octubre 2003.

Di Blasi, M., Espro F, Lois A, Milevicich L , (2003). *Dificultades y errores: un estudio de caso*. Trabajo presentado en INMAT 2003, Buenos Aires, Diciembre 2003.

Guzmán, M. (1985) Enfoque heurístico de la enseñanza de la Matemática, Aspectos didácticos de matemáticas I. España:Universidad de Zaragoza.

Guzmán, M. (1987) Enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas, Aspectos didácticos de matemáticas II. España: Universidad de Zaragoza.
Guzmán, M. y Colera, J. (1989). Matemáticas I. Madrid: Anaya.

Poincaré, H., (1903) ¿Qué es la creación matemática? Conferencia dictada en la Sociedad Psicológica de París, Primera parte.

Polya , G. (1995). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Romberg, T. (1993) Como uno aprende. Modelos y teorías del aprendizaje de las Matemáticas. Kluwer Academic Publishers.

UNA EXPERIENCIA ENRIQUECEDORA: LA ENSEÑANZA PROBLEMICA EN "ALGEBRA" DE CIENCIAS ECONOMICAS.

Jacobo de Costilla, Mirta Graciela; Pérez de Del Negro, María Angélica.
Facultad de Ciencias Económicas (FCE). Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Argentina.
mcostilla@herrera.unt.edu.ar; mperez200@hotmail.com
Campo de Investigación: Incorporación de distintas perspectivas en la Enseñanza de la Matemática; Nivel Educativo: Superior

RESUMEN

Los docentes universitarios que tienen a su cargo asignaturas de primer año se encuentran ante una situación similar cada año: los alumnos ingresan con un bajo grado de reflexión, independencia y generalización. Por ello, durante el año 2004 se llevó a cabo una experiencia con una muestra aleatoria de alumnos, como parte de un trabajo de investigación, que consistió en un cambio de metodología reflejado en la instrumentación de un sistema de tareas basado en la Enseñanza Problémica para la asignatura "Algebra". Este trabajo describe: a) toda la tarea previa que fue necesaria realizar; b) el desarrollo de las clases en base a las categorías y métodos de la Enseñanza Problémica; c) los resultados altamente favorables obtenidos a través de los exámenes parciales; d) el curriculum oculto de la experiencia; e) el diario de clases elaborado.

INTRODUCCIÓN

Dada la escasez de habilidades y de hábitos para desarrollar estrategias de aprendizaje con que ingresan los alumnos a la Universidad, se hace cada vez más necesario abandonar los modos reproductivos de aprendizaje y poner el énfasis en que el alumno se capacite para realizar un trabajo creativo e independiente. Esta situación y el otro gran problema con que se enfrenta la FCE-UNT, esto es, la masividad, impelen a buscar otros caminos. Por ello, durante el primer trimestre del año 2004 se llevó a cabo una experiencia en una de las comisiones de Trabajos Prácticos de la asignatura Algebra, elegida al azar, como parte de un trabajo de investigación. Dicha experiencia se sustenta en los métodos y categorías de la Enseñanza Problémica, que se plantea el objetivo de aproximar la metodología de la enseñanza a las necesidades de la época actual. Esto trajo como consecuencia pasar de la modalidad de clases teóricas y prácticas, a clases teórico-prácticas, en una materia de dictado trimestral, correspondiente al 1º año del ciclo básico común a todas las carreras de la FCE. Este trabajo muestra en qué consistió la experiencia realizada, cómo se llevó a cabo y los resultados obtenidos, en todos los aspectos observados. Estos resultados son sumamente valiosos ya que confirman la conveniencia del cambio de metodología realizado y aportan importantes correcciones que hay que realizar a fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

IMPORTANCIA DEL TRABAJO

La FCE tiene una inscripción masiva y Álgebra es una de las dos asignaturas precorrelativas del resto. Es así que todo alumno que se inscribe en la FCE cursa Algebra. Esto significa dictar clases teóricas a las cuales asisten unos 600 alumnos y clases prácticas que tienen entre 90 y 130 alumnos. La experiencia en cuestión, al traer aparejadas clases teórico-prácticas y un trabajo independiente a través del cambio de metodología, generó muchas expectativas en las distintas cátedras, tanto en docentes como en alumnos; estos últimos, esperanzados en que la metodología empleada fuera implementada en las demás asignaturas.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para el tratamiento metodológico de la experiencia se tomaron como sustento tanto los principios, métodos y categorías de la Enseñanza Problémica como las Teorías Cognitivas del aprendizaje. Para este trabajo, se tuvieron en cuenta, además, los tratados sobre *Curriculum* en su aspecto de *Curriculum Oculto* y los documentos que tratan sobre los Diarios de Clase.
La **Enseñanza Problémica** se considera como un medio altamente efectivo para estimular la actividad de los estudiantes y educar en ellos su pensamiento científico creador. Las **categorías** tienen enorme significación teórica y práctica. Ellas son: la situación problémica, el problema docente, las tareas y preguntas problémicas y lo problémico. Dichas categorías cobran vida docente mediante los **métodos problémicos** de enseñanza: la exposición problémica, la búsqueda parcial, la conversación heurística y el método investigativo. En cuanto a las **Teorías cognitivas** del aprendizaje, las cuales analizan los aspectos internos de la conducta, se tuvieron en cuenta, en particular, las Teorías de la Asimilación, de la Actividad y de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales. Respecto a los **Diarios de clase**, se consideraron, en especial, los aportes del Dr. M. A. Zabalza Beraza. Según este autor, escribir el propio diario es la experiencia de *contar* y de *contarse* a sí mismo lo que uno mismo hace, situación que hará posible una nueva experiencia, la de *leerse* a sí mismo, brindando la oportunidad de reconstruir la actividad desarrollada y la personal forma de haberla vivido, de evaluarla y de implementar los medios para mejorar las acciones siguientes. En cuanto al ***Curriculum,*** se podría decir que es un ámbito de interacción donde se entrecruzan procesos, agentes y ámbitos diversos. Para clarificar el *curriculum real* que recibe el alumno, resulta fundamental considerar que la realidad no se reduce a lo que parece evidente de forma más inmediata, sino que es preciso escudriñar en ella, descubrir lo que no es manifiesto. Al lado del *curriculum* que se dice estar desarrollando, expresando ideales e intenciones, existe otro al que se denomina *oculto.* La expresión ***curriculum oculto*** fue utilizada por primera vez por Philip W. Jackson, en 1968, para referirse a "aquellos componentes, dimensiones o contenidos como la transmisión de valores y de normas, formación de actitudes, prácticas de convivencia, etc., esenciales para el funcionamiento de la escuela" (E. Palladino, 1998).

LA EXPERIENCIA

Ante el problema de la masividad y las falencias mencionadas, se vio la conveniencia de llevar a cabo, a modo de prueba y como parte de un trabajo de investigación, una metodología diferente y sacar conclusiones para el futuro. A continuación, se realiza la descripción de la misma:

I) Trabajo Previo: A fines del 2003, la FCE resolvió que las materias de 1º año se dictaran trimestralmente durante el período lectivo siguiente, correspondiéndole a

Algebra ser una de las asignaturas del 1º trimestre. Esto significó contar con sólo 12 semanas de clases en lugar de las 16 habituales. Teniendo en cuenta todo esto, hubo que hacer un importante trabajo previo durante Diciembre de 2003 y Enero de 2004, a fin de poder comenzar sin tropiezos una tarea que se vislumbraba sin interrupciones desde el momento en que comenzaran las clases. El mismo consistió en: **1)** Lograr el visto bueno de la profesora a cargo de la Cátedra y de las autoridades de la FCE. **2)** Decidir cómo se iba a conformar la muestra de alumnos para la experiencia. **3)** Realizar entrevista y encuesta a docentes a cargo de las materias correlativas de Algebra. **4)** Tener en cuenta la carga horaria prevista para el año 2004, a fin de realizar una distribución particular para la comisión experimental. **5)** Preparar, en base a la distribución anterior, el cronograma correspondiente de clases. **6) a)** Preparar las clases en base a la Enseñanza Problémica y adaptarlas al cronograma mencionado, de modo que se pudieran poner en práctica las distintas categorías y métodos de dicha Enseñanza en casi todos los temas de la asignatura; **b)** Fue fundamental la preparación de las distintas **situaciones problémicas** que motivarían el proceso enseñanza-aprendizaje de cada tema y las **tareas problémicas** correspondientes; **c)** Todo este trabajo debía ser compatibilizado con los cuadernillos de trabajos prácticos y las notas teóricas ya preparadas para el resto de los alumnos, pues el material en cuestión debía ser usado con las adaptaciones del caso. Los alumnos de esta comisión debían rendir los mismos exámenes que el resto.

II) <u>Desarrollo</u> <u>de</u> <u>las</u> <u>clases:</u> El trimestre durante el cual se dictó Álgebra, estuvo comprendido entre el 16/02 y el 07/05. Mientras el resto de las comisiones siguió trabajando de la misma manera que los años anteriores, la comisión experimental, según el cronograma realizado, tenía clases diarias. Esto significó, para este grupo de alumnos, tener 56 clases teórico-prácticas, de 2 ½ horas cada una, con los mismos compañeros, con la misma docente, a la misma hora y en el mismo lugar. Esta situación trajo aparejada una serie de vivencias, experiencias y resultados muy significativos para todos, captadas a través de la observación directa, de respuestas a cuestionarios orales y escritos, del diario de clases confeccionado por la docente, de los exámenes y de encuestas de opinión (<u>aclaración</u>: todos los alumnos de esta comisión eran ingresantes).
Todas las categorías problémicas se pusieron en juego permanentemente durante las clases. A continuación, se ejemplifican algunas de ellas:

- Para el tema **"Valor Absoluto"** se planteó la siguiente **situaciones problémica:**

¿Puedes encontrar el error en la siguiente demostración?

$$25 - 55 = 36 - 66$$
$$25 - 55 + 121/4 = 36 - 66 + 121/4$$
$$(5 - 11/2)^2 = (6 - 11/2)^2$$
$$5 - 11/2 = 6 - 11/2$$

¿¿¿¡¡¡ 5 = 6 !!!!???

- **Tarea problémica** propuesta para el tema **"Números Reales":**

Clasifica los números que se obtendrías como resultado de situaciones como las siguientes: 1) Número de pacientes de una sala de un hospital; 2) Edad de una persona; 3) Cantidad de puntos que se obtienen jugando al "chin-chon; 4) Número que, en general, representa una situación de partida o el origen de algo o una situación neutra; 5) Intereses ganados al depositar una suma de dinero en una institución bancaria; 6) Probabilidad de sacar el primer premio de una rifa de mil números; 8) Cantidad de lluvia caída durante una tormenta; 9)Temperatura ambiente; 10)Longitud de una circunferencia de radio igual a 2 unidades; 11) Distancia entre dos ciudades; 12) Tiempo de descanso de un alumno de esta Comisión.

- Algunas **preguntas problémicas,** para introducir el tema **"Binomio de Newton"**:

Observa las siguientes fórmulas relativas a Matemática Financiera:

- *El **monto compuesto**, S, de un capital P, al final de n períodos de interés y a la tasa nominal r por período, está dado por:* $S = P\,(1 + r)^n$
- *La **tasa efectiva** es equivalente a una tasa nominal r compuesta n veces al año y está dada por:* *tasa efectiva* $= \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$
- *A P se le denomina **valor actual** de S y se lo obtiene de la fórmula dada de S; es el capital P que debe invertirse a la tasa por período r durante n períodos de interés para que el monto sea S:* $P = \frac{S}{(1+r)^n}$ *o bien :* $P = S\,(1 + r)^{-n}$
- *El valor **actual A de una anualidad** (anualidad: sucesión de pagos realizados en períodos fijos durante un intervalo de tiempo dado) **R** por período de pago, durante n períodos a la tasa de r por período es:* $A = R\,\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = R\, a_{\overline{n|}\, r}$
- *El **monto S de una anualidad R** por período de pago, durante n períodos a la tasa de r por período es:* $S = R\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} = R\, s_{\overline{n|}\, r}$

Responde:¿Qué elemento común tienen todas las fórmulas dadas? ¿Qué características tiene dicho elemento? ¿Cómo se lo podría calcular? ¿Cómo calcularías la potencia?

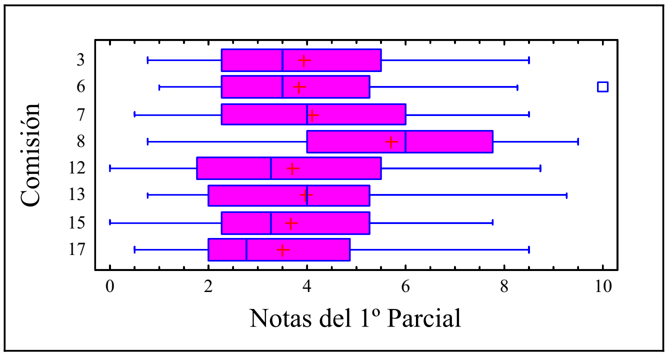
Los **métodos** problémicos, por su parte, desempeñaron un papel muy importante, sobre todo en el discernimiento y en la comprensión de los conceptos teóricos. El método de búsqueda parcial llevó a los alumnos a trabajar individualmente y en grupos. El goce del descubrimiento se veía reflejado en la mayoría de los alumnos durante la exposición problémica y la conversación heurística. Pasar al pizarrón a resolver ejercicios individualmente o en grupos para comunicar a los compañeros los resultados de la búsqueda encomendada fue un logro, ya que al principio había mucha resistencia. Siempre se trató de que los alumnos participaran activamente, lo cual costó mucho, ya que había que luchar contra la falta de hábitos de estudio y romper la inercia que traían.

III) <u>Resultados obtenidos a través de los exámenes parciales:</u> Se realizó la comparación entre la Comisión Nº 8 en la cual se realizó la experiencia y otras siete comisiones tomadas al azar.

- **Rendimiento Académico mediante las notas del 1º Parcial:**

Comisión Nº	Cantidad	Media	Intervalo de Conf. 95%	Mediana	Test Kruskal-Wallis Rangos promedios	Test de Rangos Múltiples (95%) Grupos homog.	
3	87	3,9	3,69673 ; 4,17683	3,5	**Estadístico**	X	
6	84	3,8	3,63107 ; 4,05346	3,5	=49,4626	X	
7	86	4.1	3,75863 ; 4,40998	4		X	
8	**88**	**5.7**	**5,38259 ; 6,0265**	**6**	**Valor de**		**X**
12	71	3,7	3,43301 ; 3,95431	3,25	**P =** 1,84144	X	
13	91	4.0	3,65318 ; 4,28638	4	E-8	X	
15	94	3,7	3,48485 ; 3,86621	3,25		X	
17	60	3.5	3,09759 ; 3,87741	2.75		X	

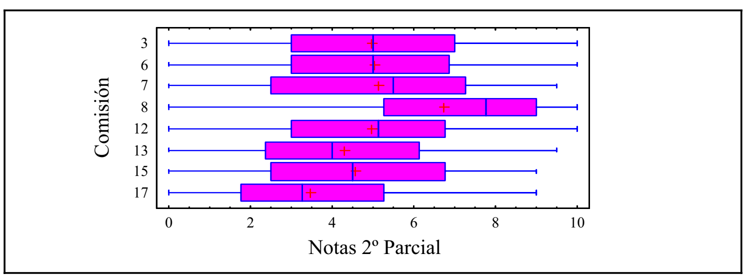
Gráfico Nº 1 - Box Plot Notas 1º Parcial:



- **Rendimiento Académico mediante las notas del 2º Parcial:**

Comisión Nº	Cantidad	Media	Intervalo de Conf. 95%	Mediana	Test Kruskal-Wallis Rangos promedios	Test de Rangos Múltiples (95%) Grupos homog.			
3	77	5.0	4,54569 ; 5,3634	5,0	**Estadístico** = 64,2438 **Valor de P** = 2,13355 E-11		X	X	
6	80	5.0	4,62388 ; 5,42612	5,0			X	X	
7	86	5,1	4,72492 ; 5,51346	5.5				X	
8	**88**	**6,7**	**6,33467 ; 7,1142**	**7.75**					**X**
12	62	5.0	4,52017 ; 5,43144	5,125			X	X	
13	92	4,3	3,92315 ; 4,68554	4.0			X		
15	83	4.6	4,17548 ; 4,96308	4,5			X	X	
17	61	3,5	2,99333 ; 3,92962	3.25		X			

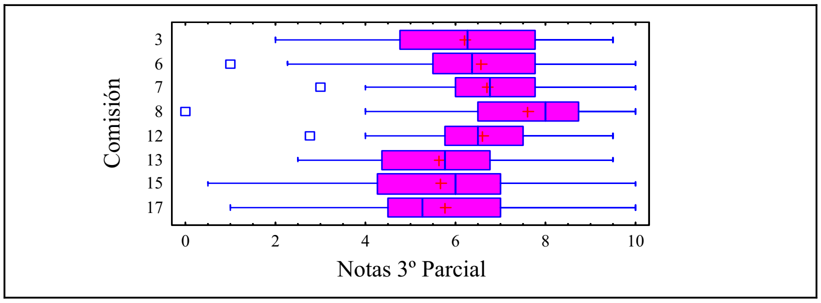
Gráfico Nº 2 - Box Plot Notas 2º Parcial:



- **Rendimiento Académico mediante las notas del 3º Parcial**

Comisión Nº	Cantidad	Media	Intervalo de Conf. 95%	Mediana	Test Kruskal-Wallis Rangos promedios	Test de Rangos Múltiples (95%) Grupos homog		
3	54	6,2	5,8518 ; 6,51857	6,25	**Estadístico** = 58,6338 **Valor de P** = 2,82726 E-10	X	X	
6	58	6,6	6,24728 ; 6,89065	6.375			X	
7	57	6,7	6,39582 ; 6,99892	6.75			X	
8	**73**	**7,6**	**7,3397 ; 7,87263**	**8**				**X**
12	46	6,6	6,23118 ; 6,9536	6,5			X	
13	60	5,6	5,34775 ; 5,93558	5.75		X		
15	53	5,7	5,34273 ; 6,01576	6,0		X		
17	31	5,6	5,30999 ; 6,19001	5.25		X		

Gráfico Nº 3 - Box Plot Notas 3º Parcial:



De los resultados de los tres (3) parciales con sus correspondientes pruebas estadísticas, surgen las diferencias de notas existentes entre las comisiones de alumnos para cada uno de los exámenes parciales. En cada uno de ellos, la comisión Nº 8 constituye por sí sola un grupo, con diferencias significativas respecto de los demás. Si se consideran tanto su media como su mediana con las de las demás comisiones, éstas prevalecen sobre las otras, lo que nos muestra los resultados favorables de dicha comisión.

IV) <u>El curriculum oculto:</u> Eisner, Elliot W. define al *curriculum oculto* como "ese conjunto penetrante y omnipresente de expectativas y reglas que definen la escolarización como un sistema cultural que por sí mismo enseña lecciones importantes" (Gimeno Sacristán-Pérez Gómez, 1994). Efectivamente, esta experiencia dio como resultado una riqueza que iba mucho más allá del rendimiento académico, detectada entre otras, a través del análisis del diario de clase confeccionado por la docente a cargo y de las respuestas a preguntas abiertas realizadas a los alumnos en una de las encuestas. Si bien es cierto que el cúmulo de situaciones vividas durante la experiencia se expresan en otro trabajo, cabe nombrar algunos de sus aspectos: valores logrados por los alumnos desde el punto de vista personal y por la docente; valores adquiridos a través del cambio de metodología; riqueza a nivel relaciones sociales; relación con las dificultades que enfrentaron los alumnos.

V) <u>El diario de clase:</u> Según Zabalza Beraza, "la buena práctica, aquella que permite avanzar hacia cotas cada vez más elevadas del desarrollo profesional es la *práctica reflexiva"*. Es decir, se necesita revisar lo que se ha hecho, analizar los puntos fuertes y débiles del ejercicio profesional y progresar basándose en reajustes permanentes. En base a esto, y según las sugerencias de Zabalza Beraza, el diario realizado sigue una consigna más bien abierta, se escribió todos los días o día por medio, con una cantidad variable de sucesos escritos. En cuanto al contenido, y siguiendo a Porlán y Martín (1993), se consignaron: descripciones de las tareas realizadas en clase; secuencias de las mismas; acontecimientos significativos de la dinámica psicosocial; aspectos relativos: a la comunicación, a la organización del espacio y del tiempo, y al material empleado; procesos de negociación para el establecimiento de pautas y normas que regularon algunos aspectos de la convivencia escolar, y valoraciones de actitudes propias y del alumnado.

<u>CONCLUSIÓN</u>

Es preocupación de todos los docentes colaborar con su tarea a la formación de un egresado que responda a las necesidades de la época actual, es decir, capaz de un pensamiento productivo y creador. Para ello, el profesor debe actualizarse permanentemente y contar con múltiples recursos sin los cuales no podría realizar con eficacia su labor. Entre estos recursos se encuentra la "Enseñanza Problémica" que es un sistema de enseñanza concebido para dar cumplimiento a aquellos objetivos generales que están dirigidos a la transmisión de la experiencia de la actividad creadora y de sus rasgos fundamentales. Aplicada ésta por primera vez en la FCE, dio resultados realmente alentadores, lo cual evidencia la importancia de un cambio de metodología que contribuya al desarrollo de la personalidad integral del alumno y es una muestra de que los estudiantes responden positivamente cuando se ven respetados, motivados y desafiados a salir de su pasividad.

BIBLIOGRAFÍA:

Martínez, M. (1986). *Categorías, Principios y Métodos de la Enseñanza Problémica*. La Habana. Cuba.

Torres, P. (1993). *La Enseñanza Problémica de la Matemática del nivel medio general.* Tesis de grado. La Habana. Cuba.

Zabalza, M. *La documentación del trabajo en la clase: el diario (I y II).* Pág. Web: www.infantiae.org/espdiario.htm.

Porlán, R. y Martín, J. (1993). *El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula.* Colección Investigación y Enseñanza. Serie Práctica Nº 6. Sevilla. España: Diada Editoras S. L.

Gimeno, J. y Pérez, A. (1994). *Comprender y transformar la Enseñanza*. Madrid. España: Ediciones Morata, S. L.

Palladino, E. (1998). *Diseños curriculares y Calidad Educativa.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Espacio.

Pagano, R. (1999). *Estadística para las Ciencias del Comportamiento.* México: International Thomson Editores.

VALOR ABSOLUTO: ANÁLISIS DE CONCEPCIONES ERRÓNEAS

Medina Perla, Astiz Mercedes, Oliver María, Rocerau María, Valdez Guillermo, Vecino María, Vilanova Silvia
Universidad Nacional de Mar del Plata – Argentina
pmedina@mdp.edu.ar
Campo de investigación: Errores en el aprendizaje de conceptos matemáticos
Palabras clave: error, concepto, valor absoluto, alumnos universitarios

RESUMEN

En este trabajo se presentan los resultados de la etapa exploratoria de un estudio sobre errores que involucran el concepto de valor absoluto. Los participantes fueron alumnos que cursaban la primera asignatura de matemática de las carreras de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Su objetivo fue indagar los errores más frecuentes en el uso de este concepto. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: producciones escritas de los alumnos; registros de observación no sistemática de la actividad en clase y entrevistas semi-estructuradas. Los resultados obtenidos sugieren que los errores más frecuentes se relacionan con conceptos erróneos o incompletos, asociaciones incorrectas y dificultades en la comprensión del lenguaje.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las concepciones erróneas en Matemática es una cuestión de permanente interés, tiene una larga historia y numerosos antecedentes de investigación en distintos países. La investigación actual sobre los errores en Educación Matemática, los considera como parte normal de los procesos de aprendizaje (Brousseau et al. 1986, en Rico, 1995) y muestra un interés creciente por lograr un esquema claro de interpretación y previsión de las concepciones inadecuadas (Radatz, 1979; Mulhern,1989, en Rico, 1995) y por hacer una clasificación de los errores sobre las base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos (Movshovitz-Hadar et al.1987).

Según Resnik (1989), los errores deben ser vistos como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, además de reorientar la comprensión de los alumnos.

Vinner (1987, en Gutiérrez , 1995) distingue entre la imagen que posee un individuo sobre un concepto y el concepto en sí. En matemática, por ejemplo, un concepto está dado por su definición, con todo lo que ello involucra, mientras que la imagen de un concepto, es la idea que la persona se hace del mismo y que no necesariamente coincide con él.

Durante varios años se detectaron, de manera sostenida, dificultades en alumnos universitarios para la resolución de situaciones que involucran el concepto de *valor absoluto*, aún cuando se observara que resolvían correctamente inecuaciones del tipo $|3x-2|<8$.

Estas observaciones informales nos hicieron pensar, en principio, que la mayoría de los alumnos sólo se mueve “con éxito” en actividades que pueden ser resueltas con la aplicación mecánica de las propiedades del valor absoluto, aunque no hayan elaborado totalmente el concepto.

Teniendo en cuenta que el valor absoluto es un recurso básico que debería estar disponible para abordar otras cuestiones fundamentales, como por ejemplo límite y continuidad, es que surge el interés por indagar las causas de esta situación y generar propuestas que contribuyan a mejorarla.

En este trabajo presentamos los resultados de la etapa exploratoria de un estudio más amplio sobre las dificultades en el aprendizaje del concepto de valor absoluto, cuyo objetivo fue detectar posibles obstáculos y dificultades en la elaboración de este concepto, en alumnos de distintas carreras de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

OBJETIVO DEL TRABAJO

Detectar, analizar y clasificar los errores más frecuentes relacionados con la elaboración del concepto de valor absoluto, en alumnos universitarios del primer año de las carreras de profesorado y licenciatura de Matemática y Biología.

METODO

Participantes: 400 alumnos que cursan la primera asignatura de Matemática de las carreras de la facultad cuyos contenidos incluyen temas básicos de cálculo diferencial e integral de una variable. (Año 2004: 220 alumnos y año 2005: 180 alumnos)

Instrumentos y técnicas: para recolectar datos se diseñó la siguiente propuesta de actividades a ser resuelta de manera individual, con el objetivo de hacer explícitas dificultades vinculadas al concepto de valor absoluto:

Nombre y apellido Carrera

1- Defina con sus palabras valor absoluto de un número real.

2- ¿Es cierto que si **a** es menor que cero, su valor absoluto es el opuesto de **a**? ¿por qué?

3- ¿Es cierto que si **a** <0, $|a| = -a$? ¿por qué?

4- ¿Es cierto que existe algún número **a** , tal que $|a| < 0$? ¿por qué?

5- Coloque <, > ó = de manera que las afirmaciones sean verdaderas:

a<0 , entonces **–a.....0**
a>0 , entonces **–a.....0**
$|\quad| = -$, entonces, **a.....0**

6- Complete las líneas de puntos para que las afirmaciones siguientes resulten verdaderas:

a $\geq$ **0**, entonces, $|a| = \ldots\ldots$

a<0, entonces, $|a| = \ldots\ldots$

7- Proponga, en los casos que sea posible, valores reales para **a** y **b** que verifiquen cada una de las siguientes expresiones:

	a	**b**
a-b>0 y a>0		
a-b<0 y a>0		
-a>0 y b<0 y b-a<0		
a<0 y b>0 y a-b>0		

Los datos obtenidos a partir de esta propuesta de actividades fueron complementados con información proveniente de observaciones de la actividad de los alumnos en clase y de revisión de evaluaciones parciales anteriores. Se registraron, a partir de la observación en clase, las preguntas, comentarios, actitudes de los alumnos que se consideraron significativas para el objetivo de este estudio

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

A partir de todos los datos obtenidos,

- se establecieron categorías de respuestas para las preguntas 1, 2, 3, y 4 de la propuesta de actividades.
- se clasificaron como correctas o incorrectas las respuestas a los ítems 5, 6 y 7.
- se confeccionó un listado de las dificultades más frecuentes inferidas a partir de las observaciones de la actividad de los alumnos en clase y de la revisión de la evaluación parcial.

Las categorías establecidas para las respuestas dadas a los ítems 1 a 4 son:

Del ítem 1: *Defina con sus palabras valor absoluto de un número real*

D: “distancia de un punto al cero”

DEF: $|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$,

P: “es la parte positiva del número”,
S: “es el número sin importar el signo”,
I: incorrectas sin relación con el concepto,
NR: no respondieron

Justificación del ítem 2: ¿Es cierto que si **a** es menor que cero, su valor absoluto es el opuesto de **a**? ¿por qué?

O: opuesto de un negativo es siempre positivo
D: distancia es siempre positiva
E: error en interpretación del opuesto
DEF: mostrando la definición como función por tramos
M: mal justificado,
NR: no respondieron

Justificación del ítem 3: ¿Es cierto que si a <0, $|a| = -a$? ¿por qué?

O: opuesto de un negativo es siempre positivo
DEF: mostrando la definición como función por tramos
OS: a < 0 entonces –a > 0
E: error en interpretación del opuesto
M: mal justificado,
NR: no respondieron

Justificación del ítem 4: ¿Es cierto que existe algún número a, tal $|a|<0$ que ? ¿por qué?

D: “valor absoluto es distancia y distancia es positiva”,
P: “el valor absoluto es siempre positivo”,
S: “el valor absoluto es el número sin signo”, y lo relacionan con mayor que cero,
I: justificación incorrecta sin relación con el concepto,
M: mal justificado,
NR: no respondieron

En la siguiente tabla se muestra, por ítem, los porcentajes de respuestas de cada categoría:

Item 1	2004 (n=220)	2005 (n=180)	**Item 2**	2004 (n=220)	2005 (n=180)	**Item 3**	2004 (n=220)	2005 (n=180)	**Item 4**	2004 (n=220)	2005 (n=180)
D	40,91	46,67	O	11,36	16,11	O	19,09	18,89	D	17,27	11,11
DEF	3,64	3,33	D	18,18	17,22	DEF	4,55	6,11	P	48,18	47,22
P	12,73	11,67	E	9,09	8,89	OS	6,82	7,22	S	2,27	1,67
S	14,55	11,11	DEF	19,55	18,33	E	41,82	45	M	4,55	3,33
I	19,09	18,89	M	25,00	18,33	M	11,82	9,44	I	8,64	9,44
NR	9,09	8,33	NR	16,82	21,11	NR	15,91	13,33	NR	19,09	27,22

Respecto de las respuestas dadas a los ítems 5, 6 y 7, se determinó:

Item 5: tanto en el 2004 como en el 2005, un alto porcentaje de los alumnos (alrededor del 70%), respondió correctamente el inciso a), alrededor del 100% respondió bien el inciso b), pero no sucedió lo mismo con el inciso c), en el cual respondieron bien apenas la mitad de ellos.

Item 6: en ambos años respondieron bien alrededor de un 70% el inciso a), mientras que la mayoría respondió mal el inciso b)

Item 7): en ambos años se registró un gran número de respuestas incorrectas al inciso c) (más del 80%), no evidenciándose inconvenientes en la resolución de los otros incisos.

Analizando en conjunto las respuestas a las preguntas 1 y 4, se infiere coherencia en las mismas e, independientemente de la definición que dieran sobre valor absoluto, reconocen que es un valor positivo.

Un análisis similar se realizó con las respuestas a las preguntas 2 y 3, constatando que la mayoría puede dar una justificación correcta a la consigna expresada en forma coloquial, mientras que no lo logra si la consigna está dada en forma simbólica. Interpretan que el número **–a** resulta negativo sólo por estar precedido por el signo menos. Esto último se ve nuevamente reflejado en las respuestas a los ítems 5, 6 y 7.

De las observaciones de la actividad de los alumnos en clase y de la revisión de la evaluación parcial, surgió que los alumnos:

- aplican mecánicamente las propiedades: si $|x| < r$, entonces $-r < x < r$

  si $|x| > r$, entonces $r < x$ ó $x < -r$
- no se permiten considerar que un número expresado como –a puede ser positivo
- resuelven incorrectamente operaciones aritméticas y algebraicas
- no verifican las soluciones obtenidas

CONSIDERACIONES FINALES

De acuerdo con los datos obtenidos a partir de los instrumentos y técnicas puestas en práctica, surge que los alumnos, en su mayoría:

a) tienen dificultades en interpretar comunicaciones dadas en lenguaje simbólico, particularmente no pueden admitir que un número expresado como –a pueda ser positivo,

b) pueden resolver mecánicamente “con éxito” ecuaciones sencillas que involucran valor absoluto, utilizando reglas que en ese contexto funcionan, aunque no puedan justificarlas.

Las dificultades y errores observados pueden tener su origen en concepciones erróneas, que seguramente vienen arraigadas desde los niveles educacionales anteriores y probablemente están ocasionadas por asociaciones incorrectas y/o dificultades en el lenguaje simbólico. Hacer que desaparezcan concepciones erróneas de esas características no es sencillo, ni se logra a corto plazo. Brousseau (1976) plantea que “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertitud, del azar sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos”. Es necesario entonces, a fin de superar los obstáculos, plantear situaciones nuevas, en diferentes contextos, que permitan plantear la necesidad de reconsideración o rechazo del concepto para construirlo correctamente.

En este sentido, se propone continuar la investigación realizando un estudio de casos en profundidad a fin de avanzar en la determinación de las causas de las dificultades detectadas y elaborar actividades para revertirlas.

BIBLIOGRAFIA

Brousseau, G. (1976) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Informe del XXVIII Encuentro de la C.I.E.A.E.M*, 101-117.

Gutiérrez, A., Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Miller, C. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. México: Addison Wesley

Movshovitz-Hadar,N., Zaslavsky, O., Inbar,S. (1987) An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*.18, 3-14.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Reserarch in Mathematics Education* 9, 163-172.

Resnik, L. Nexher, P., Leonard, R. Magone M., Omanson S., Pelet, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: Te Case of Decimal fractions. *Journal for Reserarch in Mathematics Education* 20, 8-27.

Rico, L. (1995) Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J. Gómez P., Rico L. *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

MacGregor, M. (1996) Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. *UNO*, 9, 65-69

“ACERCÁNDONOS AL ESTUDIANTE: LA ENTREVISTA CLÍNICA”

Garzón, Walter Alberto y Herran, Martín Miguel
Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa.) – República Argentina
waltergrzn@yahoo.com.ar - herran@unsa.edu.ar
Campo de investigación: Innovaciones Pedagógicas; Nivel educativo**:** Superior

Resumen: La *entrevista clínica* es una técnica interrogativa donde se desarrolla una conversación planificada con el entrevistado, informándose sobre sus conocimientos, intereses, necesidades, etc.; decidimos aplicarla en Introd. a la Matemática ya que es el primer peldaño que el estudiante del nivel medio enfrenta en su ingreso a la universidad. Introducción muestra, desde siempre, muy bajos niveles de retención y de rendimiento académ.; además el contacto con el docente es mínimo por razones de superpoblación. Creemos oportuno asignar a los tutores, ya entrenados, la aplicación de esta técnica en un grupo de alumnos para conocer mejor el avance del proceso de aprendizaje. La *Hipótesis* es: *el contacto personalizado de los estudiantes con los tutores y profesores de práctica trae como consecuencia una mejora en los rendimientos académicos*.

“ACERCÁNDONOS AL ESTUDIANTE: LA ENTREVISTA CLÍNICA”

1.- Introducción

En la Argentina actual, ser un estudiante universitario sigue siendo, a pesar de las luchas sociales recientes, un privilegio al que accede una porción minoritaria de la población. Pero además, ser un estudiante que logre buenos resultados académicos resulta ser un doble desafío para quienes deciden enfrentarlo y al que es necesario mirar con mayor detenimiento.

Por otra parte, la recesión económica se traduce en una sobreoferta laboral que el “mercado”, que aspira a ser el principal regulador de las relaciones sociales, no puede absorber. Como en un círculo vicioso, cuantos más egresados se estacionan en las largas filas de espera del reducido mercado laboral, más son los ingresantes que buscan salir a flote con un título universitario. Ahora bien, lograr ese título no es fácil.

Los estudiantes fracasan por diversas causas en su intento de emprender con éxito una carrera universitaria, pero son las causas externas a ellos las que más deberían preocuparnos. Un alumno que reprueba alguna materia porque debe tomar su teoría desde la ventana del aula o porque no consigue el libro de textos es síntoma de un cierto fracaso de la sociedad, y es allí donde deben dirigirse – de hecho los reclamos gremiales van siempre en esa dirección – las acciones; sin embargo, no es menos importante el caso de aquel estudiante que es desaprobado en sus estudios porque algún engranaje de ese complejo mecanismo docente-educativo no encaja bien o está mal lubricado.

Abordaremos en este trabajo la importancia de la comunicación educativa, uno de los engranajes que consideramos clave a la luz de nuestra experiencia como docentes de práctica en la asignatura Introducción a la Matemática (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta); en la interacción profesor-alumno la comunicación podrá ser afianzada por medio de una de las técnicas que consideramos más adecuada como es *“La Entrevista Clínica”*. Desde este punto de vista la Entrevista Clínica actúa como un puente por el que circula no solamente la información y el conocimiento específico sino también como un proceso que debe enlazar lo más estrechamente posible las experiencias de vida de ambos interlocutores

La universidad es un terreno en el que se construyen mujeres y hombres libres, íntegros y esa edificación de la persona posee un instrumento importante y versátil como la entrevista. Reflejamos entonces, en estas páginas, nuestro plan de investigar en qué medida la utilización de esta técnica podrá incidir en un aumento de los rendimientos académicos de los alumnos.

El presente trabajo engarza con precisión en el Proyecto de Investigación Nº1110 del C. I. U. N. Sa. *"Tutores-Alumnos: una alternativa para las asignaturas numerosas de los primeros años".* En este proyecto se pretende la superación de los niveles de rendimiento académico estudiantiles a través de la incorporación de alumnos avanzados (tutores), los que son capacitados en innovaciones pedagógicas y participan, desde su experiencia estudiantil, en la cotidiana construcción del aprendizaje.

La asignatura Introducción a la Matemática es la primera de las matemáticas con la que se encuentran los ingresantes; es común a las carreras de Licenciatura en Análisis de Sistemas y Profesorado en Matemática. Históricamente ha sido la materia con mayor población estudiantil en la facultad de Ciencias Exactas; en el último año hubo 888 inscriptos, de los cuales 628 hicieron efectiva su concurrencia a las aulas. Se observa un enorme desgranamiento, el que se acentúa a la hora de contar los que se presentaron a rendir la primera evaluación parcial, solamente 367 (¡¡ 41,33 % !!). Las causas de esta situación han sido y continúan siendo estudiadas tanto por los responsables de la asignatura como por docentes de otras cátedras en las que se han dado altos porcentajes de pérdida.

De este modo, el universo de estudio es de 367 estudiantes, los que fueron distribuidos en 13 comisiones de trabajos prácticos y en tres turnos de teoría.

2.- Marco teórico

2.1.- La Entrevista Clínica

La entrevista clínica (Piaget, Novak, Gowin y otros) constituye una técnica de interrogación donde se desarrolla una conversación planificada con el sujeto entrevistado, y tiene como objeto recoger información que refleje sus conocimientos, opiniones, intereses, necesidades, actitudes o intenciones.

Se decidió aplicar esta técnica en la asignatura Introducción a la Matemática debido a que es el primer escalón que el estudiante secundario enfrenta al ingresar a la universidad e históricamente ha presentado bajos niveles de retención y de rendimiento académico, sumado al hecho de que el contacto con el docente es mínimo por razones de superpoblación.

Resulta oportuno aplicar la entrevista para conocer, con mayor detenimiento, el desenvolvimiento del proceso de aprendizaje en un grupo seleccionado de alumnos, con la hipótesis de que este contacto personalizado con los tutores y profesores de práctica traería como consecuencia una mejora en los rendimientos académicos.

3.- Experimento

3.1.- Descripción del experimento

Se tomó un grupo aleatorio de 10 estudiantes por cada comisión de investigación (8 comisiones, 80 estudiantes en total), seleccionados por muestreo sistemático, y se les hizo una secuencia de dos entrevistas clínicas de 20 minutos cada una en dos oportunidades (al principio del cuatrimestre y antes de la segunda evaluación parcial). Las entrevistas fueron realizadas por los tutores alumnos de la cátedra, previamente entrenados. Las 5 comisiones restantes se consideraron de control.

Se midió el rendimiento académico en los 78 estudiantes bajo experimentación (dos de los seleccionados desertaron antes de la primera entrevista), asumiendo como indicador válido el porcentaje de alumnos que regularizaron la materia entre los entrevistados frente al mismo resultado en la población total y en las comisiones testigos (cinco). Con esto se puso a prueba la hipótesis de que se puede mejorar ese parámetro con la aplicación metódica de la técnica de la entrevista.

3.2.- Objetivos

- Conocer y seguir, en un grado más preciso que el habitual, los avances del proceso de enseñanza–aprendizaje en el estudiante.
- Identificar los puntos débiles en cada estudiante para poder orientarlos y reforzarlos en esas falencias, por medio de clases de apoyo que los tutores habían establecido.
- Medir si el uso de esta técnica se traduce en mejores rendimientos académicos en los estudiantes involucrados.

3.3.- Entrenamiento de los tutores

A comienzos del cuatrimestre se dictó un curso de 18 horas para los tutores, estructurado en clases teórico-prácticas que incluyeron un trabajo grupal final de dramatización. Para el desarrollo del curso se consideró el siguiente temario:

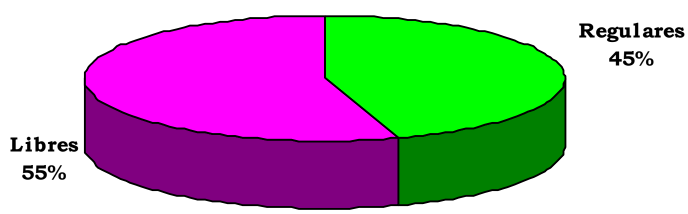
Concepto y antecedentes históricos. Caracterización de la técnica. Clasificación de las entrevistas. Planificación: selección del contenido, selección y ordenación de las preguntas. Elementos fundamentales de una entrevista. Tipos de respuestas.

3.4.- Resultados

Se apreció una sensible mejora en el rendimiento del grupo de los entrevistados en comparación con la población total de la cátedra, como así también en comparación con las comisiones testigos. Es interesante destacar que de los 40 estudiantes que fueron entrevistados dos veces (los otros 38 abandonaron el cursado de la materia por diversas razones), el porcentaje de regularidad ascendió al 60 %, es decir, un tercio mayor que el promedio general de la cátedra).

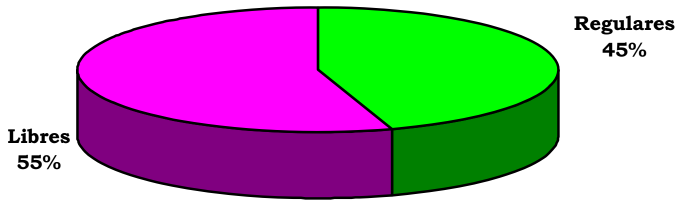
A continuación se presenta, en forma gráfica, los resultados de los índices de regularidad en los distintos grupos de estudiantes:

Alumnos de la cátedra



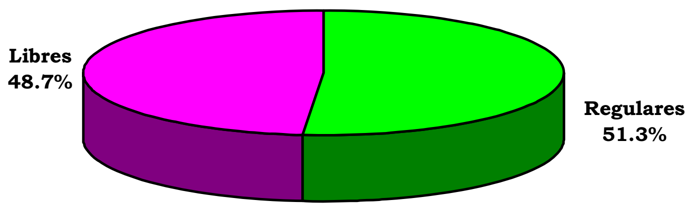
Regularización global: 165 alumnos sobre 367 que rindieron el primer parcial = **45 %**

Alumnos de comisiones de control



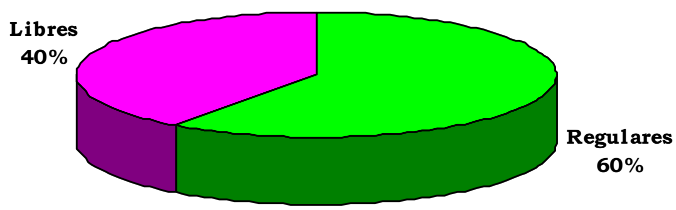
Regularización en comisiones de control: 63 alumnos sobre 140 en total = **45 %**

Alumnos entrevistados al menos una vez



Regularización en el grupo de investigación: 40 sobre 78 = **51, 3 %**

Alumnos entrevistados dos veces



Regularización entre los estudiantes del Grupo de Investigación que concurrieron a las dos entrevistas: 16 sobre 24 = **60 %**.

4.- Conclusiones

Al analizar los resultados del rendimiento de los distintos grupos de alumnos considerados resulta alentador notar un aumento en el porcentaje de los que fueron entrevistados con respecto a los de la cátedra en general, y con respecto a las comisiones de control. Es de esperar que este incremento se deba al uso de la entrevista clínica como una técnica que permite llegar al alumno en forma más directa; el estudiante se siente más contenido y responde en forma más favorable.

Este trabajo sólo muestra la influencia de la entrevista clínica en el rendimiento académico del estudiantado. En un trabajo futuro se analizará la manera en que la asignatura incorporará la información sobre los puntos más dificultosos señalados por los estudiantes para orientarlos en su superación.

Si bien es cierto que la entrevista fue utilizada de manera experimental sólo durante este año, es la intención de este proyecto de aplicarla en forma sucesiva durante los próximos períodos para así poder constatar la conveniencia de su aplicación, validando la hipótesis planteada. Si esto se realiza se contaría con recursos humanos más experimentados en el tema, así como recursos materiales que hagan cada vez más eficiente esta herramienta de apoyo al alumno.

Por supuesto que resulta una meticulosa tarea, sin embargo cualquier aporte que se haga en beneficio del estudiante, por mínimo que sea, significará haber lubricado algunos engranajes del delicado mecanismo del aprendizaje de la matemáticas básicas.

5- Bibliografía consultada

Castellano, S. (1996). *"La investigación en el campo de la educación: retos y alternativas".* Inst. Sup. Pedagóg. Enrique J. Varona. La Habana, Cuba.

Novak, D. y Gowin, D. (1988). *"Aprendiendo a aprender"* – Edit. Martínez Roca.

Herran, M. y Garzón, W.. (2001). *"Comunicarnos mejor para aprender más".* Tesina de la Diplomatura en Matemática y Educación Matemática. Universidad Camilo Cienfuegos. Matanzas, Cuba.

Garzón, W. y Herran, M. (2004). Notas del curso: *"Acercándonos al estudiante: la entrevista clínica".* Facultad de Cs. Exactas, Univ. Nac. de Salta, Argentina.

6.- Anexos

6.1.- Cuestionarios guía y algunas respuestas

6.1.1.- Cuestionario guía de la primera entrevista y una respuesta:

1 ¿Cómo te sientes en la universidad?. ¿Has podido organizar adecuadamente tus horarios en la facultad?.

2 ¿Dónde y cuándo cursaste tus estudios secundarios?.

3 ¿Qué puedes decirnos de tus conocimientos previos de matemática?.

4 ¿Tienes dificultades extra-académicas para llevar adelante tus estudios?. ¿En tu domicilio existen comodidades o inconvenientes para estudiar?.

5 En lo referente a los contenidos vistos en Introducción, ¿en qué puntos has encontrado más dificultades?.

6 Explícanos de qué manera te preparaste para rendir los coloquios.

7 Danos una opinión sobre las clases que recibes en la materia (teoría y práctica); recomendaciones.

Entrevistado I (entrevistado una vez, regularizó):

1 Sentí bastante el cambio, venir de un nivel secundario a la universidad no es fácil. Todavía me cuesta, no tanto por las materias que son bastantes "pesadas", sino porque no he encontrado un grupo de amigos o compañeros para reunirme o charlar, sentirme en confianza. Aquí es distinto, no conocía a nadie, al principio todos nos mirábamos, pero ni nos saludamos ni se entablaba conversaciones; ni siquiera por ejercicios del práctico, excepto aquellos que hicieron el curso nivelatorio y fueron compañeros. Eso es lo que mas me costó, porque yo solía tener mi grupo, y ahora son todos nuevos para mí. Con respeto a los horarios puedo decir que están bien organizados, no tengo problemas para nada.

2 Los estudios secundarios lo realicé en el Colegio del Milagro, que tiene una orientación humanista. En quinto año teníamos muy poco de matemática.

3 Lo que he aprendido en el secundario me sirvió bastante aunque algunos temas me resultan un poco complicado porque ni recuerdo haberlos visto; como ya dije no tuve mucha matemática en los últimos años.

4 La única dificultad que puedo mencionar es que en mi casa no existen muchas comodidades, porque tengo hermanos y ...; por eso muchas veces uno no se concentra, porque ya te molestan por algo, y bueno es inevitable distraerse. Pero igual creo que eso ya depende de nosotros, solo que cuesta un poco.

5 Un tema que no me gustó, tal vez porque me cuesta entenderlo, es "lógica". Los otros temas me parecieron entendibles a pesar de que algunos ejercicios me costaron realizarlos.

6 Para los coloquios solo hacia ejercicios del práctico. No más que eso.

7 Las clases teóricas y prácticas son buenas por que se entiende y los docentes son accesibles, aunque me gustaría que en la teoría se den otros ejercicios como ejemplo para que haya participación de los alumnos.

6.1.2.- *Cuestionario Guía de la segunda entrevista y una respuesta*:

1 ¿Te has sentido apoyado por tu familia durante el cuatrimestre?.

2 ¿La vida universitaria forma parte de tu vida cotidiana?.

3 ¿Fue provechoso el sistema de coloquios implementado en Introducción a la Matemática?; ¿por qué?.

4 ¿Cuáles temas te resultaron los más sencillos y cuáles los más dificultosos?.

5 En el tema funciones, ¿qué puntos te generaron más esfuerzos?.

6 Según tu óptica, ¿la comprensión de los enunciados es un punto que debes reforzar?.

7 La determinación de la imagen de una función y sus aplicaciones, ¿es un tema que has asimilado bien?.

Entrevistada II (regularizó, entrevistada dos veces):

1 Más o menos, digamos que sí, porque en mi casa no hay nadie que haya estudiado, ni mis padres ni mis hermanos, y cuando les cuento las cosas de la facultad no me comprenden demasiado, es un mundo ajeno al que ellos viven. Además querían elegirme la carrera, pero al final elegí yo, y me gusta lo que elegí (Analista de Sistemas). Mis padres decían que estudiara en Económicas o en Salud, yo por mi parte quería estudiar ingeniería, pero me di cuenta que es un poco difícil.

2 Casi, casi; me cuesta adaptarme a la vida universitaria, y sobre todo porque todos los fines de semana me voy a mi casa, extraño a mi familia y a mis amigos. Vivo con otros estudiantes y todavía no he podido acostumbrarme del todo este cambio de costumbre y de lugares.

3 ¡Sí, sí, sí!. Principalmente por los puntos adicionales (risas). Además me ayudaba a preocuparme más por estudiar o prepararme más para rendir, leyendo un poco más o consultando algún libro. Además sentía que aprendía más antes de cada parcial.

4 Los temas más sencillos fueron: función lineal, exponencial y logarítmica, ya que los había visto en el colegio. Los más difíciles fueron función cuadrática (de ese tema no vi nada en el colegio), álgebra de funciones y trigonometría. Creo que es porque en el último año del secundario no tuvimos matemática.

5 La composición de funciones, el dominio de la compuesta; también la cuadrática (vértices y completar cuadrados); también la clasificación de funciones, en algunos casos.

6 Sí, me falta vocabulario para entender los problemas.

7 Sí, lo entiendo bien.

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN LA EDUCACIÓN POLIMODAL Y EN LA UNIVERSIDAD. DIAGNÓSTICO SOBRE NÚMEROS REALES.

E. GüichaL; G. Guala; A. Malet; V. Oscherov
Universidad Nacional del Sur. Argentina
eguichal@uns.edu.ar

Campo de investigación: Didáctica de la Matemática; Nivel Educativo: Medio y Superior

RESUMEN

Los alumnos ingresantes a nuestra universidad muestran déficit en lo referido a competencias y a contenidos disciplinares básicos de Matemática. Considerando esta realidad y la importancia que tiene el Cálculo como materia básica, nos propusimos llevar a cabo el Proyecto: *La Enseñanza del Cálculo. Articulación entre el Nivel Polimodal y el Nivel Universitario*,[1] con el fin de identificar obstáculos, que dificultan la comprensión de los conceptos fundamentales de este campo conceptual, para generar estrategias que contribuyan al mejoramiento de su enseñanza y de su aprendizaje. Como metodología de investigación y para guiar tanto las experiencias en clase como para estudiar los resultados de enseñanza, utilizaremos una ingeniería didáctica. En el marco de la etapa de análisis preliminar que estamos transitando, nos referiremos al análisis e interpretación de los datos obtenidos en una de las instancias de diagnóstico en la que abordamos el contenido: Números Reales.

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN LA EDUCACIÓN POLIMODAL Y EN LA UNIVERSIDAD. DIAGNÓSTICO SOBRE NÚMEROS REALES.

INTRODUCCIÓN

El desempeño de los alumnos que ingresan a la Universidad Nacional del Sur (UNS), específicamente en el transcurso de los últimos períodos lectivos, ha mostrado déficit en lo referido a las competencias y en contenidos disciplinares básicos de Matemática. Este déficit se observó en cuestiones tales como representaciones parciales y fragmentadas del significado de un concepto, dificultades para relacionar diferentes registros de representación, dificultades para sobrepasar los modos de pensamiento numérico y algebraico. Esta situación sería una de las causas que provoca abandono y deserción en el primer año de las carreras universitarias que incluyen estudios matemáticos en la UNS. Considerando esta realidad y la importancia que tiene el Cálculo[2] como materia básica, nos hemos propuesto identificar obstáculos que dificultan la comprensión de sus conceptos fundamentales a fin de generar estrategias para un mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje.

---

[1] Proyecto de Grupo de Investigación (PGI) subsidiado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNS.
[2] En todo este trabajo, al referirnos al Cálculo, entendemos "Cálculo Diferencial e Integral", con funciones de una variable real.

Entendemos que la situación a la que hacemos referencia es un problema tanto para las previsiones de desarrollo universitario como para las autoridades del nivel educativo previo al universitario (Educación Polimodal) que determinan la necesidad de un trabajo conjunto de articulación entre ambos niveles que faciliten la generación de instancias superadoras de la situación presente.

REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En nuestro proyecto de investigación enfocamos un problema complejo, multidimensional, como es el enseñar, el aprender y sus resultados. Trabajamos sobre los problemas de articulación entre la escuela media y la universidad en el área de matemática dentro de una aproximación didáctica. Centramos la investigación sobre un dominio que desempeña un importante papel en esta articulación y que es el Cálculo, en particular sobre las nociones básicas alrededor de las que este campo se estructura: Números reales; Funciones; Límites de sucesiones numéricas y funciones; Continuidad; Derivada e Integral. (Artigue, M. 1991)
Esta particularidad nos remite a la formulación de referentes epistemológicos con respecto a una de las dimensiones de nuestro objeto de estudio. En este sentido consideramos para este trabajo la siguiente hipótesis: *Las nociones de número real y las funciones son conceptos en construcción al momento de cursar el primer año universitario, entonces el aprendizaje del Cálculo es un motor para su conceptualización.* (Artigue, M. 1995 a)
Como metodología de investigación y para guiar tanto las experiencias en clase como para estudiar los resultados de enseñanza utilizamos una ingeniería didáctica (Artigue, M. 1995 b). En el marco de esta propuesta la etapa del Análisis Preliminar abarcó:

- Diagnóstico sobre el estado actual de la enseñanza del tema.
- Análisis de documentación referida al tema en ambos niveles.
- Análisis de programas de Educación Polimodal y del de las asignaturas del primer año universitario.
- Análisis de textos de Matemática de Educación Polimodal y de Cálculo para alumnos de primer año universitario.
- Diagnóstico sobre los conocimientos de que disponen los alumnos ingresantes en la Universidad para abordar los contenidos del Cálculo.
- Indagación acerca de las dificultades con el aprendizaje de alumnos recursantes y de las hipótesis que los mismos tienen con respecto a sus dificultades.
- Estudio de las concepciones de los docentes y de las concepciones de los alumnos de ambos niveles, antes de participar en experiencias y después de estas.

El avance referido al Análisis Preliminar que presentamos en este caso se centra en el *Diagnóstico sobre los conocimientos que disponen los alumnos ingresantes en la Universidad para abordar los contenidos del Cálculo* y en ese contexto, el caso particular del *Diagnóstico sobre Números Reales.* A partir del mismo esperamos disponer de hipótesis sobre las dificultades de los alumnos y de un conjunto de datos para el diseño de la ingeniería a utilizar en el aula.

CON QUÉ ALUMNOS TRABAJAMOS

Si bien aquí nos ocuparemos del Diagnóstico sobre números reales cabe aclarar que tanto éste como el referido a funciones fueron realizados por 75 alumnos ingresantes a la carrera de Ingeniería Civil. Así mismo debemos mencionar que la institución dicta un Curso de Nivelación durante el mes previo a la iniciación de las clases, optativo, con un examen obligatorio al concluir el mismo, que nuestros alumnos habían cumplimentado.

EL DIAGNÓSTICO Y SUS RESULTADOS

En principio mencionaremos que las actividades propuestas en el diagnóstico se relacionan con aspectos que tienen que ver con lo que entendemos por *sentido del número*, con el cual es necesario contar para iniciarse en el estudio de Cálculo.

Entendemos que se tiene *sentido del número* cuando se puede comprender el significado del uso de distintos tipos de números, compararlos, relacionarlos, reconocer sus magnitudes relativas, distinguir en qué situaciones es pertinente utilizarlos, operar con ellos, juzgar si un resultado numérico es razonable y expresarlo de manera conveniente. Así mismo, cuando se puede interpretar críticamente la información que se presenta en términos numéricos; por ejemplo, mediante gráficas, tablas, porcentajes, datos estadísticos; y se es capaz de percibir regularidades, extraer pautas, investigar y conocer relaciones y propiedades numéricas.

Teniendo en cuenta lo antedicho y a partir de los datos obtenidos en las entrevistas realizadas a docentes de Educación Polimodal (G. Guala et al; 2005) así como del análisis de textos de Matemática destinados a ese nivel, en el Diagnóstico se plantearon actividades relacionadas con:

- Distintas notaciones para los números reales. Notación decimal. Significado de la notación posicional. Aproximaciones.
- Notación particular para los racionales, como cocientes de enteros. Casos que llevan a expresiones decimales periódicas.
- Operaciones algebraicas. Propiedades. Porcentajes. Resolución de ecuaciones lineales.
- Orden. Representación en la recta. Densidad de los números racionales. Compatibilidad con las operaciones algebraicas.
- Completitud.

Con respecto a las habilidades cognitivas, las actividades abarcaron requerimientos acerca de: operar con distintos registros; coloquial, algebraico, gráfico, simbólico; análisis y aplicación de información y resolución de problemas.

El diagnóstico contiene nueve actividades con distintos grados de dificultad. Queremos comentar aquellos casos que consideramos más significativos.

Actividad: La afirmación: "*El resultado de dividir dos números reales en algunos casos puede ser mayor que el dividendo"* ¿Es verdadera o falsa? Explica.

El 50 % responde correctamente aportando ejemplos donde la afirmación se verifica.

De las respuestas incorrectas, 39 %, seleccionamos explicaciones que nos parecen interesantes al momento de explicar concepciones erróneas, que actúan como obstáculos cuando los alumnos operan matemáticamente.

- "Falso, porque al dividendo se lo divide por lo tanto va a ser siempre menor"
- "Falso, porque el dividendo es el número que estamos fraccionando"
- "Falso, el dividendo es el número que se "divide en partes" tantas veces como lo indica el divisor"
- "Falso, porque en una división el cociente es menor que el dividendo ya que a este se le está buscando reducirlo al dividirlo por x unidades"

La investigación nos permite reconocer que los obstáculos, en algunos casos, guardan relación con el sistema de enseñanza, al trasladar el algoritmo de la división entera al conjunto de los números reales.

Actividad: *Escribe, usando lenguaje algebraico, expresiones que describan las siguientes informaciones relativas a la base y a la altura de un rectángulo cuyas medidas expresadas en centímetros se representan como* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *respectivamente*

a) La base excede en 5 unidades a la altura

b) La altura es $\frac{2}{5}$ de la base

c) La base es a la altura como 7 es a 3

d) El área del rectángulo es 50 cm^2

e) La base y la altura difieren en 10 unidades

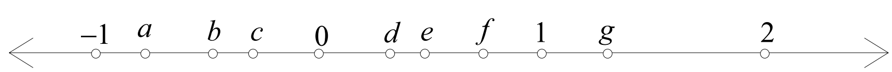
Esta actividad, en general, fue resuelta correctamente. Pero, nos parece interesante señalar el proceder de un grupo, el 24 %, que para poder pensar la solución al problema planteado necesitaron traducir el nombre de las variables, que en el enunciado son x e y, a las conocidas b y h. Esta dificultad nos permite inferir que dado que desde los primeros niveles de escolarización los elementos de un rectángulo se designan por b y h, cuando el alumno resuelve la situación problemática, aparece como dificultad la comprensión del sentido de la base y la altura del rectángulo al ser nombrados con x e y.

Actividad: Une por medio de una flecha cada enunciado con la expresión simbólica que le corresponde

a) El doble de la suma de tres números.	1) $\frac{a}{3} - b$
b) El doble de un número menos 7.	2) $d = 3x$
c) La distancia (*d*) recorrida en tres horas a	3) $x = 2x + 15$
una velocidad de *x* kilómetros por hora.	4) $2a - 7$
d) La tercera parte de un número menos otro	5) $d = \frac{x}{3}$
e) La edad actual de una persona si dentro	6) $(a+b)^2$
de 15 años se habrá duplicado	7) $2(a+b+c)$
f) El cuadrado de una suma	8) $x = 2x - 15$

Todos los items son expresiones coloquiales que suponen una traducción inmediata al registro algebraico (las respuestas correctas superan en todos los casos el 85 %) salvo el inciso e) (el 48 % responde incorrectamente) donde es necesario construir un modelo que responda a la situación problemática planteada. Es significativo que señalen como correcta la número 3 y que tampoco recurran a la realización de una sencilla verificación con la que podrían comprobar lo erróneo del modelo elegido.

Actividad: En el siguiente gráfico se han representado los números reales: -1, *a*, *b*, *c*, 0, *d*, *e*, *f*, 1, *g* y 2.



a) ¿Cuál de ellos es el número más próximo a $e \cdot f$? Explica por qué.

b) ¿Cuál de ellos es el número más próximo a $\frac{1}{f}$? Explica por qué.

c) Decide si las siguientes afirmaciones son Verdaderas (V), Falsas (F) o si es imposible determinar su validez (ND).

c_1) $a > b$ $\quad$ c_2) $a \cdot b > d \cdot e$ $\quad$ c_3) $\sqrt{b \cdot c}$ no es un número real.

Esta es una actividad que requiere del alumno mayor nivel de abstracción ya que supone una lectura e interpretación del gráfico. En la misma se consideran números que son datos y otros representados por puntos en el eje real designados con letras con los que se debe operar. Es así que, esto representa una de las mayores dificultades detectadas en las respuestas de los alumnos. En muchos casos colocan por encima de algunas letras un número que consideran aproximado por el lugar que ocupa la misma en la recta.
Así mismo, al no reconocer a f como un número entre 0 y 1 y por lo tanto su inverso como un número mayor que la unidad el 57 % de los alumnos responde erróneamente.
En general en esta actividad se observan dificultades en la comprensión de las propiedades de los números.
Actividad: En cada caso coloca el signo "=", ">" o "<", según corresponda.

a) 1 … 0,9999…… $\quad$ b) $-8\sqrt{14} + 32$ … 0 $\quad$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ … $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ d) 0,454545…… … $\frac{45}{98}$

Entre el 92 % y el 97 % responden correctamente los incisos b), c) y d). Merece un párrafo aparte el inciso a) al que responden incorrectamente el 95 % de los alumnos. Nuevamente, observamos que desde el sistema educativo y de los textos utilizados los alumnos adquieren el uso de reglas que les permiten convertir números periódicos en fracciones, y que sin embargo no son utilizadas aquí al plantear una situación fuera del contexto habitual
Actividad: Considera la secuencia de números: 3, 7, 11, 15, ... (los puntos suspensivos indican aquí que la secuencia continúa siguiendo el esquema sugerido por los números dados.
Llamamos "primer término" al número 3, "segundo término" al número 7 y así siguiendo.
a) Calcula el quinto término $\quad$ b) Calcula el octavo término
c) Indica una fórmula que te permita hallar cualquier término y utilízala para hallar el término que ocupa el lugar 400.
Más del 90 % contestó correctamente los dos primeros items pero un 63 % no logra escribir el modelo que representa la situación.

REFLEXIÓN FINAL

Los resultados del diagnóstico y los aportes de otras actividades que se fueron realizando en el marco del análisis preliminar nos permiten reflexionar en varios sentidos que orientarán las actividades futuras.
Esta reflexión está basada en los distintos planos planteados por Artigue (1995 a): epistemológico, cognitivo y didáctico, a partir del estudio de los obstáculos que hace Brousseau (1997).
Desde el plano epistemológico
En el conjunto de los Números Reales distinguimos una Estructura Algebraica, una Estructura de Orden y el Axioma de Completitud, a lo que agregamos la recta como

"soporte natural" para representarlos. Como resultado del diagnóstico, las entrevistas con docentes del Nivel Polimodal y el análisis de bibliografía del nivel, hemos podido constatar que se prioriza el tratamiento algebraico, no se problematiza la noción de completitud sin la cual no se da la posibilidad de existencia de los irracionales ni tampoco la notación decimal. Cuando se escribe, por ejemplo, 0.999..., no se discute el significado de los puntos suspensivos; tampoco, desde lo geométrico, el hecho de dibujar la recta con un trazo continuo al momento de representar gráficamente los números reales, ni el significado geométrico de continuidad de la recta.

Desde el plano didáctico

Podemos observar que en los últimos años se ha trabajado en la contextualización de los conceptos matemáticos para otorgarles significado. Con el conjunto de los racionales, donde la contextualización puede darse a través de problemas de la realidad que se basan en mediciones, esto pareciera razonable. Pero para construir el conjunto de los números reales consideramos que el axioma de completitud es imprescindible ya que por ejemplo no podemos mostrar la irracionalidad de π o la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ a partir de algún instrumento de medición. Es cierto que se realizan construcciones geométricas para ubicar en la recta las raíces cuadradas de algunos números primos, pero no se plantea que no existen construcciones geométricas clásicas que permitan ubicar números como π o como e o cualquiera de los infinitos números trascendentes, así como tampoco se hace la distinción entre números algebraicos y números trascendentes.

Los alumnos se encontrarían en un nivel "nocional" de las propiedades de los números, generándose a partir de este diagnóstico y como desafío para la situación didáctica el planteamiento de propuestas que permitan movilizar este conocimiento en situaciones complejas y llegar a la construcción del concepto.

Desde el plano cognitivo

Los alumnos muestran la "aplicación" de habilidades cognitivas en contextos similares a los que fueron aprendidas. Ello genera la necesidad de plantear la recuperación y puesta en juego de lo aprendido con respecto a los números reales en la resolución de problemas o en situaciones simuladas o reales diferentes al contexto en que fueron aprendidas, si lo que se pretende es que las habilidades cognitivas se expliciten en saberes prácticos.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1991): Analysis. En Tall, D. (ed): *Advanced Mathematical Thinking.* The Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Artigue. M. (1995 a):*La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En: P. Gómez (Ed.): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140) ; México, Grupo Editorial Iberoamérica..

Artigue. M. (1995 b): *Ingeniería didáctica*. En P.Gómez (Ed.): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59); México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998): L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. Recherches. *Didactique des Mathématiques*, Vol 18.2. Grenoble: La Penseé Sauvage,

Azcárate, C.; Casadevall, M.; Casellas, E.; Bosch, D. (1996): *Cálculo Diferencial e Integral*. Colección: Educación Matemática en Secundaria. España: Editorial Síntesis.

Bergé, A.; Sessa, C. (2003): Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *RELIME*, vol. 6 Núm 3, Noviembre 2003, pp. 163-197.

Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Farfán Márquez, R. M. (1996): Matemática Educativa e Ingeniería Didáctica. Documento de ICME 8. España.

Guala, G., Güichal, E., Malet, A., Oscherov, V. (2005): La enseñanza del Cálculo en la Educación Polimodal y en la Universidad. Continuidades, rupturas y obstáculos. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy. En internet: www.edumat.com.ar

FENÓMENOS LIGADOS A LA VALIDACIÓN EN ÁLGEBRA

Mabel Panizza
Universidad de Buenos Aires (Ciclo Básico Común)- Argentina
mpanizza@mail.retina.ar

Campo de Investigación: Didáctica de la Matemática; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

El presente trabajo se inserta en una investigación sobre razonamiento matemático en el dominio del álgebra. En trabajos anteriores (Panizza, 2001; Panizza & Drouhard, 2002, 2003; Drouhard & Panizza, 2003) mostramos una tipología de generalizaciones espontáneas y diversos fenómenos ligados al control por conversión a distintos registros semióticos. En continuidad con estos trabajos, nos hemos dedicado a precisar aspectos relacionados con la capacidad de los alumnos para reconocer la necesidad de validar sus conjeturas, y con los medios de los que disponen para validar. Los fenómenos a describir aquí provienen por un lado de las (re)formulaciones que los alumnos hacen en lenguaje natural de los enunciados dados en el registro de las escrituras algebraicas, y por otro lado del nivel de familiaridad de los alumnos con el campo de objetos de referencia de dichos enunciados. Mostramos también cómo estos fenómenos afectan la capacidad de razonar y definir en matemática.

Introducción

El rol esencial otorgado en nuestra investigación a la semiosis y al marco teórico de Registros de Representación Semiótica provisto por Duval (1993, 1995), adoptado para el análisis del funcionamiento cognitivo en el área, nos ha conducido a profundizar en los procesos de razonamiento ligados al tratamiento dentro del registro semiótico de las escrituras algebraicas y a la *conversión a otros registros*.

En este contexto, encontramos que el análisis del valor de verdad de enunciados algebraicos y el reconocimiento de objetos matemáticos definidos algebraicamente (por ejemplo por ecuaciones e inecuaciones) supone *conversiones implícitas* a otros registros, muy especialmente al registro verbal. La naturaleza de este tipo de conversiones *implícitas* es muy diferente de la naturaleza de las conversiones *explícitamente solicitadas* por una actividad, y se presentan fenómenos de importancia en relación con la capacidad de razonar y definir en matemática (Panizza, 2005[a], Panizza 2005[b]). A grandes rasgos, podemos decir que las asociaciones producidas por las conversiones implícitas al lenguaje natural que los alumnos realizan de los enunciados matemáticos desencadenan procesos modulados por las características del razonamiento natural, muy especialmente *generalizaciones* y *definiciones características* (Duval, 1995). Estos procesos comandan a su vez las *reformulaciones* que hacen de los enunciados algebraicos y la *capacidad para reconocer la necesidad* de validarlos.

Por otra parte, encontramos que el *grado de familiarización* con los objetos de referencia de los enunciados es a menudo un elemento crucial que subyace a la *capacidad de validar* un enunciado. Más específicamente, nuestras investigaciones muestran que la débil competencia de los alumnos para encontrar *por sí mismos* ejemplos y contraejemplos compite con su capacidad lógica para analizar el valor de verdad de los enunciados. De esta manera, el grado de familiarización con los objetos de referencia comanda en gran medida las pruebas, las explicaciones, los razonamientos en general y las definiciones, en el nivel de racionalidad matemática de los alumnos de la población estudiada.

En este trabajo mostramos estos fenómenos a través del análisis de un caso. En Panizza (2002), presentamos –entre otros- el ejemplo de Brenda a fin de describir el fenómeno de las *generalizaciones espontáneas* encontradas en el dominio del álgebra. El especial interés de los procesos desplegados por Brenda motivó la investigación en las líneas aquí comunicadas.

Análisis de un ejemplo, el caso de Brenda

El problema

"Decidir si la siguiente implicación es verdadera o falsa:

$\forall x \in R$: $2x^2 > x\,(x+1) \Rightarrow x > 1$"

fue dado en clase para analizar la competencia algebraica para decidir la relación entre los conjuntos solución de dos inecuaciones, -en un contexto de implicación-.

Al resolverlo, Brenda considera diversos ejemplos : x =0, x =1, x =2, x =3, x = -1, x =-2, x =-3,
x =-4 analizando el valor de verdad del antecedente y del consecuente en cada caso.

Luego concluye, correctamente, que el enunciado es falso, porque "se pueden encontrar valores de x menores que 1 que cumplan $2x^2 > x\,(x+1)$"

El profesor le pide que explique cómo lo pensó.

Brenda dice que "–2 , –3, -4 *son contraejemplos, porque para ellos el antecedente es verdadero y el consecuente es falso*".

De acuerdo con la tarea, Brenda podría haberse detenido allí, pero ella agrega inmediatamente:

B: *ah, es* /x/ *lo que habría que haber puesto*! Es "$\forall x \in$ R: $2x^2 > x\,(x+1) \Rightarrow /x/ >1$" *lo que es verdadero*!".

Analizaremos este ejemplo desde tres puntos de vista:

1) El de la corrección del enunciado a través de una generalización
2) El de la capacidad para percibir la necesidad de validación
3) El de la capacidad para validar el enunciado

1. Corrección del enunciado a través de una generalización

Brenda -habiendo considerado distintos ejemplos (0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, -4) en su análisis del primer enunciado dado por el profesor- concluye correctamente que el enunciado es falso. Ahora bien, a la hora de ***argumentar*** ella muestra, también correctamente, que **algunos de esos valores** (x = -4, x = -3, x = -2) son contraejemplos.

Es importante advertir que en ese momento ella corrige el enunciado proponiendo una conjetura que considera verdadera. Según nuestra interpretación, esta corrección la rea-

liza en base a una *generalización espontánea* (del conjunto de contraejemplos)[1]. Efectivamente, la tarea no pide encontrar una regularidad en los contraejemplos.
¿En qué consiste dicha generalización? Cuando Brenda argumenta ella inmediatamente junta todos los contraejemplos, y los identifica como siendo de un cierto "tipo": se trata de los números cuyo valor absoluto es mayor que 1 ($|x|>1$). Dicho de otra manera, ella *condensa* lo que ve en los contraejemplos por medio de una generalización.
Este tipo de procesos constituye una función psíquica bien conocida, por la cual uno retiene los caracteres típicos más frecuentes, los que son necesarios para un reconocimiento rápido. Por ejemplo, "un pájaro es un animal que vuela". Estas formulaciones a partir de caracteres típicos funcionan luego como definición: es lo que se denomina definición *típica* (Duval, 1995).
Interpretamos que esto es lo que hace Brenda, en tanto el carácter representativo (para ella) de un "individuo" es representativo de toda la población. Efectivamente, los ejemplos numéricos ("individuos") considerados **al argumentar** ($x = -4$, $x = -3$, $x = -2$) tienen para ella la particularidad de ser números cuyo valor absoluto es mayor que 1. En consecuencia, esto caracterizaría (o definiría) a la clase (población) de contraejemplos .

Este tipo de definiciones desencadenan procesos de razonamiento natural. En nuestro análisis, nos interesa el proceso por el cual *una propiedad encontrada en un individuo o en varios individuos* es atribuida automáticamente a *toda* la población (para Brenda, como cada elemento considerado es contraejemplo, entonces la clase entera "$|x| > 1$" estaría formada por contraejemplos).

Si nuestra interpretación es adecuada, diversas consecuencias se derivarían de este tipo de asociaciones. En el caso de Brenda, la corrección del enunciado inicial tendría por función quitar los contraejemplos encontrados:

"*era* $|x|$ *lo que habría que haber puesto", lo que es verdadero es «*$x \varepsilon R$: $2x^2 > x (x +1) \Rightarrow |x|>1$ »"

(en adelante, llamaremos a esto *primera conjetura)*

La expresión "*era* $|x|$ *lo que* ***habría que haber puesto****" parece ir en ese sentido: la falsedad* del enunciado original podría *corregirse, poniendo* en el consecuente la propiedad con la que ella identifica a los contraejemplos ($|x| > 1$).

2. La (in)capacidad para percibir la necesidad de validación

Cuando nosotros consideramos esta producción desde el punto de vista « matemático » esto nos sorprende, porque pensamos que Brenda hubiera podido analizar el valor de verdad de la nueva conjetura, porque la tarea original, que era equivalente (desde el punto de vista lógico) fue correctamente analizada por ella. Pero ella no lo hace.

¿Por qué ella no se plantea ni siquiera la necesidad de justificar este nuevo enunciado?

En primer lugar, esto está ligado al proceso mismo de (re)formulación del enunciado original, el que tendría para Brenda por función *quitar el conjunto de contraejemplos*. Si nuestra interpretación es adecuada, mediante el fenómeno de generalización por *condensación* que acabamos de describir y conformemente a la actitud que caracteriza a la

[1] En Panizza (2002) definimos como *generalización espontánea* a una generalización que surge sin que la tarea demande hacer una generalización.

definición típica -atribuir a la clase entera lo que es válido para los pocos ejemplos típicos- el nuevo enunciado sería *automáticamente* verdadero[2].

Notemos por ahora que desde el punto de vista de la escritura, el nuevo enunciado se forma por el procedimiento de substitución de la escritura « x » por la escritura « $|x|$ ».

Por otra parte, parece que para Brenda, una vez "quitados los contraejemplos", no tiene necesidad de ocuparse de la compatibilidad de las diferentes partes del enunciado. Dicho de otra manera, aunque ella formula una proposición, no encuentra *necesidad* de validarla (como lo hizo con el enunciado inicial, dado por el profesor). Esta actitud de de prestar atención a *los objetos* y su *descripción* ($|x| > 1$), y no a la *nueva relación establecida* nos condujo a encontrar un marco explicativo en el modelo de *niveles de articulación discursiva del sentido en lengua natural en función de dos aspectos de todo discurso (de re/de dicto)* provisto por Duval (1999). Este marco posibilita interpretar los procesos ligados a las formulaciones en lenguaje natural, en términos de diferentes *focalizaciones* de la atención y la *elección de movimientos ascendentes o descendentes* (de los niveles de articulación discursiva).

Interpretamos que todo el proceso discursivo de Brenda está comandado por el análisis y la **atención que presta a los números** con los que analiza el enunciado y a la **forma de describirlos** (en este caso, como siendo números cuyo valor absoluto es mayor que 1). Esta focalización de la atención en los objetos y sus descripciones significa según el modelo que Brenda no se sitúa en los otros niveles de articulación discursiva (caracterizados por proposiciones y encadenamiento de proposiciones). Dicho de otra manera, aunque formula un nuevo enunciado *no se ocupa del problema de la verdad* porque su atención queda localmente dirigida a los objetos y no al enunciado general formulado. La focalización de la atención en los objetos –según Duval- puede facilitar la comprensión pero a la vez inhibir las expresiones mediante frases y discursos coherentes.

Pensamos que este ejemplo muestra un problema general que no es identificado desde la perspectiva del profesor, tal vez por el grado de automatización del control sobre sus prácticas discursivas en este dominio. Efectivamente, el matemático no sólo controla sus asociaciones producidas en lenguaje natural sino que sabe que al realizar substituciones no sólo debe prestar atención a los símbolos aislados sino a las proposiciones y al encadenamiento de proposiciones, focalizando alternadamente su atención según corresponda, y analizando el valor de verdad de las proposiciones y la validez de los razonamientos en juego.

3. La capacidad para validar el enunciado

El segundo de los aspectos mencionados, el del nivel de familiaridad de los alumnos con el campo de objetos de referencia de los enunciados algebraicos, ha sido fructífero para interpretar los procedimientos desplegados por los alumnos al analizar un enunciado. Entendiendo por *objetos familiares* los objetos inmediatamente disponibles a la conciencia de un sujeto[3], encontramos que son éstos los (únicos) objetos que los alumnos utilizan al buscar ejemplos y contraejemplos, aunque puedan concebir otros

---

[2] Desde el punto de vista lógico uno podría decir que estos procesos no explican que para ella estos números sean *todos* los contraejemplos. Sin embargo, desde el punto de vista psicológico es de creer que los *contraejemplos encontrados* se consideren como *todos los contraejemplos* en este nivel de racionalidad (sobre todo cuando se los ha condensado en una « clase » de números como en este caso).

3 Definición debida a Duval (1995)

números cuando son propuestos por otra persona. Entonces, cuando los objetos familiares son muy limitados en relación a las instanciaciones *posibles* del campo de objetos de referencia de los enunciados algebraicos, la posibilidad de analizar el valor de verdad de dichos enunciados se ve reducida, aunque los alumnos perciban la necesidad de validación. Nuevamente presentaremos estos resultados de nuestra investigación -los que tienen gran grado de generalidad-, con el análisis del caso Brenda.
Si desde el punto de vista lógico Brenda hubiera podido validar el enunciado propuesto por ella, hemos considerado en el apartado anterior que ella no encontró necesidad de hacerlo, y hemos apuntado una explicación.

Pero, ¿qué hubiera pasado si ella *hubiera percibido* esta necesidad o el enunciado hubiera sido dado por el profesor para analizar su valor de verdad, como fue dado el primer enunciado?

¿Es suficiente disponer de capacidad lógica para resolver un problema? Dicho de otra manera, dos enunciados que tienen la misma estructura lógica (en el ejemplo, un enunciado general en un contexto de implicación), ¿son equivalentes en complejidad? De otra manera aún, ¿es la complejidad lógica la única "variable" relevante para disponer de medios para validar un enunciado?

Para responder esta pregunta, vale la pena analizar el siguiente diálogo iniciado por el profesor ante la seguridad de Brenda sobre la verdad del enunciado formulado por ella.

El profesor le plantea un contraejemplo:

> « *Qué te parece ¿es verdadero para* - 0,5 ? »

Brenda responde inmediatamente :

> « *ah no, tiene razón, es falso para los racionales* ! » (segunda conjetura)

Notemos en primer lugar que Brenda hace nuevamente una generalización espontánea reconociendo a « - 0,5 » como representativo de los números racionales. Mediante un mecanismo análogo al analizado anteriormente, adjudica a toda esta "clase" de números (los racionales) la propiedad de ser contraejemplos del (nuevo) enunciado. Evidentemente, su afirmación "es falso para los racionales", es incorrecta.

Hasta aquí, el análisis es similar al anterior.

Ahora bien, notemos que « - 0,5 » es un contraejemplo y que ella lo advierte inmediatamente, *una vez sugerido por el profesor*. Pero no se trata de un número que le venga *espontáneamente* a su mente para analizarlo como ejemplo. No es un número que ella considere *por sí misma*.

Esto es lo que nos ha conducido a la importancia de diferenciar los objetos que un sujeto puede reconocer cuando es propuesto por otra persona, de aquellos que le son *familiares*, es decir que son disponibles inmediatamente a la conciencia del sujeto.

Notemos que si bien los dos enunciados -el original y el propuesto por Brenda- son equivalentes desde el punto de vista lógico, no lo son en cuanto a sus contraejemplos. Los contraejemplos del segundo enunciado (los números entre -1 et 0) son difíciles de encontrar para ella, a diferencia de los contraejemplos del primer enunciado (los números negativos) donde pudo encontrar muchos contraejemplos entre sus objetos *familiares* (los enteros negativos).

Dicho de otra manera, si Brenda hubiera percibido la necesidad de validar su nueva conjetura, **ella no hubiera tenido los medios para hacerlo**, porque el conjunto de contraejemplos no está constituido como conjunto de objetos familiares para ella.

Este ejemplo muestra que como afirma Duval (1995) la posibilidad de producir un contraejemplo está ligada al campo de objetos *familiares* para el sujeto que analiza el enunciado. El proceder de Brenda es además bastante representativo de lo que observamos en general en nuestra investigación[4].

Conclusiones

A través de un ejemplo hemos analizado algunas influencias que tienen las formulaciones que los alumnos hacen en lenguaje natural al analizar enunciados algebraicos, y los efectos de una (falta de) familiaridad con los objetos de referencia de los enunciados (ejemplos y contraejemplos).

En la población estudiada, las substituciones que los alumnos hacen en los enunciados, son basadas en las observaciones y descripciones de los objetos que ellos consideran en su análisis (como ejemplos o como contraejemplos). Estos objetos *familiares* generalmente no son representativos de todos los objetos de referencia de los enunciados. Por otra parte, las descripciones que ellos hacen de las observaciones son formuladas en lenguaje natural y en consecuencia son moduladas por los mecanismos ligados al razonamiento natural. Al realizar esas substituciones, su atención se mantiene localmente focalizada en *los cambios producidos* (en su mayoría basados a su vez en sus descripciones de los objetos). Esto explica que, aunque puedan hacer proposiciones o encadenamientos de proposiciones, ellos no los analizan como tales, porque no se sitúan en los diferentes niveles de articulación del discurso, como lo hace un matemático.

Desde el punto de vista didáctico, esta investigación muestra la necesidad de tomar a cargo de la enseñanza la familiarización de los alumnos con los objetos de referencia de los enunciados. Asimismo, muestra que la gestión de una ruptura con las formas de definición moduladas por las características del razonamiento natural, es necesaria para una entrada en las formas de definir en matemática.

Referencias

Drouhard, J. & Panizza, M. (2003). What do the Students Need to Know, in Order to be Able to Actually do Algebra? The Three Orders of knowledge. *Proceedings CERME 3*,. cd Università di Pisa.

Duval, R. (1993). Registres de représentation semiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. **5**, (pp. 37-65).

Duval, R. (1999) . Écritures, raisonnement et d´couverte de la démonstration en mathématiques. *Actes de la 10ème École d'Éte de Didactique des Mathématiques*. Marc Bailleul Eds, Houlgate. (pp. 29-50).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotics et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. Bern.

Panizza, M. (2002). Generalización y Control en álgebra, *actas de Relme 15*, (pp. 213-221).

---

[4] Otros ejemplos pueden verse en Panizza (2005[b])

Panizza, M. & Drouhard, J. (2002). Reasoning Process and Process of Control in Algebra: Recent Theoretical and Experimental Trends in the Project "CESAME". *Proceedings CERME 2*. Márianské Lázné (Rép. Tchèque) Vol II, (pp. 597-600).

Panizza, M. & Drouhard, J. (2002). Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución, *actas Relme 15,* (pp. 207-212).

Panizza, M. (2005 [a]): IX. Fenómenos ligados a la descripción de una curva funcional en un contexto de comunicación, en A. Palermo & I. Cappellacci (Coord.). *Las relaciones entre la teoría y la metodología en la investigación educativa*. Buenos Aires. Argentina. ISBN 987-20565-3-6.

Panizza, M. (2005 [b]) . *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina. 126 páginas. ISBN 987-1081-73-1.

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y ONTOLOGÍA

Leônia Gabardo Negrelli
Universidad Federal de Paraná – UFPR, Brasil
leoniagn@yahoo.com.br

Campo de Investigación: Modelación matemática; Nivel Educativo: Medio y Superior

RESUMEN

El objetivo de este estudio es identificar y discutir componentes de la modelación matemática procurando constituir una base teórica de carácter histórico-filosófico y epistemológico para actividades de modelación en la enseñanza. De entre esos componentes está la concepción ontológica de 'realidad'. Tratamientos dados a la modelación matemática en diversos niveles de enseñanza, de modo especial en la enseñanza superior y en cursos de formación de profesores, presentan la realidade como punto de partida para la elaboración de problemas a ser resueltos matematicamente. Pero, ¿en qué consiste esa realidad? Cuando se aprehende parte de la realidad en un modelo matemático lo que se obtiene es una nueva realidad (matemática), no dada, sino de alguna forma construida. Luego, la actividad de modelación no comenzaría en la realidad en sí, mas en el sujeto que la percibe.

PALABRAS-CLAVE: modelos matemáticos – modelación – realidad – representación.

1. Introducción

La modelación matemática puede ser considerada, por un lado, como un método científico de investigación que "relaciona teoría y práctica, motiva a su usuario en la búsqueda del entendimiento de la realidad que lo cerca y en la búsqueda de medios para actuar sobre ella y transformarla" (BASSANEZI, 2002, p.17). Esa es la visión proveniente de la matemática aplicada. Por otro lado, en el ámbito de la educación matemática, como método de enseñanza de la matemática (BIENBENGUT; HEIN, 2003) la modelación está siendo empleada en varios niveles de enseñanza porque se cree que ella promueve la adquisición de conocimientos matemáticos y la habilidad de utilizar esos conocimientos para la resolución de problemas formulados a partir de una realidad en la cual se insieren profesores, alumnos y los demás indivíduos con los cuales éstos conviven.

Por no dar importancia solamente a conceptos y técnicas puramente matemáticos, desconsiderando la utilización de los mismos en el estudio de otras áreas del conocimiento, créese también que ese método puede disminuir las dificultades de aprendizaje y aumentar el interés de los estudiantes por la matemática. Otro motivo de uso y defensa de la modelación en la enseñanza es que ella contribuye para transferir el enfoque de una matemática ya construida y acabada, cuyo funcionamiento se debe aprender por medio de la práctica de ejercicios, para una matemática que puede ser utilizada, identificada, reconstruida, o inclusive construida, cuando se objetiva conocer, comprender y actuar sobre la realidad de la cual se forma parte.

Hay, de hecho, una tercera interpretación de modelación en el contexto de la matemática pura y en íntima conexión con la lógica matemática, en la cual la palabra "modelo", importante para las tres interpretaciones, es tomada en otro sentido. El modelo usado en el sentido de la lógica matemática no es otra cosa sino la realidad que una cierta teoría matemática, usualmente dada en forma axiomática, pretende describir.

Cuando es usada en el sentido de la matemática aplicada, el modelo es aquella teoría muchas veces expresada a través de ecuaciones.

Como puede ser observado, en las tres interpretaciones de modelación hay una noción de 'realidad' para la que es necesario elaborar una teoría matemática, es decir, un modelo matemático que la describa. Ese modelo puede ser dado, como es sugerido antes, por medio de ecuaciones de diversos tipos o por medio de sistemas axiomáticos, como en muchos casos de la matemática pura.

Empleada en la enseñanza, la modelación matemática recibe diversas denominaciones como, por ejemplo, ambiente de aprendizaje, estrategia, metodología o proceso de enseñanza, entre otras. Esas denominaciones revelan una visión de la modelación matemática como elemento integrante de una didáctica general. No es nuestro interés explorar particularidades de los diferentes enfoques que esas denominaciones traen. Nuestro foco es direccionado a un elemento característico que todas ellas, de una manera o de otra, poseen: la realidad como punto de partida del proceso de modelación. Mas, ¿en qué consiste esa realidad?, es decir, ¿cual es la ontología de la modelación matemática?

Nuestro propósito en este estudio es buscar un mejor entendimiento de los varios componentes de la modelación matemática en las tres interpretaciones esbozadas anteriormente procurando obtener una fundamentación de carácter histórico-filosófico y epistemológico para las actividades de modelación matemática en la enseñanza, y no producir una respuesta cerrada para la cuestión formulada. Lo que pretendemos, de hecho, es formular y presentar adecuadamente la cuestión relativa a las concepciones de realidad que permean actividades de modelación matemática e indicar otros problemas de carácter epistemológico e histórico-filosófico relacionados a esa cuestión.

2. Modelación Matemática y Realidad

Podemos entonces comenzar por reformular la cuestión expuesta anteriormente de la siguiente forma: ¿de qué realidad parte el proceso de modelación matemática?

En un primer momento, dependiendo del contexto, podemos entender que ella parte de una realidad compuesta por elementos de naturaleza económica, física, social, política, psicológica, etc., de la cual se "transpone un *problema* (...) para la Matemática donde será tratado a través de teorías y técnicas propias de esta Ciencia." (BASSANEZI, 2002, p.25, grifo nuestro). Pero, ¿donde reside el problema que será transpuesto para la matemática: en la realidad de la que se parte? Probablemente não. Hay un momento intermediario que consiste en una problematización que implica otra realidad que aún no es la matemática. Una especie de recorte de una situación de la realidad inicial a partir del cual se formulará un problema. Para que la problematización ocurra son necesarias abstracciones, situando el problema en otro plano que ya no es el de la realidad de la cual se trató inicialmente, haciendo con que la acción de *transponer* un problema supuestamente de la realidad para la matemática no sea legítima.

La transposición sugerida en la citación de Bassanezi presupone una selección de elementos de aquella realidad que sería compuesta por elementos existentes fuera de la mente del individuo y que son pasibles de ser captados por él de alguna forma con el auxilio de los sentidos. Creemos que la percepción de la realidad viene acompañada de ciertos parámetros de selección que, en el fondo, tienen un carácter matemático: homogeneidad, simplicidad, regularidad, entre otros. Para POINCARÉ (1946) esa selección puede ser guiada por una preferencia a los elementos más rapidamente percibidos, que se revelan más frecuentes y, debido a éso, nos parecerían más simples por el hecho de estar acostumbrados a ellos. Esos elementos se destacarían en un primer vistazo sugiriendo homogeneidad en un ambiente naturalmente complejo y podrían entonces revelar regularidades que permitirán hacer previsiones.

Esa selección de elementos es el paso inicial en la elaboración de esa realidad intermediaria mencionada anteriormente, lo que implica una simplificación de la realidad enfocada inicialmente, destacando elementos esenciales y descartando los periféricos, para que se pueda componer una representación en lenguaje matemático. Ese proceso de simplificación, que involucra abstracción, tanto puede generar una simple eliminación de algunos elementos como puede resultar en una permanencia y también evidencia de elementos que van a permitir, de un punto de vista realista, el trabajo con la esencia. Ese punto de vista presupone la existencia de una esencia que contiene esos elementos, lo que habilita su desvelamento. De otro punto de vista, el positivista por ejemplo, en el cual no se considera la existencia de una esencia que independe de nuestra observación, esos elementos serán el resultado de la suma de nuestras percepciones (JAPIASSÚ, 1981). Más aún, el proceso de simplificación mencionado puede implicar, de un punto de vista estructuralista, la explicitación de estructuras dadas por las relaciones involucradas en los fenómenos. La modelación puede entonces ser una actividad creadora, bien como, esencialmente descriptiva.

NOUVEL (1991) discute el concepto de modelo en relación al de metáfora, destacando la primera visión. En las palabras de ese autor:

> "El modelo no surge mas, al contrario, se construye.[...] ¿Para qué sirve el modelo, efectivamente? No para *ver como,* mas para negligenciar una gran cantidad de *aspectos* a fín de dirigir la atención solamente a uno, o a un pequeño número de ellos. [...] Para entender alguna cosa es preciso negligenciar muchas otras, y el modelo es la expresión de esa operación, operación controlada de una negligencia. '*No mire esto, mire solamente aquello, y así las cosas se tornan claras'*. Una estrategia de la negligencia, por tanto, que está relacionada al *comprender*. No se trata de hacer aparecer aspectos, mas, al contrario, de hacerlos desaparecer. El modelo es visto así como la operación inversa de la metáfora." (p.143-4).

Siguiendo esa operación de negligencia, el proceso de simplificación como fue colocado anteriormente, una representación de lo que se captó de la realidad inicial es elaborada en lenguaje natural. A partir de esa representación de lo que se focó, una nueva representación será obtenida al 'substituirse' el lenguaje natural por un lenguaje matemático coherente. En esa etapa de transición de lenguajes las relaciones y reglas empleadas son también las de la matemática y no solamente las sugeridas por la realidad inicialmente considerada. Tenemos aquí el lenguaje natural enriquecido con el lenguaje matemático. La representación en lenguaje matemático constituirá un modelo matemático para la situación focalizada.

La atención entonces es desviada de aquella realidad inicial para una representación de la misma, más precisamente, para un modelo matemático elaborado a partir de ella y formulado en el lenguaje natural enriquecido. Esa representación constituye una nueva realidad sobre la cual diversas informaciones serán explicitadas, varios problemas serán elaborados y resueltos. La resolución de un problema en esa nueva realidad puede no implicar en la solución de un problema de la representación de la realidad inicial, pues "los problemas como son tratados normalmente, son proposiciones sobre representaciones y no sobre el hecho real." (D'AMBRÓSIO,1999).

3. Manipulación de Modelos

Una vez elaborado un modelo matemático, en él son explotadas relaciones matemáticas conocidas de situaciones anteriormente vivenciadas, son desveladas relaciones aún encubiertas y otras, que se muestren pertinentes, pueden ser establecidas. Se obtienen así elementos de una teoría matemática que puede auxiliar en el estudio de la realidad inicial. Elementos de esa teoría pueden haber sido motivados por esa realidad. Otros, sin embargo, pueden tener su origen en conjeturas resultantes de la manipulación del lenguaje matemático utilizado, como es el caso de las hipótesis simplificadoras, por ejemplo. Esas conjeturas pueden ser válidas en el ámbito de la realidad matemática en la cual ellas fueron creadas, y no lo ser en la realidad en la cual ellas serán interpretadas.

Eso significa que la manipulación del modelo, que es una de las actividades que componen la modelación matemática, especialmente en la enseñanza, puede ser desvinculada, en parte, de la realidad modelada. Aunque sea enfatizado que la modelación es un proceso que “culmina con la solución efectiva del problema real y no con la simple resolución formal de un problema artificial” (D’AMBRÓSIO, 1986, p. 11), ella también precisa valorizar el tratamiento de problemas puramente matemáticos, que pueden no tener relación con la realidad inicial. Resolver un problema de esa realidad demanda una cierta comprensión de su funcionamiento y el conocimiento de sus componentes. Lo mismo ocurre con la manipulación de modelos matemáticos, con la resolución de problemas formulados a partir de esos modelos, lo que demanda un cierto conocimiento de cómo funciona la matemática. El acceso a ese conocimiento que incluye, por ejemplo, el conocimiento aproximado, es una de las funciones de la modelación matemática en la enseñanza, que no puede, por tanto, preocuparse en sólo ayudar a resolver problemas ‘reales’, como indicado anteriormente. Por medio de la modelación el alumno puede aprender matemática, aprender a pensar matematicamente, además de conocer la fecundidad y las limitaciones de conceptos y métodos de esa ciencia. Puede aprender sobre su aplicabilidad no solamente a otras áreas del conocimiento sino también en la propia matemática, cuando, por ejemplo, el modelo elaborado a partir de una realidad matemática inicial puede ser utilizado para describir otras realidades matemáticas.

Retomando elementos del desarrollo histórico de la propia matemática podemos visualizar una fase de desvinculación entre una realidad tomada inicialmente y una realidad matemática, fase que juzgamos existir en el proceso de modelación matemática, en particular cuando es empleado en la enseñanza, conforme lo expuesto hasta aquí.

Si tomamos el concepto de modelo teniendo como base los trabajos de los matemáticos griegos, en especial los *Elementos* de Euclides, pero no excluyendo otras caracterizaciones de ese concepto hasta mediados del siglo XVIII, vemos que había una creencia en la isomorfía entre la realidad observable y la matemática que la describía. Fue con la creación de las geometrías no euclidianas que la matemática despegó “no como algo necesariamente dictado a nosotros por el mundo en que vivimos” (EVES, 2004, p.545), mas también como una creación del espíritu humano. Hoy lo que se cree tener son aproximaciones en vez de un isomorfismo entre la matemática y la realidad. Como bien resaltó BASSANEZI (2002), la actividad de modelación en la enseñanza será eficiente para el aprendizaje de la matemática “a partir del momento en que nos concientizamos que estamos siempre trabajando con aproximaciones de la realidad, o sea, que estamos elaborando sobre representaciones de un sistema o parte de él.” (p.31)

Con referencia a lo que se conoce de los trabajos de la época de los griegos, un modelo matemático puede ser visto como una representación de la realidad captable por los sentidos, hecha por medio de un lenguaje geométrico o hasta algébrico. Esa visión no se aparta mucho de las expuestas por los diversos autores citados en este texto sobre lo que es un modelo matemático. En ese sentido también son caracterizados los modelos utilizados y elaborados en situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática.
Con el descubrimiento de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX, muchos cuestionamientos surgieron acerca de la posibilidad de que las estruturas matemáticas que se conocían representen adecuadamente lo real, pues un hecho comunmente aceptado desde la época de los griegos antiguos era que la geometría de Euclides reflejaba, de cierto modo, el espacio real.

A partir de esos cuestionamientos los fundamentos de la matemática pasaron por un profundo análisis crítico que provocó la búsqueda de nuevas fundamentaciones para la matemática, para el modo como se construían o como surgían los entes matemáticos, como se estructuraban sus teorías y como se validaban sus proposiciones. Uno de los resultados de esos esfuerzos fue una especie de separación de los aspectos formales de la matemática de aquellos que podemos llamar intuitivos, porque están relacionados a nuestra capacidad de percibirlos en el mundo en que vivimos.
En su obra titulada *Fundamentos de la Geometría*, publicada en 1899, David Hilbert presenta la geometría euclidiana sin conexión con la realidad. Lo que se sabía es que las relaciones presentadas y demostradas eran coherentes. La noción de 'verdadero' o 'falso' solo tendría sentido cuando tales relaciones fuesen interpretadas en algún contexto. Para saber si una afirmación dada de una teoría es verdadera recurrimos a una interpretación de esa teoría. Esa interpretación puede ser realizada, por ejemplo, en nuestra realidad observable. Pero también puede ser realizada en otro campo de la misma matemática. La verdad es entoces relativizada de modo que algo que se presente como verdadero en un contexto puede no serlo en otro.
Esa separación de los aspectos formales e intuitivos de la matemática se mostró necesaria de cierta forma para que se pudiese justificar la validez de diferentes abordages matemáticos de las diversas geometrías que fueron creadas, algunas adecuandose a la realidad observable y otras no, siendo justificables por ese medio. Éso nos lleva a una reflexión sobre la naturaleza de la relación entre lo real e lo posible de ser construido formalmente, considerando los límites y las posibilidades proporcionadas por el conocimiento que se tiene y por el lenguaje que se utiliza en esa construcción, es decir, el lenguaje matemático. En el caso de la modelación matemática en la enseñanza, esa relación es discutida en la siguiente citación:

> "En verdad, el lenguaje convencionado permite una simulación de la realidad, conteniedo implicitamente una simplificación de la realidad. Es esencial que el alumno sienta lo que se gana y lo que se pierde en la adopción del lenguaje convencionado, y que mantenga siempre en foco la realidad delante de la cual adoptamos una actitud simplificadora al formular la situación en el nuevo lenguaje. Por otro lado, la formulación simplificada del contexto real global permite formular detalles que serían difíciles, casi imposibles de ser destacados en un lenguaje natural. El juego de dos aspectos aparentemente contradictorios en la reformulación del problema (...) está en la esencia del método científico y (...) debe ser uno de los principales componentes del proceso educativo."(D'AMBRÓSIO, 1986, p.65)

4. Conclusión: la Realidad Matemática

Con lo expuesto en la sección anterior hemos resaltado que en la modelación matemática los conceptos y métodos estudiados pueden, en varios momentos, no estar relacionados con una realidad captable solamente por los sentidos, pero sí con una realidad matemática sobre la cual también es importante adquirir conocimientos y buscar la comprensión.
Es importante percibir que cuando se aprehende parte de la realidad en un modelo matemático lo que se pasa a tener es una nueva realidad (matemática), que posee alguna correspondencia con la realidad de la que se partió, pero que funciona según reglas que en ella pueden ser válidas o no. También en el inicio lo que se tiene es la realidad que se consiguió captar, y no la totalidad de la realidad existente. O sea, una realidad no dada, mas de alguna forma construida. Según D'AMBRÓSIO (1999) las representaciones ya son el resultado de una acción subjetiva de quien primero recibió/captó la información de la realidad. El alumno, por ejemplo, capta o concibe la realidad y la representa a partir de lo que él entiende y consigue expresar. En ese sentido la actividad de modelación no comenzaría en la realidad en sí, mas en el sujeto que la percibe. Esa percepción, conforme Bachelard, puede ser dada por las concepciones y teorías en las cuales el individuo se apoya. Para que exista una realidad a ser representada, modelada, sería preciso la acción racional en el individuo que la concibe. "La ciencia suscita un mundo, no más por un impulso mágico inmanente a la realidad, y sí por un impulso racional, inmanente al espíritu." (BACHELARD,1988, p.8).

A partir de lo expuesto vemos que las concepciones de 'realidad' relacionadas a la modelación matemática demandan un estudio más profundo para lo que este texto contribuye con algunas provocaciones.

5. Referencias Bibliográficas

Abbagnano, N. (1970). *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Editora Mestre Jou.

Bachelard, G. (1988).*O novo espírito científico*. São Paulo: Nova Cultural (Os pensadores).

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. y Hein, N. (2003). *Modelagem matemática no ensino.* 3. ed. São Paulo: Contexto.

Bunge, M. (1974). Teoria e realidade. Trad. Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva.

Davis, P. y Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Trad. Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa: Gradiva.

D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e matemática. 4. ed. São Paulo: Summus.

_____. *Dos fatos reais à modelagem*: uma proposta de conhecimento matemático. Disponível em: http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm. Acesso em 07/2004.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP.

Japiassu, H. (1981). *Questões Epistemológicas.* Rio de Janeiro: Imago.

Machado, N. (2001).*Matemática e realidade*. 5. ed. São Paulo: Cortes.

Negrelli, L. (2000). *A consideração de procedimentos dedutivos e indutivos na formação de professores de matemática*. (Dissertação) Mestrado em Educação. UFPR.

Nouvel, P. (2001). *A arte de amar a ciência*: psicologia do espírito científico. Trad. Fernando Jacques Althoff. São Leopoldo: Ed. UNISINOS.

Poincaré, J. (1946). *Ciência y Método*. 2. ed. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, S. A.

TEORIA DOS NÚMEROS: AMPLIANDO OS CONCEITOS NO ENSINO MÉDIO

Lisandra de Oliveira Sauer e Rosvita Fuelber Franke
Universidade Luterana do Brasil- Brasil
licasauer@terra.com.br, rosvitafranke@ig.com.br
Campo de Investigación: Pensamiento algebraico; Nivel Educativo: Medio

Resumo

O presente artigo relata uma comunicação científica derivada de uma pesquisa em que se explorou qualitativamente o pensamento aritmético e a importância de conceitos de Teoria de Números, em uma turma piloto de 12 alunos voluntários iniciantes do curso licenciatura em Matemática da ULBRA. O propósito de tal investigação foi o de identificar como os alunos resolvem certos problemas matemáticos que necessitam de conhecimentos prévios, sem terem padrões estabelecidos e como procedem após rever esses conceitos. Para a fundamentação da pesquisa foram aplicadas atividades, primando pela linguagem matemática e pela construção de conceitos, utilizando a metodologia resolução de problemas. Consideramos esse estudo de vital importância, pois os tópicos desenvolvidos estimulam a curiosidade e a compreensão dos conteúdos matemáticos abstratos.

Palavras chaves: Ensino e Aprendizagem, Teoria dos Números, Pensamento Aritmético.

Introdução

Nas últimas décadas o Brasil passou por vários processos de transformação, o que gerou a necessidade de desenvolver pesquisas em metodologia no ensino da matemática. Mobilizados e motivados por essa necessidade investigamos e elaboramos atividades referentes à Teoria de Números, que estuda a relação entre os Números Inteiros. Essas relações podem ser desenvolvidas de forma a estimular nos alunos de nível médio o interesse pela matemática, aprimorando seu raciocínio lógico, fazendo com que o mesmo desenvolva a capacidade de manipular conceitos e propriedades de forma clara e objetiva, procuramos sempre que possível relacionar a teoria algébrica com a geométrica utilizando a metodologia resolução de problemas.

Segundo Celina Veira e Rui Vieira (2001), "a resolução de problema surge como um contexto para os alunos usarem as suas capacidades de pensamento, designadamente de pensamento crítico, a fim de se tornarem melhores solucionadores de problemas pessoais e sociais que envolvem conhecimentos de matemática". Concordamos com esse pensamento, no sentido de "formadores" de professores, pois é necessário ter um tempo não apenas para resolver problemas, mas para questionar métodos de resolução e debater a sua importância para que o futuro professor tenha uma posição formada de porquê desenvolver tais conceitos matemáticos com os alunos de ensino médio.

Quando falamos em discutir a relevância de conceitos matemáticos, primamos por conceitos da teoria de Números, pois concordamos com Astudillo e outros (1989), quando afirmam que com a corrente da matemática moderna tanto a geometria quanto a teoria de números ficaram relegadas nos currículos de matemática, nos últimos anos a geometria vem recuperando espaço nos currículos escolares, não ocorrendo o mesmo com a teoria de números. Temos consciência de que os temas de teoria de números estão presentes nos livros didáticos, a questão é o tratamento dado a esses temas que muitas vezes aparecem como um receituário, um algoritmo distinto de outras áreas da matemática. Existem na literatura em geral, aplicações que fogem a esse panorama e, utilizando algumas dessas aplicações, procuramos organizar uma seqüência didática que busca a evolução do pensamento matemático dos alunos licenciandos, pois, segundo Polya. (1995): "A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar".

Visando a validação da hipótese "a introdução e o desenvolvimento de atividades didáticas com a Teoria dos Números contribui na formação do professor de Matemática, possibilitando a reflexão da importância da transposição didática adequada desses conceitos no Ensino Básico", optou-se pela abordagem qualitativa, entendendo que nessa perspectiva é possível uma análise mais detalhada da situação pesquisada, possibilitando, assim, conhecer e entender as circunstâncias particulares em que o objeto do estudo se insere.

O estudo exploratório, segundo Trivinos (1987), permite aos investigadores envolvidos aumentar sua experiência em torno do problema, aprofundando seus estudos nos limites de uma realidade específica, buscando antecedentes e maiores conhecimentos para, em seguida, planejar uma pesquisa do tipo experimental.

Atividades propostas

Apresentaremos duas atividades propostas e discutidas durante os cinco encontros com os alunos voluntários do curso de licenciatura em Matemática:

a) Determinação geométrica do Máximo Divisor Comum (*mdc*)

Essa é uma aplicação do conceito de máximo divisor comum, bem conhecida, que relaciona a álgebra com a geometria, mas que mostra ao aluno a idéia de que o *mdc* de dois números inteiros é o lado do maior quadrado, de lado inteiro, que podemos decompor um retângulo de dimensões dadas. Por exemplo: Dada uma folha retangular de lados 9cm e 6cm , qual o tamanho do quadrado de lado inteiro, maior possível, pode ser decomposto essa folha?

Acreditamos que esse problema é melhor compreendido através da seguinte resolução:

Começamos construindo um retângulo de lados medindo 9u.c. e 6u.c. e traçamos quadrados tantos quanto possíveis medindo 6u.c. (figura 1) de lado, contido no retângulo inicial.

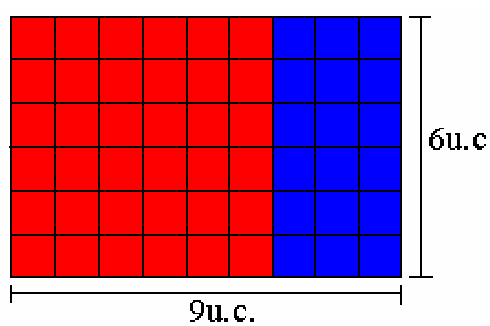


Figura 1

Obtemos um quadrado de lado 6u.c. e um retângulo de lados 3u.c. e 6u.c., isto é:

$$9 = 6.1 + 3$$

Como o resto não é zero repetimos o processo para 6 e 3, agora construído um retângulo de lados 6u.c. e 3u.c (figura 2).

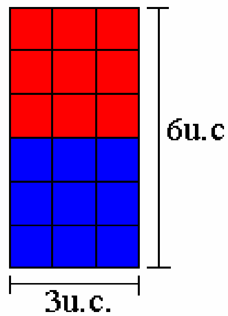


Figura 2

Obtemos dois quadrados de lado 3u.c., ou seja, $6 = 3.2 + 0$. Como o resto é 0 então a solução é 3, ou seja, o $mdc(9,6) = 3$.

b) Que dia é hoje?

Uma aplicação interessante da teoria de congruências e classes residuais é a determinação dos dias da semana em um determinado ano.

Escolhemos o ano vigente 2005.

Para viabilizar a compreensão, tomaremos como referência o mês de maio, no qual o dia 1º deste mês caiu justamente no Domingo, dia 2 na Segunda-feira, dia 3 na Terça-feira e assim sucessivamente até o dia 7 que caiu no Sábado. Como as semanas possuem 7 dias, montamos a seguinte tabela:

Tabela 1

Constantes dos dias obtidos por congruência módulo 7.

Constantes dos Dias						
DOMINGO	SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA	SÁBADO
1	2	3	4	5	6	0

Esta tabela nada mais é que as classes residuais módulo 7, o Sábado está na classe residual do $\overline{0}$, pois $7 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$, os dias posteriores a 7 deste mês recairão em uma dessas classes.

Utilizando o dia 13 de maio como exemplo. Sabemos que este dia é uma Sexta-feira, e por congruência obtemos, $13 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7)$, o que comprova a tabela acima.

Agora observe o que acontece com os demais meses.

Como maio é o mês de referência, determinamos a ele uma constante *c,* sendo $c = 0$.

Consideremos agora o dia 31 de maio, temos que $31 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7)$, ou seja, este dia é uma Segunda-feira, logo o dia 1º de junho cai em uma Quarta-feira, mas $1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$, que pela nossa tabela é Domingo. Portanto, as classes não estão coincidindo com o dia da semana do mês de junho, conforme a tabela.

Para que possamos determinar o dia do mês posterior, no caso junho, devemos ajustar as classes residuais. Pegamos a constante $c = 0$, e a classe residual do último dia do mês de maio e os somamos, obtemos assim a constante do mês (junho) que por sua vez é adicionado a classe residual do dia estudado.

Portanto, a constante de junho é $c = 0 + 3 \Rightarrow c = 3$. E para 1º de junho, concluímos que 1+3=4, logo é uma Quarta-feira.

Em julho temos, $30 \equiv 2(\text{mod}\, 7)$, logo para calcular a constante do mês de julho, pegamos a constante de junho, $c = 3$ e adicionamos 2, $c = 3 + 2 \Rightarrow c = 5$. E para 25 de julho temos, $25 \equiv 4(\text{mod}\, 7)$, assim temos que $5 + 4 = 9$, que pertence a classe residual $\overline{2}$ módulo 7, logo é uma Segunda-feira.

Para o mês anterior, no nosso caso abril, devemos encontrar a classe residual do seu último dia e subtrair da constante do mês de maio, assim obteremos a constante do mês de abril.

Sabemos que abril tem 30 dias, assim $30 = 2(\text{mod}\, 7)$, então a constante do mês de abril é $c = 0 - 2 \Rightarrow c = -2$, mas como estamos trabalhamos com valores positivos, temos que a classe residual $-\overline{2}$ módulo 7, também é igual a classe $\overline{5}$, portanto $c = 5$. Para o dia 16 de abril temos, $16 \equiv 2(\text{mod}\, 7)$, portanto $5 + 2 = 7$. Como a classe do sete é a mesma de zero, logo é um Sábado.

Tomando como referência o mês de maio de 2005, obtemos os valores das constantes dos meses restantes na tabela 2.

Tabela 2
Constantes dos meses do ano de 2005,
obtidos por congruência módulo 7

Constantes dos Meses do Ano de 2005											
JAN	FEV	MAR	ABR	MAIO	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4

Obs. O mês de referência sempre terá a constante igual a zero, qualquer mês do ano pode ser tomado como referência, basta relacionar os dias da semana com as classes residuais módulo 7.

Análise dos Resultados

O experimento didático foi avaliado, pelo grupo de pesquisa, como muito positivo nos seus resultados. Os alunos estiveram, durante o trabalho de grupo, motivados e interessados na realização das atividades e 70% dos alunos investigados afirmaram que perceberam progresso no estudo de disciplinas do curso nas quais estavam matriculados, durante a implementação do experimento.

Os alunos demonstraram desenvoltura no trabalho em grupo, propiciando um clima de discussão e trocas de idéias, bem como, um ambiente favorável ao levantamento de dúvidas em todas as atividades propostas, o que é fundamental para a aplicação de uma metodologia que busca a resolução de problemas.

Observou-se que os alunos participantes do experimento encontraram dificuldades para realizar as tarefas. As atividades que exigiam aplicação direta dos conceitos foram solucionadas, porém quando as atividades exigiam uma interpretação mais detalhada e não estavam identificados os conceitos a serem aplicados, os alunos não conseguiram relacionar a teoria com a prática e a solução não foi encontrada.

Os alunos demonstraram não ter conhecimento de atividades desse tipo e nem da importância do trabalho com os conceitos referidos para o desenvolvimento do pensamento aritmético e do quanto esse conhecimento auxilia os alunos na compreensão de outros conceitos e na resolução de problemas. Os doze alunos afirmaram que reconhecem a importância das mesmas e mostraram–se receptivos a aplicação de uma metodologia de trabalho em sala de aula, como as desenvolvidas no experimento didático.

Com base nos resultados obtidos confirma-se a hipótese de que é de extrema importância o aluno, futuro professor, defrontar-se, durante sua formação, com atividades que o levem a refletir sobre uma metodologia adequada ao desenvolvimento do pensamento aritmético, qualificando, assim sua prática docente.

Referências Bibliográficas

González, T., Sierra. M., González, M. y Sánchez, A. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis.

Clasen, Z. (1995). Uma Interpretação geométrica do MDC. *Revista do Professor de Matemática* nº 29, 3º quadrimestre.

Polya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático.* 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência.

Silva, A.(1987). Introdução à pesquisa em Ciências Sociais. São Paulo, Atlas.

Tenreiro, C. y Marques, R. (2001) Resolução de Problemas e pensamento crítico: Em torno da(s) possibilidade(s) de articulação. Educação e Matemática nº 62. Março/ abril de 2001.

TEORIA DOS NÚMEROS E O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Claudia Lisete O Groenwald, Lisandra de O Sauer, Rosvita F Franke
Universidade Luterana do Brasil – Brasil
claudiag@ulbra.br, licasauer@terra.com.br, rosvitafranke@ig.com.br
Campo de investigación: Pensamiento algebraico; Nivel educativo: Medio

Resumo

Com a corrente da Matemática "Moderna", tanto a Geometria como a Teoria dos Números ficaram relegadas a segundo plano nos currículos da Matemática no Brasil, nos últimos anos a Geometria voltou a recuperar sua força e importância, porém não ocorreu o mesmo com a Teoria dos Números, talvez por não ter se encontrado um meio termo para sua apresentação como simples receituário ou, porque, seu ensino mais profundo apresenta muitas dificuldades de compreensão, tanto para os professores como para os alunos. O trabalho aqui proposto objetiva analisar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos elementares da Teoria dos Números.

Palavras chave: Teoria dos Números, Educação Matemática, Ensino e aprendizagem.

Introdução

Assim como houve um enorme desenvolvimento da Matemática nas últimas décadas, também cresceram as dificuldades em ensinar Matemática. Um dos problemas apresentados pelos alunos está em aplicar os conceitos de aritmética, principalmente os tópicos de divisibilidade, máximo divisor comum e congruência com números inteiros.

Entre os obstáculos encontrados pelos professores de Matemática na transposição didática dos conceitos citados, e que são importantes para o desenvolvimento do pensamento aritmético, podemos destacar a falta de modelos, pois cada problema se resolve de um modo, além disso, é muito raro encontrar atividades didáticas aplicáveis no Ensino Básico.

Para Lins e Gimenez (1997) a aritmética escolar não muda porque o currículo tradicional indica o que se deve ensinar na escola e os professores são submetidos a uma enorme pressão dessa tradição. Afirmam também, os autores, que a aritmética propõe um sentido integrador que permite resolver problemas diversos, assim as técnicas e regras deveriam servir para solucionar problemas.

Mobilizados e motivados por essa necessidade, investigamos e elaboramos atividades didáticas referentes à Teoria dos Números, área da Matemática que estuda a relação entre os Números Inteiros. Essas relações podem ser desenvolvidas de forma a estimular nos alunos o interesse pela Matemática, aprimorando o raciocínio lógico e ampliando a compreensão dos conceitos básicos para o refinamento do pensamento aritmético, fazendo com que os mesmos desenvolvam a capacidade de manipular conceitos e propriedades de forma clara e objetiva.

Porém, para que a Teoria dos Números ganhe espaço nos currículos escolares torna-se de fundamental importância que haja um espaço de discussão e reflexão nos cursos de Licenciatura de Matemática, possibilitando que os futuros professores desenvolvam a capacidade de realizar a transposição didática necessária de tais conceitos para o Ensino Básico.

Teoria dos Números

A aritmética é uma ciência de todos os tempos, provêm do vocábulo ARITHMOS, que significa número. É a ciência na qual se estudam as propriedades e relações entre os números. O objetivo central dessa teoria é o estudo das propriedades dos números inteiros. Essa Teoria aparece como ferramenta em diversas áreas da Matemática, como: Probabilidade, Álgebra, Sistemas Dinâmicos, etc., servindo de alicerce para resultados significativos.

Muitos resultados dentro dos campos, da Matemática, citados acima, que eram bastante complexos, obtiveram caminhos abreviados com a utilização dos principais conceitos da Teoria dos Números. São três os principais ramos em que se divide a Teoria dos Números: Teoria Elementar, Teoria Analítica e Teoria Algébrica.

Um pouco da história da Teoria dos Números

É na Grécia que primeiro identificamos a Teoria dos Números tal como a entendemos hoje em dia. Foram os pitagóricos que estudaram as relações entre números do ponto de vista que hoje chamamos Teoria dos Números, a aritmética era o estudo das propriedades fundamentais dos Números Inteiros, domínio dos comerciantes e profissionais da época e a logística é o que chamamos de aritmética nos dias de hoje.

Entre os problemas da Teoria dos Números abordados pelos gregos antigos estão:

- cálculo do máximo divisor comum entre dois números;
- a determinação dos números primos menores que um inteiro dado;
- a demonstração de que há uma infinidade de números primos.

Entre os principais estudiosos dessa teoria podemos citar Euclides de Alexandria (330 -275 a.C), geômetra grego, professor de Matemática a convite do então imperador da parte egípcia da Grécia Antiga: Ptolomeu I. Organizou a obra monumental "Os Elementos", composta de 13 livros. Os livros VII, VIII e IX estão dedicados a Teoria dos Números. Os conceitos numéricos estão expressos em uma linguagem geométrica, Euclides se refere a um número como um segmento $\overline{AB}$, utilizando expressões do tipo "mede A" ou "está medido por" no lugar de é "divisor de" ou é "múltiplo de".

Vários outros matemáticos gregos estudaram problemas da Teoria dos Números. Destes o mais importante foi sem dúvida Diofanto. Sua A*ritmética*, escrita por volta de 250 d.C., trata principalmente da solução de equações indeterminadas com coeficientes inteiros.

Embora a Matemática tenha sido intensamente estudada por outros autores gregos, e posteriormente árabes, indianos e europeus; a Teoria dos Números caiu em esquecimento até o século XVII.

Bachet, em 1612, publicou o texto original em grego da *Aritmética de Diofanto*, juntamente com uma tradução latina, que era a língua usada pelos eruditos europeus da época.

Entre 1621 e 1636 o francês Pierre de Fermat, magistrado da corte de Toulouse, adquiriu uma cópia deste livro. Fermat leu o texto de Diofanto, anotando na margem as idéias que lhe ocorriam. Isto marcou o início do interesse de Fermat em Teoria dos Números, que posteriormente se expressou em uma torrente de resultados importantes.

Fermat nasceu em 1601, e era um magistrado por profissão e não matemático. Na verdade poucas pessoas viviam de Matemática naquela época. A comunicação entre os matemáticos também era precária, não haviam revistas especializadas. A primeira revista dedicada à Matemática só foi criada em 1794. A comunicação era conduzida principalmente através de cartas, com algumas pessoas servindo de centros difusores dos novos resultados.

O mais famoso divulgador dos resultados obtidos na Matemática foi o frade francês Marin Mersenne. Muito amigo de alguns dos maiores matemáticos da época, como Descartes, Pascal e o próprio Fermat, Mersenne logo comunicava a toda a "*República de Letras*" as novidades matemáticas que chegavam ao seu conhecimento.

Foi na forma de cartas enviadas a Mersenne e a outros matemáticos contemporâneos que boa parte da obra de Fermat ficou conhecida. Depois da morte de Fermat em 1665, coube a Samuel Fermat, filho de Fermat, coletar e publicar a obra de seu pai, dispersa em cartas e anotações. Ele começou com a publicação da *Aritmética de Diofanto*, incluindo todas as anotações feitas por Fermat à margem da sua cópia. Destas anotações a mais famosa é o chamado *Último Teorema de Fermat*: Não existe solução não nula, para a equação $x^n + y^n = z^n$, onde $n \geq 3$ e x, y e z números inteiros. Este resultado só foi provado em 1995, pelo inglês Andrew Wiles, mais de 300 anos depois de ser anunciado por Fermat.

O sucessor de Fermat foi o suíço Leonhard Euler, que nasceu em 1707, quarenta e dois anos depois da morte de Fermat. Euler publicou uma obra matemática imensa, tendo contribuído para quase todas as áreas da Matemática pura e aplicada existentes no século XVIII. Euler não foi professor de nenhuma universidade, mas esteve ligado a academias científicas na Alemanha e na Rússia. Essas academias eram, na verdade, instituições de pesquisa, cujas atas publicavam primordialmente as contribuições científicas de seus membros.

O interesse de Euler em Teoria dos Números teve início em sua correspondência com Christian Goldbach, foi através dele que Euler chegou à obra de Fermat. Em sua primeira carta a Euler em 1729, Goldbach acrescenta o seguinte PS: *Você conhece a observação de Fermat de que todos os números* $2^{2^n} + 1$ *são primos? Ele disse que não sabia prová-la; nem ninguém conseguiu fazê-lo, que eu tenha conhecimento.*

Euler reage com ceticismo e não demonstra muito interesse, mas Goldbach não desiste e volta ao assunto. Em 1730, Euler começa finalmente a ler a obra de Fermat. Nos anos seguintes ele provaria e estenderia grande parte dos resultados enunciados por Fermat, resolvendo inclusive a questão proposta por Goldbach.

Através de seus trabalhos Euler popularizou a Teoria dos Números como Fermat não havia conseguido.

Podemos destacar dos estudos de Goldbach a famosa conjectura que afirma: "*Todo número par maior que 2 pode ser decomposto na soma de dois números primos*". Este resultado não foi provado até os dias de hoje.

Porém o desenvolvimento sistemático da Teoria dos Números só teve início com a obra *Disquisitiones arithmeticae* do alemão C. F. Gauss, publicada em 1801.

Objetivos

Os objetivos deste trabalho foram: investigar atividades didáticas com os conceitos iniciais da Teoria dos Números; analisar o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, investigando como realizar a transposição didática para o Ensino Básico.

Exemplos de atividades para o Ensino Básico

Com o objetivo de que a Teoria dos Números ganhe espaço nos currículos escolares, apresentamos exemplos da utilização dessa teoria no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

1 Adivinhando o algarismo suprimido

Pede-se para alguém pensar em um número de vários algarismos e somar esses algarismos. Em seguida pede-se que a pessoa subtraia a soma do número pensado. A pessoa deve então ocultar um algarismo desse último resultado obtido e informar o valor da soma dos algarismos restantes. Com isso o proponente da brincadeira “adivinha” o algarismo que foi ocultado.

Exemplo: Número pensado, $A = 5436789$

$A – S = 5436789 – (5+4+3+6+7+8+9) = 5436789 – 42 = 5436747$

A pessoa oculta, por exemplo, o algarismo 7 e fornece a soma dos outros que é $5+4+3+6+7+4$ = 29. Como a soma de todos os algarismos deve ser um múltiplo de 9, “adivinha-se”que o algarismo ocultado é 7, uma vez que 29 + 7 = 36.

Justificamos o fato acima através da seguinte proposição:

Proposição: Seja A um número natural formado pelos algarismos $a_1, a_2, ..., a_n$ então A– S é um múltiplo de 9, onde $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Demonstração: A prova utiliza a representação decimal do número A:

$A = 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + ... + 10a_{n-1} + a_n$, logo,

$A\text{-}S = 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + ... + 10a_{n-1} + a_n - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n)$,

$A\text{-}S = \left(10^{n-1} - 1\right)a_1 + \left(10^{n-2} - 1\right)a_2 + ... + 9a_{n-1}$, que é um múltiplo de 9.

2 Escrevendo o número 20

Solicita-se ao aluno que escreva o número vinte, usando as quatro operações e os algarismos, um de cada vez. Por exemplo: 4 + 4+ 4 + 4 + 4 = 20.

No primeiro momento o aluno deve buscar alternativas de resposta sozinho ou com seu colega, depois o professor deve solicitar que busque uma generalização para a atividade. O que se percebe é que:

Utilizando o número 1 temos: (11 + 11 – 1 – 1) : 1 = 20
Utilizando o número 2 temos: (22 + 22 – 2 – 2) : 2 = 20
Utilizando o número 3 temos: (33 + 33 – 3 -3) : 3 = 20
Utilizando o número 4 temos: (44 + 44 – 4 - 4) : 4 = 20
Utilizando o número 5 temos: (55 + 55 – 5 - 5) : 5 = 20
Utilizando o número 6 temos: (66 + 66 – 6 - 6) : 6 = 20
Utilizando o número 7 temos: (77 + 77 – 7 - 7) : 7 = 20
Utilizando o número 8 temos: (88 + 88 – 8 - 8) : 8 = 20
Utilizando o número 9 temos: (99 + 99 – 9 - 9) : 9 = 20

Verifica-se que é possível escrever a seguinte generalização: dado o algarismo “a” temos: (aa + aa – a – a) : a = 20.

3 Números de Fibonacci

A seqüência de Fibonacci é definida pela fórmula de recorrência $f_1 = f_2 = 1$, $f_k = f_{k-2} + f_{k-1}$ para todo $k > 2$, formando a seqüência 1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

$$f_1 = f_2 = 1$$
$$f_3 = f_1 + f_2$$
$$f_4 = f_2 + f_3$$
$$f_5 = f_3 + f_4$$
$$\vdots$$
$$f_k = f_{k-2} + f_{k-1}, k > 2$$

Os termos da seqüência de Fibonacci chamam-se números de Fibonacci. Os números de Fibonacci possuem muitas propriedades importantes e aqui vamos apresentar duas delas.

3.1 A soma dos *n* primeiros números de Fibonacci é igual a $f_{n+2}-1$, ou seja, $f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-1$.

Temos

$f_1=f_3-f_2$;

$f_2=f_4-f_3$;

$\vdots$

$f_{n-1}=f_{n+1}-f_n$;

$f_n=f_{n+2}-f_{n+1}$.

Somando as n igualdades temos:

$f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_3-f_2+f_4-f_3+\ldots+f_{n+1}-f_n+f_{n+2}-f_{n+1}$;

$f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-f_2$;

$f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-1$.

Aplicação Geométrica

Uma possível interpretação geométrica para essa identidade é a decomposição de um retângulo de lados f_n e f_{n+1} em n quadrados de lados $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$. Conforme figura 1.

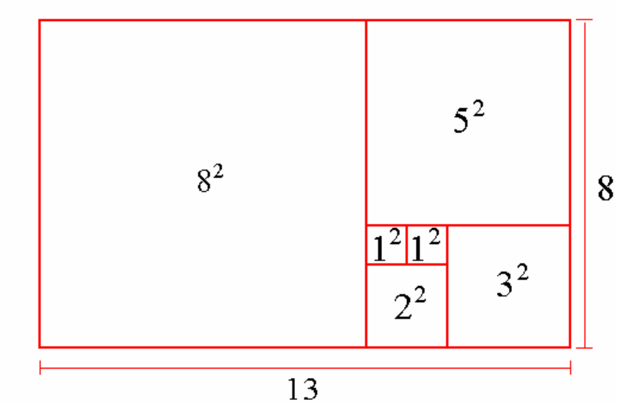


Figura 1

3.2 A soma dos quadrados dos n primeiros números da seqüência de Fibonacci é igual a $f_n f_{n+1}$, ou seja, $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_{n-1}^2+f_n^2=f_n f_{n+1}$.

Como $f_1=f_2=1$, temos $f_1^2=f_1 f_2$, e para $k>1$, temos: $f_k f_{k+1}-f_k f_{k-1}=f_k\left(f_{k+1}-f_{k-1}\right)=f_k^2$, fazendo $k=2,3,\ldots,n$.

Considerando:

$f_2=f_3-f_1$;

$f_3=f_4-f_2$;

$f_4=f_5-f_3$;

$\vdots$

$f_k=f_{k+1}-f_{k-1}$.

Temos, $f_k^2=f_k f_k=f_k\left(f_{k+1}-f_{k-1}\right)=f_k f_{k+1}-f_k f_{k-1}$;

Podemos considerar

$f_1^2 = f_1 f_2$;
$f_2^2 = f_2 f_3 - f_2 f_1$;
$f_3^2 = f_3 f_4 - f_3 f_2$;
$f_4^2 = f_4 f_5 - f_4 f_3$;
$\vdots$
$f_{n-1}^2 = f_{n-1} f_n - f_{n-1} f_{n-2}$;
$f_{n-1}^2 = f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1}$.
Somando ordenadamente as n igualdades e simplesmente, temos:
$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_{n\ 1}^2 + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Aplicação Geométrica

Considerando $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$. Multiplicando ambos os membros por π obtemos: $\pi f_1^2 + \pi f_2^2 + ... + \pi f_n^2 = \pi . f_n f_{n+1}$.

O lado esquerdo representa a soma das áreas de *n* círculos de raios $f_1, f_2, f_3, ... f_n$.

O lado direito é a área de uma elipse de semi-eixos f_n e f_{n+1}.

Conforme a figura 2.

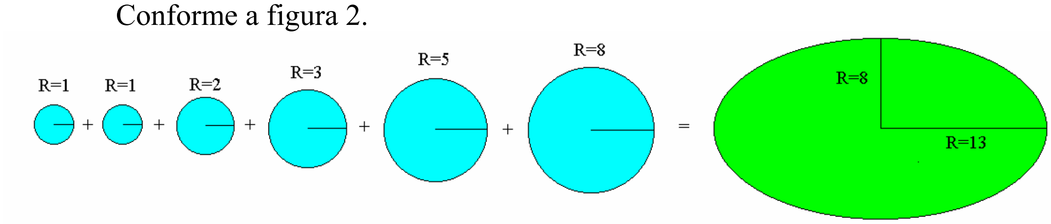


Figura 2

Conclusão

Concordamos com Lins e Gimenez (1997) que afirmam que um bom trabalho aritmético, para a prática do professor é: reconhecer a necessidade de uma mudança curricular que sirva para desenvolver um sentido numérico; integrar diversos tipos de raciocínios na produção de conjecturas; assumir o papel dos distintos cálculos, que não se reduzam a obtenção de resultados, e contribuam para aprimorar processos como planificar, desenvolver estratégias diferentes, selecionar as mais adequadas; fomentar uma avaliação que contemple a regulação e o controle constante do processo de ensino proposto.

Logo, os cursos de Licenciatura em Matemática devem primar por desenvolver um espaço para a discussão, reflexão e estudo dos conceitos aritméticos que privilegiem o desenvolvimento de estratégias para a prática docente.

Referências

Alencar, E. (1992). *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo: Nobel.

Astudillo, M., González, M.; Acosta, M.; García, A. (1989). *Divisibilidad.* Madrid: Síntesis.

Boyer, C. (1974). *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp.

García, J. e García, F. (1993). *Aprender Investigando- Una propuesta metodológica basada en la investigación.* Sevilla: DÍADA.

Gårding, L. (1997). *Encontro com a Matemática.* Brasília: UnB.

Groenwald, C.; Sauer, L.; Franke, R. (2003) *Conceitos Iniciais da Teoria dos Números no Ensino Básico.* Publicação nos Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática (1-10), Blumenau, Brasil: FURB.

Lins, R., Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. São Paulo: PAPIRUS.

Lopes, L.(1999). *Manual de Indução Matemática*. Rio de janeiro: Interciência, 1999.

Oliveira, J. (1998). *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA. Rio de Janeiro: CNPq.

Oliveira, Z. (1995). Uma Interpretação geométrica do MDC. *Revista do Professor de Matemática* nº 29, 3º quadrimestre.

Polya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático.* 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência.

Shokranian, S.; Soares, M., Godinho, H. (1999) *Teoria dos Números*. Brasília: UnB.

Vasconcelos, F,, Benedito, T. (1992). Congruencia, divisibilidade e adivinhações. *Revista do Professor de Matemática*. Número 22, p. 4-10.

RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Giovannni Da Silva Nunes
Universidade Luterana do Brasil – Brasil
gsnunes@portoweb.com.br
Campo de Investigación: Pensamiento geométrico; Nivel Educativo: Medio

Minicurso

Resumo

O presente trabalho visa explorar o desenvolvimento e aprofundamento de conceitos geométricos utilizando a História da Matemática como motivador de problemas e as construções geométricas como ferramenta da resolução de problemas. Usamos a metodologia Resolução de Problemas e desenvolvemos uma sequência didática de forma gradual, para que o desenvolvimento da atividade permita que o ouvinte possa resolver algumas equações que envolvam expressões algébricas. Cabe salientar que nosso foco não foi utilizar as atividades para facilitar a aprendizagem de tópicos algébricos, nossa proposta é voltada a alunos que tenham conhecimento prévio do assunto, e que possam, assim, visualizar melhor conceitos, teoremas e aplicações da geometria que são motivados de forma a dependerem de tal resolução.

Palavras Chaves: Geometria, Resolução Geométrica, Seqüência Didática.

Introdução

A origem da palavra geometria provém da palavra grega geometrein: geo, que significa terra, e metrien, que significa medir; nos passando assim a idéia de que geometria é a ciência de medir a terra, porém, sabemos que esta foi a origem da palavra e que hoje, em geometria, vamos muito além do termo que originou o seu nome. Uma de nossas preocupações atuais é quanto a desvinculação das diferentes áreas matemáticas. Os conteúdos nos são passados separados por ramos da matemática, e hoje, em algumas situações vemos dificuldades, por parte de alguns alunos, de verem a relação existente entre competências da mesma área, o que dificulta a aplicação de conceitos matemáticos em situações práticas que no geral dependem da identificação e da adaptação de vários conceitos para a resolução do mesmo.

Uma das primeiras formas de comunicação do homem, certamente foi feita através do desenho. Podemos destacar os desenhos rupestres rituais das cavernas da era do paleolítico e os sinais pictográficos do sistema hieroglífico da primeira forma de escrita dos egípcios.

Segundo o Cel. Prof. Walter Rollim Pinheiro (1995) a espontaneidade do desenho de uma figura, a princípio traduzindo idéias concretas de animais, objetos e pessoas, evoluiu para a representação de idéias abstratas através da simplificação das figuras e posteriormente, de sistemas convencionais ou racionais de correspondência concreto/abstrato.

Devido a uma grande evolução ocorrida em outras áreas da matemática, as construções geométricas foram deixadas em segundo plano, fazendo com que esta área fosse muito pouco explorada atualmente, nos ensinos Fundamental e Médio.

Na grécia Antiga, século V a.c, acreditava-se que todos os problemas matemáticos possuiam solução geométrica, utilizando-se apenas régua não graduada e compasso. Existem relatos de que Euclides, em suas construções geométricas, usava um "compasso dobradiço", que fechava assim que uma das pontas fosse retirada do papel. Mesmo assim em seu livro I, ele afirma que é possível construir qualquer segmento sobre uma reta a partir de um ponto dado. Euclides nunca descreveu, em seus trabalhos, como essas construções eram feitas. O fato de que elas teriam sido efetuadas com o uso de um compasso e de uma régua sem escalas tem sido atribuído a Platão. Acredita-se que os gregos primitivos tenham dado atenção especial às construções geométricas porque cada uma servia como uma espécie de teorema de existência para a figura ou conceito envolvido. Contudo sabemos que nem todos os problemas algébricos podem ser resolvidos geometricamente de forma exata, é o caso, por exemplo, da quadratura do círculo, da retificação da circunferência e da duplicação do cubo. No entanto devemos ser capazes, através de um embasamento teórico da geometria, de distinguir problemas que possuam ou não uma solução geométrica aceitável, no sentido de ser mais próximo da realidade no que se refere a soluções concretas. Atualmente nos defrontamos com este mesmo desafio em situações práticas na qual o resultado algébrico não possui tanto valor quanto o geométrico. Podemos citar as projeções de móveis e produtos com design não convencionais, que exigem muitas vezes a resolução geométrica para os problemas. Apesar do incentivo dado a geometria nos últimos anos, notamos que no Brasil há uma deficiência muito grande nesta área , a qual aparece desvinculada das demais áreas da matemática. Os próprios livros didáticos , com raríssimas exceções, trazem o conteúdo de geometria nos últimos capítulos, que muitas vezes não são vistos pelos alunos. Entendemos que existe uma necessidade de relacionarmos mais a Álgebra e a Geometria. Com base nessa filosofia, procuramos desenvolver atividades que explorem o pensamento geométrico vinculado ao algébrico. Acreditamos que a visão geométrica pode ser uma transição para o abstrato, a partir do momento em que o aluno materializa a incógnita como um elemento geométrico a ser procurado, tendo assim uma solução concreta para o que antes era apenas um número abstrato, desenvolvendo assim um sentido, e não único, para a solução algébrica.

A metodologia usada será a Resolução de Problemas. Faremos um breve histórico sobre a área de geometria, contextualizando o período em que os problemas que serão abordados ocorreram, quais eram as dificuldades da época no que se refere a maneira de atacar e resolvê-los, como os mesmos foram resolvidos, e quais as informações que se pode tirar do problema e da sua resolução. Iremos fazer uma adaptação propondo atividades em que a resolução se fundamenta em processos usados naquela época, deixando claro que os mesmos não podem ser abandonados, pois, muitas vezes aparecem em situações atuais, e em outros casos nos mostram o quanto avançamos, pois só nos é possível vermos o quanto uma determinada área da matemática avançou quando sabemos como era antes do avanço.

Utilizando a História da Matemática

A História da Matemática pode ser um potente auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, com a finalidade de manifestar de forma peculiar as idéias matemáticas, situar temporalmente e espacialmente as grandes idéias e problemas, junto com suas motivações e precedentes históricos e ainda enxergar os problemas do passado, bem como encontrar soluções para problemas abertos.

Para Valdés (2002) "Se estabelecermos um laço entre o aluno, a época e o personagem relacionado com os conceitos estudados, se conhecerem as motivações e dúvidas que tiveram os sábios da época, então ele poderá compreender como foi descoberto e justificado um problema, um corpo de conceitos, etc..."

A contribuição do Desenho Geométrico na formação da intuição matemática

Acredito que o desenho geométrico auxilia o aluno a criar estratégias de resoluções de problemas, embasadas em sua intuição, pois é mais fácil você intuir algo em função de uma noção geométrica de determinado fenômeno, do que intuir em cima de um abstração algébrica que não lhe permite nenhum modelo geométrico. A intuição matemática segundo Davis & Hersh (1995, p. 336-7), não é adquirida através da memorização de fórmulas verbais (decorar os passos de um teorema, por exemplo), mas através de experiências de resolução de problema. Estas experiências produzem representações mentais dos objetos matemáticos, as quais são comparadas e verificadas pelos matemáticos, professores e colegas, garantindo que pessoas diferentes tenham representações mentais congruentes sobre um mesmo conceito.

De acordo com Reis (2001, p. 52) "... a transição entre o pensamento matemático elementar para o pensamento avançado não significa, determinantemente, uma transição do pensamento intuitivo para o rigoroso. No terreno do ensino, o processo de desenvolvimento de um pensamento matemático mais avançado demanda atividades de significação de processos mentais, consideradas mais intuitivas, às quais precedem às atividades com definições e provas formais, por sua vez, mais rigorosas."

Creio que naturalmente possuimos uma intuição matemática que deve ser explorada pois o exercício desta habilidade faz com que nossos alunos progridam em suas descobertas com mais segurança, pois não devemos confundir uma intuição bem alicerçada com um palpite desvinculado de qualquer raciocínio lógico.

Atividades propostas

Previamente é passado aos ouvintes algumas transparências contendo os conceitos que serão mais usados. Entre os quais destacamos:
A definição de sementos proporcionais;
A definição de quarta proporcional;
A definição de terceira proporcional;
A definição de média geométrica;

Atividade 1)
Vamos dar um exemplo de como encontar geometricamente o segmento de tamanho x tal que $x- \sqrt{3a^2+2b^2}=0$, sendo conhecido geometricamente os segmentos a e b.

Resolução:
Observe que:

$$3a^2=(a\sqrt{3})^2$$
$$2b^2=(b\sqrt{2})^2.$$

Basta usarmos o fato de que x é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são $(a\sqrt{3})$ e $(b\sqrt{2})$. Para encontrarmos os segmentos $(a\sqrt{3})$ e $(b\sqrt{2})$, procedemos como segue:
É construída uma reta suporte t onde iremos apoiar os seguimentos. De posse do segmento a, construímos o segmento 4a sobre a reta suporte t , gerando o segmento AB. Traçamos uma reta s perpendicular a t passando pelo ponto P tal que o tamanho do segmento AP é igual ao tamanho do segmento a. Construímos um semi-círculo com centro no ponto médio de AB e diâmetro igual ao tamanho do segmento AB. Da intersecção do semi-círculo com a reta s temos o ponto C, e o tamanho do segmento CA é $(a\sqrt{3})$.

No caso de $(b\sqrt{2})$, basta construirmos dois segmentos perpendiculares de tamanho *b*, e então a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos cujo tamanho é *b* será $(b\sqrt{2})$.

O que fazemos agora é construir um triângulo retângulo cujos catetos são $(a\sqrt{3})$ e $(b\sqrt{2})$, e então a hipotenusa é o segmento procurado.

Atividade 2)
É proposto o seguinte desafio: Encontrar geométricamente os segmentos cujos tamanhos são soluções da equação $x^2 + 18x - 50 = 0$. Resolver uma equação do segundo grau geometricamente, consiste em exibir um segmento com o tamanho do valor absoluto das raízes da equação, no caso de raíz negativa, nos referimos ao tamanho do segmento como sendo o módulo da raíz. Problemas como este podem ser consequência de situações como a de um serralheiro que quer recortar uma chapa de ferro retangular para cobrir um móvel que possui 50cm^2 de área, e a diferença entre os lados não paralelos é de 18 cm.

O que estamos querendo explorar com isto é que a resolução algébrica deste problema é muito simples para o aluno que já tenha um conhecimento de equações do 2º grau, porém a solução algébrica do problema é dada por dois números irracionais, um dos quais é negativo e não faz sentido para o caso concreto, mas o outro será um número o qual não aparece nas fitas métricas, mas é um número que existe, é "real", e tem que haver um jeito de localizá-lo. A necessidade de solucionar este problema de maneira geométrica e não algébrica é devido ao fato de que queremos um molde para recortar esta chapa, e não uma simples medida escrita no papel sem o compromisso de ganhar "forma e tamanho".

Para que possamos resolver situações como esta e outras equivalentes teremos que passar por vários conceitos e teoremas matemáticos da Geometria plana e associá-los as construções geométricas, fazendo assim com que o aluno tenha que por em prática a teoria que muitas vezes ele pensa ser desassociada de todo o universo em que ele vive, mas que na verdade talvez ele não enxergue aplicações por não saber que tipos de questionamentos podem estar por vir na sua vida cotidiana.

Resolução da equação $x^2 + 18x - 50 = 0$.

Sabemos que neste caso, estamos procurando duas raízes cuja soma é -18 e o produto é -50. Do produto negativo concluimos que estas raízes possuem sinais distintos, e como a soma é negativa a raiz de maior módulo é negativa.

Estamos então em busca da solução do sistema

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -18 \\ x_1 . x_2 = -50 \end{cases}$; onde supondo que $|x_1| > |x_2|$, façamos a substituição

$|x_1| = \alpha$, para que o nosso problema envolva somente números positivos e possamos encontrar o tamanho dos segmentos que são soluções. Façamos a seguinte manipulação algébrica

$x_1 + x_2 = -18 \Rightarrow -x_1 - x_2 = 18 \Rightarrow \alpha - x_2 = 18$. Por outro lado a segunda equação fica $x_1 . x_2 = -50 \Rightarrow \alpha . x_2 = 50$. O que temos agora é um sistema que envolve apena números positivos descrito da seguinte forma

$\begin{cases} \alpha - x_2 = 18 \\ \alpha . x_2 = 50 \end{cases}$; ou seja, procuramos dois números cuja diferença é 18, e o produto é 50.

Para determinarmos estes dois segmentos faremos uso do seguinte teorema :

"Se de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos uma tangente e uma secante, a tangente será a média geométrica entre a secante inteira e sua parte exterior".

Entendemos por média geométrica entre dois segmentos a e b o segmento x tal que $x = \sqrt{a.b}$.

Procedemos então da seguinte forma:

1) Em uma reta *s*, toma-se os pontos A e B, de tal forma que o tamanho do segmento AB é de 50cm..
2) Constrói-se a semi-reta segmento OB perpendicular ao segmento AB por B.
3) Toma-se sobre a semi-reta OB um ponto C tal que a medida do segmeto BC seja igual a 9cm, valor que é obtido ao dividirmos 18cm por 2, ou seja metade do valor da diferença entre as raízes.
4) Traça-se a reta AC.
5) Traça-se o semicírculo de centro C e raio CB.
6) Marcamos os pontos D e E, na intersecção entre a reta AC e o semicírculo de centro C e raio CB. .
7) Supondo a medida do segmento AD menor que a medida do segmento AE, temos que o segmento AD possui medida x_2 e o segmento AE possui medida α .

Considerações Finais

O que observamos com este tipo de atividade é que a gama de informações que está contida na mesma faz com que os alunos reflitam sobre a riqueza de propriedades que muitos conceitos geométricos possuem, e que muitas vezes o simples enunciado de um teorema não deixa isto claro. A motivação que é dada ao aluno busacando situações reais e concretas, serve para evitar a famosa pregunta "Para que que isto serve?" Porém, muitas vezes podemos explorar aplicações dentro da própria matemática, como por exemplo, ao invés de pensarmos em uma construção de um móvel ou algo semelhante, pensarmos na construção de um triângulo com algunas condições pré-estabelecidas. Situações como esta são fácilmente passadas para o concreto e auxiliam o aluno a visualizar a necessidade de uma teoria que explore propriedades e teoremas que justificam o que é possível e o que não é possível em Matemática. Este trabalho foi desenvolvido com o suporte técnico do Laboratório de matemática da Universidade Luterana do Brasil –ULBRA, e a biblioteca da Universidade Federal do Rio Grande do Sul -UFRGS.

Referências Bibliográficas

Calfa, H.G.; Barbosa,R.C.; Almeida,L.A.(1995). Desenho Gométrico Plano Volume 2. Rio de Janeiro, Brasil: Biblioteca do Exército.

Davis, Philip J.; Hersh, Reuben. (1995) A Experiencia Matemática. Lisboa: Gradita.

Reis, Frederico da Silva. A Tensão entre o rigor e a Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão dos profesores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Campinas: UNICAMP, 2001. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2001. Disponível em: http://www.libdigi.unicamp.br/documet/?code=vtls000220294 . Acesso em:05 jun. 2004.

Rezende, E. y Queiroz, M. (2000). Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. Campinas, Brasil: UNICAMP.

Valdés, J., Nápoles, E. (2002). La História como elemento unificador em lá Educación Matemática. Argentina, (texto digitado).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E OS TEMAS TRANSVERSAIS

Carmen Teresa Kaiber; Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil – Brasil
kaiber@ulbra.br; claudiag@ulbra.br
Campo de Investigación: Estudos Curriculares; Nivel Educativo: Medio

Resumo

O presente trabalho objetiva apresentar os resultados de pesquisa na área de Educação Matemática e os Temas Transversais, desenvolvida pelo grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática, da Universidade Luterana do Brasil. A proposta da pesquisa é a elaboração de ferramentas didático-pedagógicas que possibilitem desenvolver um projeto educacional ao nível do Ensino Básico (Fundamental e Médio) ligando os temas transversais à disciplina de Matemática, implementando projetos de trabalho com professores de Matemática, avaliando sua necessidade e importância para o desenvolvimento de estudantes qualificados a atuarem comprometidamente na sociedade em busca do Desenvolvimento Sustentável.
Palavras-chave: Educação Matemática, Desenvolvimento Sustentável, Temas transversais.

Introdução

Ao buscarmos proporcionar ao educando o desenvolvimento da compreensão do mundo, devemos ter em mente que compreender o mundo implica aprender a relacionar e analisar criticamente a realidade não como um conjunto de partes, mas como uma totalidade. Entretanto, a prática tem mostrado que grande parte dos conhecimentos trabalhados na educação escolar, quer ao nível de Ensino Fundamental, quer ao nível de Ensino Médio, são, além de ultrapassados, trabalhados de forma fragmentária e reducionista.
Segundo Azcárate (1997) essa problemática se torna muito evidente em Educação Matemática: a grande maioria dos professores de Matemática não tem bem claro o papel da interdisciplinaridade e guarda ainda a visão de que trabalham com uma ciência “fechada”, acabada, concluída, onde todo o conhecimento já foi inventado e constituído, tratando-se de um conhecimento estável, verdadeiro, acessível somente a uns poucos. Assim, os alunos passam a perceber a Matemática como um conjunto de algoritmos a serem memorizados, juntamente com uma série de conceitos e definições abstratos e descontextualizados. Desta forma, fica para eles a idéia de que a Matemática não lhes ajuda efetivamente em seu cotidiano. Para reverter este quadro, os professores devem aprender a descobrir sentidos e relações entre as disciplinas, analisar as conexões das estruturas conceituais e dos procedimentos matemáticos com as questões do mundo que nos rodeia, favorecendo aos alunos a elaboração de um conhecimento matemático mais holístico e mais válido para sua integração como cidadão à sociedade atual.
Nesse sentido uma das grandes preocupações dos pesquisadores em Educação Matemática tem sido encontrar caminhos metodológicos que integrem a realidade e o “fazer matemático”, possibilitando uma vinculação entre a estrutura lógico-formal da disciplina e sua utilização para compreender e descrever o mundo, tornando o aluno um agente atuante e central no processo ensino-aprendizagem (Kaiber e Groenwald, 2001).
Assim, a proposta do presente trabalho é a elaboração de ferramentas didático-pedagógicas que possibilitem desenvolver um projeto educacional ao nível de Ensino

Básico na área de Desenvolvimento Sustentável, ligando os temas transversais à disciplina de Matemática.

Matemática e Educação para o Desenvolvimento Sustentável

A busca do progresso e de melhorar a qualidade de vida das pessoas leva, muitas vezes, o homem a transformar ecossistemas causando desequilibrios na natureza que deixam a humanidade alarmada com suas conseqüências.
Nesse contexto surge o conceito de desenvolvimento sustentável como o "*desenvolvimento que atende às necessidades do presente, sem comprometer a capacidade das futuras gerações atenderem às suas próprias necessidades*" (UICN, PNUMA e WWF, 1991, p. 4).
A base do conceito de desenvolvimento sustentável reside na necessidade dos habitantes de comunidades desejarem possuir uma vida satisfatória para eles e seus descendentes. Aliado a esse desejo, há a dependência das pessoas dos recursos naturais para o suprimento das suas necessidades básicas. Então, viver com sustentação significa uma mudança de hábitos e atitudes para a maioria das pessoas, é preciso entender e aceitar as conseqüências de sermos parte de uma grande comunidade de vida e nos tornarmos conscientes dos efeitos de nossas decisões sobre outras sociedades, futuras gerações e outras espécies.
Fazer um trabalho em educação para o desenvolvimento sustentável é firmar valores e ações que contribuam para a transformação humana e social, bem como a preservação do meio ambiente, baseando-se no respeito a biodiversidade.
Esta nova abordagem precisa atender a duas exigências fundamentais. Primeiro, é necessário assegurar um amplo e profundo compromisso com uma nova ética sustentável e traduzir na prática os seus princípios. Em segundo lugar, integrar conservação e desenvolvimento. A conservação para limitar as nossas atitudes à capacidade da Terra, e o desenvolvimento para permitir que as pessoas possam levar vidas longas, saudáveis e plenas em todos os lugares (Groenwald e Silveira, 2005).
Se queremos um homem que reconheça a necessidade de conquistar a sustentabilidade do planeta devemos investir na sua educação. Precisamos, pois, nos assegurar que os programas educacionais reflitam a importância de uma ética de vida sustentável. Nesse sentido a Educação Matemática tem muito a contribuir, através da elaboração de ferramentas didático pedagógicas, integrando a disciplina de Matemática com as diferentes áreas e principalmente, utilizando em seu planejamento os temas transversais.

Educação Matemática e os temas transversais

A elaboração de um conhecimento matemático que, além de considerar seu potencial formativo intrínseco, permita conhecer, interpretar e atuar sobre situações da realidade sócio-cultural conduz à necessidade da integração dos temas de relevância social ou temas transversais no ensino da Matemática. Os temas transversais são um conjunto de conteúdos educativos e eixos condutores da atividade escolar que não estão ligados a nenhuma matéria em particular, sendo comuns a todas, com um tratamento transversal no currículo da escola (Yus, 1998).
Os temas transversais proporcionam a ponte entre o científico e o cotidiano (Moreno, 1994), aproximando a escola aos temas significativos do mundo atual permitindo aos professores relacionar as diferentes áreas em diferentes etapas e ciclos, bem como apresentar os conteúdos de forma globalizada (Yus, 1998), oferecendo soluções para o conflito existente entre os diferentes conhecimentos que estão em jogo no processo de

ensino-aprendizagem, especialmente, entre o conhecimento disciplinar e os problemas sócioambientais (Porlán e Rivero, 1994).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1996), indicam que a abordagem de temas de relevância social, como diversidade cultural, cultura regional, educação ambiental, educação para o trabalho, educação para a segurança, entre outros, pressupõe o desenvolvimento do aluno como pessoa e como cidadão, com capacidade de posicionar-se frente as questões que interferem na vida coletiva, intervindo de modo responsável na comunidade na qual está inserido.

Neste sentido argumenta-se que o ensino deve ser relevante para aos estudantes, entendendo-se a relevância em função do papel dos indivíduos na sociedade, de suas capacidades e do contexto em que estão inseridos (Saez e Riquarts, 1996).

Assim, os temas de relevância social têm por objetivos: atualizar e ressignificar o currículo escolar com questões de importância para a vida pessoal e coletiva dos alunos, desenvolvidas de maneira contínua, no decorrer do ensino, através da integração das diferentes áreas do conhecimento; trabalhar os valores, normas e atitudes para o desenvolvimento individual e coletivo preparando os alunos para o exercício da cidadania, refletindo-se no estabelecimento de relações sociais justas e humanizadoras.

Para a concretização curricular desses temas, é necessária a responsabilidade conjunta de toda a comunidade educativa, indo além das atividades educativas, impregnando toda a vida da escola e seu próprio meio social (Yus, 1998). O ensino da Matemática deve inserir-se de forma integrada nesse contexto.

Integrar temas e questões sociais (como ética, meio ambiente, saúde, paz) para o estudo e reflexão dos alunos requer uma via de acesso que permite sua inserção de forma contínua e integrada, uma vez que têm natureza diferente das áreas convencionais e, isoladamente, uma área não é suficiente para abordá-los. Essa via de acesso tem se constituído na transversalidade.

A transversalidade pressupõe que os temas de relevância social integrem as diferentes áreas contemplando os objetivos e conteúdos que os temas propõem, não se constituindo em novas áreas. A perspectiva transversal objetiva uma transformação da prática pedagógica, uma vez que amplia a responsabilidade dos professores com a formação dos alunos e, para se efetivar, deve contar com um rompimento do trabalho formal.

A inserção dos temas transversais no currículo das escolas, e mais especificamente no currículo de Matemática, deve implicar na busca de alternativas para se concretizar e passa por um profundo conhecimento do meio onde vive o aluno, em todas as suas dimensões (social, física, econômica, cultural). Assim, entende-se que, em relação a Matemática, é possível integrar os temas transversais via projetos de trabalho e a proposta é concretizar esta ação no contexto da sala de aula, articulado ao processo de ensino e aprendizagem do Ensino Básico.

A via escolhida: os projetos de trabalho

O trabalho com projetos proporciona contextos que geram a necessidade e a possibilidade de reorganizar os conteúdos, conferindo-lhes significado, permitindo ao aluno vivenciar novas estratégias e desafios em sua aprendizagem. A repetição, elemento fortemente presente no currículo organizado de forma linear, cede lugar para a inovação, criatividade e experimentação.

Segundo Hernández e Ventura (1998, p.61) a função do projeto é "favorecer a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares em relação: 1) ao tratamento da informação, e 2) aos diferentes conteúdos em torno de problemas ou hipóteses que

facilitem aos alunos a construção de seus conhecimentos, a transformação da informação procedente dos diferentes saberes disciplinares em conhecimento próprio."
O desenvolvimento de projetos propiciam o "aprender a aprender", estabelecem conexões entre os conhecimentos adquiridos anteriormente e a construção de novos conhecimentos, permitem o trabalho com conceitos e estruturas, a elaboração e testagem de hipóteses de trabalho, alteração na ótica da informação e sua descrição para compreendê-la.

Objetivos da investigação

A presente investigação visou a elaboração de ferramentas didático pedagógicas, integrando a disciplina de Matemática com os temas transversais, objetivando buscar formas de trabalhar a Matemática inserida ao tema do Desenvolvimento Sustentável, aumentando a consciência coletiva para a sustentabilidade. Os objetivos específicos foram: propor um projeto envolvendo Matemática e os temas transversais; implementar projetos de trabalho envolvendo os temas transversais

Exemplo de atividades didáticas desenvolvidas no Ensino Médio

A Matemática articulada com os temas transversais pretende tornar presente na escola a discussão sobre temas de relevância social, buscando uma postura de vida mais consciente, onde os conteúdos matemáticos auxiliam na leitura crítica do mundo. As atividades apresentadas, a seguir, foram retiradas de projetos implementados no Ensino Médio.

Atividade 1: Energia elétrica[1]

Utilizando as informações de várias contas de energia elétrica das famílias dos estudantes, foi elaborada a tabela l.

Tabela nº 1

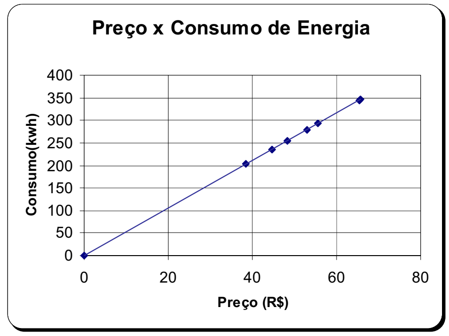
Preço (R$)	**C**onsumo(kwh)	Par (**c,P**)
0	0	(0,0)
38,50	203	(203;38,50)
44,76	236	(236;44,76)
48,37	255	(255;48,37)
53,11	280	(280;53,11)
55,58	293	(293;55,58)
65,44	345	(345;65,44)
65,82	347	(347;65,82)

Fonte: Leitura das contas de energia elétrica.

Com os dados da tabela, pode-se construir o gráfico **P x c** ou **P(c),** do preço em função do consumo. Torna-se necessário identificar qual é a variável dependente, qual é a variável independente e se são discretas ou contínuas.

Gráfico do Preço da Energia Elétrica em Função do Consumo

[1] Atividade desenvolvida na dissertação de mestrado de Rosane Maria Jardim Filippsen, orientada por Claudia Lisete Oliveira Groenwald



Para construir o modelo da função é necessário, para cada dois pontos consecutivos do gráfico, a partir do zero, construir triângulos retângulos, cujas hipotenusas serão segmentos da semi-reta, identificando o ângulo de $90°$, o ângulo formado pela hipotenusa e o segmento horizontal do triângulo que é paralelo ao eixo x.

A relação trigonométrica calculada é a tangente do ângulo assinalado. Na conta de energia elétrica essa relação trigonométrica representa o preço do quilowatt hora (kwh) que é, nesse caso, 0,1898. No gráfico, a relação trigonométrica é a declividade da reta representada por seu coeficiente angular. Logo a função pode ser representada pela lei: $P(c) = 0{,}1898 \cdot c$

Atividade 2: Cálculo da distância entre painéis solares e de outras medidas [2]

O objetivo é utilizar os conceitos de trigonometria em triângulos retângulos e triângulos quaisquer para calcular a melhor distância em que devem ser dispostos painéis solares colocados paralelamente, assim como o comprimento, a altura e o ângulo de inclinação destes.

Para instalar painéis solares paralelamente (para ocupar menos espaço nos telhados e obter melhor ângulo solar), prevê-se um afastamento entre eles de 3,5 vezes a sua altura, conforme exemplificado na figura 1. Na realidade, se estiverem mais próximos entre si, durante o inverno farão sombra uns aos outros.

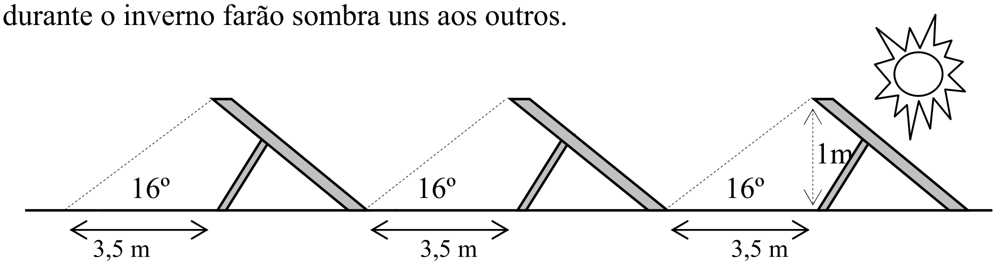


Figura 1: Painéis Solares

Na figura 2 temos painéis solares dispostos paralelamente. Sabendo, então, que devem manter uma distância igual a três vezes e meia a altura do painel, calcule a altura “h” dos painéis e a melhor distância “d” entre eles.

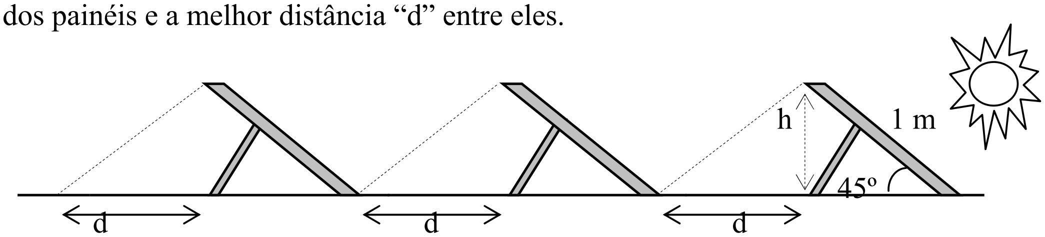


Figura 2: Painéis solares

Utilizando: $\text{sen } x = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$, temos: $\text{sen } 45° = \dfrac{h}{1}$ $\qquad h = 0{,}71 \text{ m}$

---

[2] Atividade desenvolvida na dissertação de mestrado de Roberto Brasil da Silveira, orientada por Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Assim, a distância "d" é: d = 3,5.h ; d = 3,5 . 0,71; d = 2,5 m

Se na figura 2 o ângulo indicado fosse de 60º, qual a distância "d" necessária para um painel, no inverno, não fazer sombra no outro?

Utilizando: $\text{sen } x = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$, temos: $\text{sen } 60^\circ = \dfrac{h}{1}$ e h = 0,866 m.

Assim, a distância "d" é: d = 3,5 . h = 3,5 . 0,866 = 3 m

Conclusão

A Educação Matemática deve ser desenvolvida visando um ensino comprometido com as transformações sociais e a construção da cidadania, contando com a participação ativa do aluno no processo de ensino e aprendizagem em um contexto de trabalho em grupo e não individual. Deve basear-se em um ensino que torne a Matemática significativa para o aluno, vinculando-a a realidade, na utilização de recursos específicos e um ambiente que propicie o desenvolvimento de seqüências metodológicas que levem o aluno a construir seu próprio conhecimento.

Em relação ao ensino da Matemática é possível perceber uma dificuldade muito grande em superar a organização linear dos conteúdos, o que leva à práticas que evidenciam um tratamento acadêmico dos mesmos. Quando centrada em si mesma, isolada, sem conexões entre seus próprios campos ou outras áreas do conhecimento a Matemática pouco contribui para a formação do aluno em outros aspectos que não seja o domínio de conteúdos. Integrar os temas de relevância social à Matemática permite romper essa estrutura e esta integração pode se concretizar nos projetos educativos.

Ao longo do projeto, ficou bastante evidente que há uma necessidade urgente de um trabalho consistente com os professores de Matemática, para que seja possível proporcionar ao educando o desenvolvimento da compreensão do mundo, uma vez que acreditamos que somente um profissional que tenha introjetado a visão de que compreender o mundo implica aprender a relacionar e analisar criticamente a realidade não como um conjunto de partes, mas como uma totalidade, poderá organizar uma prática pedagógica capaz de levar o educando a ter oportunidades efetivas de utilização da Matemática como um instrumento de leitura crítica e interferência sobre a realidade.

A análise dos resultados nos indica ter sido possível a integração entre Matemática e Educação Ambiental, o que possibilitou que a Matemática servisse como um instrumento de reflexão para o cultivo de ações e atitudes que venham a modificar a nossa consciência ambiental coletiva, na busca da vivência dos princípios do Desenvolvimento Sustentável..

Referências bibliográficas

Azcárate, P. (1997) Que matemáticas necessitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela.* 32, 77 – 86.

Filipsen, R. (2003). M. J. Educação Matemática e Educação Ambiental. Dissertação de Mestrado. ULBRA.

Groenwald, C., Oliveira, L. e Silveira, R.(2005). Energia solar no ensino da matemática: uma proposta para o Ensino Médio. *ACTA SCIENTIAE*, v.7, n.1, p. 111-122, jan/jun.

Hernández, F., Ventura, M. (1998) *A organização do currículo por projetos de trabalho.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Kaiber, C.; Groenwald, C. (2001). Integrando Matemática ao Tema de Educação Ambiental. *Paradigma*, v. 22, n.2, p.151-170.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática, 5ª a 8ª série. Brasília.

Moreno, M. (1994). Los Temas Transversales: una enseñanza mirando hacia delante. In: PORLÁN, R. e RIVERO, A . Investigación dell medio y conocimiento escolar. *Cuadernos de Pedagogía*, 227, 28-31.

Porlán, R. e Rivero. (1194). A . Investigación dell medio y conocimiento escolar. *Cuadernos de Pedagogía,* 227, 28-31.

Silveira, R. (2003). *Energia Solar no Ensino da matemática: uma proposta para o ensino Médio.* Dissertação de Mestrado. ULBRA.

Saez, M. e Riquarts, K. (1996) El Desarollo sostenible y el futuro de la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 175-182.

UICN; PNUMA; WWF. (1991) *Cuidando do Planeta Terra: uma estratégia para o futuro da vida*. Sumário. São Paulo: CL–A Cultural.

Yus, R. (1198). *Temas Transversais – em busca de uma Nova Escola*. Porto Alegre: ARTMED.

EL PROGRAMA DE LA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA PARA FORESTAL: IDEAS Y PERSPECTIVAS"

María del Carmen Acuña Salcedo ; Madelén Garófalo Novo ; Sandra Madan Valdés.
Universidad de Pinar del Río, Cuba.
msalcedo@mat.upr.edu.cu
Campo de Investigación: Educación Continua; Nivel Educativo: Superior

RESUMEN

La Educación Superior Cubana está en un proceso de constante perfeccionamiento y adecuación a las exigencias contemporáneas, constituyendo esto un objetivo de las instituciones y profesores universitarios. La preparación de profesionales con una elevada calificación y capacidad creativa es un aspecto de vital importancia motivado por las exigencias industriales, investigativas y tecnológicas del mundo moderno, así como por el gran avance científico de las técnicas de la información y las comunicaciones.
La Universidad de Pinar del Río está desarrollando un trabajo sistemático en el perfeccionamiento de las diferentes carreras con vistas a cumplir con las pretensiones anteriores. Y es lo que se pretende lograr con la propuesta del Plan de Estudio "D" de la Disciplina Matemática para la carrera de Forestal, que es el objetivo del presente trabajo.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que ha enfrentado el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Disciplina de Matemática en la carrera de Forestal en la Universidad de Pinar del Río (Cuba) es lograr que ésta juegue su papel en la formación de esos profesionales. Sin embargo, es reconocido por los especialistas de la carrera que la enseñanza de la Matemática es de suma importancia en su formación pues le ofrece técnicas, métodos y algoritmos de trabajo que contribuyen al logro de un ecosistema forestal sostenible, a la protección y cuidado del medio ambiente y a la defensa del país bajo condiciones extremas.
En correspondencia con lo planteado se ha trabajado en el perfeccionamiento de la Disciplina pero aún falta mucho por hacer en este aspecto, pues se requiere de una formación diferente a la tradicional. Esto trae consigo cambios en los Programas de Estudio de la Disciplina, de modo que se aprovechen las nuevas tecnologías informáticas en favor de la enseñanza y se logre una nueva manera de comunicar y aplicar el conocimiento, apoyado en la integración de estas nuevas tecnologías y buscando aportar a la enseñanza una base más científica que la haga productiva y eficiente, mejorando así la calidad del trabajo académico y de los frutos del mismo.

DESARROLLO

La deforestación y la pérdida de la biodiversidad constituyen actualmente una preocupación de toda la humanidad, tal como expresara Fidel en la Cumbre de Río, desarrollada en Brasil en 1992.
Muchos de los acontecimientos y hechos naturales ocurridos recientemente en el mundo pudieran ser provocados por el poco cuidado del medio ambiente y por el abuso del hombre ante la naturaleza.

Antes del Triunfo de la Revolución Cubana en 1959 se realizó una tala indiscriminada de los bosques, es por ello que a partir de los años 60 se comenzaron a reforestar las zonas más afectadas y a fomentar plantaciones en otras. Para realizar esta labor se necesitaba de personal calificado y es por ello que se decide por el Ministerio de Educación Superior la creación de la enseñanza forestal a nivel universitario y en la actualidad la Universidad de Pinar del Río es el centro que dirige la misma en todo el país.

El Plan de Estudios con que se inicia la Ingeniería Forestal, en el año 1965, en la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad de la Habana, corresponde al período de los planes unificados y en éste se impartían en los tres primeros años, las mismas asignaturas que en Agronomía y en Sanidad Vegetal.

En los Planes de Estudios A y B (décadas del setenta y ochenta respectivamente) los programas de Matemática se elaboraron también de forma unificada para las carreras de Forestal, Agronomía, Pecuaria y Veterinaria, trayendo como consecuencia que afloraran deficiencias como:

- ✓ La enseñanza completamente desvinculada del perfil profesional.
- ✓ No se establecen vínculos con las asignaturas de la profesión, ni con las demás ciencias básicas.
- ✓ Empleo de métodos y formas de enseñanza que no contribuyen al desarrollo integral del estudiante.
- ✓ Mucho tiempo destinado a actividades de Conferencias y poco a actividades Prácticas.

Finalizando la década del 80 y comenzando la del 90, y como parte de la rectificación de errores y tendencias negativas, se definen un conjunto de líneas y estrategias para elevar la calidad de la enseñanza, con lo que se introduce un nuevo modelo pedagógico en los Planes C y se logran saltos positivos en cuanto a:

- ✓ Reducción del número de Conferencias y aumento de horas de Clases Prácticas y Laboratorios.
- ✓ Reducción del número de Temas de las Asignaturas y la cantidad de Objetivos Instructivos y Educativos de los Programas.
- ✓ Se dan pasos en la vinculación de las asignaturas con la especialidad de Forestal y se aplican métodos de enseñanza más activos en el desarrollo de las diferentes actividades docentes.

En Cuba, el pleno acceso a la Educación Superior supone asegurar consecuentemente *la permanencia y el egreso* del estudiante en ese nivel. Para ello se identifican cuatro aspectos fundamentales que deben influir positivamente para garantizar lo planteado:

- ➢ El perfeccionamiento de la *<u>labor educativa y político ideológica</u>.*
- ➢ El perfeccionamiento de los *<u>planes de estudio</u>.*
- ➢ Adecuar las actuales *<u>reglamentaciones</u>* para los cursos regulares a la nueva universidad cubana.
- ➢ La determinación precisa del *<u>nivel de preparación de los estudiantes que acceden a la ES</u>* y la solución temprana de las posibles insuficiencias.

En la actualidad los retos que deberá enfrentar el proceso de formación en la nueva Universidad Cubana presuponen la implementación inmediata de los conceptos esenciales de un nuevo Plan de Estudio “D”, vía principal para lograr una formación con calidad sobre la base del fortalecimiento de la *formación básica* de los alumnos*; una mayor p*recisión del *currículo base* con carácter estatal y *flexibilidad* en la aplicación del mismo en cada Centro de Educación Superior; disminución de la *carga semanal de clase; i*ncremento de la *actividad laboral, el trabajo científico curricular y extracurricular y la autopreparación;* así como la implementación de *t*ransformaciones relacionadas con la *virtualización* del proceso de formación y con el sistema de *evaluación del aprendizaje.*

O sea que el Plan D se caracteriza por:

- Aumentar la autopreparación y el autoaprendizaje del estudiante.
- Buscar “troncos comunes” de contenidos entre las asignaturas básicas de carreras como Agropecuaria y Forestal; Ciencias Técnicas; Económicas, etc.
- Elaboración de los diferentes Programas de Carrera, Disciplina y Asignaturas teniendo en cuenta las Estrategias Curriculares y la formación de valores en los estudiantes.
- Lograr una mayor flexibilidad en el Currículo. Se sugiere la propuesta de Contenidos Obligatorios (conforman los diferentes Programas de las Asignaturas Obligatorias y que deben ser cursados y aprobados por todos los estudiantes), Contenidos Electivos (pueden ser elegidos o no de acuerdo a los intereses de cada alumno en particular) y Contenidos Optativos (donde el estudiante debe seleccionar al menos uno del bloque propuesto).
- Mayor integración de la trilogía: clases-trabajo científico-práctica laboral.
- Actualización de los métodos y medios de enseñanza mediante la elaboración de guías de estudio para las Conferencias, Clases Prácticas, Seminarios, Talleres y la orientación del Estudio Individual.
- Nueva concepción y planificación de las evaluaciones y sus formas.
- Renovación de la concepción en cuanto al empleo de las TIC (Técnicas de la Informatización y las Comunicaciones) y su planificación (utilización de software profesionales y laboratorios virtuales en las diferentes actividades docentes y de estudio independiente).

Esta nueva propuesta está fundamentada también por n*uestro encargo social que es:*

- Asegurar el pleno acceso de todos los que deseen estudiar en la Educación Superior, sin límites ni barreras de ningún tipo.
- Garantizar, en los plazos requeridos, la fuerza de trabajo altamente capacitada que el desarrollo económico y social del país demanda.

Para lograrlo se proponen dos tipos de cursos: a dedicación exclusiva o total (En sustitución de los actuales Cursos Regulares Diurnos) y a dedicación parcial (Que integren en un solo tipo de curso los restantes tipos de cursos actuales como los Cursos para Trabajadores, Cursos Libres, Educación a Distancia, etc). Ambas modalidades deben tener elementos comunes como:

- *El Macrocurrículo:* Objeto de la Profesión; los Modos de Actuación del Profesional; los Campos de Acción y las Esferas de Actuación y los Objetivos Generales de la carrera, tanto educativos como instructivos.
- Las *Objetivos y los Contenidos esenciales* de cada una de las Disciplinas que conforman el plan de estudio.
- Los *textos básicos.*
- Las *formas organizativas* del proceso docente.
- El empleo de *métodos* presenciales, semipresenciales y a distancia.
- Sistemas de *evaluación* del aprendizaje cualitativos e integradores y centrados en el desempeño del estudiante.
- Ejercicios de *culminación de estudio* equivalentes, utilizando las modalidades actualmente vigentes: Examen Estatal y Trabajo de Diploma.

La introducción de estos conceptos esenciales es un proceso que empezó en el año 2003, a raíz de la aprobación de las nuevas ideas para el Plan D y desde entonces, las carreras han venido dando pasos en esta dirección y trabajando en su elaboración.
A continuación aparecen los elementos fundamentales de la Propuesta del Colectivo de Profesores de la Carrera de Forestal para el Programa de la Disciplina de Matemática:
Problema de la Disciplina: La necesidad de la formación de un profesional que mediante la aplicación de las diferentes Teorías Matemáticas contribuya al manejo y desarrollo forestal sostenible.
Objeto: Teorías Matemáticas que posibilitan la elaboración de un modelo forestal.
Asignaturas y su fondo de tiempo:

- MATEMÁTICA I	1er Año	1er Semestre	86 horas presenciales.
- MATEMÁTICA II	1er Año	2do Semestre	70 horas presenciales.
- ESTADÍSTICA	2do Año	1er Semestre	58 horas presenciales.
- INV. DE OPERAC.	3ro Año	1er Semestre	54 horas presenciales.
Total de horas……………………………………			268 horas presenciales.

Objetivo General Educativo de la Disciplina: Actuar de acuerdo con los principios éticos del Ingeniero Forestal y convencidos de la importancia de la Matemática para el desarrollo de la actividad forestal sostenible desarrollando: hábitos de estudio, perfeccionando la expresión oral, la escrita y la correcta comunicación, el pensamiento lógico, la toma de decisiones, la calidad y la presentación de los trabajos que realice, así como mostrando rasgos de constancia, hábitos de proceder reflexivo, de trabajo en equipo y desarrollando valores como: la profesionalidad, la responsabilidad, el humanismo y la creatividad tomando como ejemplo, la vida y la obra de nuestros mártires y hombres de ciencia.

Objetivo General Instructivo de la Disciplina: Interpretar y resolver situaciones y problemas relacionados con la actividad forestal y la problemática medio ambiental, seleccionando el modelo matemático que le corresponda, dándole solución al mismo de forma manual o mediante un software de cómputo y tomando las decisiones adecuadas de modo que contribuya al desarrollo forestal sostenible.

Objetivo General Desarrollador de la Disciplina: Analizar problemas relacionados con la práctica forestal, determinando lo esencial, concretando la abstracción mediante los modelos matemáticos estudiados, arribando a conclusiones sobre la base de la argumentación, solucionándolo de modo analítico o computacional y tomando las decisiones económicas y optimas adecuadas.

Sistema de Habilidades de la Disciplina: El sistema de habilidades que deben lograrse en los alumnos para que estos puedan interpretar y resolver los problemas que se les plantean deben ser: interpretar, graficar, definir, calcular, modelar, argumentar y tomar decisiones.

Contenidos de la Disciplina:
- Matemática Básica.
- Cálculo Diferencial e Integral.
- Geometría Analítica.
- Algunos elementos de Algebra Lineal.
- Ecuaciones Diferenciales.

- Estadística Descriptiva e Inferencial.
- Programación Lineal y Entera. Programación Multiobjetivo.

Estos contenidos desglosados por cada asignatura quedan del modo siguiente:

MATEMÁTICA I.
Objeto de Estudio: Matemática Básica, Nociones de Algebra Lineal, Cálculo Diferencial de funciones de una variable, Cálculo Integral de funciones de una variable. Todo el contenido es tronco común con las carreras Agropecuarias.

MATEMÁTICA II.
Objeto de Estudio: Funciones en varias variables y cálculo diferencial en varias variables y sus Aplicaciones, Cálculo Integral en varias variables con sus Aplicaciones, Ecuaciones Diferenciales.
Todo el contenido es tronco común con las carreras Agropecuarias.

ESTADÍSTICA.
Objeto de Estudio: Estadística Descriptiva y Probabilidades, Inferencia Estadística (Muestreo y Estimación, Prueba de Hipótesis, ANOVA, Regresión y Correlación)
Solo el contenido de Prueba de Hipótesis no es tronco común con las carreras Agropecuarias.

ELEMENTOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.
Objeto de Estudio: Introducción a la I.O., Programación Lineal. Problemas Especiales de (programación entera, problemas de transporte, trasbordo y asignación). Toma de Decisión Multicriterio.
Solo una parte del contenido de Programación Lineal es tronco común con carreras Agropecuarias.

Propuesta de Contenidos Electivos a partir del Tercer Año de la Carrera:
_ Métodos Numéricos (40 horas).
_ Estadística no Paramétrica (30 horas).
_ Programación Multicriterio (30 horas).
(Estos pueden ser seleccionados por los alumnos de acuerdo a sus intereses particulares).

Sistema de Valores que la Disciplina debe contribuir a desarrollar:
- Modestia: Escuchar la opinión de los demás sin creer que siempre se sabe todo.
- Colectivismo: Trabajar en equipos en seminarios y en actividades prácticas. Participar y apoyar las actividades culturales, deportivas, etc.
- Honestidad: Reconocimiento de la importancia de presentar una información veraz, precisa y profunda en los trabajos de carácter académico y científico.
- Amor a la naturaleza: Sentirse responsable por la conservación del patrimonio forestal y reconocer la importancia de la misma para el mantenimiento de la vida en el planeta.
- Humanismo, patriotismo, internacionalismo y justicia social: Sentirse preocupado y ocupado ante cualquier injusticia en personas y en el mundo, ser solidarios con el necesitado, mostrando un espíritu y actitud acordes con los principios de la Revolución.

- Estética de la vida: Apreciar la belleza de la naturaleza a través de su biodiversidad (paisajes, colores, bondades, etc.).
- Estética de la profesión: Presentar los trabajos e información bien elaborados, con buena presentación, pulcritud, ortografía correcta y profesionalidad.
- Profesionalidad: Mostrar dominio de las competencias de su profesión.

CONCLUSIONES

- Resurgimiento del Movimiento de Alumnos Ayudantes.
- Los estudiantes elevaran sus conocimientos y habilidades en las NTIC; así como en los software especializados (Derive, SPSS, Statwin y WINQSB)
- El empleo de las técnicas anteriores permitirá a los alumnos mayor creatividad en la solución de problemas relacionados con la asignatura (Matemáticas, Estadística o Elementos de Investigación de Operaciones) y con su perfil profesional.
- Elevar la auto-superación, auto-independencia y la auto-preparación del estudiante.
- Se facilita la relación inter e intra disciplinaria.

BIBLIOGRAFÍA

Alvarez, D. (1999). *Manejo Forestal Sostenible*. Cuiabá – MT, Brasil.

Ballester, P. S. y otros (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación, Ministerio de Educación.

Guzmán, M. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. http://mat.upr.edu.cu/egi-bin.

Hernández. H. (1993). *Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate*. Quito, Ecuador.

Rodríguez, T. (1991). *Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la Disciplina Matemática Superior*. Tesis de Doctorado. Habana, Cuba.

UNA TRANSFORMACION DESARROLLADORA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN LA NUEVA UNIVERSIDAD CUBANA.

Reinaldo Sampedro Ruiz, Olga Lidia Perez Gonzalez, Milagros Gutierrez Alvarez
Universidad de Camagüey, Cuba
Enseñanza de la Matemática Superior
reinaldo@inf.reduc.edu.cu
Campo de investigación: Educación de adultos; Medio

Resumen

La educación superior tiene como encargo garantizar la formación del profesional con alta calidad científica. En los tres últimos cursos académicos desarrollados por la educación superior cubana se han producido gradualmente transformaciones dirigidas a ampliar las posibilidades de estudios superiores, para los estudiantes, que por diversas causas no ingresaron en las universidades. El presente trabajo forma parte de uno de los proyectos de la universidad de Camagüey y en especifico del departamento de matemática, los resultados son producto de una investigación realizada por un grupo de profesores en esta universidad y de los profesores de la Nueva Universidad cubana (las Sedes Universitarias Municipales), se elaboró una propuesta que conlleva al logro de un aprendizaje desarrollador en los estudiantes de ingeniería de las SUM. Los resultados que se proponen están en proceso de validación.

Introducción

La educación superior tiene como encargo garantizar la formación del profesional con alta calidad científica .En los tres últimos cursos académicos desarrollados por la educación superior cubana, se han venido produciendo transformaciones dirigidas a ampliar las posibilidades de estudios superiores, a partir de una visión más integral de los conceptos de equidad y justicia social, y sobre la base del concepto de acercar la universidad hasta el lugar donde residen o trabajan las personas. La nueva universidad cubana.
En este trabajo ofrecemos una posible solución del problema: en la actualidad los alumnos presentan insuficiencias en los conocimientos y en el dominio de habilidades, así como en los procedimientos para aprender, para ello proponemos qué debería realizarse por los docentes para resolverlas, en las condiciones actuales de la universalización de la enseñanza, en una escuela que instruya, eduque y forme integralmente a las nuevas generaciones, y cuyo modelo esta diseñado para garantizar la continuidad de estos estudios .

La universalización es un proceso sistemático de transformaciones que han tenido lugar en la educación superior. Ese modelo es, sin dudas un importante pilar en esta concepción de la nueva universidad cubana, y debe integrarse a ella como una importante vía para la continuidad de estudios superiores. Esta nueva idea, consistente en que, a partir de la creación de las filiales universitarias, las Sedes Universitarias Municipales, los municipios asumen un papel más activo en la gestión de los profesionales que necesitan para su desarrollo, lo cual requiere una alta integración de todos los factores, bajo la dirección de las universidades. Solo de ese modo se lograrán los objetivos que se han propuesto con esta nueva etapa de la universalización de la educación superior.

Durante la observación de numerosas clases y debates con docentes, se comprobó que existen dificultades en su formación, en cuanto a la manera de impartir sus clases, así como, en la metodología para enseñar a estudiantes con características diferentes a los que anteriormente matriculaban en las Universidades, los cuales necesitan de una atención diferenciada y especial.
La enseñanza de la matemática no esta exenta de dificultades, y dentro de ella las carreras de ingeniería, en las cual se observan

1. Falta de dominio de los conceptos básicos.
2. Una limitada apropiación de conocimientos.
3. Falta de independencia cognoscitiva.
4. Insuficiente organización y distribución del tiempo de auto preparación.
5. Poca capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida.
6. No dominio de las habilidades y estrategias para aprender a aprender.
7. Necesidad de una auto-educación constante.

Entre las causas que afectan los resultados del proceso docente, está la forma de organización y dirección del mismo .En tal sentido, resulta imprescindible realizar transformaciones en la enseñanza tradicional, pues la educación superior debe lograr en el estudiante la capacidad de “aprender”.
Por ello, los profesores de las SUM, elementos de esta Nueva Universidad, deben superarse sistemáticamente, no solamente para actualizarse en las técnicas que requiere su profesión sino, sobre todo, para lograr que sus alumnos no solo aprendan nuevos conocimientos, sino que "aprendan a aprender". Pero ¿Cómo lograr que los profesores de Matemáticas de las SUM alcancen ese estado? ¿Cómo organizar la superación de estos profesores? ¿En qué se tienen que formar para lograr este objetivo?

Desarrollo

La nueva Universidad, precisa de una mayor atención al trabajo con los alumnos de las SUM, donde se afrontan problemas con la articulación entre la enseñanza media, los diferentes programas y la educación superior, incidiendo principalmente en la enseñanza, específicamente de la matemática. Esta última, necesita de un dominio adecuado de los conocimientos y habilidades precedentes para poder enfrentar con éxito los nuevos contenidos. Sin embargo, las dificultades no se limitan a la entrada del estudiante al nivel universitario. La incorporación de profesionales del territorio, como profesores adjuntos, después de recibir una adecuada preparación metodológica y la categorización de docentes, constituye un reto, pues estos no tienen la formación pedagógica necesaria para enfrentar la tarea, sin embargo, constituyen el soporte fundamental para enfrentarla misma.
Investigaciones pedagógicas, efectuadas en Cuba, han permitido la determinación de exigencias que se presentan regularmente cuando se modificaban el estilo de trabajo del docente y los resultados en la preparación de los alumnos. Las mismas, tuvieron como punto de partida las leyes, principios y teorías más actuales de las Ciencias Pedagógicas.

Estos principios son, según (Silvestre, 1999):

1. Un diagnóstico Integral de la preparación del alumno para las exigencias del proceso de enseñanza aprendizaje, nivel de logros y potencialidades en el contenido de aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo.

2. Estructurar el proceso de enseñanza aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento por el alumno, teniendo en cuenta las acciones a realizar por este en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad.
3. Concebir un sistema de actividades para la búsqueda y exploración del conocimiento por el alumno. Desde posiciones reflexivas, que estimule y propicie el desarrollo del pensamiento y la independencia del alumno.
4. Orientar la motivación hacia el objeto de la actividad de estudio y mantener su constancia. Desarrollar la necesidad de aprender y de entrenarse en cómo hacerlo
5. Estimular la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos de pensamiento, y el alcance del nivel teórico, en la medida que se produce la apropiación de los conocimientos y se eleva la capacidad de resolver problemas.
6. Atender las diferencias individuales en el desarrollo de los estudiantes para lograr el nivel que se aspira.

Pero ¿Cómo lograr un aprendizaje desarrollador en la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería en las SUM?
Para lograr realmente un aprendizaje desarrollador, se debe tener en cuenta la concatenación de los conceptos y procedimientos más importantes para su enseñanza y cómo se reflejan a lo largo de toda la asignatura. Este enfoque es importante introducirlo para que nuestros estudiantes se apropien de estrategias generales de trabajo.
Adoptamos la concepción de aprendizaje desarrollador de (Castellanos, 2000) la cual define este como:

> "Un proceso dialéctico en el que, como resultado de la práctica, se producen cambios relativamente duraderos y generalizables, y a través del cual el individuo se apropia de los contenidos y las formas de pensar, sentir y actuar construidas en la experiencia socio histórica con el fin de adaptarse a la realidad y/o transformarla. Un aprendizaje desarrollador que garantice en el alumno la apropiación activa y creadora, propiciando el desarrollo de su auto-perfeccionamiento constante, de su autonomía y autodeterminación."

Para ello debemos tener en cuenta:
1. Promover el desarrollo de los alumnos; es decir, activar la apropiación de conocimientos, destrezas y capacidades intelectuales, garantizando la unidad de lo cognitivo y lo afectivo-valorativo.
2. Garantizar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, y
3. Desarrollar la capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida, a partir del dominio de las habilidades y estrategias para aprender a aprender, y de la necesidad de una auto-educación constante.

Las características del proceso docente educativo en las SUM, exigen de un alto nivel de preparación de los profesores que imparten la asignatura de matemática. Sin esta se afectaría la efectividad de este proceso y con ello la preparación del futuro profesional.
El aprendizaje es un proceso en el que participa activamente el alumno, dirigido por el docente, apropiándose el primero de conocimientos, habilidades y capacidades, en comunicación con los otros, en un proceso de socialización que favorece la formación de valores, Es la actividad de asimilación de un proceso especialmente organizado con ese fin, la enseñanza. La enseñanza y el aprendizaje constituyen un proceso**,** que está

regido por leyes concatenadas, que interactúan y se condicionan mutuamente. Estas leyes deben ser conocidas por los docentes, a los efectos de que éste se desarrolle como un sistema. Es necesario materializar la concepción de la enseñanza y el aprendizaje como un proceso, en el que interactúan y aprenden mutuamente, alumnos y docentes. Somos partidarios de una enseñanza desarrolladora, que promueva un continuo ascenso en la calidad de lo que el alumno realiza.
Esto se garantiza de forma adecuada si desarrollamos en las SUM las formas de enseñanza para la educación superior. Para ello, es fundamental una correcta dirección del proceso de enseñanza por parte de los profesores y de la organización de la actividad de aprendizaje, por parte de los estudiantes. Solo así garantizaremos la adecuada preparación de nuestros estudiantes de la SUM. Dentro del proceso docente ocupa un lugar importante las formas de enseñanza, las cuales estos docentes no conocen en su totalidad por su formación y sus características, entre las que se que se destacan las clases, que se organizan en "conferencias", "seminarios", "clases practicas" y "consultas".
¿Cómo lograr en las SUM el buen desarrollo de cada una de ellas?

Indicaciones para los profesores

Ofrecemos una serie de indicaciones que deben tener en cuenta los profesores de estas Sedes Universitarias Municipales para poder desarrollar un mejor trabajo docente educativo. Estas les serviran de guía para desarrollar cada una de sus clases.Las mismas son producto del trabajo acumaulado por los autores como docentes Universidad de Camaguey.
Para ello proponemos.
En la clase de "conferencia" se deben tener presente:
1. Abordar los aspectos esenciales y más complejos del conocimiento del contenido de la asignatura.
2. Trabajar con el más alto nivel científico posible según las posibilidades de los alumnos.
3. Orientar al estudiante en su aprendizaje, desde la clase y fuera de la clase.
4. Orientar como trabajar con la bibliografía mas actualizada.

En el "seminario" importa:
1. Consolidar, ampliar y generalizar los conocimientos.
2. Actuar hacia la solución de problemas de aprendizaje.
3. Desarrollar capacidades de expresión oral.
4. Utilización del video y la computación dentro y fuera de la clase.
5. Desarrollar habilidades en la utilización de diferentes literaturas.
6. Lograr el ordenamiento de los contenidos.

En las "clases practicas" sugerimos.
1. Dominar los métodos y las técnicas de trabajo en la asignatura.
2. Desarrollar la habilidad para utilizar y aplicar de modo independiente y seguro los conocimientos.
3. Emplear los medios de enseñanza necesarios para cada tipo de clase.
4. Lograr la participación activa de los estudiantes bajo la dirección del docente.

Para las "clases de consulta".

1. Prestar ayuda al proceso de auto preparación del estudiante.
2. Contribuir a lograr una correcta dirección del aprendizaje del estudiante.
3. Desarrollar las consultas obligatorias para los estudiantes que lo necesiten.
4. Desarrollar las consultas colectivas para desarrollar temas de interés colectivo.
5. Desarrollar las consultas sistemáticamente.

Conclusiones

El estudio de la Concepción de Aprendizaje Desarrollador y de las condiciones de enseñanza y aprendizaje de las SUM, nos permitió elaborar una serie de indicaciones para los profesores de estas sedes universitarias, elementos necesarios para llevar adelante las transformaciones en la enseñanza universitaria en Cuba. Estas mejoraran la enseñanza de la matemática a partir del estudio de las mismas y de su aplicación, de modo que se produzca un aprendizaje activo de los alumnos bajo la dirección del profesor.

BIBLIOGRAFIA

Castellanos, S. et al (2001). Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. Colección Proyectos. La Habana, Cuba.

_________________ (2001). Para promover un aprendizaje desarrollador. Instituto Superior Pedagógico. La Habana.

Labarrere, G. & Valdivia, G. (1998). *Pedagogía*., La Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Labarrere, A. (1996). *Pensamiento*. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. La Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Lima S. *et al* (1998). Transformaciones para lograr un Aprendizaje Desarrollador de la Computación en el Nivel Medio. ISP "Enrique José Varona".

Leontiev, A. (1972). El hombre y la cultura. Universidad Estatal de Moscú,

Martínez, M. (1998) Calidad educacional, actividad pedagógica y creatividad. Editorial Academia. La Habana.
Rico P (1996). Reflexión y aprendizaje en el aula. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
Rico, P. & Silvestre, M (1997). El proceso de enseñanza-aprendizaje. ICCP, La Habana,

Vigotsky, L. (1987). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. Editorial Científico Técnica, La Habana

Zilberstein, J. & Silvestre, M (1997). Una didáctica para una enseñanza y un aprendizaje desarrollador. ICCP, La Habana.

"LA INTEGRACIÓN MONTE CARLO: UNA APLICACIÓN EN LA INGENIERÍA FORESTAL"

MsC. María del Carmen Acuña Salcedo ; Dr. Ignacio Estévez Valdés ; Dr. Pedro Fernández de Córdoba Castellá.
Universidad de Pinar del Río, Cuba.
msalcedo@mat.upr.edu.cu
Campo de Investigación: Modelación Matemática; Nivel Educativo: Superior

RESUMEN

La aplicación de las diferentes técnicas y métodos matemáticos en la búsqueda de soluciones a diversos problemas prácticos se ha incrementado en los últimos años debido al gran progreso alcanzado en el procesamiento electrónico de datos y a la capacidad de cálculo de los potentes ordenadores actuales.
El presente trabajo tiene su origen en el cálculo de cotas mediante Modelos Digitales del Terreno (MDT), para su posterior aplicación en el campo de la Ingeniería Forestal. En el mismo se ofrece una metodología para estimar el volumen de madera de un área forestal, perteneciente a un bosque artificial con especies de elevado coeficiente mórfico, a partir del empleo de un MDT y de las técnicas de integración numérica Monte Carlo Crudo y Monte Carlo Acierto – Rechazo.

INTRODUCCIÓN

- Acerca del Modelo Digital del Terreno (MDT).

El término de MDT tuvo su origen en la década del 50, en el Laboratorio de Fotogrametría del Instituto de Tecnología de Massachussets. En 1958, trabajos realizados por Miller y Laflamme establecieron los primeros principios para el uso de los modelos digitales en el tratamiento de problemas tecnológicos, científicos y militares.
Jiménez (Cuba,1988) lo define como una masa de puntos representativos de una porción del terreno, expresados mediante sus coordenadas (x, y, z) almacenadas de forma adecuada para su procesamiento mediante la computadora.
Existen muchas otras definiciones de este término pero no difieren sustancialmente de la anterior.
En Cuba se han llevado a cabo varias investigaciones relacionadas con los MDT y sus aplicaciones, destacándose el ISPJAE y la UPR como los centros protagonistas de las mismas.

- Acerca de las técnicas de integración numérica Monte Carlo.

El término Monte Carlo fue introducido por von Neumann y Ulam, que lo utilizaron como contraseña para su trabajo secreto sobre la difusión de neutrones en los Alamos (EEUU) dentro del Proyecto Manhatan para la fabricación de la primera bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial.
Las técnicas Monte Carlo comenzaron a ser conocidas por la comunidad científica internacional a partir del año 1960 y bajo este nombre se agrupan un conjunto de técnicas y procedimientos matemáticos que poseen un elemento común: el empleo de números aleatorios. Estos permiten el cálculo de magnitudes difíciles de evaluar por otros métodos y pueden aplicarse tanto a problemas donde el azar desempeña un papel fundamental, como a fenómenos completamente deterministas que pueden admitir una reformulación apropiada en términos estadísticos.

DESARROLLO

La estimación del volumen de madera es uno de los objetivos del inventario forestal y se realiza normalmente en m^3.

Entre los métodos para la determinación del volumen de madera están los procedimientos que permiten estimarlo mediante el conocimiento de su relación con variables de más fácil medición como lo son el diámetro y la altura. En este caso el diámetro que se emplea es el llamado diámetro normal (d) del árbol y se mide a una altura de 1,30 m sobre el nivel del suelo.

También es necesario conocer el factor de forma o coeficiente mórfico (f); que se expresa como:

$f = \frac{V_r}{V_c}$ donde V_r : Volumen real del árbol.
V_c : Volumen del cilindro calculado en función del diámetro normal y de la longitud del árbol.

Conocidos los elementos anteriores, comúnmente es empleada la expresión:

$V = \frac{\pi}{4} d^2 . h . f$ para estimar el volumen de un árbol en pie.

a) Estimación del volumen de madera aplicando Monte Carlo Crudo en un área forestal con especies de elevado coeficiente mórfico.

Mediante el MDT se puede disponer de las ecuaciones que modelan la superficie terrestre $S_1(x,y)$, que es continua sobre la región plana R que está representada por el nivel del mar y definida por:

$$R = \{(x, y) \in R^2 : x_0 \leq x \leq x_n \ , \ y_0 \leq y \leq y_m\}$$

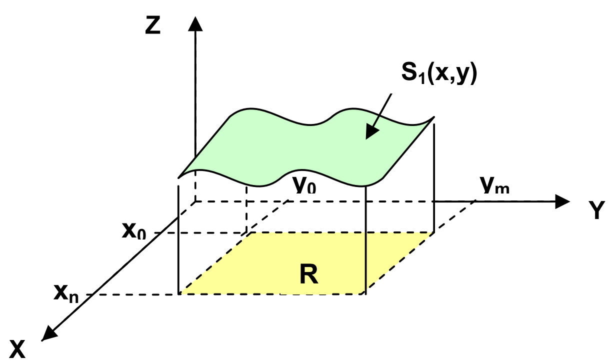


Fig 1: Representación gráfica de la superficie S_1 (x,y) sobre el nivel del mar R.

Bajo las condiciones anteriores se puede determinar el volumen de tierra V_1 a través del cálculo de la integral doble:

$$V_1 = \int_{y_0}^{y_m} \int_{x_0}^{x_n} S_1(x, y)\, dx\ dy$$

Mediante MC Crudo este cálculo se reduce a interpretar la integral anterior como el valor promedio de la función $S_1(x,y)$ en el recinto R multiplicado por el área de R, o sea:

$$V_1 = \left(\overline{S_1}\right)_R \cdot \iint_R dx\ dy \qquad (1)$$

Pero como que el área A_R de la región R es:

$$A_R = (x_n - x_0)(y_m - y_0) = a \cdot b$$

Finalmente sustituyendo en (1) se tiene que:

$$V_1 = \left(\overline{S_1}\right)_R \cdot A_R = a \cdot b \left(\overline{S_1}\right)_R$$

Y en esta expresión se aplica el MC Crudo del modo siguiente:

Para calcular $\left(\overline{S_1}\right)_R$, se comienza por generar dos números aleatorios r_1 y r_2 distribuidos uniformemente en el intervalo [0,1] y se trasladan al recinto R, para obtener el par aleatorio (x, y) mediante las expresiones:

$x = x_0 + r_1 (x_n - x_0)$

$y = y_0 + r_2 (y_m - y_0)$

de este modo $x \in [x_0, x_n]$ y $y \in [y_0, y_m]$ y por tanto, el par aleatorio $(x, y) \in R$.

Se repite este procedimiento, obteniéndose N pares aleatorios (x_i,y_i) que también pertenecen a R, y se determina $\left(\overline{S_1}\right)_R$ mediante la expresión:

$$\left(\overline{S_1}\right)_R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S_1 (x_i, y_i)$$

hasta que ella converja a un valor determinado con la precisión requerida.

Por lo que el volumen V_1 es:

$$V_1 = \frac{a \cdot b}{N} \sum_{i=1}^{N} S_1 (x_i, y_i)$$

De la misma manera se puede obtener una función S_2 (x, y) que modele la superficie que contiene la copa de los árboles, esto consiste en la posibilidad de poder disponer mediante la fotografía aérea de un área forestal (R) de las cotas de las copas de los árboles a través del empleo del estereorrestituidor fotogramétrico.

Ahora se estima el volumen V_2 mediante:

$$V_2 = \frac{a \cdot b}{N} \sum_{i=1}^{N} S_2 (x_i, y_i)$$

Este volumen se encuentra bajo la superficie S_2 y contiene completamente al V_1.

La diferencia $V_2 - V_1 = V_T$ representa el volumen limitado inferiormente por la superficie que modela el terreno (S_1) y superiormente por la superficie que modela la copa de los árboles (S_2). Luego el volumen V_T incluye aire, follaje, madera de interés industrial, etc.

Es de interés estimar el volumen de madera (V) contenido dentro de V_T y para hacerlo se puede proceder de la forma siguiente:

Se selecciona la muestra mediante una técnica apropiada, por ejemplo: el Muestreo Sistemático a n parcelas rectangulares de 1000 m^2 (50m x 20m) de superficie cada una.

De manera independiente, en cada parcela se determina:

(a) La cantidad de árboles (k) que existen en los 1000 m^2 de terreno.

(b) Los diámetros normales (a 1,30 m del suelo) de esos k árboles.

(c) Se estima el volumen de madera que existe en 1300 m^3 (1000 m^2 x 1,3 m) mediante:

$v = \frac{\pi}{4} (d_1^2 + d_2^2 + K + d_k^2) . h . f \quad \text{con} \quad h = 1{,}30 \text{ m}$ u otra expresión acorde a las características propias de la especie que contiene cada parcela.

Posteriormente, se determina la densidad volumétrica total en las n parcelas muestreadas empleando:

$$\rho_v = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{1300 \ . \ n} = \frac{V_E}{1300 \ . \ n}$$

Y finalmente a través de la proporción: $1300 \ . \ n \ .... \ V_E$
$V_T \ .... \ V(?)$

se estima el volumen de madera (V) que interesa mediante la expresión:

$$V = \frac{V_T \ . \ V_E}{1300 \ . \ n} = V_T \ . \ \rho_v$$

b) Estimación del volumen de madera aplicando Monte Acierto – Rechazo.
Como se dispone de la superficie $S_1(x, y)$ que modela el terreno y se desea estimar el volumen de tierra V_1, que está limitado por $S_1(x, y)$ y por la proyección de ésta sobre el plano XY (denotada por R y representada por el nivel del mar) o sea:

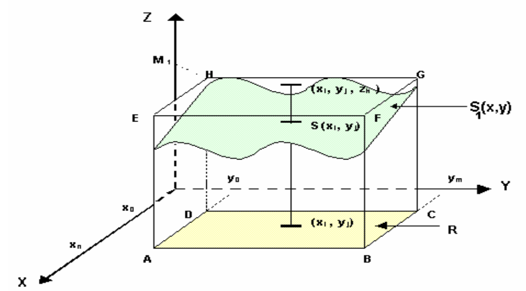


Fig. 2: Representación de la superficie S_1 y su proyección R sobre el plano XY

Se determina el punto M_1 que representa el valor máximo de la superficie S_1 sobre la región R ya definida.
Ahora se puede calcular el volumen V_P del paralelepípedo ABCDEFGH, el cual contiene completamente al volumen V_1, y también está definido sobre la misma región R pero con una altura M_1, mediante la expresión:

$$V_P = \int_0^{M_1} \int_{y_0}^{y_m} \int_{x_0}^{x_n} dx\, dy\, dz = (x_n - x_0)(y_m - y_0) M_1$$

Se conoce que:

$$V_1 = \int_{x_0}^{x_n} \int_{y_0}^{y_m} S_1(x, y)\, dy\, dx = \int_{x_0}^{x_n} \int_{y_0}^{y_m} \int_0^{S_1(x,y)} dz\ dy\ dx$$

Y por supuesto se sabe que $V_P > V_1$ sobre la región R.
Para estimar éste último se generan tres números aleatorios r_1, r_2 y r_3 distribuidos uniformemente en el intervalo [0, 1] y se trasladan al paralelepípedo mediante las ecuaciones:

$$x = x_0 + r_1 (x_n - x_0)$$
$$y = y_0 + r_2 (y_m - y_0)$$
$$z = r_3 M_1$$

de modo que $x \in [x_0, x_n]$; $y \in [y_0, y_m]$ y $z \in [0, M_1]$.
Se repite el procedimiento N veces; obteniendo N-ternas aleatorias (x_i , y_i , z_i).

Si cada terna generada se encuentra dentro de V_1, se cuenta un acierto y si está fuera de V_1 se cuenta un error. Teniendo en presente que:
(a) Si $z_i > S(x_i, y_i)$ entonces está fuera de V_1 y se cuenta error (fallo).
(b) Si $z_i \leq S(x_i, y_i)$ entonces está dentro de V_1 y se cuenta acierto.
Se denota por NA la cantidad de aciertos y por NE la cantidad de errores o fallos, de modo que NA + NE = N.
Por lo que resulta:

$$V_1 = V_P \cdot \frac{NA}{N} = (x_n - x_0)(y_m - y_0)\, M_1 \cdot \frac{NA}{N}$$

De igual forma se procede a calcular el volumen V_2 que viene determinado sobre la región R por la superficie S_2 (x, y) obtenida como se explicó con anterioridad. De manera que:

$$V_2 = V_P \cdot \frac{NA}{N} = (x_n - x_0)(y_m - y_0)\, M_2 \cdot \frac{NA}{N}$$

Siendo M_2 el valor máximo de la superficie S_2 sobre la región R.
La diferencia $V_2 - V_1 = V_T$ representa, de la misma forma que en MC Crudo, el volumen que ocupado por el aire, el follaje, la madera, etc.
A partir de este momento se procederá como fue explicado anteriormente al valorar el método MC Crudo.

CONCLUSIONES

- Se describe una metodología para estimar el volumen de madera de un área forestal perteneciente a un bosque artificial, que posee especies de elevado coeficiente mórfico, mediante las técnicas de integración numérica Monte Carlo Crudo y Monte Carlo Acierto – Rechazo a partir del conocimiento del Modelo Digital del Terreno.
- La metodología expuesta solamente debe ser aplicada en bosques artificiales (plantados por el hombre) por las características homogéneas que sus plantaciones poseen y para especies de baja conicidad.

BIBLIOGRAFÍA

Abraham, S.; Fernández, P., Giménez, F. y Monreal, L. (2002). *Técnicas Monte Carlo aplicadas a la Integración Numérica y a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales*. Valencia, España: Editorial UPV, SPUPV – 2002.2430.

Acuña, M. (2002). *Desarrollo y aplicaciones en Ingeniería Forestal de Modelos Digitales del Terreno*. Tesis por el título de Master en Matemática Avanzada aplicada a la Ingeniería, Facultad de Ingeniería Industrial (ISJAE), Ciudad de la Habana, Cuba.

Álvarez, M. y otros. (1998). *Matemática Numérica*. Ciudad de la Habana, Cuba: Editorial Félix Varela, ISBN 959 – 258 – 016 – 2.

Coffi, A. (1986). *El modelo digital del terreno y sus aplicaciones forestales*. Tesis para por el título de Ingeniero Forestal, Facultad de Agroforestal, Pinar del Río, Cuba.

Estévez, I. (1998). *Una Aplicación de Métodos Numéricos en la Ingeniería Civil*. Tesis por el título de Master en Matemática Avanzada aplicada a la Ingeniería. Facultad de Ingeniería Industrial (ISJAE), Ciudad de la Habana, Cuba.

Fernández, P. (1998). *Optimización en Ingeniería*. Valencia, España: Editorial UPV, SPUPV – 98.2152.

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS CONCEPCIONES SOBRE SERIES NUMÉRICAS EN UNIVERSIDADES LATINOAMERICANAS Y ESPAÑOLAS (UNIVERSIDAD DE JAÉN)*

Carmen Sánchez Gómez, Marta Marcolini Bernardi.
Universidad de Jaén – España.
cgomez@ujaen.es, **mmarcoli@ujaen.es**
Campo de investigación: Estudios socioculturales; Nivel educativo: Superior

1. RESUMEN

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación en el que se describe, analiza y compara el tratamiento que se da a las series (numéricas y funcionales) en los estudios superiores de Universidades Latinoamericanas participantes y en la Universidad de Jaén.
Se presentan los resultados de los trabajos que se han desarrollado en nuestra Universidad con profesores y con alumnos de las Licenciaturas en Química, Biología y de Ingeniería Técnica en Informática. Además, se analizan las concepciones sobre series numéricas, a través de los libros de texto (Bradley, 1998; Burgos, 1994; Larson, 1995; Zill, 1987). Los resultados obtenidos nos han permitido extraer varios ítemes a tener en cuenta para el diseño de una propuesta alternativa de enseñanza de las series numéricas, adaptada a las peculiaridades intrínsecas de nuestro medio, (Cantoral y Farfán, 2003).

2. INTRODUCCIÓN

Para explorar las concepciones sobre la noción de serie numérica se ha usado un cuestionario formado por seis reactivos (Farfán, 1997, p.182) y se pretende, por una parte, obtener una caracterización de los procesos inherentes a las concepciones que del concepto de convergencia poseen los participantes –profesores y alumnos- y, por otra, poder comparar nuestros resultados con los obtenidos por Farfán y también con los de Instituciones de Enseñanza latinoamericanas.

Con el fin de analizar el tratamiento que los autores de los libros de texto dan a los procedimientos, nociones, y conocimientos se ha elegido un conjunto de libros y, en ellos, se han seleccionado distintas variables de análisis a fin de apoyar nuestra revisión, ya que "Los textos determinan, en gran medida, la práctica docente y nos manifiestan, no sólo las concepciones de los autores y del sentir didáctico de una determinada época, sino, también, las distintas concepciones que se transmiten en el proceso de enseñanza a los estudiantes, una vez que se ha optado por un determinado texto", El Bouazzoui (1988).

A la hora de la selección de los libros de texto que se revisan se ha tenido en cuenta el nivel de enseñanza al que se dirigen -alumnos de primer curso de enseñanza

* Este trabajo está financiado por el Proyecto de investigación SEJ2004-06637 "Uso de la Tecnología Informática en la formación matemática de los estudiantes universitarios" concedido por el Ministerio de Educación y Cultura, y también por el Grupo de investigación "Mejor aproximación de Funciones, Teoría de subvariedades, anillos y categorías" de la Junta de Andalucía. España.

universitaria- tanto para Escuelas Técnicas como para Facultades de Ciencias; y además, que estén en la bibliografía recomendada en los programas.

3. REVISIÓN DE TEXTOS

Para la revisión de textos matemáticos se han considerado las variables y subvariables siguientes: **a.-** Características generales del texto como presentación, notas históricas, tecnología utilizada o propuesta (calculadora, ordenador), gráficos y figuras, ubicación de los ejercicios y problemas propuestos (final de epígrafe, de capítulo), características especiales. **b.-** Organización de contenidos (bloques temáticos, lecciones, capítulos). Se tomaron los índices de contenidos de todos los manuales utilizados, ya que en ellos se refleja la situación y relevancia que el autor da a los conceptos, objeto del análisis, respecto de otros contenidos del Cálculo. **c.-** Estructura general del tema, es decir, secciones, epígrafes; ubicación y extensión que ocupa el tema en la exposición general del texto. **d.-** Tratamiento dado al tema (series numéricas), es decir, las formas de introducirlo (a través de ejemplos, dando la definición); el tipo de definición (formal / intuitiva); los tipos de ejemplos en cuanto al planteamiento (algorítmicos o de comprensión), en cuanto al marco en los que se plantean (analítico, algebraico, gráfico, numérico) y según los contextos en los que se sitúan (físico, matemático, biológico); los tipos de ejercicios y problemas propuestos (al final de la sección / capítulo) y con las mismas consideraciones que en los ejemplos.

Del análisis de los libros de texto revisados, para cada uno de ellos, se puede destacar:

Texto Nº 1 (Bradley): La introducción, que llama perspectiva, y la presentación son muy ilustrativas para este nivel. Hay un completo desarrollo del tema y de los ejemplos, con abundantes gráficos y ventanas computacionales. Hay pocas aplicaciones y no se proponen problemas donde se indique la necesidad del uso de la tecnología informática. Cuatro secciones –las 8.3, 8.4, 8.5 y 8.6– son exclusivamente de convergencia de series, lo que muestra la importancia que tiene para el autor su estudio dentro del tema.

Texto Nª 2 (Burgos): El autor incluye apartados de la teoría (definiciones o demostraciones) dentro de ejercicios y no hace distinción entre ejercicios y ejemplos.
Todos los ejercicios se plantean en contexto matemático y en marcos algebraico y analítico. El desarrollo de la teoría es extenso y formal para los estudios de Ingeniería. Hay una ausencia total de ejemplos y ejercicios de aplicación de las series en otros contextos.

Texto Nº 3 (Larson): La aplicación que sirve de introducción al tema quizás resulte demasiado complicada para este nivel. La nota de la página 539, después de la definición de sucesiones, puede confundir al lector. El ejemplo 5 (p. 610) y los ejercicios 41-44 (p. 614) muestran algunas aplicaciones de las series. El texto contiene observaciones dirigidas a los estudiantes bajo el titulo de tecnología, donde se muestra su uso. Además, se proponen problemas indicándose la necesidad del uso de dicha tecnología informática. Las secciones 10.3, 10.4, 10.5 y 10.6 estudian la convergencia de series.

Texto Nº 4 (Zill): Es un texto adaptado a Ingenierías en el que hay numerosos ejemplos y ejercicios. Algunos ejercicios se plantean en contextos distintos del matemático, no hay ejemplos en esos mismos contextos que sirvan al lector como orientación para su resolución. Los aspectos teóricos se adaptan al nivel para el que está dirigido. Los contenidos teóricos están "dispersos" entre el gran número de ejemplos que se incluyen entre ellos.

Se presenta, a continuación, un breve análisis comparativo de los textos.

- **Según las definiciones**

  - BRADLEY: Define una serie como *una suma de infinitos sumandos.*
  - BURGOS: Llama serie a la *sucesión de sumas parciales de otra sucesión*.
  - LARSON: La *suma de los infinitos términos de una sucesión infinita* se llama serie infinita.
  - ZILL: Dada la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, entonces *a la suma indicada* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ se le llama una serie infinita.

- **Según el peso asignado al desarrollo de los criterios de convergencia**

Nombre del Texto y Nº de epígrafes	BRADLEY	BURGOS	LARSON	ZILL
Introducción y definición	1 (20%)	1 (25%)	1 (20%)	1 (25%)
Estudio de la convergencia	4 (80%)	3 (75%)	4 (80%)	3 (75%)

4. TRABAJO DE CAMPO: REACTIVOS

Los profesores que han participado en la experiencia son docentes en ejercicio en las titulaciones de Ingeniería y de las Ciencias Experimentales. Por lo que ellos no sólo cuentan con los conocimientos que su propia formación profesional les proporciona (la mayoría de ellos son licenciados en matemática, pero también se encuentran licenciados en física) sino que poseen la experiencia que se requiere en la práctica docente. La muestra se compone de ocho licenciados en Matemática y un licenciado en Física. En cuanto a los estudiantes, son alumnos del curso 2004 – 2005, diez de la licenciatura en Química y ocho de ingeniería técnica en Informática.

Seguidamente se muestran los reactivos pasados a profesores (P) y estudiantes (A), así como las observaciones más relevantes del análisis de las respuestas obtenidas:

- Reactivo 1. ¿Cuándo se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge? Dé la definición.

  - No responde, 28% (A) y 0% (P).
  - Respuesta incorrecta, 17% (A) y 11% (P).
  - Tiene el concepto de convergencia aunque responde con argumentaciones poco precisas, 33% (A) y 11% (P).
  - Da correctamente la definición, 11% (A) y 78% (P).

- Reactivo 2. Si consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ y por algún método se logra encontrar $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = C$, $C \in R$. ¿Qué puede decirse acerca de la serie?

  - No contesta, 50% (A) y 0% (P).
  - Contesta correctamente, 44% (A) y 89% (P).
  - "Yo entiendo que A_n es la sucesión de sumas parciales según la notación que yo he estudiado". La respuesta de este alumno muestra la importancia que tiene la notación utilizada.

- Reactivo 3. Enuncia los criterios de convergencia que conoces.

  - No contesta, 11% (A) y 22% (P).
  - Escribe con notación matemática, de forma parcialmente correcta, los criterios que nombra, 39% (A) y 0% (P).
  - Argumenta correctamente los criterios que nombra, 0% (A) y 22% (P).
  - Nombra los criterios, 39% (A) y 56% (P).
  - Cabe destacar que, en la mayoría de las respuestas, se nombran o enuncian los criterios de convergencia de series de términos positivos de D'Alembert y de Raabe .
  - Nombra las series alternadas, 22% (A) y 44% (P).

- Reactivo 4. La serie $\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r$, ¿converge? Su suma es:

  - No contesta, 22% (A) y 0% (P).
  - Responde que la serie converge, 56% (A) y 100% (P).
  - No responde a la convergencia, 22% (A) y 0% (P).
  - Halla el valor correcto de la suma, 17% (A) y 89% (P).
  - Calcula la suma de forma incorrecta, 61% (A) y 0% (P).

- Reactivo 5. Y, respecto de la serie $\sum \frac{1}{n}$, ¿qué puede decirse?

  - No contesta, 50% (A) y 0% (P).
  - Contesta incorrectamente (confunde la condición necesaria de convergencia con la suma de la serie), 6% (A) y 0% (P).
  - Respuesta correcta, 44% (A) y 100% (P). De esos porcentajes el 75% (A) y el 44% (P) alude explícitamente a la serie armónica.

- Reactivo 6. ¿Cómo es 0,999… respecto de 1?

  - No contesta, 28% (A) y 0% (P).
  - Es menor que 1, 17% (A) y 11% (P).
  - Tiene la noción de aproximación, 56% (A) y 79% (P).

5. CONCLUSIONES DE LA REVISIÓN DE TEXTOS Y REACTIVOS

Respecto al análisis de los libros de texto, se detecta una notación muy variada para la introducción de las series -lo cual puede inducir al lector a confusión y errores- y, en la mayoría de los textos, ausencia de aplicaciones de las series a otras ciencias.

Del análisis comparativo de los resultados de las respuestas realizadas por los profesores de instituciones educativas españolas, notados (E); así como los resultados de instituciones mexicanas, notados por (M), y que en algunos casos en (Farfán, 1997, pp. 175-191) no se cuantifican y, por ello, reflejamos con X%, se destaca:

- El paralelismo en las respuestas a los reactivos 1 y 2. En el reactivo 1 -en cuanto a la alusión implícita o explícita a la palabra límite- con porcentajes 61% (M) y 37% (E) y en el reactivo 2 -sobre a la equivalencia entre hallar la suma y hacer el estudio de la convergencia- con porcentajes 39% (M) y 56% (E), nos inducen a pensar en la influencia del concepto de límite en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las series.

- Desconocimiento de los criterios de convergencia X % (M) y 11% (E).

- Existe poca familiaridad con la notación, si bien los porcentajes X % (M) y 33% (E).

Por otra parte, se observa una gran disparidad en la notación utilizada por los profesores (hecho que se produce en ambas instituciones). Todo lo anterior pone de manifiesto la necesidad de profundizar en investigaciones que permitan el diseño de propuestas de enseñanza de las series para que la notación usada no sea un obstáculo en el proceso de aprendizaje.

6. ALGUNOS ÍTEMES PARA EL DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Las reflexiones anteriores nos han servido como base para formular algunos ítemes, adaptados a nuestro medio, y que habremos de tener en cuenta a la hora de diseñar una propuesta de enseñanza para las series. Entre los aspectos que consideramos básicos en la enseñanza de series están:

- Asignar más tiempo a la construcción del concepto (dentro del tiempo total destinado a series).
- Apoyarse en aplicaciones prácticas, modelos y situaciones problemas para la construcción de la noción de serie, como por ejemplo:

✓ A los pacientes con ciertos problemas cardíacos generalmente se les trata con digitoxina, un derivado de la planta digitalis. La tasa a la cual el cuerpo de una persona elimina la digitoxina es proporcional a la cantidad de digitoxina presente. En un día alrededor del 10% de cualquier cantidad de droga dada será eliminada. Supongamos que diariamente se le da al paciente una “dosis de mantenimiento” de 0.05 mg. ¿Qué cantidad de digitoxina se encuentra presente en el paciente después de varios meses de tratamiento? (Goldstein, 1990, p. 609).

✓ ¿Qué número racional tiene expansión decimal 0.121212....?

- Cuidar la terminología y la notación utilizadas:

✓ Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, a la sucesión $\{s_n\} = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ definida por: $s_1 = a_1, \ldots, s_{n+1} = a_{n+1} + s_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ se le llama *serie de término general* a_n. Es decir, una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión. (Pérez González, F. J., 2005).

✓ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$ significa que $\left| L - \sum_{j=1}^{n} a_j \right|$ se conserva menor que cualquier número $\varepsilon>0$ a partir de un cierto $n \in \mathbf{N}$ en adelante. No hay que olvidar que el límite de una serie convergente es justamente el límite de una sucesión y no debe confundirse con una operación algebraica.

✓ Proponemos como notación para la serie $\{s_n\}$ la siguiente: $\sum_{n\geq 1} a_n$, que representa el límite de la sucesión que a cada $n \in$ N le hace corresponder el número $\sum_{j=1}^{n} a_j$.

Cuando dicha serie sea convergente representaremos su límite por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Finalmente señalar que, en la medida que se obtengan más datos recogidos de los centros latinoamericanos participantes, a saber, Cinvestav (México), Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina), Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México), se podrán considerar otros ítemes que permitan elaborar las diferentes propuestas sobre la enseñanza de series adaptadas a cada medio.

BIBLIOGRAFÍA

Bradley, G. L. y Smith, K. J. (1998). *Cálculo de una variable*. España: Prentice Hall Iberia.

Burgos, J. de (1994). “Cálculo Infinitesimal de una variable”. España: McGraw-Hill.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution. *Educational Studies in Mathematics* 53(3), 255-270. Kluwer Academic Publishers.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des éleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. PHD. Université de Bordeaux I.

Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Goldstein, Larry J.; Lay, David C.; Schneider, David I. (1990). Cálculo y sus Aplicaciones. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. España: McGraw-Hill.

Pérez González, F. J. (2005). Universidad de Granada, http://www.ugr.es/ ~fjperez.

Zill, D. G. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

EPISTEMOLOGIA DE LA APROPIACION DEL CONOCIMIENTO DESDE UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA.

Salvador Lima Sánchez.
CECyT 4 “Lázaro Cárdenas del Río”, Instituto Politécnico Nacional.
México.
salvador_lima@hotmail.com, msevilla81@hotmail.com
Campo de Investigación: Aprendizaje cooperativo; Nivel Educativo: Medio

Abstract:

El presente trabajo es un Reporte de Investigación concluido en su totalidad, que se baso en el trabajo cooperativo aplicando los principios constructivistas, en el nivel medio superior en el Instituto Politécnico Nacional sobre la el tema de volúmenes con la actividad: “Las caritas de don Cubo”. Al darse el trabajo cooperativo el alumno se transforma en un elemento autónomo, dentro del proceso enseñanza aprendizaje, en sus actividades dentro del grupo, plantea soluciones inéditas y trabajo en equipo de forma cooperativa, pasando con ello, a un modelo constructivista que permite la apropiación significativa del conocimiento. Donde el profesor se vuelve en un facilitador del conocimiento, donde los alumnos entregaron un reporte por escrito, observando el video “una gota en el océano,” evaluando y dando el cierre de la sesión.

Introducción:

El trabajo colaborativo dentro del aula es una forma diferente al trabajo tradicional, en el que predomina el cambio de actitud del alumno con sus pares, en la forma de abordar diferentes problemas se les da una solución mas rápida, inédita y con la participación de todos los compañeros que forma un equipo de trabajo. En este caso, tenemos que al irse dando el avance de la actividad “Las caritas de don cubo”, el alumno a través del mediador logra obtener un aprendizaje significativo, al lograr obtener la apropiación del conocimiento de forma constructivista. El Constructivismo es una forma de trabajo en equipo, donde se da el “aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. Este método contrasta con el aprendizaje competitivo, en que cada alumno trabaja en contra de los demás para alcanzar objetivos escolares como sacar un 10, etc.” (David W. Jonhson, et al, 1999; Senge, Peter, 1999; Coll, C., Pozo, et al, 1992) con lo que, en el caso de alumnos de nivel medio superior, se logra un impacto sustancial en su proceso aprendizaje- enseñanza.

Justificación:

Dentro de la asignatura de Álgebra que esta contenida en el primer semestre del nivel medio superior de Instituto Politécnico Nacional, se inscribe la unidad temática de volúmenes, donde se tiene que el alumno encuentre la diferencia dentro del aprendizaje significativo entre área y volumen, observando como el alumno construye su conocimiento a partir del manejo de materiales propuestos y note la diferencia donde se desarrolla una actividad de aprendizaje constructivista con respecto al modelo tradicional.

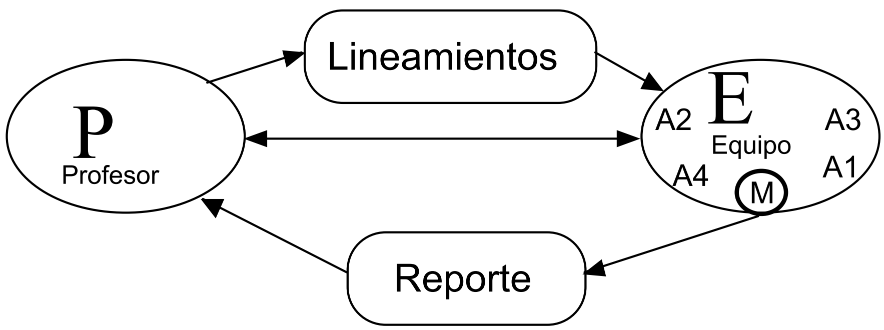
Hipótesis:

Al darse el trabajo cooperativo el alumno se transforma en un elemento autónomo, dentro del proceso enseñanza aprendizaje, en sus actividades dentro del grupo, plantea soluciones inéditas y trabajo en equipo de forma cooperativa, pasando con ello, a un modelo constructivista que permite la apropiación significativa del conocimiento.
Desarrollo de la Actividad de Aprendizaje:
Se realizo en equipos colaborativos con la actividad denominada:

"Las caritas de don Cubo"

Un cubo de madera que mide 20 cm. de lado se pinta de amarillo. Una vez seca la pintura, se corta en cubos de 2 cm. de lado. ¿Cuántos de estos cubos chicos no están pintados en ninguna de sus caritas?

LINEAMIENTOS PARA LA INTERACCIÓN DE LOS PARTICIPANTES Y LA INTERVENCIÓN DEL PROFESOR.



En el que al ser un problema donde se desarrolla el concepto de volumen, en el que el alumno debe determinar que cantidad de cubos están pintados en alguna de sus caras, en que al irse, esto es el **objetivo de la clase**, el cual debe especificarse apropiadamente para que el alumno logre entender la actividad en su totalidad. Aquí es importante tomas decisiones sobre el tiempo de la duración de cada proceso aprendizaje-enseñanza.
El tiempo se dará de la siguiente forma:

- Conformación de los equipos de 4 miembros (2 minutos)
- Lectura del problema (2 minutos)
- Trabajo con material (Plastilina) y la resolución de la actividad por escrito en una hoja de papel, que servirá de soporte de la actividad (20 minutos).
- Exposición de tres equipos, uno de mayor avance, uno de mediano avance y uno de menor avance en la actividad, cada equipo tiene 5 minutos para exponer, lo cual se toma como una guía de discusión (15 minutos).
-
- Presentación del video "una gota en el océano" (10 minutos)
- Evaluación y cierre de la clase (5 minutos)
- Duración total de la actividad (55 minutos).

En este caso, es importante señalarle a los alumnos la relación positiva de la interdependencia entre los equipos, dado que algunos de ellos no están insertos en experiencias anteriores de trabajo en equipo, lo que impide su inserción con facilidad,

dado que están acostumbrados a un sistema de educación tradicional en donde se priva mas lo individual que lo colectivo, otros ya han tenido la experiencia de trabajo en equipo lo que les permitió incorporarse mas rápido a un trabajo colaborativo.
Dentro el desarrollo de la actividad el profesor debe supervisar la actividad de los alumnos, por lo que su papel es un mediador de la actividad dentro del aula, con el fin de mejorar el desarrollo interpersonal y el desempeño de los alumnos, para evitar la dispersión o la falta de interés en la actividad a realizar. Lo cual rompe un esquema que se ha convertido en un paradigma hegemónico, el que el aprendizaje no se puede dar en equipos, que tiene que ser individual, no colaborativo. Modificando la actitud de los alumnos con respecto al proceso aprendizaje- enseñanza, el aprender a aprender, logra un aprendizaje significativo, dentro de los alumnos (Fragoso, Margarita, 2004).
Al darse la evaluación del desempeño de los equipos se logra percibir el nivel de eficacia adquirido por cada uno de los alumnos dentro del propio equipo, dado que se elige al azar un alumno que exponga el desarrollo de la actividad, los resultados que lograron obtener y sus propias conclusiones. Al observar el video "una gota en el océano", se tiene una visión mas clara de lo que los alumnos lograron realizar dentro del salón de clases, al tener una relación visual, física y poder intercambiar sus puntos de vista, se tienen cubiertas las tres áreas del conocimiento, lo que tiene un impacto mayor en la apropiación del conocimiento, llegando a la institucionalización del conocimiento dentro del propio alumno. Cabe aclarar que el impacto del video es positivo porque encuadra al alumno que la matemática tiene una representación dentro de la realidad, lo que en algunas ocasiones es difícil de poder lograrlo.

Con lo que se llega al cierre de la clase, donde se presentan las conclusiones finales de la actividad y donde se presenta una solución de referencia del ejercicio, que puede ser como sigue: "imaginemos que tenemos una naranja en forma de cubo a la que se le quita la cáscara que corresponde a una capa de cubos y nos queda la parte interna que no esta pintada, la externa tiene por lo menos un cubo pintado, lo cual nos da que, si tenemos una de sus caras podemos observar que se forma diez cubos de dos centímetros por lado, entonces al quitarle la cáscara solo nos quedan ocho cubos de dos centímetros.

Solución: $8*8*8=8^3$ =512 total de cubos que no están pintados en alguna de sus caras.

De un total de 1000 cubos =10*10*10

Lo que no da, por lo tanto, que por lo menos están pintados en algunas de sus caras un total de = 1000-512=488 cubos.

Además es importante señalar la presencia de liderazgos dentro de cada equipo, el cual facilita el desempeño de cada uno de sus miembros, en el impacto de la actividad, en ocasiones favorecen su desempeño y en otras ocasiones distorsiona su nivel de eficacia, dado que lo que se quiere lograr es un desempeño exitoso.
El profesor se vuelve un facilitador o mediador del conocimiento dentro del aula de clase, al dar una conclusión final. Debe contemplar que no hay una solución única a cada actividad que realicen los alumnos, dado que el conocimiento se va construyendo, a partir de conocimientos previos que tiene los estudiantes, o por un proceso de indagación espontánea, (Coll, C. Salvador, 2004).

Variables del problema:

Se puede decir que las variables que tiene este problema son:

- Podemos acoparlo para manejo de aritmética
- Para álgebra
- Manejo de volúmenes y áreas

El impacto del constructivismo dentro del aula.

- Cambio de actitudes.
- Trabajo en equipo cooperativo.
- Logra desarrollar conceptos de con mayor facilidad.
- Que el alumno observe las ventajas del trabajo en equipos cooperativos,
- Lograr llegar a tener una seguridad en la solución correcta de una actividad.
- Obtener una validación correcta en el planteamiento y desarrollo al enfrentar un problema.

El cambio de actitud del alumno es algo importante, dado que dentro de un esquema tradicional no valido que un alumno trabaje en equipo, que no pueda dialogar entre sus pares, que no realice ningún tipo de critica dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, donde el aprendizaje debe ser memorístico, no reflexivo, la relación profesor-alumno, es predominantemente hermenéutica, no académico. Al darse la aplicación del constructivismo se rompe un paradigma hegemónico y se logra dar pie, a un dialogo permanente entre profesor y alumno, en el que la critica se vuelve practica cotidiana para modificar la practica docente, se presenta una reflexión a cada actividad que se realiza dentro del aula, se un razonamiento dialéctico en el proceso aprendizaje-enseñanza. El alumno aprende dentro de la libertad del pensamiento.
Trabajo cooperativo, permite la integración de los alumnos en formas alternas de didácticas dentro de cada salón de clase, donde se da un intercambio permanente entre sus pares, son el objetivo de lograr resolver problemas de forma eficaz, a través de andamiajes que va construyendo el alumno, por lo que se da una curva de aprendizaje cada vez mayor que posibilita que el alumno resuelva cada vez mejor cada actividad que se le pida. La conformación de equipos puede ser de forma azarosa, preferentemente con el fin de evitar caer en la conformación de grupos, que compitan entre si, por lo que no es conveniente comparar el trabajo de cada alumno, dado que no todos tienen las mismas habilidades, destrezas, capacidades y valores.
Lograr conceptos con mayor facilidad, nos permite que si bien existe un andamiaje en cada alumno, al irse enfrentando a un problema, desarrollan por medio de la creatividad y en trabajo en equipo, conceptos para darle solución al ejercicio que están realizando, es decir, se da un proceso dinámico en el aprender a aprender, si bien hay, mecanismo de ajuste, estos se desarrollan hasta que se de la actividad (Díaz Barriga Arceo, Frida, et al, 1998).
Al irse dando cada vez mas procesos de trabajo colaborativo dentro del aula, se puede ir construyendo un mecanismo de reforzamiento que permite al alumno tener una seguridad el la actividad que esta realizando, y con lo que al pasar a exponer el desempeño de su actividad, puede trasmitir al resto de los equipos y del grupo, todo el proceso de resolución, que formulas aplico o desarrollo, que conceptos utilizo, que se le dificulto mas, o que no pudo resolver. Lo que facilita la intervención de otros miembros del equipo en este dialogo académico.

Cada vez que se enfrenta el alumno a “problemas”, se le presenta la disyuntiva de hacerles frente o evadirlos, en el constructivismo, el cambio esta siempre presente, el adaptarse a nuevas condiciones permite encontrar soluciones a cada problema, con mayor creatividad, dándole una validación a cada actividad que se realiza en el aula, en la vida profesional, se tendrá que enfrentar a condiciones cambiantes dentro de un mercado laboral flexible, tendrá como premisa el éxito en la forma que se enfrenta y se le encuentra a la solución de un problema con ambientes diferentes, dependiendo del equipo y las condiciones iniciales en la solución del problema (Ferreiro, R, 2003). En el caso de la actividad la construcción del concepto de volumen en un cubo y la posibilidad de poder encontrar cuantas caras están pintadas, permite al alumno poder visualizar el problema, ya sea medio de la utilización de la plastilina o por medio de un diagrama que pueda realizar en una hoja, donde plasma una idea que surge un su zona próxima del conocimiento a través de la presencia de un dialogo académico con sus pares, con una guía de discusión que posibilita la difusión y socialización de su propuesta con el resto del grupo, dialogo permanente (Mercer, Neil, 2003), el alumno se vuelve en mediador, en trasmisor de su propio conocimiento, en docente, en facilitador, al poder compartir su conocimiento con sus pares de forma exitosa, y con lo que se dan cuenta que si trabajan en equipo sus resultas son mejores y mas rápidos, no tienen dudas y lograr ser mas seguros en la forma de expresarse ante el publico, dialogan y crean conocimiento (Coll, C. Salvador, 2003), tal como lo hizo Platón.
El trabajo coolaborativo también nos permite realizar coevalucaciones dentro de cada equipo, el encontrar la causa del porque no se lograron los resultados esperados, que impidió un buen desarrollo de la actividad, porque no se presento un dialogo, evitar caer en su evasión dado que se puede pensar que la evaluación individual se puede debilitar si se trabaja en equipo, al contrario se fortalece, los alumnos saben sus fortalezas y debilidades, detectan mejor sus capacidades y destrezas, sus valores y actitudes (Anijovich, Rebeca, et al, 2004).

Metodología:

En el caso de la presente investigación se utilizo un técnica cualitativa para la obtención de los resultados en el trabajo de cada equipo colaborativo, con presencia de un dialogo entre pares, en la forma en que tuvieron su desempeño, presentaron sus resultados, conclusiones, se dieron las guías de discusión y el debate entre los equipos. Lo cual se reflejo en una evaluación para cada equipo en particular y el grupo en total, con una lista de cotejo, ya sea a nivel individual como grupal, lo que se le dio seguimiento durante el resto del semestre. Esto permite evitar caer en una visión conductista de la enseñanza, pasando a una visión constructivista de la misma.

Conclusiones y reflexiones:

Existen resistencias en un principio, por parte de los alumnos al trabajo cooperativo, cuando se logran vencer, y pueden darse cuenta de los beneficios que puede obtener al trabajar en equipo, los alumnos tienen un cambio de actitud con respecto a la actividad que se les indica a realizar. Las ventajas es que aprendizaje es mayor, al lograr llegar a un aprendizaje significativo, que queda en la mente de los alumnos, es mas difícil que se les pueda olvidar el concepto de volumen y su aplicación a un cubo, el impacto dentro del proceso aprendizaje-enseñanza es mayor. Se dan mecanismos de ajuste de ayuda durante la realización de la actividad, con el fin de mejorar el desempeño de su actividad y evitar la dispersión de la misma por algunos miembros de equipo. Es decir

debe dar un acompañamiento permanente de los alumnos en su trabajo en equipo (Pozo Muncio, J. I. et al,, 1994).Se rompe un esquema dominante de enseñanza tradicional y con ello se posibilita el trabajo en equipo de forma exitosa, lo anterior dentro del Instituto Politécnico Nacional dentro de un nuevo modelo educativo que esta incorporando al constructivismo como una alternativa ante esquemas conductistas, lo que provocara en el mediano plazo un cambio en la actitud de los egresados cuando se enfrenten a la solución de problemas en su práctica tradicional. Se logro que el grupo en su totalidad conformada por diferentes equipos lograran tener un aprendizaje significativo del concepto de volumen y que lo pudieran aplicar a un cubo. Entregando un reporte de su actividad realizada por todos los integrantes del equipo. El que quedo como evidencia de su actividad. Los alumnos se vuelven en constructores de su propio conocimiento y en sus difusores del mismo, se transforman en mediadores, facilitadores del proceso aprendizaje-enseñanza. Se rompen mecanismos de intolerancia dentro de los grupos, lo que facilita la interculturalidad entre los alumnos con sus pares y pudiendo generar mecanismo de convivencia cada vez mayores, con resultados positivos dentro de las escuelas, dentro de ellas los de nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional.
Finalmente, como escribió Lian Karp Siordia, el mas ilustre matemático mexicano del siglo XX, "la vida es para vivirla, no para sufrirla".

Referencias Bibliográficas:

Anijovich, R., Malbergier, M. y Sigal, C. (2004). *Una introducción a la enseñanza para la diversidad*. Buenos Aires, Argentina: Fondo de Cultura Económica.

Coll, C., Pozo, J. y Valls, E. (1992) *Los Contenidos de la reforma educativa. Enseñanza y aprendizaje de conceptos procedimientos y actitudes.* Buenos Aires. Argentina: Santillana.

Coll, C. (2003). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. 2ª edición. México: Paidos Educador.

Díaz, F. y Hernández, G.(1998) *Estrategias docentes parta un aprendizaje significativo*. México: Mc Graw Hill.

Ferreiro, R. (2003). *Estrategias didácticas del aprendizaje cooperativo. El Constructivismo Social: Una nueva forma de enseñar y aprender.* México: Trillas.

Fragoso, M. (2004). *Seminario permanente sobre experiencias académicas exitosas de aprendizajes en equipos. Reflexiones*., 1 edición. México: UNAM.

Jonhson, D., Jonson, R. y Holubec, E.(1999) *El aprendizaje cooperativo en el aula*, 1 edición. Buenos Aires, Argentina: Paidos Educador.

Mercer, N. (2003). *La construcción guiada del conocimiento. El habla de profesores y alumnos*, , 1 edición. Barcelona, España: Paidos Educación

Pozo, J. *et al*. (1994). *La solución de Problemas*. Madrid: Santillana.

Senge, P. (2002). *Escuelas que aprenden*. México: Norma.

LA REFORMA CURRICULAR DEL BACHILLERATO TECNOLÓGICO Y LA ELABORACIÓN DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA CURSOS DE MATEMÁTICAS

María del Pilar Rosado Ocaña
Facultad de Matemáticas-Universidad Autónoma de Yucatán, México
rocana@tunku.uady.mx,
Campo de Investigación: Formación de profesores; Nivel Educativo: Medio

Resumen

Se presentan los resultados obtenidos de un curso, "Taller de elaboración de secuencias didácticas", diseñado con el objetivo de contribuir a la formación y actualización de los profesores de matemáticas del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Yucatán (CECyTEY), en el conocimiento y aplicación de las técnicas y procedimientos que configuran un modelo didáctico para la producción de secuencias didácticas para cursos de Matemáticas; de tal manera, que los profesores pudieran aplicarlas en el salón de clases con diferentes grupos de estudiantes, de acuerdo a las características propias de los mismos. Tomando como referencia, documentos y libros de texto acordes a las bases teóricas que se consideran en la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica, el Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica; así como los programas de Matemáticas que se llevan en los diferentes planteles del CECyTEY.

Introducción

Se presentan los aspectos más relevantes de las inquietudes y perspectivas de los profesores, que se enfrentan en la actualidad a cambios en la enseñanza de las matemáticas y que aún cuando muchos de ellos están iniciándose en la docencia, con una formación en las diferentes teorías del aprendizaje, técnicas y estrategias de enseñanza, dudan, estando ya en la práctica, de la manera adecuada en que se puede lograr la generación del conocimiento de contenidos matemáticos, en estudiantes de bachillerato.

Cabe mencionar, que la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica en México, se presentó a los profesores en el mes de junio del 2004, como resultado del trabajo conjunto de un grupo de representantes de la Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológicas; quienes trabajaron en las modificaciones correspondientes a los contenidos de los programas de estudio, dando origen a las nuevas estructuras temáticas para cada uno de los cursos actuales. Dicha reforma toma como base, aspectos generales del Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica; que tiene como elementos fundamentales: las características de los egresados, de los profesores y de los estudiantes del bachillerato tecnológico; así como el proceso de formación y la gestión. Se considera el enfoque de la educación basada en competencias y el aprendizaje significativo, desde la perspectiva constructivista. Se parte del hecho de, que tratar de implementar una nueva metodología de enseñanza a través de secuencias didácticas en todas las asignaturas del bachillerato, requiere primeramente, atender la formación de los profesores que se encuentran frente a grupo.

Metodología

El taller se llevó a cabo durante seis sesiones de trabajo, de cinco horas de duración cada una. En la primera sesión, se inició con una semblanza de los aspectos principales de los documentos de la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica y del Modelo de Educación Media Superior Tecnológica, así como una discusión sobre los aspectos fundamentales del constructivismo y una reflexión, por parte de los profesores, acerca de la actividad docente. En las siguientes sesiones, se consideró necesario incluir una serie de materiales escritos, seleccionados de la bibliografía recomendada, referentes al trabajo colaborativo, estrategias de aprendizaje y evaluación del aprendizaje, para fortalecer el aspecto teórico y unificar criterios en la elaboración de las secuencias didácticas. En cada una de estas sesiones, se discutió uno de dichos materiales y se trabajó en el análisis de las secuencias didácticas elaboradas en el "Curso-Taller Estatal para la Presentación de los Programas de Estudio del Bachillerato Tecnológico"[1] impartido en el mes de julio del 2004, como una multiplicación del "Taller Regional Sur-Sureste para la presentación de los Programas de Estudio del Bachillerato Tecnológico" impartido en diferentes regiones de la República, en el cual tuve la oportunidad de participar comisionada por parte del CECyTEY en el área de Matemáticas. De esta manera, se trabajó en el rediseño de las secuencias didácticas para el curso de Álgebra, elaboradas durante el taller estatal. Es importante mencionar que, para el rediseño de las secuencias, se consideró pertinente el realizar dos versiones para cada una de éstas, una para el facilitador y otra para los alumnos, debido a que el facilitador debe conocer todos los detalles posibles para aplicar de manera efectiva cada secuencia a distintos grupos de estudiantes, las versiones para el facilitador incluyeron los apartados de: Propósitos, Antecedentes, Motivación, Materiales, y Categorías; que las versiones para los alumnos no incluyeron, y que éstas se limitaron a plantear las instrucciones que deben realizar los alumnos para el logro de los propósitos, mencionados en la versión para el facilitador. De igual manera, se consideró pertinente modificar la sección de categorías (de acuerdo a las dimensiones del aprendizaje de Marzano) considerando que, de alguna manera, se pueden reflejar en las secuencias de matemáticas, las categorías: comparación, clasificación, inducción y deducción. En algunas de las Secuencias, se cambiaron por completo los problemas planteados, debido a que se trató de hacer más familiares las problemáticas planteadas a los alumnos y que el lenguaje utilizado fuera accesible a todos los estudiantes.
La mecánica del taller, consistió en:

- Exposición de contenidos teóricos con preguntas intercaladas.
- Participación activa de los profesores.
- Trabajo colaborativo.
- Análisis crítico.
- Confrontación de ideas.
- Propuestas.
- Evaluación.

Sustento teórico

[1] Este taller se impartió en simultáneo para los profesores de los cuatro subsistemas de la educación media superior tecnológica: Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS), Centro de Bachillerato Tecnológico Agropecuario (CBTA), Centro de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMar) y Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Yucatán (CECyTEY).

Los aspectos fundamentales en los que se basa la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica, los cuales son el eje principal del Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica, vigente desde el año 2000 a nivel nacional, son los cuatro pilares de la educación, señalados por Delors: Aprender a Ser, Aprender a Conocer, Aprender a Hacer y Aprender a Convivir.

El trabajar con Secuencias Didácticas, en todos los cursos de matemáticas (y de las demás asignaturas), es parte de la estrategia seguida, en busca de satisfacer el nuevo paradigma de la educación tecnológica que consiste en desarrollar el aprendizaje autorregulado por parte del alumno, contrario al tradicional que favorecía la enseñanza dirigida al alumno.

Este paradigma trae consigo una nueva pedagogía, que implica:

- El reconocimiento del *control* que puede tener el estudiante sobre *su propio aprendizaje.*
- La existencia de *diversos contextos de aprendizaje* que favorecen nuevas formas de interacción y de acceso al conocimiento.
- La capacidad de los estudiantes para decidir sobre la *estructuración personalizada de sus aprendizajes*, así como de los espacios pedagógicos disponibles para tal efecto.

La bibliografía seleccionada, hace referencia a los temas: "Constructivismo y Aprendizaje significativo", "Aprendizaje cooperativo y Proceso de Enseñanza", "Estrategias para el Aprendizaje significativo" (Díaz-Barriga & Hernández, 2002); "Transformando nuestra práctica docente" (Fierro, Fortoul & Rosas, 1999) y "Evaluación del aprendizaje" (Saavedra, 2001); que fueron discutidos en las sesiones del taller, para reforzar, de alguna manera, las bases teóricas de este paradigma, ya que el trabajo colaborativo que se desarrolló durante el taller, es sin duda una muestra de lo que en grupo se puede lograr, a través de las interacciones que se presentan entre pares y entre facilitador-alumno.

Las Secuencias Didácticas, tienen las características establecidas en el documento de la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica y se sustentan en la Enseñanza Centrada en el Aprendizaje, particularmente, en el diseño de situaciones de aprendizaje de acuerdo al modelo de Marzano, en lo que respecta a dimensiones del aprendizaje.

Características de las Secuencias Didácticas[2]

Las Secuencias Didácticas son consideradas como un conjunto de actividades organizadas en tres momentos: Apertura, Desarrollo y Cierre.

En la fase de apertura, se identifica y relacionan saberes y conocimientos previos que los alumnos poseen.

- Se determinan los conocimientos previos de los estudiantes.
- Sus preconcepciones.
- Necesidades e intereses

El facilitador debe preguntarse:

- ¿Que tanto saben mis alumnos del tema?
- ¿Por qué el tema es de su interés?
- ¿Poseen preconcepciones válidas o inválidas?

[2] Basado en el taller "Secuencias Didácticas", ofrecido por la Coordinación de Enlace Operativo de Veracruz en diciembre de 2004, a cargo del instructor Siddharta Camargo Arteaga.

- ¿Cuáles son las expectativas de mis alumnos respecto al tema?

La fase de desarrollo relaciona saberes, conocimientos previos y preconcepciones con el conocimiento científico, mediante textos, esquemas, videos, software educativo, poemas, canciones, murales, etc. En esta fase, los alumnos:

- Transitan de los conocimientos previos, a los conocimientos científicos.
- Introducen a la lectura y comprensión del tema.
- Empiezan a construir una síntesis.
- Utilizan el proceso de construcción para generar una nueva definición.
- Recuperaran información a partir de sus elaboraciones previas.
- Transitan de la heterogeneidad a la homogeneidad en sus planteamientos conceptuales.

La fase de cierre, sintetiza el conocimiento construido durante la secuencia, para pensar en aquello relevante y pertinente de lo leído y discutido.

- Se logra la síntesis conceptual
- Aprendizajes significativos

Aspectos Metodológicos de las secuencias didácticas

Para la elaboración y el rediseño de las secuencias didácticas de Matemáticas, es importante, primero que nada, tener presente el propósito del programa, tal como se establece en el documento de la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica (2004): *"El estudiante, a partir de la apropiación de los contenidos fundamentales de la matemática, desarrollará habilidades de pensamiento, comunicación y descubrimiento, que le permitan usarlas en la resolución de problemas cotidianos y sea partícipe del desarrollo sustentable de su entorno"*.

Por otra parte, para cada una de las fases de las secuencias didácticas, es necesario tomar en cuenta ciertos aspectos que contribuyen al planteamiento de las actividades a desarrollar para el logro de los propósitos de la secuencia, como se presenta a continuación.

Fase de apertura

- ➢ Contextualización.
  - Procedimiento a seguir
  - Condiciones
  - Productos de aprendizaje
  - Aspectos relevantes a considerar
  - Responsabilidad del estudiante
  - Mediación
- ➢ Recuperación de conocimientos previos.
  - Intereses
  - Habilidades
  - Capacidades
  - Preconcepciones
- ➢ Planteamiento de problemas o problemática.
  - Solución de problemas prácticos y cotidianos

Fase de Desarrollo

- ➢ Revisión del contenido.
- ➢ Definir áreas del conocimiento que se involucran.
  - Disciplinas
  - Enriquecimiento del contenido
  - Campo de transferencia

- Diseño de estrategias de:
    - Enseñanza-aprendizaje-evaluación
    - Transferencia
- Retroalimentación.
    - Evaluación progresiva
        1. Definir criterios de evaluación
        2. Elaborar instrumentos
    - Desarrollo de habilidades cognitivas
    - Reafirmación y reelaboración del conocimiento
    - Productos de aprendizaje

Fase de Cierre

- Transferencia.
    - Aplicación de aprendizajes
    - Valor, utilidad y trascendencia
    - Importancia
        1. Evaluación
        2. Auto evaluación
        3. Retroalimentación
- Interdisciplinariedad.
    - Actividad globalizadora
    - Relación con el tema integrador
- Retroalimentación e integración conceptual.
    - Horizontalidad
    - Verticalidad
    - Transversalidad
    - Integración del portafolios
- Evaluación desde un enfoque integral.
- Conclusiones y Comentarios.

Dificultades en el desarrollo de los programas

Es importante tener en cuenta que los profesores del bachillerato tecnológico, consciente o inconscientemente, pueden asumir las siguientes actitudes que dificultan el desarrollo de los programas en cualquier asignatura.

- *Regresar al modelo tradicional*, quizá por comodidad o por falta de actualización en su formación docente.
- *Carecer de material didáctico adecuado*, por falta de tiempo, poca disposición y carencia de recursos en la escuela.
- *Resistencia* al cambio de su práctica en el aula.

Es por ello, que la actualización y formación docente en estos tiempos de cambios no debe desatenderse, sino por el contrario debe atenderse de forma inmediata y masiva, ya que de otra manera, los más perjudicados serán los estudiantes, quienes no se adaptarán a las exigencias del mundo actual en su etapa de formación y desempeño profesional.

Coll (1988) citado en el Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica (2004), afirma que, es importante tener presente que: “La finalidad ultima de la intervención pedagógica es desarrollar en el alumno la capacidad de realizar aprendizajes significativos por sí solo en una amplia gama de situaciones y circunstancias (aprender a aprender)”.

Resultados

De acuerdo a la evaluación final del taller, en la cual se les pidió a los profesores asistentes que expresaran su opinión en cuanto a contenidos abordados, duración del taller, duración de las sesiones, tareas, metodología de trabajo, aspectos positivos y negativos, entre otros; las respuestas fueron satisfactorias, ya que a pesar de que consideraron que el trabajar durante cinco horas en cada sesión, se hacía un poco pesado, comentaron que les ayudó a comprender mejor la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica, así como los aspectos más relevantes del Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica; pero sobretodo, las características de las Secuencias Didácticas; así como la elaboración de las mismas. Como producto de este curso taller, se obtuvo un material de apoyo para los profesores de Matemáticas de los cinco planteles del CECyTEY, que consistió en el conjunto de "Secuencias Didácticas para el curso de Álgebra", con un total de catorce secuencias rediseñadas, correspondientes a los diferentes temas del programa de Álgebra, con las dos versiones de cada una de ellas: la del facilitador y la de los alumnos. Se acordó aplicar las secuencias en el transcurso del período escolar (agosto 2005-enero 2006) y elaborar las bitácoras correspondientes a cada secuencia para realizar la retroalimentación de las mismas durante las academias estatales al finalizar el semestre.

Conclusiones

Es indiscutible el hecho de que todo cambio requiere de cierto tiempo para poder obtener los resultados esperados, por lo que los cambios en la educación no son la excepción. La Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica en México, se estuvo planeando desde el año 2000, sin embargo; se hace explícita y se pone en práctica a partir de agosto de 2004, hecho que da lugar a la sorpresa e inquietud de la mayoría de los profesores que desconocen las bases teóricas que dan origen al nuevo método de enseñanza y más aún, que ya no serán llamados profesores, sino "facilitadores", todo ello causa una especie de pánico y temor de enfrentarse a los nuevos cambios en la labor docente, sin embargo; quienes hemos tenido la fortuna de conocer el ambiente escolar del bachillerato tecnológico, desde el punto de vista más cercano a los problemas reales de los estudiantes que ingresan a dicho sistema, sabemos que el cambio tiene que empezar con nosotros mismos, preparándonos en el conocimiento de: las bases de la Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica, del Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica y de las bases teóricas que fundamentan la elaboración y aplicación de las secuencias didácticas, ya que éstas son una herramienta para que el facilitador pueda llevar a cabo la guía del proceso de un aprendizaje significativo en los estudiantes. Tal como se establece en el documento del Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica (2004), *"colocar al profesor como facilitador del aprendizaje implica asignarle un papel mucho más complejo del que lo concibe como transmisor de conocimientos. La descentración que implica este cambio exige una mayor apertura para entender las necesidades de otros y también para ofrecer diversas opciones didácticas, así como una constante actualización y, sobre todo, un compromiso decidido con la educación".*

Palabras Clave: Reforma, Modelo Educativo, Secuencias Didácticas.

Referencias

Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica. (2004). *Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica*. México: Author.

Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica. (2004). *Reforma Curricular de la Educación Media Superior Tecnológica.* México: Author.

Díaz-Barriga, F. & Hernández, G. (2002). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Una Interpretación Constructivista*. (2a. Ed.). México: Mc. Graw Hill.

Fierro, C., Fortoul, B., & Rosas, L. (1999). *Transformando la Práctica Docente*. *Una propuesta basada en la investigación-acción.* México: Paidós Mexicana, S.A.

Saavedra, M. (2001). *Evaluación del Aprendizaje. Conceptos y Técnicas*. México: PAX México.

PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE SIN EL USO DE LA DERIVADA

Oleksandr Karelin, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
skarelin@uaeh.reduaeh.mx rondero@uaeh.reduaeh.mx anataras@uaeh.reduaeh.mx
Campo: Gráficas y funciones- Pensamiento matemático avanzado; Nivel Educativo: Medio y Superior

Resumen

El trabajo contiene resultados sobre la construcción de la recta tangente para las funciones elementales sin derivar así como para las funciones formadas por operaciones lineales y aritméticas entre ellas. Dentro del estudio de las nociones fundamentales del cálculo, se consideran: crecimiento, decrecimiento, puntos mínimos y máximos, concavidad y conexiones entre si. En base de estas relaciones se presentó, en trabajos previos, un enfoque no tradicional acerca de la construcción de la recta tangente. Para ello dicho problema se redujo a la búsqueda de puntos extremos de una función adicional que está conectada con la función inicial.

La propuesta didáctica que se ha venido estructurando, posibilita el entender más profundamente las nociones fundamentales del cálculo y sus articulaciones entre sí y está dirigida a los profesores y estudiantes de matemáticas de los niveles educativos medio superior y superior.

Relación entre la recta tangente en un punto de una función y los puntos extremos de una función adicional

Se parte del esquema general acerca de la construcción de la recta tangente que fue presentada en [1].

Se consideran las funciones $y = y(x)$ para las cuales en cada punto (x_0, y_0) de su gráfica $L:\{(x, y(x))\}$ existe una y sólo una recta $R(x_0, y_0)$: $y = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$, que pasa por el punto (x_0, y_0), no tiene otros puntos comunes con la gráfica L en una vecindad de (x_0, y_0) y está ubicada por arriba o por debajo de la recta $R(x_0, y_0)$. La clase de tales funciones se denota por C y la clase de rectas para la función $y = f(x)$, se denota por $T(f)$.

Afirmación 1.

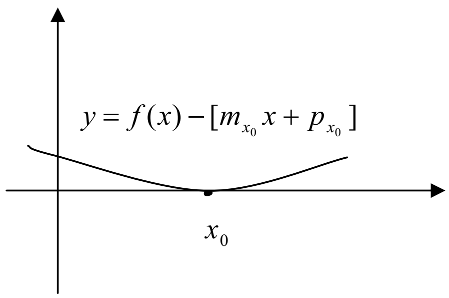
Se escoge una función $y = f(x)$ de la clase C y un punto (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$.

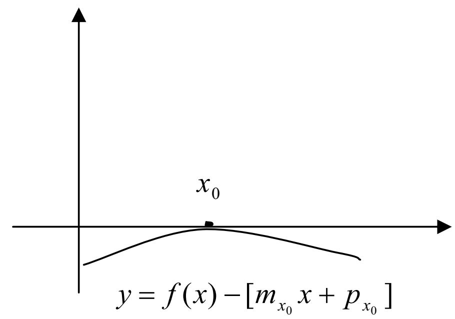
Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$ es una recta de la clase $T(f)$ en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$ si y sólo si la función adicional $y = F(x)$, $F(x) = f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}]$ tiene su punto mínimo ó punto máximo en x_o.

Si en el punto x_o, hay un mínimo para $y = F(x)$, entonces se cumple la desigualdad

(*) $F(x) \geq F(x_0)$ ó $f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}] \geq f(x_0) - [m_{x_0} \cdot x_0 + p_{x_0}]$.

Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es de clase $T(f)$ en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$ si y sólo si la desigualdad (*) se cumple en una vecindad de x_o.
Si en el punto x_o, hay un máximo para $y = F(x)$, entonces se cumple la desigualdad
(**) $F(x) \le F(x_0)$ ó $f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}] \le f(x_0) - [m_{x_0} \cdot x_0 + p_{x_0}]$.
Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es de clase $T(f)$ en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$ si y sólo si la desigualdad (**) se cumple en una vecindad de x_o.
Las gráficas que ilustran ambos casos son:





Para construir $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es necesario hallar m_{x_0} de (*) ó de (**) y calcular p_{x_0} por la fórmula $p_{x_0} = f(x_0) - m_{x_0} x_0$. Si m_{x_0} es un número tal que las desigualdades (*) ó (**) se cumplen en una vecindad de x_0, entonces, hay un mínimo ó máximo para $y = F(x)$ en x_o y m_{x_0} es la pendiente de la recta $R(x_0, y_0)$.
Usando esta conexión entre los puntos mínimos y máximos se propone hallar la recta tangente de las graficas de algunas funciones simples sin derivar. En trabajos anteriores se presentaron las construcciones respectivas de las ecuaciones de rectas tangentes para polinomios, funciones raíces y funciones trigonométricas. Ahora la investigación sobre funciones elementales se complementa presentando la construcción de la recta tangente para funciones exponenciales y logarítmicas. Se obtienen las ecuaciones de las rectas tangentes para tales funciones, a través de operaciones aritméticas entre ellas.

Recta tangente para la función exponencial sin derivar

Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0), de la gráfica de la función exponencial $y = e^x$, donde $y_0 = e^{x_0}$. Sea $x_0 > 0$, la función adicional se estructura nuevamente, $F(x) = e^x - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = e^x - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según la Afirmación 1, esta función tiene su extremo local en el punto x_o.
Por definición del punto extremo local, dependiendo si x_0 es un mínimo ó un máximo, se cumple sólo una desigualdad $F(x) \ge F(x_0)$ ó $F(x) \le F(x_0)$ en una vecindad del punto x_0.

Considerando la desigualdad $F(x) \ge F(x_0)$,

$$e^x - m_{x_0} x - p_{x_0} \ge e^{x_0} - m_{x_0} x_0 - p_{x_0}, \qquad e^x - e^{x_0} - m_{x_0}(x - x_0) \ge 0 .$$

Si se supone $m_{x_0} = e^{x_0}$, es posible demostrar que en este caso la desigualdad $e^x - e^{x_0} - e^{x_0}(x - x_0) \geq 0$, se cumple en una vecindad de x_0 , ó respecto a la nueva variable $z = x - x_0$, la desigualdad $e^{z+x_0} - e^{x_0} - e^{x_0} z \geq 0$ se cumple en una vecindad de $z = 0$.

Al tener en cuenta $e^{z+x_0} = e^{x_0} e^z$ y $e^{x_0} > 0$, se cumplen las desigualdades siguientes,
$e^{x_0}\left(e^z - 1 - z\right) \geq 0$, $\left(e^z - 1 - z\right) \geq 0$ y $e^z \geq 1 + z$.
La última desigualdad se satisface en una vecindad de $z = 0$.
Esto significa que $m_{x_0} = e^{x_0}$, es la pendiente de la recta tangente.

Ahora se calcula el término independiente por la fórmula
$b = f(x_0) - mx_0 = e^{x_0} - e^{x_0} x_0$,
de donde la ecuación de la recta tangente es, $y = e^{x_0} \cdot x + e^{x_0}(1 - x_0)$.

Recta tangente para la función logaritmo sin derivar

Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0), de la gráfica de la función logaritmo $y = \ln x$, donde $y_0 = \ln x_0$.
Sea $x_0 > 0$ y $x_0 \neq 1$
Se tiene ahora como función adicional, $F(x) = \ln x - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = \ln x - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según Afirmación 1 esta función tiene su extremo local en el punto x_0
Por definición del punto extremo local en $p_{\max} = x_0$ de la función $y = \ln x$ debe cumplirse la desigualdad $F(x) \geq F(x_0)$ ó $F(x) \leq F(x_0)$ en una vecindad del punto x_0.

Se considera la desigualdad

$$\ln x - m_{x_0} x - p_{x_0} \leq \ln x_0 - m_{x_0} x_0 - p_{x_0},$$

$$\ln x - \ln x_0 - m_{x_0}(x - x_0) \leq 0, \quad \ln \frac{x}{x_0} - m_{x_0}(x - x_0) \leq 0.$$

Supóngase que $m_{x_0} = \dfrac{1}{x_0}$, se demostrará que en este caso la desigualdad

$\ln \dfrac{x}{x_0} - \dfrac{1}{x_0}(x - x_0) \leq 0$ ó $\ln \dfrac{x}{x_0} - \dfrac{x}{x_0} + 1 \leq 0$, se cumple en una vecindad de x_0 .

Realizando el cambio de variable $u = \dfrac{x}{x_0}$, se obtiene la desigualdad, $\ln u - u + 1 \leq 0$,
de donde, $\ln u \leq u - 1$, la cual se cumple para $u > 0$.
Esto significa que $m_{x_0} = \dfrac{1}{x_0}$, es la pendiente de la recta tangente.

Se puede calcular el término independiente por la fórmula $b = f(x_0) - mx_0 = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} x_0 = \ln x_0 - 1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es, $y = \frac{1}{x_0} \cdot x + \ln x_0 - 1$.

Fórmulas para operaciones lineales

Resulta interesante mostrar algunas propiedades de la recta tangente de la suma de dos funciones *f* + *g*, y de la multiplicación de una constante por una función λ *f*, referidas como operaciones lineales.

Es posible definir a las funciones $y = f(x)$ de clase C, como aquellas cuya gráfica está por arriba (por abajo) con respecto de la recta tangente de clase $T(f)$, las cuales forman un conjunto C_{ar} (C_{ab}), y donde evidentemente $C = C_{ar} \text{ Y } C_{ab}$.

Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = f(x) + g(x)$ son funciones de la clase C, la recta tangente de la clase $T(f)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, tiene por ecuación $y = m_f x + b_f$; la recta tangente de la clase $T(g)$ que pasa por el punto $(x_0, g(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_g x + b_g$. Entonces la recta tangente de la clase $T(f+g)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0) + g(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_{f+g} x + b_{f+g}$, donde $m_{f+g} = m_f + m_g$, $b_{f+g} = b_f + b_g$.

Demostración: Se considera el caso en que ambas gráficas de *f* y *g*, están por arriba de su recta tangente en una vecindad de x_0, es decir, $f(x) \in C_{ar}$ y $g(x) \in C_{ar}$. Los otros casos son análogos. Según Afirmación 1, las funciones adicionales, $F(x) = f(x) - [m_f x + b_f]$ y $G(x) = g(x) - [m_g x + b_g]$, tienen un mínimo local en el punto x_0, entonces, $F(x) \geq F(x_0)$, $G(x \geq G(x_0))$ y son iguales a cero en este punto, $f(x) - [m_f x + b_f] \geq 0$, $g(x) - [m_g x + b_g] \geq 0$.

Sumando estas dos últimas desigualdades, se obtiene,
$f(x) + g(x) - [(m_f + m_g)x + b_f + b_g] \geq 0$.

Ahora bien, por el punto $(x_0, f(x_0) + g(x_0))$ pasa la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$, que está por arriba de la recta tangente R, $y = (m_f + m_g)x + b_f + b_g$.

Sea $y = f(x)$ una función de C, la recta tangente de la clase $T(f)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_f x + b_f$. Entonces el producto $y = \lambda \cdot f(x)$, donde λ es un numero real diferente de cero, pertenece a la clase C y la recta tangente de la clase $T(\lambda \cdot f)$ que pasa por el punto $(x_0, \lambda \cdot f(x_0))$ tiene por ecuación $y = m_{\lambda \cdot f} x + \lambda \cdot b_{\lambda \cdot f}$, donde $m_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot m_f$, $b_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot b_f$.

Demostración: Se considera nuevamente el caso en que $f(x) \in C_{ar}$, los otros casos son análogos. Según Afirmación 1, función adicional, $F(x) = f(x) - [m_f x + b_f]$ tiene un

mínimo local en el punto .*x0*, : $F(x) \geq F(x_0)$ y $F(x_0)=0$. Se cumple la desigualdad $f(x)-[m_f x+b_f] \geq 0$.
Multiplicando la función por el número λ, se obtienen las desigualdades,

$\lambda \cdot f(x)-[\lambda \cdot m_f x+\lambda \cdot b_f] \geq 0$, si $\lambda \geq 0$; $\lambda \cdot f(x)-[\lambda \cdot m_f x+\lambda \cdot b_f] \leq 0$, si $\lambda \leq 0$.

Por el punto $(x_0, \lambda \cdot f(x_0))$, pasa la gráfica de la función $y=\lambda \cdot f(x)$ y su recta tangente R en *x0*: $y=(\lambda \cdot m_f)x+\lambda \cdot b_f$, está por abajo de la curva cuando $\lambda>0$, y está por arriba de la misma cuando $\lambda<0$. Se obtienen las fórmulas $m_{\lambda \cdot f}=\lambda \cdot m_f$, $b_{\lambda \cdot f}=\lambda \cdot b_f$
Adicionalmente se puede mostrar que la función $\lambda \cdot f(x) \in C$, tiene una única recta tangente, es decir se puede demostrar la unicidad de la recta R. Sea $f(x) \in C_{ar}$, $\lambda>0$. Otros casos se demuestran del mismo modo. Se aplicará el método de la reducción al absurdo. Supóngase que existe otra recta $\widetilde{R}$: $y=\widetilde{m}x-\widetilde{b}$ con $\widetilde{m} \neq m_{\lambda \cdot f}=\lambda \cdot m_f$ ó $\widetilde{b} \neq b_{\lambda \cdot f}=\lambda \cdot b_f$, que pasa por el punto $(x_0, \lambda \cdot f(x_0))$, $\lambda \cdot f(x_0)=\widetilde{m}x_0+\widetilde{b}$ tal que la grafica de la función $y=\lambda \cdot f(x)$ está por arriba de la recta $\widetilde{R}$. En este caso se cumple $\lambda \cdot f(x)-[\widetilde{m}x+\widetilde{b}] \geq 0$ en una vecindad del punto *x0*. Al dividir por λ se tiene $f(x)-[\frac{\widetilde{m}}{\lambda}x+\frac{\widetilde{b}}{\lambda}] \geq 0$ donde $\frac{\widetilde{m}}{\lambda} \neq m_f$ ó $\frac{\widetilde{b}}{\lambda} \neq b_f$ que es una contradicción con el hecho de que la gráfica de *f* está por arriba de R, $f(x) \in C_{ar}$.

Fórmula para el producto

Finalmente es posible mostrar la propiedad de la recta tangente del producto $f.g$ dos funciones f y g. Sean $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=f(x)\cdot g(x)$, la recta tangente de la clase $T(f)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene por ecuación $y=m_f x+b_f$; la recta tangente de la clase $T(g)$ que pasa por el punto $(x_0, g(x_0))$ tiene por ecuación $y=m_g x+b_g$. Entonces la recta tangente de la clase $T(f.g)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0)\cdot g(x_0))$ tiene por ecuación $y=m_{f\cdot g}x+b_{f\cdot g}$, donde
$m_{f\cdot g}=m_f g(x_0)+m_g f(x_0)$, $b_{f\cdot g}=f(x_0)g(x_0)-m_{f\cdot g}x_0$.
Demostración: Sólo se trata el caso $f(x) \in C_{ar}$ y $g(x) \in C_{ar}$, por lo tanto se cumplen las desigualdades, $[m_f x+b_f] \geq 0$, $[m_g x+b_g] \geq 0$; y en el punto *x0,* las pendientes son positivas $m_f>0$, $m_g>0$. Los otros casos son análogos. De Afirmación 1, las funciones adicionales son, $F(x)=f(x)-[m_f x+b_f]$ y $G(x)=g(x)-[m_g x+b_g]$, las cuales tienen un mínimo local en el punto *x0,* es decir, $F(x) \geq F(x_0)$, $G(x \geq G(x_0))$. Entonces, por definición se cumplen en una vecindad del punto *x0* las desigualdades
$f(x)-[m_f x+b_f] \geq 0$ ó $f(x) \geq [m_f x+b_f]$; $g(x)-[m_g x+b_g] \geq 0$ ó $g(x) \geq [m_g x+b_g]$.
Multiplicando las dos últimas desigualdades, se obtiene $f(x)g(x) \geq [m_f x+b_f][m_g x+b_g]$, realizando operaciones elementales y simplificando se tiene que,

$$f(x)g(x)-\left[\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x+f(x_0)g(x_0)-\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x_0\right]\geq m_f m_g (x-x_0)^2$$

Por el punto $(x_0, f(x_0)\cdot g(x_0))$ pasa la gráfica de la función $y=f(x)\cdot g(x)$ y la recta $R: y=\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x+f(x_0)g(x_0)-\left(m_f g(x_0)+m_g f(x_0)\right)x_0$, la gráfica de $y=f(x)+g(x)$ está por arriba de R. Finalmente se obtienen las fórmulas $m_{f\cdot g}=m_f g(x_0)+m_g f(x_0)$, $b_{f\cdot g}=f(x_0)g(x_0)-m_{f\cdot g}x_0$. Obsérvese que la pendiente del producto de dos funciones m_{fg}, tiene una forma similar a la derivada del producto de dos funciones.

Conclusiones

Este tipo de resultados son un tanto sorprendentes para la mayoría de los estudiantes, no esperan poder calcular la pendiente de la recta tangente (que según la interpretación geométrica es la derivada) sin el uso de la derivada. La sorpresa genera interés y el mismo posibilita llevar a los estudiantes a las matemáticas.

Con este trabajo se concluye una primera parte de un método alternativo para abordar algunas de las nociones básicas del cálculo, en el que esencialmente se presentan las construcciones respectivas de las ecuaciones de rectas tangentes para polinomios, funciones raíces, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Adicionalmente a la investigación sobre funciones elementales, se incorpora una generalización de la construcción de la recta tangente para funciones que a su vez se obtienen a través de operaciones aritméticas entre ellas.

El tratamiento aquí presentado posibilita el tránsito entre el precálculo y el cálculo, a través de una propuesta didáctica en la que se busca articular a los saberes matemáticos de la recta tangente a una función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y la resolución de desigualdades.

BIBLIOGRAFIA

Rondero, C., Karelin, O., & Tarasenko A. (2004). *Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones.* En Díaz Moreno L. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 17, pp. 821-827). Tuxtla Gutiérrez, México: CLAME.

Boyer, C., & Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. Nueva York. EE.UU: John Wiley.

Edwards, C.H. (1979).*The Historical development of the Calculus*. Nueva York. EE.UU: Springer-Verlag.

Kline, M., . (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nueva York. EE.UU: Oxford University Press.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, Conceptos y Contextos*, México: International Thomson Editores.

LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

María del Rosario Hernández Apolonio, Marco Antonio Morales Salmerón, Santiago Ramiro Velásquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero, México.
myr_1812@yahoo.com.mx
Campo de Investigación: Método de demostración y pensamiento geométrico, Nivel educativo: Medio Superior.

Resumen

En este trabajo se dan a conocer los resultados de una investigación relacionada con la Demostración en Geometría. Como la demostración ocupa en matemáticas un lugar central, pues es el método de prueba cuyo empleo sistemático caracteriza esta disciplina entre otras ciencias. Se comprende entonces que tiene un papel importante en el currículo escolar, por lo tanto debería ser un componente clave en la educación matemática en todos los niveles, además es una herramienta importante para promover la comprensión matemática. El objetivo principal de esta investigación es explorar en los estudiantes las formas de demostrar, las herramientas o estrategias que utilizan al realizar una demostración en geometría y las dificultades que presentan en la misma.

Introducción

La demostración en la clase de matemática presenta una gran diversidad de formas, y aparece en los distintos niveles educativos a través de variados tipos de argumentaciones. El pensamiento deductivo se va construyendo lentamente a lo largo de las distintas etapas de la escuela. Esto no significa que se logre realmente su construcción de manera sólida. Es común encontrar alumnos universitarios que aún no han logrado dominar este contenido procedimental.

En el programa y plan de estudios de educación básica, uno de los objetivos es fomentar el desarrollo de la habilidad para deducir, que se refiere a establecer hipótesis y encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos. Ya en el nivel medio superior, deben aparecer argumentaciones de carácter empírico-inductivo y demostraciones deductivas informales, aunque a veces elementales. A pesar de que muchos alumnos continúan teniendo un pensamiento concreto que depende del contexto físico o específico para poder percibir regularidades y relaciones y deben apoyar sus razonamientos en el uso de materiales concretos (calculadoras, regla, compás, etc.), otros ya son capaces de razonamientos más formales y de abstracción. Lo anterior es la formación que el alumno debe de tener en este nivel educativo, sin embargo las evidencias obtenidas después de haber realizado un estudios en donde se aplico una prueba de diagnóstico a dos poblaciones del nivel medio superior, muestran una serie de dificultades por parte de los alumnos en la realización de una demostración en geometría. En cambio esta misma prueba fue aplicada a los alumnos de olimpiada de las matemáticas de nivel básico, mostrando menos dificultades y resolviendo la mayoría de los problemas propuestos. También fue aplicado a los alumnos del cuarto semestre de la licenciatura en matemáticas obteniendo resultados similares a los de olimpiada. Tomando en cuenta este diagnostico nos damos cuenta que deben fomentarse actividades orientadas a la

formulación de hipótesis y al razonamiento inductivo, y poner gran énfasis en la importancia de la verificación deductiva.
Pero por otra parte la enseñanza de la Geometría que nos trae el docente al aula usualmente se circunscribe a un espacio en donde él es quién carga con la tarea de proponer los fenómenos geométricos a estudiar y las condiciones que deben cumplir las figuras. Es decir, sólo le dejamos ver a nuestros estudiantes, cómo actuamos ante este problema y cómo hacemos los pasos necesarios para llegar al resultado que nosotros deseamos, más esto es deseable si nuestros estudiantes fueran expertos y entendieran el por qué de ese actuar. Con este tipo de enseñanza el alumno no desarrolla la habilidad de demostrar, porque no representa, no realiza construcciones mentales, no comunica, no simboliza, no reflexiona el problema, no realiza inferencias y no discute, por lo tanto el alumno no aprende a realizar una demostración.
Por tal razón para muchos alumnos la demostración ha sido y sigue siendo una actividad que se realiza sin ningún significado, para ello desde los primeros niveles educativos se requiere una cultura de argumentación que perdure durante la escolarización y conocer más acerca de las dificultades que encuentran los estudiantes cuando se enfrentan a demostraciones, y problemas (didácticos, comprensión, etc.) y desafíos a los que se enfrentan los profesores.

Objeto de estudio

Después de analizar los programas de estudios de secundaria y preparatoria nos damos cuenta que existen objetivos en donde el alumno debe de desarrollar la habilidad de demostrar entonces surge la siguiente interrogante ¿Por qué los alumnos de nivel básico y medio superior no pueden realizar una demostración en geometría? Si se supone que a este nivel el alumno debería encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos, realizar argumentaciones de carácter empírico-inductivo y demostraciones deductivas informales, aunque a veces elementales. Sin embargo observamos que alumnos tienen diversas dificultades para desarrollar una demostración en geometría y precisamente este es nuestro problema de investigación detectar cuales son esas dificultades. Para esto consideramos necesario *"explorar en los estudiantes cuáles son las formas de demostrar, qué herramientas utiliza para llevar a cabo este proceso y así saber ubicar las dificultades que presentan"*.

Metodología

Durante el desarrollo de la investigación se realizaron las siguientes actividades:

a) *Revisión Bibliográfica*
    - La revisión bibliográfica relacionada con el tema para analizar diversas posiciones teóricas acerca de la demostración en geometría, así como su utilización en la enseñanza.
    - La precisión del concepto demostración y el papel que juega en el proceso de enseñanza aprendizaje.
    - Revisión del programa de estudios de matemáticas del nivel básico y del nivel medio superior, para analizar los contenidos de la asignatura en ese nivel educativo.

b) *Selección y Validación de problemas Geométricos*

- Se hizo una extracción de 15 problemas geométricos de diferentes fuentes los cuales, fueron sometidos a un proceso de análisis de contenidos a pegados al plan de estudio de la UAG del tercer semestre (perímetros y áreas, teoremas sobre triángulos (demostración y aplicación), relaciones trigonométricas) y al del nivel básico. Para la selección de 10 problemas geométricos.
- De los 10 problemas seleccionados se diseñaron tres pruebas diferentes tomando en cuenta el grado de dificultad dependiendo la población que seria aplicada cada una de ellas.
- La primera y la segunda prueba fueron constituidas por seis problemas geométricos y la tercera prueba por cinco.

c) *Solución de los problemas geométricos*
- La primera prueba fue aplicada a 27 alumnos de cuarto semestre, turno matutino de la preparatoria No.7.
- La segunda prueba (la cual difiere en tres problemas con respecto a la primera prueba) fue aplicada a 8 alumnos de cuarto semestre, turno vespertino de la preparatoria No.7 y a 17 alumnos de cuarto semestre de la licenciatura en matemática.
- La tercera prueba fue resuelta por 13 alumnos de Olimpiada de las Matemáticas (alumnos de nivel básico).
- La utilización de audio en la solución de los problemas por equipo.

d) *Análisis de Resultados*
- La revisión y análisis de las pruebas aplicadas.
- Análisis de las grabaciones con el objeto de capturas las estrategias que utilizaron los alumnos en la demostración de los problemas.

En estas actividades, se utilizaron los métodos: Empíricos para el análisis de las en las grabaciones. Los teóricos: el análisis, la síntesis, la deducción en el estudio de las fuentes, la información escrita como planes y programas de estudio de matemáticas del nivel medio superior y el libro del profesor del nivel básico. También se utilizaron los resultados de las observaciones y de la bibliografía relacionada con el tema de demostración en geometría.

Marco teórico

Cuando los estudiantes realizan sus tareas y trabajan con problemas matemáticos, hacen producciones las cuales son manifestaciones de lo que pueden hacer, a las formas de como se manifiestan esas producciones se les da el nombre de habilidades matemáticas. En la teoría de la actividad (Leontiev, 1981) se expone que la interacción entre el sujeto y el objeto, a través de la cual se produce el reflejo psíquico que media y regula esta interacción, se realiza en forma de actividad. De manera que las habilidades son formas de ejecución de una actividad, cuando ésta se dirige conscientemente hacia el logro de un objetivo.
Como la demostración es una habilidad matemática, entonces para llevar a cabo una demostración es necesario ejecutar una serie de actividades para lograr este objetivo.
El sistema de acciones y operaciones se enmarcan en la teoría de la actividad estructurada en tres etapas: orientación, ejecución y control.
Etapa orientadora. Consiste en tener presente un modelo de la acción a realizar que debe contener las condiciones que aseguren su ejecución exitosa, por lo tanto esta etapa constituye el papel rector de la acción.

Etapa de ejecución. Consiste en la realización de la acción.
Etapa de control. Consiste en el aseguramiento del proceso y del resultado de acuerdo con las condiciones establecidas y encaminadas hacia su aplicación en situaciones nuevas.
Entonces las acciones que se deben realizar tendrán que estar estructuradas de la siguiente forma:

El objetivo de todas las acciones en la resolución de un ejercicio es, en cada caso transformar, una situación inicial (elementos dados, premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis).

El contenido de las acciones en la resolución de un ejercicio está caracterizado por:

a) Objeto de acciones, que pueden estar dados por los elementos de la materia matemática (conceptos, proposiciones y procedimientos algorítmicos); la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y elementos de materia matemáticos; y los procedimientos heurísticos (principios, estrategias, reglas, etc.), así como medios heurísticos auxiliares.
b) Tipos de acciones: identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, describir, aplicar, fundamentar, buscar, planificar, controlar.

Como condiciones para las acciones se encuentran en primer lugar las exigencias que el ejercicio plantea al alumno, expresada por el grado de dificultad del ejercicio.

Proceder didáctico para demostrar. Los tipos de tareas que se presenta en la enseñanza de la matemática con el carácter de problemas son: Los ejercicios de aplicación a la práctica, la matemática (ejercicio de demostración, construcción, etc.); la definición o caracterización de conceptos; la búsqueda de fórmulas y proposiciones o procedimientos. Estos tipos de problemas encuentran aplicación entre otras reglas heurísticas generales:

- Separar lo dado de lo buscado.
- Recordar conocimientos relacionados con lo dado y lo buscado.
- Buscar relaciones entre los elementos dados y lo buscado.

Pero además existen reglas heurísticas especiales para la resolución de problemas o ejercicios de demostración en geometría como los siguientes:

- Para los ejercicios de demostración en la geometría es útil la siguiente regla: "Si tienes que demostrar la igualdad de longitudes o amplitudes, trata de encontrar triángulos congruentes que tengan esos segmentos o ángulos".
- Para los ejercicios geométricos de construcción es muy usada la regla heurística: "Si la figura buscada no te conduce inmediatamente al éxito, trata de obtener, mediante líneas auxiliares, figuras que te sean fáciles de construir.

Tanto las acciones como el proceder didáctico, sirven a profesores y a estudiantes; de tal forma que a ambos les ayuda a como deben presentar y enfrentar una demostración de un teorema o ejercicio en la clase o fuera de ella.

Situaciones Típicas. Son situaciones de aprendizaje donde se presenta el saber matemático y tales situaciones caracterizan el quehacer exclusivo de la matemática.
Estas Situaciones son: *Elaboración de conceptos y definiciones, Tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones, Tratamiento de las construcciones geométricas, Algoritmización y Resolución de problemas.*

En la elaboración de teoremas y demostraciones se distinguen tres procesos parciales caracterizados de la siguiente manera:

Búsqueda del teorema: Proceso en el cual se dirigen las acciones de los alumnos a establecer una suposición, aplicando recursos heurísticos.

Búsqueda de una demostración: Proceso orientado a encontrar la idea de demostración, así como a trazar un plan de solución, de acuerdo con los medios disponibles (figura de análisis, trazos auxiliares, contextualizar según el contenido, recordar propiedades geométricas, definiciones, teoremas, transformarlo a algo ya conocido etc.).

Representación de la demostración: Proceso encaminado a la realización de la idea y el plan de solución, destacando las inferencias y fundamentaciones necesarias en una exposición comprensible.

De manera que estos tres puntos nos hacen reflexionar acerca de la importancia de saber interpretar y comprender un teorema o problema a demostrar, esto es algo que los alumnos por lo general no analizan y mucho menos se trazan un plan de solución.

Resultados

A continuación se registraran las soluciones de los problemas a las que llegaron los alumnos de las cuatros poblaciones que fue aplicada la prueba, estas las clasificamos en soluciones favorables y soluciones no favorables. Las favorables consistirán en la resolución correcta de todo el problema, las no favorables consistirán en que intentaron resolver el problema (aunque su procedimiento sea o no el correcto).
Prueba No. 1 aplicados a los alumnos de la preparatoria No.7en la segunda fase.
No resolvieron correctamente ningún problema pero intentaron resolver 3 de ellos, los cuales son: 2, 4 y 6

Prueba No. 2 aplicados a los alumnos de la facultad de matemáticas en la primera fase.
En los que tienen soluciones favorables, los del problema son: 1, 2 y 4; para un total de 24. Dentro de las soluciones no favorables, los problemas: 1, 2, 3 y 6; para un total de 13.

Prueba No. 3 aplicados a los alumnos de Olimpiada de las Matemáticas en la primera fase.
En los que tienen soluciones favorables, los del problema son: 1, 2 y 3; para un total de 10. Dentro de las soluciones no favorables, los problemas: 1, 2, 3, 4 y 5; para un total de 17.

Prueba No. 3 aplicados a los alumnos de Olimpiada de las Matemáticas en la segunda fase.
En los que tienen soluciones favorables, los del problema son: 2; para un total de 1. Dentro de las soluciones no favorables, los problemas: 2, 4 y 5; para un total de 4.

Como se puede observar en los resultados anteriores se registran las cantidades de problemas resueltos de cada población, tenemos que las producciones que hacen los alumnos son mínimas, principalmente en los alumnos de preparatoria donde su producción es casi nula.

También observamos que en los alumnos de Olimpiada de las matemáticas trabajan mejor de manera individual que por equipo.

Conclusiones

1. Al realizar las exploraciones a los alumnos de las diferentes poblaciones encontramos que las formas o estilos de demostrar que más se utilizaron son:

- El Geométrico.
- El Algebraico.

2. Las estrategias más utilizadas por los estudiantes fueron las siguientes:

- Por parte de la población del nivel medio superior las estrategias que utilizaron fueron la de meditar sobre dibujos, figuras y diagramas y la herramienta más utilizada fue la calculadora.
- En la población de la Olimpiada de las Matemáticas sus estrategias fueron el tanteo, meditar sobre dibujos, figuras y diagramas, repetir la figura, la disección y recurrieron a la calculadora solo cuando se trabajo en equipo.
- En la población de la facultad de matemáticas las estrategias fueron el tanteo, la de meditar sobre dibujos, figuras y diagramas y la herramienta que mas se utilizo fue la calculadora.

3. Se observó que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para poder realizar una demostración. Pero la población del nivel medio superior es quien presentó más dificultades las cuales se reflejaron en sus respuestas que dieron.
Por lo tanto podemos decir que las dificultades que más se presentaron fueron:
Falta de desarrollo del pensamiento visual, no tienen una fijación fuerte con respecto a los conceptos, definiciones básicas, criterios de semejanza y congruencia.

Bibliografía

Alsina, C., Fortuny, J. & Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid, España: Síntesis, S.A.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: Ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathematiques,* Vol. 8, no 3, 267-312.

Ballester, S. et al. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Cortés, C., Barriga, E. *Enseñar la demostración en geometría vs Enseñar la demostración en geometría.* [En red]. Disponible en: http://education.ti.com/downloads/pdf/latinoamerica/Ensenar_la_**demostracion**_en_Geometria.pdf

Crespo, C. (2003). La demostración como contenido matemático. *Resúmenes de la VII Escuela de invierno y VII Seminario nacional de investigación en didáctica de las matemáticas* (pp. 144-145). Chilpancingo, Gro., México.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?*. D. F. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. & Recio, A. (2001). Significados Institucionales de la Demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19(3),* 405-414.

Hernández, J. (2001). *¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria*. Habana, Cuba: Científico-Técnica.

Müller, H. (1980). *Inferencia Lógica y Demostraciones de la Enseñanza de la Matemática.* Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Ocampo, M. (2000). *Caracterización de las estrategias que utilizan los profesores al enseñar a resolver problemas aritméticos. Un estudio de casos*. Tesis de Maestría, U.A.G. México.

U.A.G. (2000). *Programas de estudio, Área: Físico-Matemáticas*. Chilpancingo, Gro., México: Expos editores.

Valiente, S. (1998). *Diccionario de Matemáticas*. México: Addison Wesley Longman.

Xique, J., Espinosa, H., Montes, M. (2000). *Secuencia y organización de contenidos*. D. F. México: Secretaria de Educación Pública.

MODELACIÓN EN EL AULA DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL

Alberto Camacho Ríos, Bertha Ivonne Sánchez Luján
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez
México
camachoalberto@hotmail.com, ivonne_mx_2000@yahoo.com
Campo de investigación: Modelacón matemática y Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior; Metodología: Cualitativa

Resumen

Proponemos una "práctica procedimental" desde la perspectiva de la socioepistemología, para que estudiantes construyan el concepto de diferencial basado en el Modelo Educativo para el Siglo XXI que actualmente se está implantando en el Sistema Tecnológico federal. Se presentan tres tipos de contenidos curriculares de los que sobresalen los procedimentales, cada uno con diferentes procesos de construcción del conocimiento. Tomamos en cuenta estos últimos para el diseño de una situación didáctica, a través de un prototipo que sugiere la noción de diferencial, por medio del cual se establece un modelo de aproximación.
Palabras clave: práctica procedimental, diferencia, diferencial.

Introducción

El Nuevo Modelo Educativo para el Siglo XXI del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (SNEST) se implantó a partir de agosto de 2004, con el fin de lograr la formación del ser humano y su aprendizaje, en un marco de construcción del conocimiento y el cultivo de la inteligencia en todas sus formas. El SNEST privilegia el aprendizaje por encima de las formas de enseñanza tradicional; esto es, la construcción de conocimiento significativo y construcción de ambientes propicios para el aprendizaje orientados hacia el desarrollo de habilidades para plantear y solucionar problemas. De esta forma, el aprender es un proceso personal, activo, por descubrimiento, tratando de relacionar los conocimientos anteriores con los nuevos.
Dentro del "nuevo modelo educativo", se presta especial importancia a los tipos de aprendizaje de contenidos curriculares: declarativo, procedimental y actitudinal-valoral, y en el cómo cada uno de ellos conlleva diferentes procesos de construcción del conocimiento. El docente debe tomarlos en cuenta al preparar y evaluar sus clases.
El conocimiento, entonces, no puede ser tratado de la misma forma al resolver un problema matemático, aprender un nuevo idioma, escribir un ensayo, analizar una gráfica, etc. Se involucran una serie de pasos y existen diferencias entre los procesos de construcción del conocimiento. Se tienen tres tipos de contenido curricular (Díaz Barriga, F. & G. Hernández, 2002):

a) Declarativo; Corresponde al saber: hechos, conceptos y principios.
b) Procedimental; Saber hacer: procedimientos, estrategias, técnicas, destrezas, métodos.
c) Actitudinal–Valoral; Saber ser: actitudes, valores, ética personal y profesional.

En el segundo rubro, el contenido curricular sugiere tipos de prácticas que consisten en traducir situaciones, para el caso de las carreras de ingeniería del SNEST las situaciones en el aula son del todo fenómenos de variación entre cantidades, en las que se hace uso de un pequeño número de conceptos o bien una parte "rudimental" de ellos: variables, nociones, objetos, aislados de una disciplina particular, la matemática. Este tipo de prácticas han sido llamadas en Camacho (2005) "prácticas procedimentales". Por su naturaleza, las prácticas procedimentales pueden considerarse a sí mismas el apoyo imprescindible del diseño de situaciones didácticas, donde la matemática no es pensada a través de objetos duros que los estudiantes deban construir sino a través de sus relaciones procedimentales con la modelación y los diferentes significados del conocimiento que aparecen a lo largo de la práctica. El objetivo de revalorar los conocimientos adquiridos, coloca a los estudiantes en el proceso mismo de la construcción del conocimiento. En general, las prácticas procedimentales se caracterizan por la "toma" de cantidades diferenciales, como pueden ser volúmenes, áreas, etc., para con ello pasar a la solución de problemas. Además, vistos como herramienta de uso en problemas de ingeniería, el contexto donde los conceptos se desenvuelven les provee de mayores significados, incluyendo aquellos que el investigador desee reproducir en la situación. Por la condición de la práctica, la parte procedimental es guiada a través de los pasos elementales que conducen a los ingenieros a la modelación y solución de problemas.

Aproximaciones lineales y diferenciales

"Una curva está muy cerca de su tangente en la vecindad del punto de tangencia, si realizamos una aproximación hacia un punto en la gráfica, este se parece cada vez más a su tangente" (Stewart, 2001). Usamos la recta tangente en un punto como una aproximación a la curva $y=f(x)$ cuando x está cerca de ese punto. La ecuación de la recta tangente es: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Esta última se denomina aproximación lineal a $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ o aproximación de la recta tangente. Si cambiamos $f(x)$ por $L(x)$ tenemos una linealización en a.

Estas ideas, algunas veces se formulan en terminología y notación de diferenciales. Si $y=f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la diferencial dx es una variable independiente que puede tomar cualquier valor real. La diferencial dy se define en términos de dx por la ecuación: $dy = f'(x)dx$ El proceso descrito, se presenta en la mayoría de los libros de cálculo por medio de su significado geométrico, únicamente, donde se muestra que el cambio correspondiente en y es: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. La pendiente de la recta tangente es la derivada $f'(x)$. Por tanto $f'(x)dx = dy$. Entonces dy representa la cantidad que se eleva o que desciende la recta tangente (el cambio en la linealización) mientras que Δy representa la cantidad en que la curva $y=f(x)$ se eleva o disminuye cuando x cambia en una cantidad dx.

Diseño de la Situación Didáctica

Nuestra propuesta es presentar el concepto de diferencial mediante una práctica que incluya un prototipo con el cual se trabaje la función desde el punto de vista:

a) Verbal: Descripciones con palabras.
b) Numérica: Por ejemplo, llenar tablas de valores.
c) Visual-geométrico: Uso de gráficas.
d) Algebraica: Concluir con una fórmula explícita.

Los contenidos en juego, a partir de los rubros ya mencionados, son los siguientes:

Contenidos conceptuales	Contenidos Procedimentales	Contenidos Actitudinal-Valoral
1. Concepto de diferencial, 2. Derivada, 3. Variable. 4. Incremento	1. Bosquejar gráficas. 2. Formular propiedades, 3. Resolver operaciones con binomios, 4. Medir.	1. Aprendizaje colaborativo 2. Discusión de los resultados para emitir opiniones.

5. Recta tangente	5. Hacer uso de formularios. 6. Procesos de aproximación. 7. Construir conocimiento.	3. Actitud y disposición y respeto a sus compañeros. 4. Participación. 5. Incorporar la técnica de organización y resumen

La situación didáctica contempla las siguientes actividades:

1. Trabajar con un prototipo que sugiera la noción de diferencial
2. Identificar geométricamente el prototipo
3. Búsqueda de relaciones entre elementos que integran el prototipo, centrando el objetivo en el diferencial.
4. Establecer la relación de cantidad $f(x)$: fórmula de volumen, área, etc., contenida en el prototipo, según se trate del problema.
5. Incrementar la relación de cantidad $f(x)$ en Δx. Por ejemplo:
6. $f(x+\Delta x) = f(x) + df\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots$ (1)
7. Llamando a esta última "nueva cantidad": nuevo volumen, nueva área, etc.

De aquí se siguen dos acciones:

8. Primero: Establecer un modelo de aproximación que permita determinar la "diferencia" de cantidades, entre la nueva cantidad y la cantidad inicial; es decir:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = df\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots \quad (2)$$

Segundo: Precisar, a través de un caso concreto, que $f(x+\Delta x) - f(x) = df\Delta x$ (3) determina una "aproximación" de la nueva cantidad, la cual será llamada "diferencial", a partir de despreciar los valores de $B(\Delta x)^2 + \ldots$ en adelante.

Actividades del estudiante

1. Solicitar con anticipación los materiales: una toronja por equipo, regla graduada, compás, lápiz, goma de borrar, hojas blancas, cuchillo, tijeras.
2. Antes de iniciar las sesiones de trabajo formar equipos de 3 o 4 alumnos.
3. Activar las preconcepciones de los estudiantes en los siguientes rubros:
   a. Gráfica de funciones algebraicas de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   b. Desarrollos algebraicos de binomios de la forma:
   $$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2} + \ldots$$
   c. Conocimiento de las fórmulas del área del círculo $V(r) = \pi r^2$ y del volumen de una esfera $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Secuencia de trabajo 1

<u>Del lado de los estudiantes</u>

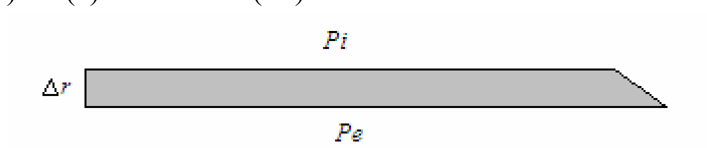
Objetivo: Determinar el área y volumen de la cáscara de la toronja.

1. Cortar la toronja por la mitad
2. Medir con la regla los radios interior y exterior de la toronja. Determinar la diferencia entre radios, llamarle $\Delta r = r_{ext} - r_{int}$
3. Hacer un gráfico del corte hecho a la toronja, a escala 1:1 cm., subrayando el área de la cáscara.

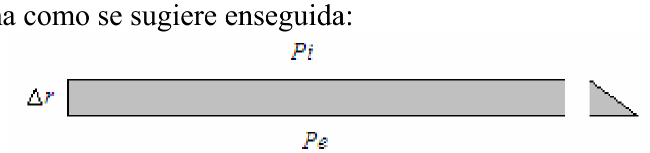
4. Calcular el perímetro del círculo interior y el perímetro del círculo exterior con la expresión $p = 2\pi r$; llamarlos p_i y p_e, respectivamente.
5. Dibujar en línea recta, a escala 1: 1 cm., los perímetros p_i y p_e, y el Δr.
6. Calcular el área de la figura resultante determinando por separado las áreas del rectángulo y el pequeño triángulo que se forman (es decir el área de la cáscara de la toronja).
7. Verificar lo anterior haciendo uso de la expresión $A(r) = \pi r^2$, incrementando el radio como sigue: $A(r + \Delta r) = \pi(r + \Delta r)$ y haciendo la "diferencia" $A(r + \Delta r) - A(r)$ (habrá que sustituir los valores medidos en la toronja de r e Δr, el valor numérico en ambos casos debe ser el mismo).
8. En la expresión algebraica que resulta de $A(r + \Delta r) - A(r)$, despreciar los términos que contengan $(\Delta x)^2$ en adelante. A la expresión final de esta operación, hay que llamarle "diferencial" y denotarle como dA, lo cual significa "diferencial de área".

<u>Del lado del profesor</u>

1. Lee las instrucciones y verifica que los estudiantes les sigan adecuadamente.
2. En el momento de dibujar los perímetros, sugiere una figura semejante a la siguiente en el pizarrón, la cual obedece a la diferencia $A(r + \Delta r) - A(r) = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)$



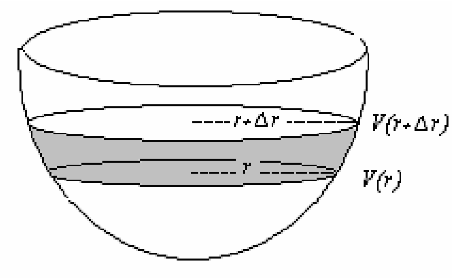
3. El profesor deberá enfatizar en el cálculo del área de la figura haciendo partición de la misma como se sugiere enseguida:



4. El profesor hará ver que el área del rectángulo está dada por la parte de la expresión $A(r + \Delta r) - A(r) = 2\pi r\Delta r$. En tanto que el área del pequeño triángulo resulta ser $\pi(\Delta r)^2$.
5. Esto último permitirá al profesor definir el área del rectángulo como una "aproximación" del área representada por la diferencia de la cual se "desprecia" el área del pequeño triángulo. Esta aproximación será llamada "diferencial".
6. El profesor deberá preguntar a los estudiantes por la discrepancia que hay entre las áreas determinadas de la "diferencia" $A(r + \Delta r) - A(r)$ y el "diferencial" $dA = 2\pi r\Delta r$, precisando en que estas diferencias se encuentran algebraicamente al despreciar en las ecuaciones los valores de $(\Delta x)^2$ en adelante.
7. Hacer un consenso con los equipos y el grupo, de manera que las nociones de diferencia y diferencial de área sean homogéneas en ellos.

Secuencia de trabajo 2

Del lado de los estudiantes



El volumen de una semiesfera (mitad de la esfera) que se le carga con líquido, está dado por la función $V(r)=\frac{2}{3}\pi r^3$. Suponga Δr de manera que $r+\Delta r$ sea el nuevo radio y $V(r+\Delta r)=\frac{2}{3}\pi(r+\Delta r)^3$ el nuevo volumen, un tiempo después de que se cargue con líquido. Una gráfica de esa situación es la que aparece enseguida:

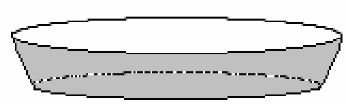
Con esa información realice las siguientes actividades:

1. Desarrolle el binomio asociado a la expresión $V(r+\Delta r)$.
2. ¿Cuál es el volumen asociado a $V(r+\Delta r)-V(r)$? Dibuje este último, aislándolo de la gráfica anterior y registre los datos.
3. De acuerdo al ejemplo de la secuencia anterior, determine la diferencia: $V(r+\Delta r)-V(r)$ y dé un significado de esta. Anote la fórmula y los resultados correspondientes.
4. De acuerdo al ejemplo de la secuencia anterior ¿qué significado se le puede dar al diferencial dV? Anote la fórmula y los resultados correspondientes.
5. A partir de la expresión a la que se llegó, concentre la información que se pide en la siguiente tabla, tomando valores del radio desde 50 cm., hasta 60 cm., con incrementos Δr=0.1:

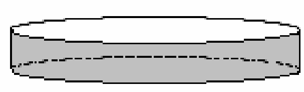
r	Δr	$V(r)$	$V(r+\Delta r)-V(r)$	dV

Del lado del profesor:

1. El profesor ayuda a los equipos para homogenizar las gráficas de la "diferencia" y "diferencial" tomándoles de la figura de la esfera, como se muestra enseguida:



Diferencia: V(r+Δr)-V(r)



Diferencial: dV

2. Verifica que los equipos hayan concluido con la expresión:

$$V(r+\Delta r)=\frac{2}{3}\pi r^3+3\pi r^2\Delta r+3\pi r(\Delta r)^2+3\pi(\Delta r)^3$$

3. Después de que los estudiantes lleguen a la expresión $V(r+\Delta r)-V(r)=3\pi r^2\Delta r+3\pi r(\Delta r)^2+3\pi(\Delta r)^3$ el profesor les induce a considerarle como la "diferencia" de volumen o "volumen acumulado".

4. El profesor sugiere a los estudiantes eliminar los valores $3\pi r(\Delta r)^2+3\pi(\Delta r)^3$ de la expresión para la diferencia, y establecer así la que corresponde al diferencial como dV=$3\pi r^2\Delta r$, considerando que Δr se puede escribir como *dr*.

4. A partir de los resultados de la tabla, el profesor cuestiona a los equipos por los valores numéricos de la diferencia $V(r+\Delta r)-V(r)$, el diferencial *dV*, así como la cantidad $3\pi r(\Delta r)^2+3\pi(\Delta r)^3$ que les hace independientes, asociándoles con las figuras

que resultan. La tabla, en esta parte de la experiencia, servirá para reafirmar las definiciones dadas a las nociones de diferencia y diferencial en la primera secuencia.

Aplicación de la práctica.

Se aplicó a un grupo de estudiantes de la materia de Matemáticas I Cálculo Diferencial del Instituto Tecnológico de Chihuahua II. Estuvieron presentes el docente y un auxiliar para realizar anotaciones y video-grabar la sesión.

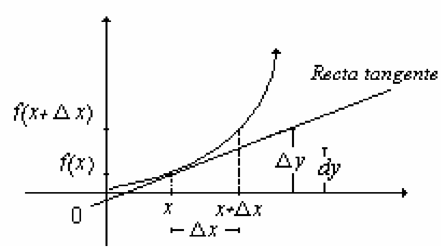
Antes de la aplicación de las secuencias, se verificaron los contenidos previos necesarios para llevarla a cabo: gráfica de funciones algebraicas, desarrollo algebraico de binomios, conocimiento del volumen de una esfera y área del círculo.

Se privilegió el trabajo colaborativo, dividimos el grupo en equipos de tres estudiantes, cada uno de los cuales contaba con una toronja, regla graduada, compás, lápiz, goma de borrar, hojas en blanco, cuchillo, tijeras. Se les proporcionaron las secuencias por escrito y se les pidió que siguieran las instrucciones. El docente estuvo dispuesto en todo momento para dudas y comentarios. Al final de la primera parte se concluyó por equipos y posteriormente con el grupo, sobre las preguntas que se consignan.

Para la segunda parte del trabajo se les pidió dibujar la diferencia de volúmenes y llenar una tabla con los valores obtenidos de sus observaciones, después de lo cual llegaron al un "volumen acumulado".

Conclusiones

1. Un resultado de la experimentación, que no se describe por falta de espacio, es que las nociones de diferencia $V(r+\Delta r)-V(r)=3\pi r^2\Delta r+3\pi r(\Delta r)^2+3\pi(\Delta r)^3$ (en este caso de volumen) y diferencial $dV = 3\pi r^2 dr$, nos permitieron fácilmente establecer y definir la derivada del volumen como $\dfrac{dV}{dr}=3\pi r$. La cual fue reflexionada por los estudiantes como "el cambio que se produce en *V* cuando cambia *r*".
2. La experimentación transitó por tres significados muy cercanos uno del otro como fueron "diferencia", "diferencial" y "derivada"; en los cuales la determinación del diferencial es consecuencia de la diferencia, toda vez que la derivada lo es del diferencial.
3. La utilidad de la *noción de cantidad*: área, volumen, etc., asociada a las definiciones de las nociones en juego, les proveyó de mayores significados que dieron para un mejor entendimiento por parte de los estudiantes.
4. Otras nociones con las que se interactuó, sobretodo al llegar a establecer las definiciones de derivada y diferencial, fueron las de límite, ecuación diferencial, así como el uso de la gráfica que se sugiere.



Bibliografía

Camacho, A. (2005). *Sistemas Sintéticos: Lo Inteligible en los Manuales para la Enseñanza*. *Cinta de Moebio* No 22. Facultad de Ciencias Sociales. Universidad de Chile, http://moebio.uchile.cl/22frames02.htm

Camacho (2005). Socioepistemología y prácticas sociales. Artículo aceptado para su publicación en la revista *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*. Santillana XXI Editores.

Cantoral, R. & R. Farfán. (2003). "*Matematics Education: A Vision of its Evolution. Educational Studies in Mathematics"*. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Díaz Barriga, F. y G. Hernández, (2002). *El Aprendizaje de Diversos Contenidos Curriculares.* En: Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una Interpretación Constuctivista. Mc Graw-Hill. México.

Stewart, J., (2001). *"Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas"*. Thompson Learning. México, 4ª edición.

CARACTERÍSTICAS DE LAS GRÁFICAS Y SU RELACIÓN CON LA MODELACIÓN DE SITUACIONES DE MOVIMIENTO

Claudia Flores Estrada
CECyT 5, CICATA-IPN, México
cfloreses@ipn.mx, montflores@yahoo.com
Campo de investigación: Modelación matemática; Nivel educativo: Medio

Resumen
Este trabajo en particular reporta los resultados preliminares de la investigación con el propósito de conocer los aprendizajes que logren los estudiantes del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional al trabajar con un problema de una situación real de movimiento empleando el uso de lápiz y papel y tecnología como son los dispositivos transductores y la calculadora graficadora, contrastando su conocimiento al realizar las gráficas y su interpretación que pudiera servir en la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

El objetivo en este trabajo es observar las dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con gráficas en la interpretación o construcción tomando como marco el trabajo desarrollado por Leinhard et al (1990). A partir del conocimiento del estudiante, explicaciones y experiencias de aprendizaje, que el profesor puede usar como guía para aprovechar los conocimientos previos y construir en el estudiante el nuevo conocimiento.

Actualmente el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas pone énfasis en su uso como una herramienta para la comprensión. Sin embargo, es necesario generar información confiable que de cuenta de la naturaleza de los aprendizajes que los alumnos pueden lograr con la tecnología. En particular, el uso de los sensores y las calculadoras graficadoras favorece que el alumno a través de su propio movimiento construya una variedad de significados asociados a una serie de funciones (de posición y velocidad). Mediante el uso de calculadoras el estudiante puede modificar la escala, explorar las coordenadas de puntos, hacer conjeturas y predicciones, analizar el comportamiento de algunas funciones tales como son la distancia, y la velocidad representándose en una misma gráfica.
Hiebert, J.; Carpenter (1992) nos menciona: Las conexiones entre las representaciones externas de la información matemática pueden ser construidas por el aprendiz entre diferentes formas de representación de la misma idea matemática o entre ideas relacionadas dentro de la misma forma de representación.
Araceli Torres (2004) menciona que la investigación en Matemática Educativa ha identificado tres usos de las gráficas: 1. La construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, es decir, localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica. 2. La construcción de gráficas por prototipos, como por ejemplo en la que a través de una situación didáctica la cual consiste en ver lo que sucede cuando la gráfica de una parábola se le suma una constante, una recta que pase por el origen y tenga una pendiente positiva o negativa, una recta que no pase por el origen y tenga una pendiente positiva o negativa, y también cuando el coeficiente del término cuadrático toma

un valor mayor o menor a la unidad. 3. La representación gráfica por medio de la simulación de un fenómeno físico.
.
Actualmente el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas pone en énfasis en su uso como una herramienta para su compresión. Desde su aparición en la década de los setenta las calculadoras minimizan los tiempos, esfuerzos de operación de gran utilidad en la industria, comercio y en la administración. Los primeros diseños tecnológicos permitían operaciones aritméticas básicas y con un límite de dígitos, proceso que se extendió hacia las escuelas permitiendo cambios de diseño con características tecnológicas adecuadas al aula con las exigencias del profesor y el estudiante. Es importante generar información confiable que de cuenta de la naturaleza de los aprendizajes que los alumnos pueden lograr con el uso de la tecnología.

Planteamiento del problema

En particular, el uso de los sensores y las calculadoras graficadoras favorece que el alumno a través de su propio movimiento construya una variedad de significados asociados a una serie de funciones (de posición). Mediante el uso de calculadoras el estudiante puede modificar la escala, explorar las coordenadas de puntos, hacer conjeturas y predicciones.
Mediante la actividad se pretende aprovechar lo que el estudiante sabe y contrastar con modelación.
El diseño de la actividad esta dividida en dos, en la primera parte el problema se realiza a lápiz y papel y en la segunda con el uso de tecnología que es el sensor de movimiento y la calculadora graficadora en el que contrastan lo realizado en papel con el uso de tecnología. La realización de la actividad tanto a lápiz y papel como el uso de la tecnología son modalidades que dan un aprendizaje significativo al estudiante.

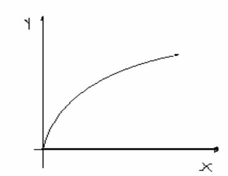
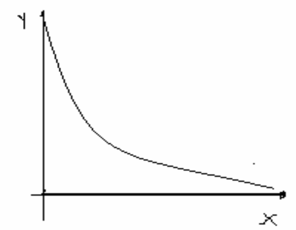
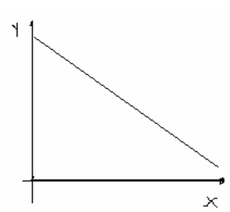
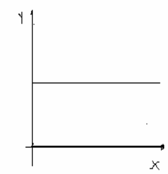
El presente trabajo se realizó a estudiantes que cursan el segundo semestre del nivel medio superior Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos "Benito Juárez García" del Instituto Politécnico Nacional.

Situación de aprendizaje
La situación de aprendizaje consiste en hacer la gráfica del movimiento de una persona que recorre 400 metros en menos de 1 minuto.
Problema
En la siguiente tabla se encuentra los progresos de sus grandes alcances de la velocista sonorense Ana Gabriela Guevara con sus mejores tiempos en los 400 metros planos hasta el año 2003.

Año	Tiempo (segundos)
1996	54:75
1997	52:46
1998	50:65
2000	49:70

2002	49:16
2003	48:89

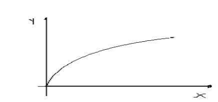
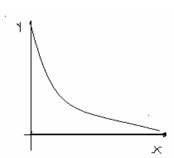
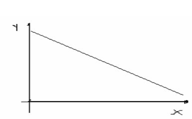
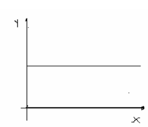
a) Al leer los datos ¿Qué tipo de gráfica esperas?

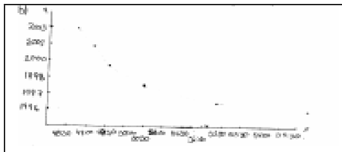
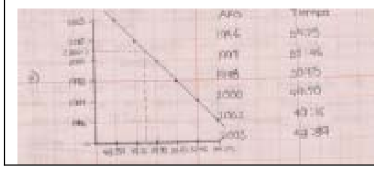
b) Realizar su representación gráfica.
c) ¿Coincide con la conjetura de la pregunta a?
d) ¿Cómo se comporta el tiempo registrado por Ana de 1996 al 2003?
e) Analizando la tabla ¿Qué tiempo obtuvo en año 2001?
f) En el año 2003 obtuvo el tiempo 48:89. Si se considera que el recorrido de los 400 metros planos Ana aumenta la velocidad a partir de los 200 metros. Traza la gráfica de distancia *versus* tiempo.

METODOLOGÍA
La modalidad del trabajo se realizó en equipos de 4 a 5 estudiantes: El lugar de realización es en el salón de clases. Dividida en dos partes. En la primera parte se realiza a lápiz y papel y en la segunda parte se realiza con Calculadora con poder de graficación y sensor de movimiento CBR.
PRIMERA PARTE
Los estudiantes leen y resuelven el problema a lápiz y papel; los alumnos construyen las gráficas sin el uso de tecnología y exponen.

¿Cómo representan el problema los alumnos?
a) Al leer los datos ¿Qué tipo de gráfica esperas?

a  b  c  d 	**1.** b **2.** Gráfica c

b) Con los datos de la tabla realiza su representación gráfica.

 	Realizaron un trazo curvo para graficar. Aumenta su velocidad a medida que pasa el tiempo. Por la escala que utilizaron es una recta. No consideran las centésimas de segundo.

c) ¿Coincide con la conjetura de la pregunta a?

❖ No coincidió pero ya comprobamos el resultado. ❖ No coincide, pues después de hacer los razonamientos correspondientes nuestra gráfica cambió y ahora coincide con la gráfica B ❖ Si, fue la gráfica que escogí (b) No (su gráfica es recta)	El equipo con errores en la escala presentan una gráfica recta y consideran que la grafica b es la correcta.

d) ¿Cómo se comporta el tiempo registrado por Ana de 1996 al 2003?

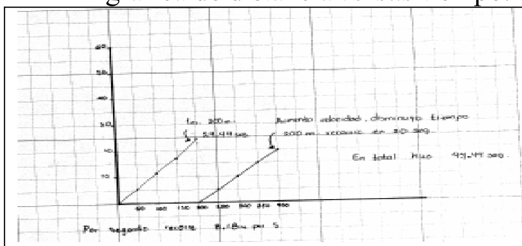
❖ Decreciente ❖ El tiempo va disminuyendo conforme a los años.	El tiempo de velocidad disminuye y sacan la diferencia del tiempo cada dos años.
❖ El tiempo va en descenso. En cuestión de carreras su tiempo va mejorando en cada año. ❖ Va disminuyendo poco a poco, eso indica que aumenta la velocidad. ❖ Conforme pasaron los años el tiempo en velocidad fue disminuyendo. ❖ Fue reduciendo el tiempo de recorrido con un total de 3:51 1996 – 54.75 > 2.29 1997 – 52.46 1998 – 50.65 > 0.95 2000 – 49.70 2002 – 49.16 > 0.27 2003 – 48.89	Interpolan en la gráfica. *Para sacar el tiempo más aproximado utilizamos la gráfica, en donde trazamos una recta que representaría el año 2001, después sacamos la diferencia entre el 49.16 y el 49.70 (que son los tiempos que se hicieron en los años anterior y posterior al 2001) El resultado fue 0.54, ese resultado lo dividimos entre 10, por que son los intervalos que lo separan y el resultado fue de 0.054, posteriormente lo multiplicamos por 4.5 que es la diferencia entre el intervalo anterior y la recta que representa al 2001, obtuvimos el valor más aproximado.*

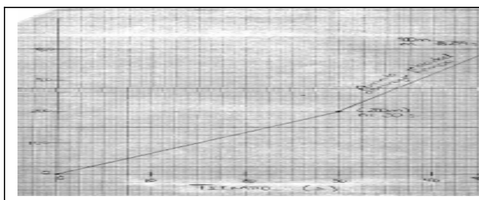
e) Analizando la tabla ¿Qué tiempo obtuvo en año 2001?

❖ 49:43	Interpolan.

❖ El tiempo que obtuvo en el 2001 fue 49:56. ❖ 2000 – 49:79 2001 – X El tiempo es de 49:42	Con los datos en la tabla realizan una regla de tres para hallar el tiempo obtenido en el año 2001.

f) En el año 2003 obtuvo el tiempo 48:89. Si se considera que el recorrido de los 400 metros planos Ana aumenta la velocidad a partir de los 200 metros. Traza la gráfica de distancia *versus* tiempo.

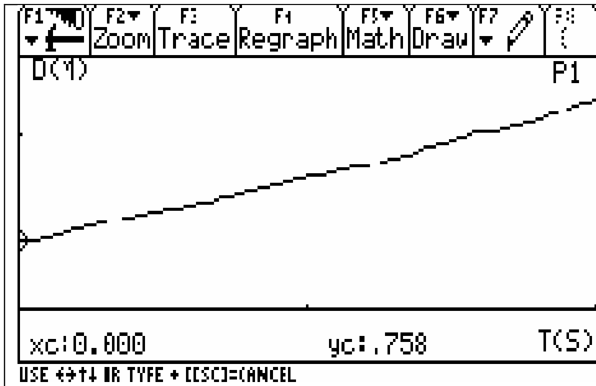
 400 m en movimiento del recorrido 200 m en movimiento constante 200 m en movimiento acelerado	No hay construcción del conocimiento del recorrido en el tipo 48:89

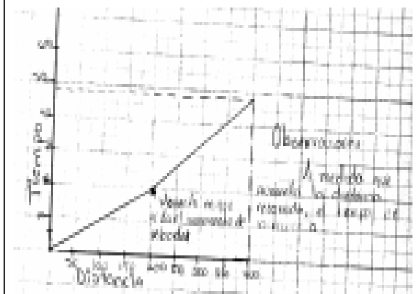
	En los primeros 200 m es constante su recorrido, los siguientes doscientos metros acelera de forma constante.
	El mismo equipo para la pregunta realiza dos gráficas. No hay escala. No existen evidencias.
	No existen datos de tiempo. No existen evidencias.

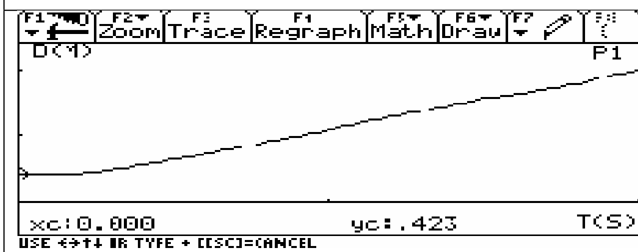
SEGUNDA PARTE

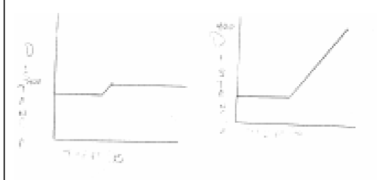
Los estudiantes diseñan la forma en que se van a mover ante el sensor, considerando el tiempo y la distancia para lograr la gráfica de su propuesta.

Se realiza nuevamente una exposición comparando su propuesta a lápiz y papel y la realizada con tecnología (Sensor y la Calculadora Graficadora).









Discusión

- Los equipos realizaron los cambios de posición. Realizaron trazos rectos y curvos.
- Se les dificultó que indica la pendiente.
- En la representación verbal y gráfica los estudiantes establecen lo tiempos y posiciones que nos plantea el problema, emplearon al tiempo en el eje horizontal y la distancia en el eje vertical.

Conclusiones

- o El aprendizaje del estudiante puede ser por intuición.
- o El conocimiento del estudiante es por su vida cotidiana y lo adquirido en la escuela.
- o El estudiante al construir e interpretar las gráficas se relaciona por intuición y por conceptos erróneos adquiridos en su entorno.

Bibliografía

AIM-NMS-IPN (200) Álgebra para el Nivel Medio Superior. Guía para el profesor. IPN

AIM-NMS-IPN (200) Álgebra para el Nivel Medio Superior. Guía para el estudiante. IPN

Arrieta, J. (2003) La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN.

Hiebert; Carpenter (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grouws, D. (Ed.), (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pág. 65-97). NY: Macmillan.

Lesh R. *et al* (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En Javier, C. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Laurence Erlbaum Associates, Publisher.

Leinhardt, G., Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990) Traducción hecha por el M. En C. Hernández, R. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV.

Phillips, E., Butts, T. y Shaughnessy, M. (1999). Álgebra con Aplicaciones. Editorial Oxford.

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento CICATA-IPN.

DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES EN LOS MODOS GEOMÉTRICO Y ANALÍTICO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES [1]

Ma. Carina Ramírez Palacios,* Asuman Oktaç,* Carlos García* *
*Cinvestav-IPN, México, **Universidad Autónoma de Guerrero, México
mramirez@cinvestav.mx, oktac@cinvestav.mx, carlos_agp@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico; Nivel educativo: Superior

Resumen

En este trabajo presentamos algunas dificultades que tienen los estudiantes en la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Para ello se diseñó una entrevista basándonos en el acercamiento teórico de los modos de pensamiento geométrico y analítico en álgebra lineal. Reportamos acerca del desempeño de los estudiantes ante situaciones presentadas en un modo geométrico.

1. Introducción

Como parte de un proyecto de investigación que tiene como propósito identificar y analizar las dificultades que tienen los estudiantes en los conceptos de álgebra lineal, en este trabajo nos enfocamos en los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. En particular elegimos dos preguntas que fueron aplicadas, como parte de una entrevista, a 5 estudiantes de nivel superior, como representativas para mostrar los tipos de pensamiento que se manifiestan, reportando los resultados obtenidos.

2. Los sistemas de ecuaciones lineales en la investigación

Este tema ha sido investigado recientemente en sus diversos aspectos por nuestro grupo de trabajo, así como por otros investigadores. En esta sección reportamos los trabajos que se relacionan con los sistemas lineales con dos variables, centrando nuestra atención en los resultados sobre las concepciones detectadas en los estudiantes entorno a este tópico.

Eslava y Villegas (1998) observan las relaciones entre pensamiento sintético y analítico, así como las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de uno a otro, al tratar de interpretar la posición que guardan entre sí tres rectas en el plano. A través de una entrevista a cuatro estudiantes del nivel medio superior, reportan sobre ciertas dificultades que presentan los estudiantes para imaginarse las siete diferentes categorías que se presentan con tres rectas en el plano. Asimismo reportan sobre la dificultad que tienen los estudiantes acerca del concepto ‘solución’ en su interpretación geométrica. En particular, llama la atención que los estudiantes tienden a relacionar la solución con los puntos de intersección de las rectas, tomándolas por pares.

Panizza et al. (1999) pretenden identificar las condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de la escuela media. Usando como instrumento de análisis una entrevista que llevaron a cabo con 6 alumnos, observaron que algunos estudiantes, al llegar a expresiones como $0 = 0$ o $y = y$, declaran que la ecuación no tiene solución. También identifican que los alumnos no reconocen la ecuación lineal con dos variables como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Asimismo, en la

[1] Este trabajo forma parte del proyecto CONACYT 2002-C01-41726.

ecuación de una recta, los alumnos no pueden establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.
En Mora (2001), se pretende observar la conexión en los estudiantes en los modos de pensamiento analítico y sintético-geométrico a través de una secuencia de problemas, reportando los resultados de una entrevista que fue aplicado a siete estudiantes de nivel licenciatura. El investigador observó que un sistema de ecuaciones que da lugar a una igualdad de tipo $0=0$ causa dificultad para los estudiantes. También reporta que para los estudiantes, la representación geométrica de tres rectas donde cada par de rectas se intersecan en un punto formando un triángulo, significa que el sistema tiene "tres soluciones". El investigador concluye que en general, los estudiantes no logran asociar los diferentes modos de pensamiento.

Segura (2004) realiza una investigación sobre la influencia de una secuencia didáctica en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. La secuencia se diseñó tomando en cuenta dificultades anteriormente observadas en los estudiantes; en particular se incluyeron situaciones donde el estudiante tendría que proporcionar sistemas de ecuaciones lineales a partir de sus soluciones. Fue presentada a 29 alumnas de 15 años (tercer año de enseñanza media en el sistema escolar argentino). La investigadora afirma que las alumnas pudieron realizar un pasaje del registro gráfico al algebraico y mostraron un aprendizaje satisfactorio.

3. Modos de pensamiento en álgebra lineal

Para abordar nuestra problemática nos basamos en el acercamiento teórico de los modos de pensamiento en álgebra lineal, desarrollado por Sierpinska (2000): sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, los cuáles son tres modos de razonar en el álgebra lineal que pueden verse como el resultado de una superación de dos obstáculos o dos posiciones dogmáticas opuestas: una que rechaza los números dentro de la geometría y la otra que rechaza que la "intuición geométrica" pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

La diferencia principal entre los modos sintético y analítico es que en el modo sintético los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, donde únicamente son construidos por definición de las propiedades de sus elementos, mientras que en el modo analítico ellos se dan indirectamente. En el pensamiento analítico-aritmético un objeto es definido por una fórmula que permite calcularlo; en el pensamiento analítico-estructural un objeto es definido por un grupo de determinadas propiedades (Sierpinska, 2000).

Citamos el siguiente ejemplo como ilustrativo de las diferencias entre los distintos modos de pensamiento:

> Si uno está pensando en las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables por visualización de las posibles posiciones de tres planos en el espacio, uno está en el modo sintético-geométrico. Si uno piensa en el mismo problema en términos de los posibles resultados de una reducción por filas de una matriz de 3×4, uno está en el modo analítico-aritmético. Pensar en términos de matrices singulares y no singulares, podría ser un síntoma del modo analítico-estructural. (Sierpinska 2000).

Los objetos matemáticos adquieren diferentes características según el modo de pensamiento que se emplea. El modo sintético-geométrico se relaciona más con la intuición por su inmediatez. El uso de los símbolos en el modo analítico implica una interpretación de significados de manera indirecta.

4. Aspectos metodológicos

Considerando el marco teórico mencionado en la sección anterior, aplicamos un cuestionario diagnóstico a un grupo de nuevos ingresados de una universidad, en el área de ingeniería. El análisis del cuestionario nos permitió observar las dificultades que tienen los estudiantes con el concepto de solución y el vínculo entre los distintos modos.

Basándonos en estos resultados seleccionamos a cinco estudiantes y les aplicamos una entrevista para conocer con mayor profundidad las causas de sus dificultades.
En el momento de ser entrevistados, los estudiantes habían terminado un curso de matemáticas una parte del cual fue dedicado al Álgebra Lineal (aproximadamente 6 semanas), en donde les impartieron los temas de números complejos, vectores, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes.

La entrevista se aplicó en forma individual. Cada una de las preguntas de la entrevista se planteó una a una a los estudiantes, conforme las iban contestando. Los estudiantes disponían de hojas y plumones, para el caso de que los necesitaran. Se contó con una cámara de video fija con la que se grabaron todas las entrevistas así como con una grabadora de audio. Cuando los estudiantes tenían dificultades para expresar sus ideas, el entrevistador iniciaba una interacción verbal con ellos mediante preguntas, teniendo cuidado de no sugerirles la respuesta.

5. Las preguntas

Las dos preguntas que a continuación presentamos y analizamos forman parte de la entrevista que se aplicó al grupo de estudiantes antes mencionado. Consideramos que estas preguntas son ilustrativas para mostrar la naturaleza del pensamiento sintético-geométrico tal como se emplea por los estudiantes.

Pregunta 1.

Grafica las posibles posiciones que tienen dos rectas en el plano.

Pregunta 2.

a) Representa dos rectas que tengan un solo punto en común en el plano.
b) Representa un par de rectas que no tengan puntos en común.
c) Representa un par de rectas que tengan más de un punto en común.

Para la segunda pregunta, se les proporcionó a los estudiantes, ejes cartesianos para cada inciso.

Las dos preguntas están hechas en un modo geométrico, refiriéndonos a las rectas como objetos geométricos sin hacer mención de sus propiedades analíticas. Asimismo en la segunda pregunta no se hace referencia a ecuaciones o sistemas de ecuaciones, sino que se mencionan rectas y puntos.

La primera pregunta pide al estudiante imaginar las tres diferentes posiciones de dos rectas en el plano (rectas que se cortan en un punto, rectas paralelas y rectas encimadas). Parte de nuestro propósito fue identificar si hay algún caso que se omite regularmente por los estudiantes. Nosotros consideramos antes de la entrevista que el caso de dos rectas que coinciden, probablemente se omitiría con más frecuencia. También nos interesaba ver cómo los estudiantes interpretarían "las posibles posiciones". Consideramos que las categorías que nosotros teníamos en mente pueden ser diferentes a las que manejan los estudiantes y moviendo en el plano dos rectas que corresponden una categoría particular, ellos pueden crear otras posiciones que visualmente se ven diferentes. Es decir, ellos pueden no dar importancia al criterio de conjunto solución, sino concentrar su atención en la percepción visual de los objetos geométricos.

Los tres incisos de la segunda pregunta corresponden a las tres posibles posiciones de dos rectas en el plano. En este caso nosotros verbalmente describimos la posición y pedimos al estudiante graficarla. De esta manera queremos observar en caso de haber omitido algún caso en la primera pregunta, si el estudiante lo recordará, o de plano lo rechaza como una posibilidad factible. Para el inciso (c) elegimos usar la expresión "más de un punto" en lugar de "infinidad de puntos", para ver cómo se interpreta esta expresión.

6. Análisis de la entrevista

En la primera pregunta, todos los estudiantes identificaron el caso de rectas paralelas, mientras que solo uno de los 5 estudiantes identificó el caso de dos rectas equivalentes. En la representación gráfica de dos rectas intersecadas en un punto, 4 estudiantes muestran que para ellos cuando las rectas son perpendiculares, esto se considera como una posición diferente a los demás casos donde el ángulo de intersección puede ser cualquier valor distinto de 90°. Esto puede deberse a la importancia que se le acuerda al caso perpendicular en cualquier representación visual en la enseñanza. También muestra que las decisiones de los estudiantes se basan en la percepción visual (una característica del pensamiento geométrico) y no 100% en las propiedades de los objetos matemáticos.

En el caso de la segunda pregunta, ningún estudiante tuvo dificultad con los primeros dos incisos. Cuatro estudiantes no lograron representar las rectas que tengan más de un punto en común. En el siguiente extracto, el estudiante cuyo sobrenombre es Hugo (representado por su inicial) explica la razón por la cual él piensa que dos rectas no pueden tener más de un punto en común:

> *H: Porque como son líneas, como son rectas, solamente coinciden en un solo punto, en dado que sí, sería una línea curva, ya coincidirían en varios puntos, pero yo pienso que no coinciden en ningún punto, solamente en un solo punto…*
> *H: Porque, este, […] pues, porque son dos líneas, sin son rectas, vaya, al momento de intersectarse, no, solamente en un punto coinciden, porque no hay, en dado caso de que fueran líneas curvas vaya, no sé, una parábola por ejemplo y una recta en dado caso si podría coincidir en dos puntos, como cada recta se va al infinito.*
> *[…]*

> *H: Este, y no tiene ninguna curvatura, pues yo pienso que si juntamos dos de esas, solamente en un punto coinciden, no creo que coinciden en más, de hecho no coinciden.*

Hugo piensa que dos rectas a lo más pueden tener un punto en común. Piensa que solo en el caso de las curvas puede haber más de un punto en común:

> *H: No, las líneas rectas son las que tiene solamente un punto y las curvas son las que pueden coincidir en más de un punto.*

Lizbeth razona de manera similar:

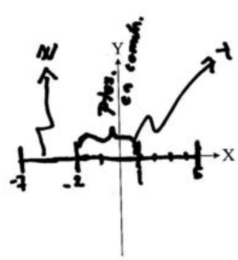
> *L: (Escribe: No hay rectas que tengan más de un punto en común).*

Cuando le preguntamos, "¿por qué?", dice:

> *L: Porque no se pueden cortar dos veces, porque no tienen, no se pueden regresar, no pueden hacer curvas.*

Estos dos estudiantes interpretan la expresión "más de uno" como "un número finito mayor que 1" y excluyen la posibilidad de "infinito". Esto puede deberse al hecho que geométricamente se ve solo una recta y el caso de dos rectas equivalentes puede verse como redundancia, aunque analíticamente la misma recta puede tener dos representaciones distintas (ecuaciones equivalentes). Más adelante durante la entrevista, cuando se les da una gráfica explicándoles que se trata de la gráfica de dos rectas, y se les pide proporcionar un sistema de ecuaciones lineales correspondiente a esa gráfica, estos dos estudiantes afirman que no sería posible asociarle un sistema y consideran que sólo pueden dar una ecuación. Hugo se justifica diciendo que "aquí hay solo un elemento", y Lizbeth afirma que "no habría intersección".

Otra estudiante, Martha, tratando de encontrar una respuesta a la pregunta, dibuja segmentos colineales, pero con diferentes intervalos, para que coincidan en una región en común:

> *M: Pues tienen más puntos en común que sería, éste viene de acá (*se refiere al segmento que va de menos dos a cinco*) sería una, no sé, acá tendría otra, que vendría de acá de menos siete a uno, entonces sus puntos en común serían estos que están aquí, (marca en la gráfica anterior el segmento de menos dos a uno:*
>
> 
>
>
>).
>
> *Esos serían sus puntos en común, que lo van a compartir.*

Martha considera las rectas como segmentos, lo que coincide con cualquier representación finita (y las representaciones geométricas necesariamente son finitas). Sin hacer un vínculo con el modo analítico, los objetos geométricos para ella son lo que exactamente se ve en la figura, sin más interpretaciones.

El cuarto estudiante insiste en que dos rectas "sólo pueden tener un punto en común", pero no puede explicar su razonamiento.

7. Comentarios finales

En esta investigación observamos que la mayoría de los estudiantes presentan dificultad en el modo de pensamiento sintético-geométrico y además no muestran un vínculo adecuado entre los modos sintético y analítico.

Nosotros creemos que en la enseñanza se debe de tomar en cuenta las características de los objetos matemáticos en cada modo de pensamiento para ayudar a los estudiantes hacer las interpretaciones necesarias y poder transitar entre los distintos modos. Asimismo consideramos que valdría la pena discutir con los estudiantes el caso de los sistemas de ecuaciones lineales que representan infinitas soluciones poniendo énfasis en ambos modos de pensamiento.

Bibliografía

Eslava, M. y Villegas, M. (1998) Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano. Tesina de diplomado, Universidad Autónoma de Estado de Hidalgo.

Mora, B. (2001) Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Maestría, Cinvestav, México.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999) La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*. **17**(3), 453-461.

Segura, S. (2004) Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. **7**(1), 49-78.

Sierpinska, A. (2000) On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, pp. 209-246. Kluwer Academic Publishers.

¿A.B=0 $\Rightarrow$ A=0 v B=0? REFLEXIONES E IMPLICACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA[1]

Cristina Ochoviet, Asuman Oktaç
Instituto de Profesores Artigas, CINVESTAV- IPN
Montevideo – Uruguay, México D.F. - México
princesa@adinet.com.uy, oktac@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento algebraico ; Nivel educativo: Básico, Medio y Superior

Resumen

Reportamos una investigación sobre Pensamiento Algebraico realizada en Uruguay, con estudiantes de 3er. año del Ciclo Básico de enseñanza secundaria (14-15 años), 6º año de bachillerato de enseñanza secundaria (16-17 años) y 3er. año de profesorado de Matemática (mayores de 21 años con edades variadas), en torno a la propiedad cuyo enunciado dice: "Si a y b son números reales y a.b=0, entonces a=0 o b=0" y que en Uruguay es frecuentemente conocida como propiedad Hankeliana.

Estudios exploratorios y determinación de objetivos

Los estudios exploratorios revelaron que los estudiantes de bachillerato y también los de nivel terciario muestran cierta tendencia a generalizar la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde esta propiedad no es siempre válida, aun cuando hubieran recibido instrucción específica al respecto.
También observamos que cuando los estudiantes de secundaria deben resolver ecuaciones en R como por ejemplo *(2x-6)(5x+10)=0*, no siempre aplican la propiedad, aun cuando sea la única herramienta disponible y hayan recibido instrucción sobre su aplicación a la resolución de ecuaciones donde aparecen expresiones polinómicas factorizadas e igualadas a cero.
Asimismo detectamos un error que los estudiantes cometen al momento de verificar las raíces de una ecuación de esta forma. Ejemplificaremos tomando la ecuación presentada más arriba. Si los estudiantes determinaron las raíces 3 y -2, es frecuente que verifiquen sustituyendo la x del primer factor por 3 y la x del segundo factor por -2. El error consiste entonces en la asignación de dos valores distintos a la incógnita en forma simultánea.

No tenemos conocimiento de trabajos previos que atiendan la problemática que nos proponemos estudiar, y dada su importancia, debido a su extensivo uso en la enseñanza, consideramos que dar una explicación a las posibles causas de los errores que cometen los estudiantes alrededor de la propiedad, por un lado nos sensibiliza hacia posibles caminos a tomar como docentes, y por otro lado contribuye a la disciplina dentro de la línea de investigación del Pensamiento Algebraico.

Fijamos entonces los siguientes objetivos para el trabajo de investigación:

- Observar las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones donde aparecen expresiones polinómicas factorizadas e igualadas a cero, poniendo

[1] Este trabajo forma parte del proyecto Conacyt 2002-C01-41726.

atención en los alumnos que conociendo la propiedad y constituyendo esta la única herramienta de resolución de estas ecuaciones[2], no la aplican.

- Examinar el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación donde aparece una expresión polinómica factorizada e igualada a cero y formular posibles explicaciones del mismo.
- Buscar elementos para destacar, en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto y observar cómo evoluciona la ampliación del repertorio de objetos matemáticos que los estudiantes interpretan cuando ven a y b en la expresión $a.b=0$, a lo largo de los años de instrucción.

Consideraciones teóricas

El análisis teórico se organizó en base a tres componentes: la epistemológica, la didáctica y la cognitiva. Esto nos permitió tres dimensiones para la reflexión y el análisis de los fenómenos que observamos, y por tanto, una visión compleja, y si se quiere sistémica, de la problemática estudiada.

La dimensión epistemológica permite conocer los obstáculos que enfrentaron los hombres a lo largo de la historia en la construcción de los significados y conceptos matemáticos; conocerlos en profundidad nos brinda información acerca de los posibles obstáculos y dificultades que pueden enfrentar los estudiantes cuando deben abordar tales conceptos. Es por esto que decidimos dar una mirada histórica a lo que fue la evolución del álgebra en la rama de la resolución de ecuaciones, hasta llegar a las ecuaciones donde aparecen expresiones polinómicas factorizadas e igualadas a cero, para luego situarnos brevemente en la aparición de álgebras abstractas con y sin divisores de cero. Este trabajo tomó la historia como fuente para obtener posibles interpretaciones del trabajo que realizan los alumnos.

En la componente didáctica analizamos el estado actual de la enseñanza en relación a los tópicos en los que nos hemos concentrado para tener un panorama claro de lo que ilustran los libros de texto de los estudiantes en relación al tema.
En Uruguay solamente el 13,5 % de los profesores de matemática que dan clase poseen título habilitante. Por lo tanto, consideramos que los libros de texto constituyen un reflejo de las prácticas de aula ya que son el principal punto de referencia de los profesores que no han completado su formación inicial como docentes o que ni siquiera han pasado por ella. Estos textos entonces, nos permiten de alguna forma, introducirnos en las prácticas de aula y tener una noción de qué se enseña y cómo se enseña. También nos brindan información acerca del discurso docente y los posibles enfoques didácticos de los temas.

La componente epistemológica y la didáctica también aparecen interrelacionadas en la reflexión. El estudio de cómo surgen las ecuaciones a lo largo de la historia, a qué tipo de problemas prácticos responden y qué tipo de herramientas fueron utilizadas para resolverlas, permiten realizar una comparación con las prácticas de aula. Es decir, cómo

[2] Cuando decimos que la aplicación de la propiedad es la única herramienta con la que cuentan los estudiantes es porque todavía no han estudiado la conocida fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado.

se presentan actualmente las ecuaciones, a qué tipo de problemas dan solución y qué tipo de herramientas se usan para resolverlas. Hemos observado que las prácticas de aula no reflejan necesariamente las condiciones históricas. En el caso de las ecuaciones en las que nos hemos concentrado[3], podríamos decir que la principal actividad de aula que aparece ligada a ellas es la resolución de las mismas a través de la aplicación de la propiedad Hankeliana, es decir, se da una ecuación donde aparece una expresión polinómica factorizada e igualada a cero y se pide hallar sus raíces. Pero históricamente, parecería que la factorización es utilizada como una herramienta para poder determinar una ecuación con raíces dadas, cuestión que hoy en día no aparece prácticamente en las actividades que se desarrollan en el aula. Quizás realizar los dos procesos: construir una ecuación conociendo sus raíces usando la factorización y hallar las raíces de una ecuación que está dada en forma factorizada, deban ser tratadas en el aula para que los estudiantes logren una mejor comprensión de lo que significa resolver una ecuación y cuál es el papel de la incógnita en ellas.

En la componente cognitiva se incluyen diversos aspectos teóricos que fueron elegidos para dar interpretación al pensamiento de los estudiantes. Abordamos diversos marcos teóricos, pero nos centramos en la noción de *Imagen conceptual* presentada en (Vinner, 1991), en el concepto de *compartimentalización* (Vinner, 1990), en la *Teoría de la Intuición* (Fischbein, 1987) en general y en la noción de *Autonomía de los modelos mentales* presentada en (Fischbein, Tirosh, Stavy & Oster, 1990) en particular, para formular posibles explicaciones a los fenómenos que estamos estudiando. Como marco teórico específico del pensamiento algebraico usamos el *Modelo 3 UV* presentado por Trigueros y Ursini (2003).
La inclusión de estas consideraciones teóricas se fundamenta en la necesidad de poseer una perspectiva de análisis amplia para interpretar y explicar la problemática que se estudia, la cual no ha sido previamente abordada.

Principales resultados

Un porcentaje pequeño de los estudiantes de 14-15 años logra resolver la ecuación propuesta, igualando cada uno de los factores a cero para hallar las raíces. Estos estudiantes que logran resolver la ecuación en forma exitosa pueden formular una explicación para lo que están haciendo, dentro de algún campo semántico, ya sea matemáticamente correcta o no. Sin embargo la mayoría de los estudiantes de esta edad aplican la propiedad distributiva para luego tratar de aplicar las técnicas conocidas por ellos para resolver ecuaciones de primer grado. La mayoría no obtiene éxito en su tarea debido a la complejidad de la ecuación que obtienen pues no poseen recursos como la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado para poder resolverla[4].
Observamos que estos estudiantes optan por emplear un proceso algorítmico que involucre cierta operatoria para resolver una ecuación polinómica de este tipo. En algunos casos esto podría deberse a que la matemática es enseñada como un conjunto de reglas o procedimientos a emplear, según sea el caso. Cuando el estudiante se enfrenta a una situación que no le es familiar, seguramente tratará de aplicar cierta algoritmia según las herramientas que disponga. En las entrevistas algunos estudiantes manifestaron que hubieran podido dar solución al problema mentalmente pero parecería que esto no los satisface ya que no han ensayado ningún procedimiento algorítmico para

[3] Recordamos que son de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$ en el caso en que tienen dos raíces reales y distintas.
[4] Los estudiantes de este nivel no han estudiado todavía la fórmula.

resolverlo. Observamos entonces, cierta preferencia por trabajar con la expresión polinómica desarrollada.

Frente a la primera ecuación la mayoría de los alumnos de bachillerato aplican la fórmula cuadrática aunque a lo largo de su tarea algunos cambian de estrategia, fundamentalmente en las ecuaciones de la forma $x(ax+b)=0$, seguramente por la presencia del factor x, aunque igualmente se aprecia una tendencia a la algoritmización dado que algunos alumnos desarrollan la expresión para luego factorizarla y dejarla tal como se les presentó para luego iniciar el proceso de resolución. Los estudiantes de bachillerato no valoran la aplicación de la propiedad como un procedimiento más sencillo, de forma que aunque sabiendo de su posible aplicación, optan por la aplicación de la fórmula resolvente. Algunos alumnos de bachillerato que aplican la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación, lo hacen porque sus profesores le han enseñado que "*así se hace*" o "*porque me lo enseñaron así*" (como ellos mismos lo explicitaron) y no siempre pueden elaborar una explicación para lo que están haciendo.

Los estudiantes de nivel terciario son los que han generado una autonomía suficiente como para decidir y elegir qué herramienta les conviene usar según la situación a la que se enfrenten. La herramienta óptima sería la más económica al nivel de la algoritmia involucrada y consideran que es la más sencilla de aplicar.

A partir de las evidencias obtenidas en el estudio que hicimos, parecería que los docentes realizan más énfasis en cómo se resuelve una ecuación que en por qué puede hacerse de una u otra forma. Pensamos que antes de que al alumno de Ciclo Básico se le enseñe a aplicar la propiedad Hankeliana, se le debería enfrentar a la ecuación de segundo grado factorizada para que intente ensayar diversos procedimientos *sui generis* para despejar la incógnita, que en la mayoría de los casos le resultarán ineficaces. De esta forma, quizás pueda valorar la herramienta que se desea enseñar y pueda ver que no siempre es necesario realizar una larga secuencia de operaciones para poder resolver una ecuación, que es lo que ellos esperan.

Por lo que hemos visto, presentarle una ecuación a un estudiante y enseñarle a resolverla, no representa un aprendizaje, aun cuando a corto plazo demuestre saber aplicar la técnica que le hemos mostrado. Los aprendizajes duraderos parecerían ser lo que están cargados de significado y no los que contienen solamente un conjunto de procedimientos o reglas. Podemos decir que los alumnos construyen imágenes conceptuales más ricas si éstas contienen algún significado asociado al concepto. Si enseñamos una regla, vacía de significado, el estudiante podrá recordar quizás sus características sintácticas y tal vez pueda también enunciarla, pero no siempre podrá evocarla y aplicarla para resolver una situación, ya que no posee significados que le permitan reconocer en la situación que debe resolver su aplicabilidad.

Pasemos ahora al análisis del error en el que nos hemos centrado. En un principio supusimos que este error estaba directamente relacionado con la aplicación de la propiedad Hankeliana pues el alumno podría estar viendo que la ecuación de segundo grado se fragmenta en dos de primer grado. Algunos alumnos manifestaron en la entrevista confusión acerca de si la ecuación dada era de segundo grado o si se trataba de dos de primer grado. Esto podría estar llevando a los estudiantes a realizar la verificación de forma incorrecta.

Luego vimos que el error también se hacía presente cuando eran utilizadas otras estrategias para la resolución de la ecuación como la aplicación de la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado. En este sentido, detectamos que si bien los estudiantes explicitan que para que un producto sea cero uno u otro de los factores debe ser cero, parecería existir una fuerte creencia de que ambos factores deben ser cero simultáneamente. Esta situación que consideramos de orden intuitivo podría estar influenciando el funcionamiento de la variable en el álgebra.

La problemática que estudiamos superó ampliamente el ámbito de las expresiones polinómicas que se presentaban factorizadas cuando detectamos que los estudiantes avalaban la ocurrencia simultánea de valores distintos para la incógnita en ecuaciones que involucraban expresiones polinómicas desarrolladas. Pudimos apreciar en las entrevistas realizadas a los estudiantes que otro problema podría estar influenciando en la incorrecta realización de la verificación de la ecuación: un problema de orden lógico. Con esto nos referimos a que si las raíces son 4 y 3, parecería que las dos deben estar presentes en la ecuación al momento de realizar la verificación. Es decir que, la condición $x=3$ o $x=4$, que es la que admite el funcionamiento algebraico estaría entrando en conflicto con la expresión "las raíces de la ecuación son 3 y 4", aun cuando esto no sea consciente por parte de los estudiantes.

Para explorar la generalización incorrecta de la propiedad formulamos a los estudiantes preguntas como:

- ✓ *Se sabe que b. c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información? ¿Qué representan para ti b y c?*
- ✓ *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*
- ✓ *D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=0, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D y B a partir de esta información?*

En el caso de los estudiantes de bachillerato, varios de ellos contestaron pensando en la propiedad de absorción, es decir, si uno de los dos factores es cero, el producto lo será. Si bien este razonamiento es válido, no siempre permite obtener todas las posibilidades para los factores involucrados ya que si la estructura tiene divisores de cero, hay otras opciones. En el caso de los estudiantes de nivel terciario, la presencia de la propiedad Hankeliana es más fuerte y clara. En las entrevistas hicieron explícito que cuando dieron esa respuesta (uno u otro factor es nulo) pensaron en dicha propiedad en el conjunto de lo números reales. En estos estudiantes esa propiedad aparece sumamente arraigada a la experiencia, en el sentido de que tratan de aplicarla siempre que sea posible, factorizando en forma conveniente.

Además de la experiencia consideramos que la generalización incorrecta de la propiedad sería favorecido por los textos de estudio del alumno, que en general enuncian la regla $a.b=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$, sin especificar qué representan a y b, sin tener en cuenta que su validez no es universal. Esto podría llevar a los estudiantes a consolidar un modelo de pensamiento que no incluye la naturaleza de los objetos a y b, fijando la atención en la sintaxis de la redacción, según lo reportan English y Halford (1995) cuando nos hablan de que los estudiantes generan frecuentemente reglas prototípicas basadas en las características externas de índole sintáctico que hacen a la redacción de una propiedad. Aunque en nuestro trabajo esto no tiene la fuerza de una conclusión, pensamos que las características sintácticas del enunciado favorecerían la aplicación de la misma por parte de los estudiantes. Mientras que el objeto matemático va cambiando, las características sintáctico visuales permanecen prácticamente incambiadas. Las prácticas docentes contribuyen con esto manteniendo ausente la explicitación de los objetos matemáticos.

Se aplicó una misma secuencia de actividades sobre clases residuales módulo 6, a estudiantes de 3º año de Ciclo Básico (14-15) años y a estudiantes de 6º año de bachillerato (17-18 años). En ella, se enfrentaron a la existencia de una estructura con divisores de cero. Ninguno de los dos grupos tenía experiencia previa con el tema. Cuando se preguntó a los estudiantes qué podían decir acerca de un producto de dos factores que en esta estructura es nulo los estudiantes más pequeños incorporaron la existencia de divisores de cero en su respuesta, mientras que la mayoría de los estudiantes de bachillerato restringieron su respuesta a la idea de que uno u otro de los factores era cero. Los estudiantes más pequeños demostraron un pensamiento más versátil que los de bachillerato. Quizás porque la experiencia con estructuras sin divisores de cero todavía no ha incidido demasiado en la consolidación de esquemas estables.

Como sugerencia didáctica planteamos la posibilidad de que el estudio del álgebra no sólo se inicie a partir de las operaciones aritméticas y sus propiedades, sino también poniendo en contacto al alumno con otras estructuras que estén a su alcance y que le ofrezcan una visión más amplia de las propiedades algebraicas, en todos los sentidos. De esta forma creemos que se minimizarían los obstáculos para que en un futuro el estudiante pueda conceptualizar estructuras más abstractas o más generales.

Referencias bibliográficas:

English, L. y Halford, G. (1995). *Mathematics Education. Models and Processes*. Mahwah, New jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Dordretch: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. Tirosh, D., Stavy, R. & Oster, A.(1990). *The Autonomy of Mental Models*. For the Learning of Mathematics, 10, pp. 23-30.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). *"First-year Undergraduates´ Difficulties in Working with Different Uses of Variable"*, en CBMS, Research in Collegiate Mathematics Education, Vol. 12, pp. 1-29.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in teaching and learning*. En Tall, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer. Dordretch/Boston/London. Pp. 65-81.

Vinner, S. (1990). *Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 12 (3 & 4), pp. 85-98.

DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO Y LOS VÍNCULOS CON EL RENDIMIENTO ESCOLAR EN ARITMÉTICA

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier y Raquel Bernabe Ramos
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
Raquel_cinvestav@yahoo.fr
Campo de Investigación: Pensamiento numérico, Nivel Educativo: Básico

Resumen

Se propone una investigación estructurada en cuatro fases sobre el rendimiento escolar en aritmética y sus vínculos con el desarrollo del sentido numérico. La muestra esta integrada por 16 profesores y 32 estudiantes de educación primaria que laboran y estudian en el Distrito Federal. Este trabajo investiga la relación entre el desarrollo del sentido numérico y el rendimiento escolar en aritmética en dos direcciones: I) Seguimiento de un ciclo escolar a 2 grupos de estudiantes de 3º y 6º año de educación primaria caracterizados por sus profesores como: grupo 1 "exitosos en matemáticas" y grupo 2 "no exitosos o que tienden al fracaso en matemáticas", y II) La Identificación de las actividades centradas en el desarrollo del sentido numérico por parte de los docentes. En este documento se alude a los avances correspondientes de la tercer fase de la investigación.

Pregunta y objetivos de la investigación

La investigación enmarca como interés principal el rendimiento escolar en aritmética y su relación con el desarrollo del sentido numérico, para la cual, la pregunta de investigación global es: *¿Cuál es la relación que existe entre el desarrollo del sentido numérico y el desempeño de los estudiantes en aritmética?.*

La cual se despliega en las siguientes preguntas secundarias:

1. ¿Puede el desarrollo del sentido numérico favorecer el buen uso del conocimiento aritmético?,
2. ¿Qué es lo que hace el maestro de primaria para desarrollar el sentido numérico de sus estudiantes?,
3. ¿Qué es lo que hay de sentido numérico en las actividades que los maestros realizan diariamente con los estudiantes?

El objetivo global de la investigación en curso es:

1. Explorar la relación entre desarrollo del sentido numérico y el rendimiento escolar en matemáticas, al trabajar paralelamente con los siguientes objetivos específicos:
2. Identificar actividades que realiza el docente en el aula de la escuela primaria para favorecer el desarrollo del sentido numérico.
3. Determinar cuáles son las ideas de los profesores acerca del desarrollo del sentido numérico.
4. Identificar aspectos vinculados al sentido numérico en las actividades realizadas en las clases de matemáticas

Estructura de la investigación

La investigación esta estructurada en cuatro fases. En los siguientes apartados se describen brevemente cada una de ellas.

Primer Fase
Corresponde a la construcción del marco teórico integrado por el análisis del *currículum* nacional de este nivel y las investigaciones realizadas sobre este tópico. Las fuentes principales de análisis al currículo son los materiales editados por la SEP: planes y programas de estudio, libro para el maestro y para el alumno, fichero de actividades y avance programático, en ellos no aparece el término *sentido numérico* como tal, pero ha sido posible identificar ciertos aspectos que corresponden a lo que en este estudio se concibe como *sentido numérico*.
En lo concerniente a la caracterización del comportamiento de los estudiantes en términos del desarrollo del sentido numérico se retoma la propuesta de Mcintosh, Reys y Reys (1992), quienes consideran tres aspectos para caracterizar este sentido numérico:

1. Conocimiento y facilidad con los números: que integra aspectos como el sentido de ordinalidad de los números, sus múltiples representaciones, sentido de magnitudes relativas y absolutas acerca de los números y los sistemas de decodificación se signos matemáticos. Por ejemplo, los estudiantes pueden reconocer los diferentes usos de los números en diversas situaciones, tales como cantidades, medidas, describirlos y ubicarlos: cuando una persona dice "Hay seis manzanas en una bolsa", el número 6 es usado como cantidad; en cambio, si una camiseta tiene el número 6, el número es usado como una talla; Algunos números, por su propia naturaleza, son apropiados para algunos usos y otros no; por ejemplo, el 53 puede ser el número de páginas de un libro, pero no puede ser la fecha de un día o de un mes, ya que sólo tienen 28, 29, 30 y 31 días. Otro ejemplo es el número 42.5 que representa kilos de arroz, y este número, no puede indicar el número de alumnos de la clase de matemáticas.

2. Conocimiento y facilidad con las operaciones: que implica el discernimiento de los efectos de las operaciones, el entendimiento de las propiedades matemáticas y la comprensión de las relaciones entre las operaciones.

3. Aplicación de los conocimientos y facilidad con los números y las operaciones en el área del cálculo: al reconocer la comprensión de las relaciones entre problemas y la necesidad del cálculo, la conciencia de la existencia de estrategias múltiples, la inclinación para utilizar con eficiencia una estrategia, y la tendencia para analizar y dar resultados al analizar la información y con cálculos

Segunda Fase
Trata de un estudio exploratorio de observación en el aula, llevada acabo en el mes de julio de 2004, en dos escuelas primarias del Distrito Federal, con la finalidad de construir una metodología de observación y análisis. Algunos de estos resultados se dieron a conocer en la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Tercer Fase
Refiere al estudio en el aula con el interés de identificar las acciones que favorezcan el desarrollo del sentido numérico por parte de 8 maestros durante el ciclo escolar en curso, y hacer el seguimiento de 32 alumnos al identificar sí el sentido numérico influye en su rendimiento escolar.
Las escuelas en las que se realiza la investigación pertenecen a una muestra representativa del Distrito Federal en relación con los resultados de la aplicación en el 2001del Instrumento para el Diagnóstico de Alumnos de Nuevo Ingreso a Secundaria (IDANIS), al utilizarse el método de Afijación proporcional para obtener así 4 estratos representativos para seleccionar de forma aleatoria una escuela por cada estrato. Las acciones llevadas a cabo para satisfacer los propósitos de la investigación son:

I. *Recopilación de las evaluaciones diagnosticas y bimestrales de los alumnos.* Para identificar que contenidos son evaluados.

II. *Observación bimestral* de las clases de matemáticas según la dosificación temática del docente al llevarse un registro en video y por escrito de las actividades relevantes. En nuestro país, cada ciclo escolar esta organizado por 5 bimestres, en los cuales los docentes y alumnos deben de cubrir los propósitos alcanzados por los planes y programas de estudio. Lo que se pretende identificar en las clases observadas son los siguientes aspectos: manera de estructurar una clase, programación bimestral, trabajo en el aula, actividades que deja de tarea, actividades que realiza en clase, uso de los libros de texto gratuitos, uso de otros materiales y cómo es ese uso, así como los procesos de evaluación.

III. *Entrevista bimestral* a los maestros para recabar la mayor información respecto a lo piensan acerca del tema de interés y conocer sus procesos de evaluación respecto a sus estudiantes considerados “exitosos” y los “que tienden al fracaso”.

IV. *Seguimiento de 32 estudiantes* al analizar:
a) sus participaciones orales en la clase,
b) sus producciones escritas en los cuadernos y libros de texto y
c) sus evaluaciones bimestrales.

V. Aplicación de una entrevista final a los dos grupos de alumnos denominada “fichas de sentido numérico”, en la cual se pretenden identificar aspectos específicos del sentido numérico.

Cuarta Fase
Concierne al análisis de la información recabada y a la publicación de los resultados de la investigación.

Algunos resultados
En congruencia con las características y fases expuestas anteriormente en este momento se desarrolla el análisis de la toma de datos. Este análisis se inicia con la revisión de cada uno de los exámenes bimestrales aplicados por los docentes a sus estudiantes. En las siguientes secciones se describirá el trabajo realizado así como los resultados obtenidos.

Criterios de análisis

El análisis realizado esta conformado por tres secciones, de las cuales integran componentes interesantes a la propia investigación. Es importante manifestar que pueden darse diferentes formas de analizar los exámenes que los profesores utilizan para evaluar a sus estudiantes, en esta investigación se opto por las siguientes:

1. **Aspectos del *currículum***: se trata de una cuidadosa revisión desde la organización curricular del nivel primaria con la finalidad de identificar que contenidos considera el maestro, cuáles son los objetivos de la enseñanza de la aritmética que toma en cuenta y cómo son evaluados.

2. **Aspectos del reactivo**: donde se consideran tres niveles de información: verbal, gráfico y simbólico, con la finalidad de identificar sus repercusiones en la comprensión de los estudiantes.

3. **Aspectos de la edición del examen:** en los cuales se considera la existencia de distractores, tamaño de letra, entre otras características que pueden intervenir en el trabajo que realiza el estudiante.

Uno de los primeros registros que se tiene como medio para organizar la información, es saber el origen de los exámenes que los docentes aplican a sus alumnos. Ante esta primer forma de caracterizar los exámenes bimestrales se tiene que el 35% de los exámenes son diseñados por los docentes y que el 65% restante son adquiridos a casas editoriales, tal como se muestra en la gráfico 1 y la tabla 1.

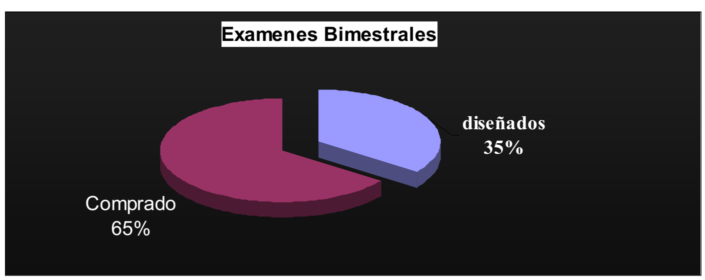


Gráfico 1. Muestra los porcentajes de los exámenes que son comprados y diseñados por los maestros

Estrato	Tipo de examen				
	1º B	2º B	3º B	4º B	5º B
Ep+	Diseñado	Diseñado	Comprado	Comprado	Comprado
Ep=	Diseñado	Diseñado	Diseñado	Diseñado	Comprado
Ep-	Comprado	Comprado	Comprado	Comprado	Comprado
Ep--	Comprado	Comprado	Diseñado	Comprado	Comprado

Tabla 1. Cuadro de características de los exámenes bimestrales

Ante este indicador subyace el reflexionar sobre qué es lo que se evalúa en los alumnos de primaria, ya que por las características de los exámenes utilizados por los docentes sólo se ha podido identificar la evaluación ciertos contenidos de forma unidireccional y se dejan de lado otros conocimientos que cada alumno pueda saber y sabe hacer, como lo son sus estrategias y procedimientos para responder las preguntas planteadas.
La mayoría de los exámenes comprados tienden a demandar la reproducción de un concepto, la ejecución de operaciones, planteamientos de problemas desfasados del contexto real. En lo que corresponde a los exámenes que son diseñados por los docentes, en algunos casos incluyen contenidos de otros bimestres, ejercicios al que les asignan un valor importante en sus calificaciones y que no permiten valorar lo que los estudiantes saben, y en algunos casos los exámenes redactados por los maestros manifiestan errores de redacción.
Ante esta situación, una segunda manera de organizar la información ha sido describir las características de los exámenes diseñados por los docentes y aquellos que son comprados, con la finalidad de identificar que es lo que se pretende evaluar con estos instrumentos, no para determinar cual de ellos es mejor.

Comprados		Diseñados
Ejes temáticos	Competencias	
Hay preguntas de iluminar, falso y verdadero, paréntesis, completar y de ejecución de pasos y procedimientos.	Describen la competencias a favorecer en cada ejercicio, aunque poco se puede identificar de los procesos y/o estrategias de los alumnos	Conversiones, paréntesis, opción múltiple, falso y verdadero, completar, dibujar y preguntas abiertas
Abundan las preguntas del tipo: Qué, cómo, cuáles, cuántos, cuál.	Se emplean por consignas y no por preguntas	Poco se pude identificar de los procesos y/o estrategias de los alumnos.
Algunos son totalmente de opción múltiple	Abundan las preguntas, algunos ejercicios de falso y verdadero.	
No permite identificar procesos de los estudiantes	Tratan de propiciar la reflexión en algunas consignas	
Son exámenes largos que incluyen más de 40 reactivos	Son exámenes largos entre 30 y 45 reactivos	Son exámenes cortos no mayores a 20 reactivos
Algunos ejercicios son replicas de ejercicios del libro de texto gratuito de los alumnos	Algunos ejercicios no aparecen en los libros de texto	Algunos ejercicios no aparecen en los libros de texto del alumno
No hay desfase curricular	No hay desfase curricular	Hay desfases curriculares

Tabla 2. Características de los exámenes utilizados por los docentes en los cinco bimestres.

Dentro de la diversidad de los exámenes comprados, solo el 15% de ellos evalúa al menos en teoría las competencias, habilidades y destrezas de los estudiantes, tal como se muestra en el gráfico No. 2.

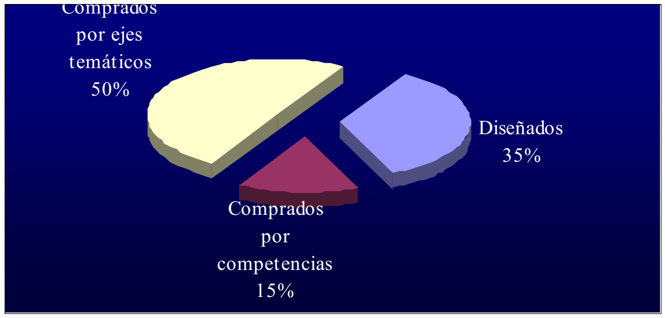


Gráfico 2. Muestra los porcentajes de los exámenes bimestrales adquiridos por los docentes

Siguientes actividades.

Las acciones posteriores están encaminadas en concluir el análisis de los exámenes bimestrales, los registros en video de las clases de matemáticas, las entrevistas aplicadas a los maestros y la entrevista final a los alumnos.

Los resultados que se obtengan conformaran un informe que se pretende compartir en las siguientes Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa.

Referencia bibliográfica

Mcintosh, A., Reys, B. y Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of Mathematics*. Vol. 12, No. 3, 2-44

SEP (1993). *Planes y programas de estudio. Educación Primaria*. Conaliteg

SEP (2004). *Versión preliminar de los planes y programas de estudio. Educación Secundaria*. Conaliteg

SEP (1993). *Libro para el alumno. Matemáticas*. Conaliteg

McIntosh, a, Reys, B, Reys, R. (1992). A proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 12, No. 3, 2-44

COMPRENSIÓN DE MEDIDAS DE DISPERSIÓN: CASO DE LA LICENCIATURA EN PSICOLOGÍA

María Magdalena Espinosa Martínez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México
eimm1968@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria; Nivel educativo: Superior

Resumen. Con la aplicación de un mismo cuestionario antes y después de la enseñanza de las medidas de dispersión, se pretende identificar cambios y constantes en las respuestas de los estudiantes a las preguntas que plantea, sobre la base de la caracterización de tipos de conocimiento de un concepto, propuesta por Pollatsek et al (1981). El interés está dirigido al estudio de su comprensión de las medidas de dispersión, en particular el rango, la desviación media absoluta, la desviación estándar y la variancia, luego de una enseñanza en el aula del tema. Sobre los resultados obtenidos el conocimiento de cálculo del rango prevaleció, y aunque los estudiantes identifican las expresiones simbólicas no es suficiente para emplearlas.

1. Pregunta y objetivos de la investigación

En la Psicología hay una gama de teorías que abogan para sí el mérito de disponer de un conjunto de instrumentos, técnicas así como métodos científicos de investigación que permiten el estudio del hecho psíquico. El diseño, corrección, aplicación e interpretación de protocolos de observación, cuestionarios y encuestas; la psicometría cuya tarea es cuantificar manifestaciones del hecho psíquico; el método clínico facilita la construcción de criterios que posibilitan comprender, caracterizar, pronosticar y diagnosticar la normalidad, son entre otras, manifestaciones de la aplicación de la Estadística en la Psicología. Por tanto, es pertinente realizar una investigación para estudiar la comprensión que tienen los estudiantes de las medidas de dispersión, que posibiliten la utilización más precisa de los instrumentos y métodos psicológicos, que implican un tratamiento estadístico.

Se realizó una investigación con estudiantes de la licenciatura en Psicología para identificar su comprensión de las medidas de dispersión, es decir, sus procesos y estrategias puestas en juego cuando acometen cuestiones que las implican. Por sus aplicaciones y por su contribución formativa, se tiene interés en el rango, la desviación media absoluta, la desviación estándar y la variancia.

La pregunta de investigación general, a saber ¿qué comprensión tienen los estudiantes de Psicología de las medidas de dispersión?, se desdobló en las siguientes preguntas: ¿qué cálculos, tipos de expresión (tablas, gráficas,…) e interpretación de las medidas de dispersión ponen en juego los estudiantes al resolver ejercicios y/o problemas que impliquen medidas de dispersión?, ¿qué tipo de explicaciones e interpretaciones respecto a la situación de origen de un conjunto de datos proporcionan los estudiantes a sus resultados de la determinación de las medidas de dispersión respectivas, sus procesos y estrategias puestas en juego cuando acometen cuestiones que implican esas medidas?

El objetivo general de la investigación es: Identificar la comprensión de los estudiantes, de la licenciatura en Psicología, de las medidas de dispersión (rango, desviación media absoluta, desviación estándar y variancia) luego de su enseñanza.

La presentación de resultados se dirige a mostrar aquellos que competen al análisis de las respuestas dadas por parte de los estudiantes en ambas aplicaciones del cuestionario y que permite dar respuesta a la pregunta de investigación que refiere a sus expresiones, cálculos e interpretaciones.

2. Enfoque teórico

Las aportaciones de otros autores para esta investigación son las siguientes: Steinbring (1991), por su propuesta de procesos de desarrollo del concepto matemático y cómo se construye su significado a través de la interacción social en el aula; Heitele (1975), por su propuesta de ideas fundamentales de estocásticos para un currículo completo; Gigerenzer y Hoffrage (1995) establecen la relación entre formatos de presentación de la información y la inferencia bayesiana. Pollatsek, Lima y Well (1981), por el planteamiento sobre tipos de conocimiento: de cálculo, analógico y/o funcional de la media aritmética que expresan los estudiantes; estos autores establecen que la comprensión instrumental puede ser entendida como el reconocimiento de una tarea de la que se conoce una regla particular o el algoritmo de cálculo para la obtención de la medida. Además, la distinguen de la comprensión relacional, la cual consiste en disponer de un esquema o un conjunto de estructuras conceptuales que posibiliten resolver una clase más amplia de problemas. Subyacen a estas comprensiones: un *conocimiento funcional,* referido a la medida como un concepto relacionado con el mundo real; un *conocimiento de cálculo,* que incluiría un algoritmo complementado con información acerca de cómo obtener el resultado no sólo correcto, sino además de la forma pertinente, y un *conocimiento analógico,* el cual podría incluir imágenes visuales, diagramas, tablas o figuras, porque la medida se expresa de forma distinta a la planteada en la situación inicial.

3. Proceso y escenarios de investigación

Por el interés particular que se tiene en la interpretación de las respuestas y expresiones dadas por parte de los estudiantes se determina un enfoque cualitativo (Eisner 1998) en el estudio.

Para identificar las condiciones a las que se sujetaría la investigación, se planteó la realización de lo siguiente: a) analizar el Programa de la asignatura Estadística I, que corresponde a los contenidos de Probabilidad y Estadística de la licenciatura en Psicología, así como los libros propuestos por el programa de estudio y los sugeridos por el profesor titular de la asignatura. Para identificar la congruencia en el planteamiento que hay de las medidas de dispersión entre el programa y los textos, el enfoque con el cual se presentan, la estructura de los capítulos o lecciones, entre otros aspectos se acometió: b) analizar las sesiones de estudio de las medidas; c) diseñar y aplicar un cuestionario en dos momentos, antes y después de la enseñanza de las medidas de dispersión y después del análisis de las respuestas, identificar la comprensión de las medidas por la intervención de la enseñanza; d) diseñar y aplicar una entrevista para conocer el fundamento lógico que los estudiantes dan a sus respuestas. Dentro del contexto general de la investigación, el diseño, la aplicación del cuestionario así como el análisis de las respuestas son los resultados que se presentarán en el presente.

Se diseñó un cuestionario para conocer, de los estudiantes, sus expresiones — gráfica, lengua natural, notación simbólica, tabla o figuras — interpretaciones y cálculos utilizados al resolver ejercicios y/o problemas que implican rango, desviación media absoluta, desviación estándar y variancia, antes y después de las sesiones de enseñanza de las Medidas de Dispersión. El cuestionario constó de 13 preguntas en los resultados que obtuvieron Pollatsek, Lima y Well (1981) sobre los tipos de conocimiento que los estudiantes tienen de la media, así como lo propuesto por Gigerenzer (1995) acerca de que los formatos de presentación de la información generan determinados procesos cognitivos. En cuanto al contenido, se consideraron las cuatro medidas de dispersión de interés para el estudio. La Tabla I resume la estructura del cuestionario.

El instrumento solicitó el proceso de solución completo de cada pregunta, sea para trazar una gráfica donde localizar las medidas de dispersión, sea para desarrollar un algoritmo para obtener un resultado numérico o para proponer una interpretación de lo obtenido. Con once preguntas abiertas la finalidad fue identificar el procedimiento operativo que el estudiante pone en juego al darles respuesta; además de obtener información sobre la relación que establecen entre medidas puestas en juego o relacionan lo obtenido del cálculo con el mundo real. Dos preguntas de opción múltiple implican el conocimiento analógico de las medidas de dispersión (ver Tabla 1.1).

La pregunta I solicita el cálculo del rango, desviación estándar y varianza así como la interpretación de lo obtenido; la pregunta II pide cálculo e interpretación del rango y la variancia; la pregunta III demanda el valor mínimo del rango a partir del rango y del valor mayor; a partir de la relación entre la desviación estándar y la media aritmética de dos conjuntos datos la pregunta IV pide su interpretación; la pregunta V solicita establecer la relación entre el concepto y la expresión de la medida; la pregunta VI pide identificar la expresión simbólica de cada medida estadística; la pregunta VII solicita explicar la relación entre la desviación estándar, la media aritmética y un dato en particular dado en la curva normal; la pregunta VIII solicita un ejemplo para explicar la utilidad del rango, la desviación media absoluta y la varianza; la pregunta IX solicita el cálculo de la desviación y su interpretación a partir de las medias aritméticas de un par de gráficas a comparar; la pregunta X se refiere a la desviación estándar; en la pregunta XI, dada la desviación estándar se solicita *n*; la pregunta XII demanda graficar e interpretar el rango y la desviación estándar a partir de una tabla de datos; la pregunta XIII requiere calcular, graficar e interpretar la desviación media y la varianza dada una gráfica de barras.

Tabla 1.1 Estructura del cuestionario por pregunta.

	Medidas de tendencia central y de dispersión					Tipo de conocimiento			Tipo de expresión				
	Ma	R	Dm	Ds	V	A	C	F	Es	G	Ln	On	T
I		●	●	●	●		●	●			●	●	●
II	●	●			●		●	●			●		
III		●					●	●	●		●		
IV	●			●		●		●			●		
V	●	●	●	●	●	●			●		●		
VI		●	●	●	●		●		●		●		
VII	●			●		●		●		●	●		
VIII		●	●		●	●		●			●		
IX		●		●		●	●	●		●	●		
X	●			●				●			●	●	
XI	●			●			●	●			●		
XII		●		●				●					●
XIII			●		●	●	●	●		●	●		

Simbología: Ma, Media aritmética; R, Rango; Dm, Desviación media absoluta; Ds, Desviación estándar; V, Varianza
A, Analógico; C, Cálculo; F, Funcional
Es, Expresión simbólica; G, Gráfica; Ln, Lengua natural; On, Orden numérico; T, Tabla

Dos sesiones previas al estudio de las medidas de dispersión en el curso de Estadística I, se aplicó el cuestionario a la población integrada por treinta estudiantes de primer semestre del nivel Licenciatura. Luego de que el curso de Estadística I concluyó el estudio de medidas de dispersión, se aplicó el mismo cuestionario. Las dos aplicaciones se realizaron bajo las mismas condiciones, es decir, aún cuando la aplicación fue grupal se respondió en forma individual con lápiz, uso de calculadora para realizar operaciones aritméticas básicas, sin formulario y sin previo aviso de la aplicación, ni al profesor ni a los estudiantes.

Las dos aplicaciones del cuestionario se realizaron al mismo grupo de estudiantes, cada una duró dos horas, se efectuó fuera del horario de la clase de estadística sin la presencia del profesor titular; entre ambas aplicaciones hay 40 días de diferencia.

4. Resultados

De la primera aplicación son los siguientes: En la pregunta I. De 29, 24 estudiantes respondieron correctamente a la solicitud sobre el cálculo del rango; 21 de 24 desarrollaron un procedimiento correcto; quince estudiantes escribieron la expresión simbólica, de los cuales 12 son correctas. Sólo cinco estudiantes respondieron a la solicitud de obtener la desviación media absoluta pero el resultado fue incorrecto porque en el proceso de cálculo para la media aritmética sólo consideraron la frecuencia y no la marca de clase. Cuatro a la solicitud de varianza tanto procedimiento como resultado fue incorrecto; sólo tres escribieron la expresión simbólica incorrectamente, dos confundieron la expresión de la media aritmética con la desviación media absoluta.

En la pregunta II. De 26, 19 estudiantes respondieron correctamente al cálculo del rango; sólo dos de 15 respondió la pregunta sobre la variancia, el resultado fue incorrecto así como la interpretación dada de los datos obtenidos por parte de tres estudiantes. Un estudiante al obtener el mismo número como resultado del cálculo del rango y de la media aritmética, concluyó que es lo mismo rango y media. Diez estudiantes distinguieron entre rango y amplitud, además de utilizar la expresión simbólica de la amplitud.

En la pregunta III. De 24, 16 estudiantes respondieron correctamente a la pregunta planteada, sólo siete expresaron el procedimiento correcto. La expresión simbólica proporcionada por cuatro fue correcta; cuatro estudiantes utilizaron unidades “kilogramo” durante el procedimiento de cálculo, pero al obtener el resultado final las omitieron. De la pregunta IV. Cuatro estudiantes organizaron la información en una tabla, pero no la interpretaron; un estudiante graficó los parámetros estadísticos pero no interpretó la gráfica.

En la pregunta VI. De 29, 27 estudiantes identificaron la expresión simbólica del rango; de 25, 13 identificaron la desviación media, seis la desviación estándar poblacional, ocho la variancia poblacional, siete la desviación estándar muestral y uno la variancia muestral. Se confundió la variancia poblacional con algún tipo de desviación, estándar o absoluta; la variancia muestral con algún tipo de desviación, estándar o absoluta; la desviación estándar poblacional con la variancia, muestral o poblacional.

En la pregunta IX. Tres estudiantes realizaron los cálculos pero son incorrectos los resultados para la desviación estándar. Las explicaciones que dieron ocho de quince, estuvieron en función de cambio de los límites del rango aun cuando el planteamiento de la pregunta indica que el rango no cambia, tres de éstos remiten a la concentración de la producción que expresan las gráficas.

De la segunda aplicación son los siguientes: En la pregunta I. Obtuvieron 19 estudiantes un resultado correcto, de éstos 18 escribieron completo y correcto el procedimiento y nueve incluyeron expresión simbólica, cinco interpretaron el resultado correctamente; ninguna hizo uso de las unidades para dar respuesta sobre las medidas solicitadas. Cinco estudiantes respondieron a la solicitud sobre la desviación media absoluta obteniendo un resultado incorrecto mientras que en el procedimiento confundieron dato con frecuencia olvidando la marca de clase. Dada en formato de tabla la situación, tres estudiantes intentan continuarla abriendo columnas (manifestando con ello el procedimiento de cálculo como en las sesiones de estudio se propone).

En la pregunta II. De 22, 19 respondieron correctamente al cálculo del rango de los cuales 16 desarrollaron el procedimiento correcto; tres emplearon unidades correctamente, siete la expresión simbólica y dos la interpretación. Uno de cinco obtuvo el resultado de la varianza correcta, sólo dos desarrollaron el procedimiento, uno es correcto y otro no. Un estudiante intentó elaborar una tabla de cálculo aún y cuando la situación no lo amerita ya que sólo son cinco datos; uno de cinco tuvo correcta la expresión simbólica.

En la pregunta III. De 19, 15 respondieron correctamente al obtener el resultado; ocho de los 15 presentaron el procedimiento correcto, tres emplearon unidades en el resultado. Aun cuando pueden conocer la expresión simbólica al despejar el valor mínimo no lo hacen correctamente. En la pregunta IV. Nueve estudiantes organizaron los datos a modo de tabla, uno graficó los datos pero incorrectamente; tres de diez escribieron una interpretación correcta mientras el resto de los estudiantes sólo describió la organización de los mismos.

En la pregunta VI. De 25, todos identificaron correctamente la expresión simbólica del rango, 22 la desviación media absoluta, ocho la desviación estándar poblacional, siete la varianza poblacional, seis la desviación estándar muestral y seis la varianza muestral. En la pregunta IX. Cinco de cinco estudiantes respondieron correctamente, dos escribieron correctamente la interpretación.

De ambas aplicaciones, los siguientes resultados obtenidos obedecen a cambios o constantes encontradas en las respuestas de los estudiantes de la primera a la segunda aplicación del cuestionario. Se considera *incremento* en un resultado cuando el estudiante en la segunda aplicación respondió completa y correctamente a la pregunta; es *igual* un resultado cuando la respuesta es incorrecta o correcta en ambas aplicaciones, y *decremento* cuando en la primera aplicación fue correcta la respuesta y en la segunda incorrecta.

En la pregunta I. Acerca del rango, cuatro estudiantes incrementaron, 15 tuvieron respuestas iguales (en ambas aplicaciones) y uno tuvo un decremento al plantear el valor de la medida de dispersión pero en el procedimiento cinco incrementaron y 11 mantuvieron igual la expresión de los procedimientos. Sobre el cálculo de la desviación absoluta un estudiante incrementó el resultado, cuatro el procedimiento.

En la pregunta II. En cuanto al resultado numérico del rango nueve estudiantes incrementaron, diez permanecieron igual y uno decrementó; sobre el procedimiento de cálculo ocho mejoraron, diez se mantuvieron igual y en dos su desempeño decrementó; cinco estudiantes incrementaron el uso de la respectiva expresión simbólica y cuatro al dar la interpretación de los resultados obtenidos; de la variancia, uno incrementó al obtener el resultado numérico, uno en el procedimiento, uno en la interpretación y uno en la expresión simbólica. No se trata del mismo estudiante.

En la pregunta III. Del uso de la expresión simbólica un estudiante incrementó, cuatro se mantuvieron igual; en cuanto al procedimiento 14 incrementaron y dos lo realizaron igual; seis mejoraron al usar las unidades correspondientes y uno respondió igual; respecto al resultado numérico, ocho incrementaron, siete permanecieron igual y en tres su desempeño decrementó. En la pregunta IV. Cinco estudiantes tuvieron incremento al organizar los datos de la situación, tres siguieron igual; en la interpretación solicitada 11 incrementaron y uno disminuyo.

En la pregunta VI. Sobre el rango, tres estudiantes incrementaron, 22 respondieron igual; sobre la desviación media absoluta 11 incrementaron, diez contestaron igual; sobre la desviación estándar poblacional, cuatro la identificaron en la segunda aplicación, tres en ambas aplicaciones; de la desviación estándar muestral tres incrementaron, tres respondieron igualen ambas aplicaciones; acerca de la variancia poblacional, uno incrementó, cinco contestaron igual; acerca de la variancia muestral, cuatro incrementaron, dos continúan identificándola.

En la pregunta IX. Sólo un estudiante mostró incremento al obtener el resultado y emplear el procedimiento correcto. Tres estudiantes incrementaron al interpretar las gráficas, uno permaneció igual de correcto y uno disminuyó.

Tuvo lugar un cambio en el dominio de las medidas de dispersión, en particular del rango y de la desviación absoluta, manifestadas en el conocimiento de cálculo, mientras el conocimiento funcional es usado en problemas donde la desviación estándar o la variancia son puestas en juego; aun cuando pueden identificar las expresiones simbólicas no es suficiente para emplearlas. Luego de las aplicaciones en general se concluye que tuvo lugar una mejora en el conocimiento de cálculo del rango y de la desviación absoluta; el conocimiento funcional tiene un incremento cuando se aplica a la desviación estándar; el conocimiento de cálculo prevalece sobre los otros tipos de conocimiento en las respuestas de los estudiantes. El conocimiento del rango predominó mientras que el de la variancia fue el menor.

En general, el conocimiento de cálculo del rango prevaleció en las respuestas de los estudiantes; aunque el conocimiento analógico y el funcional se expresaron, no ocurrió el mismo número de veces que el de cálculo, por lo que conviene considerar que: "A menos que los ejemplos y los problemas proporcionen una práctica intensiva en la traducción de una variedad de contextos a [los diferentes tipos de conocimiento de algunos conceptos matemáticos], es poco probable que se pueda lograr la comprensión con algún grado de generalidad" (Pollatsek, 1981, pág. 14); ello implica no sólo la comprensión de la matemática sino también del mundo real donde se habita, es decir, de donde se extrae y/o aplica modelos matemáticos. El formato puesto en juego facilita la interpretación de la situación, en el caso la gráfica, más que el empleo de tablas permite la manifestación de conocimiento funcional por parte de los estudiantes.

Referencias

Eisner, E.; 1998, *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. España: Paidós

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995), Como mejorar el razonamiento bayesiano sin instrucción: formatos de frecuencia. *Psychologial Review* 102, 684-704.

Heitele, D. (1975), Un enfoque epistemológico sobre ideas fundamentales de estocásticos. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, D. (1981), Concepto o cálculo: comprensión de la media en estudiantes. *Educational Studies in Mathematics* 12, 191-204.

Steinbring, H. (1991), El concepto de azar en la enseñanza cotidiana: aspectos de una epistemología social del conocimiento matemático. *Educational Studies in Mathematics* 22, 503-522.

ELEMENTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS DE LAS CONDICIONES INICIALES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES[1]

Erivan Velasco Núñez-Gabriela Buendía Abalos
Cimate-Unach, Chiapas, México.
erivel79@hotmail.com
Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior

RESUMEN O ABSTRACT

La disciplina Matemática Educativa atiende problemáticas relacionadas con la transmisión de saberes en área del conocimiento de las matemáticas. Una de ellas, consiste en haber reconocido que en el nivel superior, se privilegia a ultranza el contexto analítico en la resolución de un problema de ecuaciones diferenciales de valores iniciales de orden *n.* Buendía y García (2000), señalan, después de un análisis del discurso escolar a través de los libros de texto de ecuaciones diferenciales, que los significados de las condiciones iniciales se plantean principalmente en un escenario algorítmico, en donde solamente se ve involucrado un proceso analítico. Por ello, convenimos en abordar tal problemática a través del análisis de los elementos socioepistemológicos que existen en dicha relación tomando en cuenta el tránsito entre tres contextos: el contexto analítico, el contexto gráfico y el contexto físico.

PROBLEMÁTICA

La disciplina Matemática Educativa atiende problemáticas relacionadas con la transmisión de saberes en área del conocimiento de las matemáticas. Con ese marco se han identificado fenómenos didácticos que tienen que ver con la enseñanza del cálculo en el nivel superior, en particular, la enseñanza de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial lineal. En los libros de texto de ecuaciones diferenciales de la matemática escolar, un problema de condiciones iniciales de orden *n* para una ecuación diferencial lineal se refiere a

$$\textit{Resolver:}\quad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$\textit{Sujeta a:}\quad y(x_0)=y_0,\;\; y'(x_0)=y_1,....,\;\; y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

Un problema de este tipo busca una función definida en algún intervalo *I* que contenga a x_0, y satisfaga la ecuación diferencial y las *n* condiciones iniciales especificadas para ese punto. De hecho, se espera que la función resultante sea única[2]. Si particularizamos para

[1] Esta investigación se desarrolla bajo el apoyo del proyecto PROMEP "Estudio del desarrollo del saber matemático en un marco socioepistemológico". Folio UACHIS-PTC-39. Carta de liberación: PROMEP/103.5/94/2927

2 Siempre y cuando se cumplan las condiciones establecidas por el teorema de existencia y unicidad: " Sean $a_n(x), a_{n-1}(x),...., a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x del intervalo. Si $x = x_0$ es

algunos valores de n, y con coeficientes iguales a uno, tenemos que, al abordar un problema de condición inicial para una ecuación de diferencial de primer orden, habrá una única condición que cumplir; para una ecuación de segundo orden, habrá dos condiciones iniciales, y así sucesivamente:

$y' + y = f(x)$	$y'' + y' + y = f(x)$	$y'''+y''+y'+y = f(x)$
sujeta a $y(x_0) = y_0$	sujeta a $y(x_0) = y_0$	sujeta a $y(x_0) = y_0$
	$y'(x_0) = y_1$	$y'(x_0) = y_1$
		$y''(x_0) = y_2$

Según la estructura del enunciado al presentar este tipo de problema, podríamos suponer, sin ningún otro tipo de cuestionamiento, que en cada uno de los casos anteriores hallaremos una única solución y que las condiciones iniciales vienen establecidas según la algoritmización del proceso anterior. Pero ¿Qué significado tienen esas condiciones iniciales?

ESTADO DEL ARTE

En nuestro estado del arte hablaremos de tres contextos, en los cuales podemos visualizar que las condiciones iniciales tienen significados propios de cada contexto, estos significados son los que tomaremos en cuenta para formular una secuencia, los contextos son los siguientes:

- Contexto Analítico
- Contexto Gráfico
- Contexto Físico

CONTEXTO ANALÍTICO

Cuando resolvemos una ecuación diferencial sujeta a condiciones iniciales, que son las condiciones que se imponen a *y(x)* o a sus derivadas, éstas vienen dadas con respecto al orden de la ecuación diferencial.
Es en la parte final de la resolución analítica, cuando se obtiene la solución particular, donde se forma un sistema de ecuaciones cuadrado, así para una ecuación diferencial de primer orden el sistema es de una ecuación con una incógnita, para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden, el sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas.

CONTEXTO GRÁFICO

En el marco de la disciplina de la Matemática Educativa se ha realizado un estudio sobre la problemática, Buendía y García (2002), buscan dar respuesta a la pregunta ¿Por qué son necesarias n condiciones iniciales para una ecuación de n-ésimo orden?

---

cualquier punto del intervalo, existe una solución en dicho intervalo $y(x)$ del problema de valores iniciales representado por las ecuaciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$,........, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ que es única,, (Zill, 1997).

Situación I (Primer orden)

Se parte de la ecuación diferencial lineal de primer orden $ay' + y = x$, cuya familia de soluciones es: $y(x) = x - 1 + ke^{-x}$. Se puede observar en la figura 1, que su comportamiento tiende a la recta $y = x - 1$

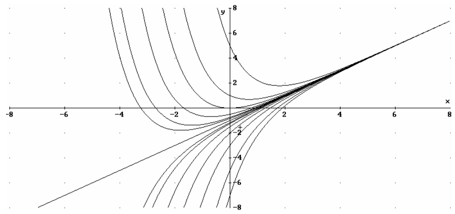


Figura 1

Se puede observar que en este caso las curvas que conforman la familia de soluciones de la ecuación diferencial no se cruzan entre ellas, es decir, no se cruzan entre sí. Entonces, por esta razón, para determinar una solución particular, es suficiente con una única condición inicial, que nos indica por qué punto (par ordenado) pasa la curva que representa la solución buscada.

Situación II (Segundo orden)

Como ejemplo, la ecuación diferencial, $y'' + y' + y = x$, tiene como solución la siguiente familia de curvas:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

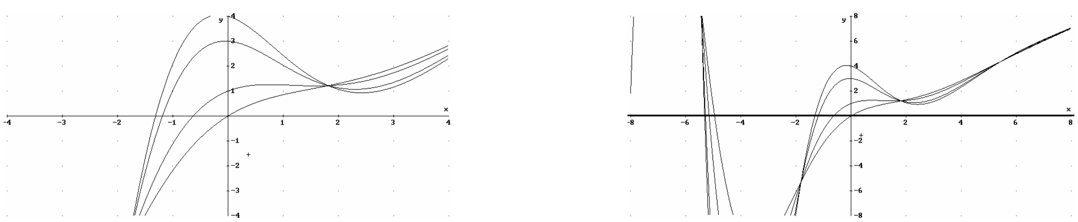
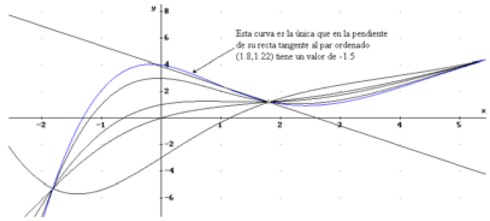


Figura 2

Se puede observar en la figuras anteriores, que no es suficiente determinar un punto por donde pasa la curva, puesto que por un punto puede pasar más de una curva, tal y como se ve en el acercamiento.
Esto implica la necesidad de establecer cómo es la forma de la curva cuando llega a dicho punto. Por ello, la pendiente de la recta tangente nos sirve para poder determinar a cuál curva del dicho conjunto de curvas, nos estamos refiriendo. Por esto, las condiciones iniciales para obtener una única solución deben ser del tipo $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$.

Figura 3



CONTEXTO FÍSICO

En nuestro medio ambiente, existen fenómenos y cuerpos que su comportamiento se modela a través de ecuaciones diferenciales, tal es el caso del enfriamiento (modelado por ecuación diferencial lineal de primer orden) y de los resortes (modelado por una ecuación diferencial lineal de segundo orden). Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el momento t, T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y dT/dt es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \qquad \text{o sea} \qquad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. Si planteamos la situación en donde se mide el enfriamiento de un material o una sustancia que ha sido calentada en un tiempo determinado, por ejemplo 15 minutos, y si dicho experimento se realizará más de una vez y con distintas sustancias o materiales, necesitaríamos conocer la temperatura inicial de cada sustancia o material para saber a cual de ellas nos estamos refiriendo, debido a que por tener diferente conductividad térmica alcanzan distinta temperatura inicial al ser calentadas. Y al hablar de temperatura inicial, estaríamos refiriéndonos a una condición inicial del tipo $\boldsymbol{y(t) = T_0}$.

Para el caso de los resortes, si planteamos la situación en donde 2 resortes están en movimiento, y lo hacen de manera simultánea, y que tienen la misma *constante del resorte (k)*, ambos resortes tendrían una misma posición en un tiempo determinado, y al hablar de posición, plantearíamos tener una condición inicial del tipo $y(t) = x_0$,. Es necesaria, pues, la forma que tiene un resorte a dicha posición, ya que lo puede hacer en una fase de estiramiento, en una fase de comprensión dependiendo de la velocidad que se le haya imprimido al resorte. Entonces, es necesaria una segunda condición inicial que nos habla de esa velocidad para poder distinguir entre uno u otro resorte.

LA INVESTIGACIÓN

Nosotros estamos convencidos que las prácticas sociales son generadoras del conocimiento matemático, por ello consideramos que algunas prácticas sociales de las que se han dado cuenta en muchas investigaciones de la Matemática Educativa, están inmersas en las condiciones iniciales de una ecuación diferencial. Con estas prácticas nosotros creemos que resultaran *elementos socioepistemológicos* de las condiciones iniciales. Pensamos que estos

elementos socioepistemológicos permitirán una reconstrucción del significado acerca de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial.
También hay que señalar, que en nuestra investigación trabajamos hasta el segundo orden de ecuación diferencial, ya que para el caso de la modelación de un fenómeno físico mayor del segundo orden, sería muy complejo de realizar. Las prácticas que nosotros creemos que tienen mucha importancia en las condiciones iniciales de una ecuación diferencial son los siguientes:

- ***La modelación de un fenómeno,***
- ***la relación lineal (linealidad),***
- ***la graficación,***
- ***la predicción, en el comportamiento de la gráfica.***

Creemos que con estos elementos socioepistemológicos se puede realizar un estudio socioepistemológico, que involucra los cuatro elementos propuestos por Cordero (1998; 2000). Y realizar un estudio de la *argumentación* de las condiciones iniciales. Debemos decir que por *argumentación* nosotros nos estamos refiriendo al conjunto de argumentos de tipo retórico, heurísticos, situacionales, discursivos, provocados por una ***situación*** **adidáctica**[3], con lo que pensamos se resignificará el significado de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial. El estudio de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial a través de los cuatro elementos anteriores puede ser formulada como se presenta en la tabla 1 (Cordero, 1998; 2000) siguiente, y en conjunto estos cuatro elementos componen una situación del concepto.

Significados	Patrones de comportamientos de las soluciones de la ecuación diferencial, en relación con su orden.
Procedimientos	Análisis en el tránsito entre los contextos gráfico, analítico y físico de las soluciones de las ecuaciones diferenciales
Procesos-Objetos	La ecuación diferencial como una instrucción que organiza comportamientos en sus soluciones, en relación con el orden de las mismas.
Argumentos	Aún por definir

Tabla 1. Significados, Procedimientos, Procesos-Objetos y el Argumento de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial.

Un marco socioepistemológico, nos obliga a estudiar:

[3] Conjunto de las interacciones entre una situación matematica (específica de un conocimiento concreto) y un sujeto, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional. Dicha situación permite o provoca un cambio de estrategia por parte del sujeto para adquirir dicho conocimiento. (Chevallard, Bosh, Gascon. 1998)

- Los patrones de comportamientos de la solución que tiene una ecuación diferencial en relación con su orden. Estos patrones corresponden a fórmulas analíticas, formas específicas de las gráficas y al modelado de comportamientos de cuerpos y fenómenos físicos. Sobre estos patrones se construyen los significados de la relación.
- Este significado sugiere que se realice un análisis en el tránsito entre los tres contextos: el analitico, el gráfico y el físico, para observar que argumentaciones se generan, para reorganizarlas y confrontarlas con el argumento propuesto.
- La construcción de la relación del orden de una ecuación diferencial lineal y el número de condiciones iniciales lleva a la concepción de que una ecuación diferencial es una instrucción que organiza comportamientos en sus soluciones, en relación con el orden de las mismas, por lo que habrá diferentes construcciones mentales, como procesos y objetos.
- Generación de un argumento, extraído de las prácticas sociales, que confronte los diferentes significados de las condiciones iniciales de una E.D.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico).* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. y García, C. (2002). *Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 15(1), 108-113.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* En tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. México: Paidós.

Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17(1), 1-9.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. En tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Reyes, A. y Cordero, F. (2003) *Estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 16(1), 105-111.

Zill, D. (1997) *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Thomson.

“ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA PARA ALUMNOS DE NUEVO INGRESO EN EL CECYT JDB DEL I.P.N.”

Guillermo Carrasco García, Francisco Bañuelos Tepallo
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos “Juan de Dios Bátiz Paredes”, I.P.N., México
utejdb@ipn.mx

Campo de Investigación: Evaluación; Nivel educativo: Medio

RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis de los resultados obtenidos en el examen diagnóstico de matemáticas, aplicado a los alumnos de nuevo ingreso en el cecyt “Juan de Dios Bátiz Paredes”, del I.P.N. Este análisis se realiza considerando los resultados obtenidos en la aplicación del mismo, durante un período de tres años. Los reactivos del examen están elaborados considerando los temas y clasificación especificados en el plan de estudios de la Secundaria, según el Ceneval. En habilidad matemática podemos mencionar: sucesiones numéricas, patrones numéricos, series espaciales, patrones espaciales, problemas aritméticos y problemas de razonamiento. El examen está dividido en: aritmética, álgebra y geometría, también se evalúa conceptos y operaciones y resolución de problemas. El informe destaca los reactivos con mayores y menores porcentajes de aciertos, documentando el tipo de errores más comunes que cometen y su relación que guarda con la enseñanza de las matemáticas. A partir de los resultados obtenidos se plantean acciones para quw los alumnos puedan afrontar con buenos resultados los cursos de matemáticas del bachillerato.

INTRODUCCIÓN

Durante varios años los profesores de matemáticas del Nivel Medio Superior del I.P.N. han manifestado que los alumnos de nuevo ingreso aún no dominan los temas y conceptos necesarios para poder cursar el bachillerato de manera eficiente. Ante esta situación, la Academia Institucional de Matemáticas del I.P.N., elaboró un examen diagnóstico en el cual los reactivos diseñados consideran los temas y la clasificación especificados en el plan de estudios de la Secundaria, según el Ceneval.
En este trabajo se presenta un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de dicho examen diagnóstico a los alumnos de nuevo ingreso en el cecyt “Juan de Dios Bátiz Paredes”, del I.P.N. durante un periodo de tres años.
Algunas de las preguntas que se pretender resolver son las siguientes

- ¿Qué causas pudieron propiciar que una pregunta no fuera contestada?
- ¿Cuales fueron los errores que los alumnos cometieron frecuentemente?
- En que caso se trata de errores conceptuales.
- En que caso se trata solamente de falta de destreza y agilidad en los cálculos.

DISEÑO DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

El examen se diseñó dividiendo 24 reactivos en tres secciones: Aritmética, Álgebra y Geometría, las cuales a su vez se subdividieron en Conceptos y Operaciones (CyO) y Resolución de Problemas (RP), tal como se observa en el siguiente cuadro:

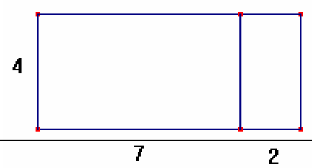
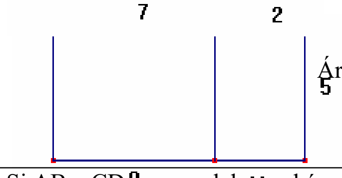
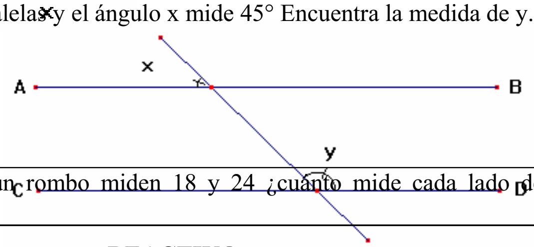
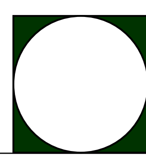
	Aritmética (Ar)		Álgebra (Al)		Geometría (Ge)	
	reactivos	num	reactivos	num	reactivos	num
Conceptos y Operaciones (CyO)	8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10	7	17, 18, 19, 20, 21, 23, 24	5	12, 13, 14, 15, 16
Resolución de Problemas (RP)	2	7, 8	1	22	1	11
Total	10		8		6	

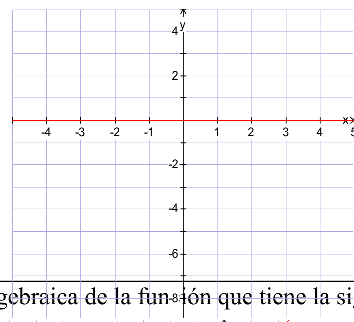
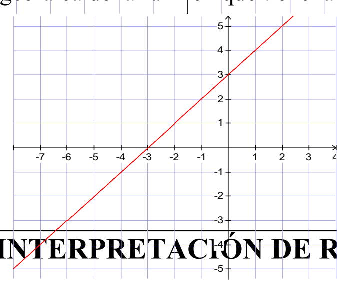
A continuación se enlistan los temas y la clasificación considerada en el plan de estudios de la Secundaria, según el Ceneval. Que sirvió de base para efectuar los análisis.

1 Aritmética	1.1 Números naturales
	1.2 Números enteros
	1.3 Fracciones
	1.4 Decimales
	1.5 Proporcionalidad
2 Álgebra	2.1 Monomios y polinomios
	2.2 Ecuaciones
	2.3 Plano cartesiano y funciones
3 Geometría	3.1 Ángulos entre paralelas y una secante
	3.2 Triángulos
	3.3 Semejanza
	3.4 Polígonos
	3.5 Sólidos
	3.6 Círculos
	3.7 Trigonometría

En la tabla siguiente se muestran los reactivos del examen con su respectiva clasificación, ubicación del tema y el nivel de desempeño logrado por los alumnos.

TABLA 1

NUM	REACTIVO	Clasificación (Tema, Dominio)	Sección	N.D.
1	Efectúa las operaciones siguientes y escribe el resultado en forma simplificada. 3+4·5=	(1,0) (1.2,0) Números enteros	Ar, CyO	D
2	3·4+5=			MF
3	$7+7\cdot2^3=$			D
4	$(7+7\cdot2)^3=$			D
5	32÷(4-5)=			MF
6	32÷4-5=			F
7	Una mercancía cuesta $200, se hacen dos descuentos sucesivos de 10% y 20%. ¿Cuánto se paga por la mercancía?	(1,1) (1.5,1) Proporcionalidad	Ar, RP	Me
8	¿Cuál es el porcentaje de descuento total?			D
9	Escribe el número que en el denominador hace que cada proposición sea verdadera. $\frac{3}{}\cdot\frac{25}{9}=\frac{5}{3}$	(1,0) (1.3,0) Fracciones	Ar, CyO	Me
10	$\frac{1}{}+\frac{9}{12}=\frac{4}{5}$			D
11	Se tiene una habitación de 4.50 metros por 6 metros y se cuenta con losetas cuadradas de 30 centímetros por 30 centímetros. ¿Cuántas losetas se requieren para cubrir la totalidad de la habitación?	(3,1) (3.4,1) Polígonos	Ge, RP	D
12	Encuentra el área de cada uno de los rectángulos siguientes.  Área=_____________	(3,0) (3.4,0) Polígonos	Ge, CyO	MF
13	 Área=_____________			MD
14	Si AB y CD son paralelas y el ángulo x mide 45° Encuentra la medida de y. 	(3,0) (3.1,0) Ángulos entre paralelas	Ge, CyO	MF
15	Las diagonales de un rombo miden 18 y 24 ¿cuánto mide cada lado del rombo?	(3,0) (3.2,0)	Ge, CyO	D
NUM	**REACTIVO**	**Clasificación** (Tema, Dominio)	**Sección**	**N.D.**
16	El perímetro del cuadrado de la figura es de 8 metros, determina el área de la región sombreada. 	(3,0) (3.6,0) Círculo	Ge, CyO	D

17	La suma de las soluciones de las ecuaciones 3x-13 = 8x+2, 2z+11=1 es:	(2,0) (2.2,0)	Al, CyO	D
18	El costo de "x+3" cuadernos es 75 pesos, ¿cuánto cuesta cada cuaderno?	(2,0) (2.1,0)	Al, CyO	MD
19	Una persona pasa frente al televisor cuatro horas diarias. En un año pasará ___________ horas frente al televisor.	(2,0) (2.1,0)	Al, CyO	F
20	En un t años pasará ___________ horas frente al televisor.			MD
21	La fórmula para convertir grados Celsius (°C) a grados Fahrenheit (°F) es: $$°F = \frac{9}{5}°C + 32$$ ¿Qué cantidad de grados Celsius corresponde a 70°F?	(2,0) (2.1,0)	Al, CyO	MD
22	Un cuaderno cuesta $28 más que un lápiz. y cinco lápices y dos cuadernos cuestan $91. ¿Cuánto cuesta cada artículo?	(2,1) (2.2,1)	Al, RP	Me
23	Traza la gráfica de y=2x-3 	(2,0) (2.3,0)	Al, CyO	D
24	Obtén la expresión algebraica de la función que tiene la siguiente gráfica: 	(2,0) (2.3,0)	Al, CyO	MD

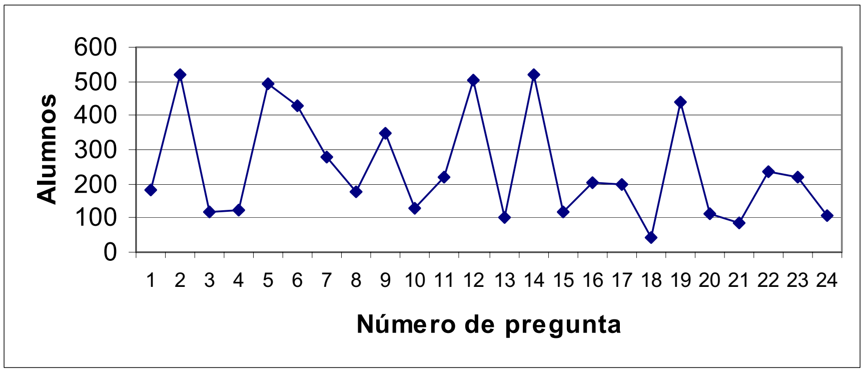
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Para la realización de esta etapa se llevó a cabo la siguiente metodología: se aplicó el examen a los alumnos de nuevo ingreso durante el periodo de inducción, es decir, previo al inicio de clases, después se capturaron los resultados en una base de datos en excel y posteriormente se elaboraron diferentes gráficas para comparar los resultados.
La muestra poblacional seleccionada para cada una de las generaciones fue la siguiente: 563 para la generación 2002-2003, 580 para la generación 2003-2004 y 589 para la generación 2004-2005.
Las respuestas de las preguntas se analizaron e interpretaron de dos maneras distintas: en la primera se consideró el criterio de niveles de desempeño para cada uno de los reactivos utilizando los rangos de niveles de desempeño que se muestran en el siguiente cuadro:

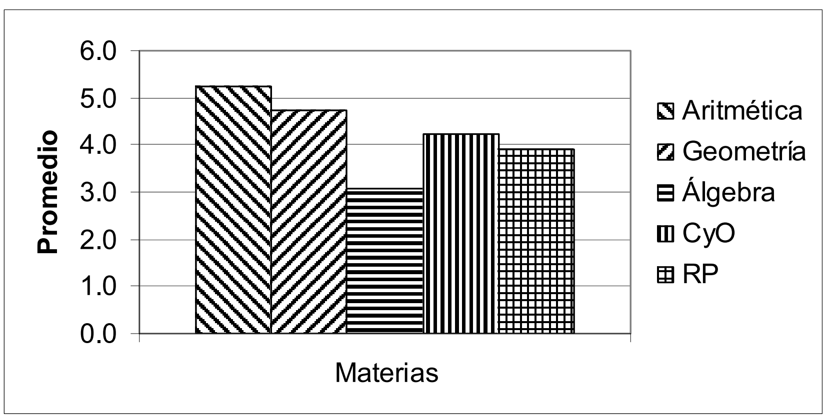
Nivel de desempeño	Rangos de porcentajes
Muy difícil (MD)	0 a 20 %
Difícil (D)	21 a 40 %
Media (Me)	41 a 60 %
Fácil (F)	61 a 80 %
Muy fácil (MF)	81 a 100 %

Los resultados de este análisis se incluyeron en la tabla 1, en la cual se puede observar que cinco reactivos fueron calificados como MD, diez como D, tres como Me, dos como F y cuatro como MF.

Para la realización del segundo análisis, se consideró la calificación de cada alumno para cada una de las materias (aritmética, álgebra, geometría, CyO y RP), se obtuvo el promedio grupal y el promedio generacional. A continuación se presenta una gráfica de frecuencias de respuestas correctas logradas por los alumnos.



En la gráfica siguiente se muestra el promedio obtenido en estos tres años por los alumnos en cada una de las materias (Aritmética, Álgebra y Geometría, Conceptos y Operaciones y Resolución de Problemas). Se puede apreciar que el mejor desempeño se ha obtenido en aritmética, seguido por geometría y al final álgebra. Por otro lado, los resultados en el desempeño en la resolución de problemas y los reactivos conceptos y operaciones son prácticamente equivalentes. Sin embargo los resultados no son halagadores ya que están por debajo de una calificación aprobatoria.



CONCLUSIONES

A partir de los datos mostrados en las tablas y gráficas anteriores se pueden resolver los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cuáles fueron las preguntas difíciles, o las muy difíciles?

- ¿Cuales preguntas los porcentajes de respuestas correctas entre los estudiantes de mejor desempeño contrastan fuertemente con los observados entre los estudiantes de menor desempeño?
- ¿Qué preguntas resultaron difíciles aun para los alumnos de mejor desempeño?
- ¿Qué preguntas resultaron fáciles, o accesibles para los alumnos de menor desempeño?
- ¿Cuáles preguntas resultaron muy fáciles o relativamente fáciles?

Después de revisar las preguntas anteriores se debe realizar otro análisis considerando los siguientes aspectos:

- ¿Qué causas pudieron propiciar que una pregunta no fuera contestada? (su redacción, los conocimientos que eran necesarios para abordar el problema, la posición del reactivo en el examen, etc.)
- ¿Cuales fueron los errores que los alumnos cometieron frecuentemente?
- En que caso se trata de errores conceptuales.
- En que caso se trata solamente de falta de destreza y agilidad en los cálculos.

Por otro lado, a partir de este análisis se han planteado en el cecyt varias acciones de mejora continua que tienen por objetivo ayudar a mejorar el rendimiento de los alumnos, de manera que puedan recordar y aprender los conceptos básicos y las competencias necesarias para afrontar con buenos resultados los cursos de matemáticas del bachillerato.
La acción más importante es la puesta en marcha de talleres sabatinos de matemáticas (álgebra, geometría y cálculo).

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995) Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.) ***Ingeniería en Educación Matemática***. Grupo Editorial Iberoamérica.

IPN, (1994). ***Modelo Educativo "Pertinencia y Competitividad"***.

IPN, (2003). ***Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN.***

National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, (2000). ***Principles and Standards for School Mathematics***. (http://standards.nctm.org/)

Rico, Luis (1995). ***Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.*** Grupo Editorial Iberoamérica.

UN ESTUDIO SOBRE FACTORES QUE OBSTACULIZAN LA PERMANENCIA, LOGRO EDUCATIVO Y EFICIENCIA TERMINAL EN LAS ÁREAS DE MATEMÁTICAS DEL NIVEL SUPERIOR: EL CASO DE LA FACULTAD DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán, México
alanda@tunku.uady.mx
Campo de investigación: Reprobación escolar. Nivel educativo: Superior
Proyecto Financiado por el Fondo Mixto de Fomento a la Investigación Científica y Tecnológica CONACYT- Gobierno del Estado de Yucatán, México

Resumen

Por lo regular, los problemas de reprobación y rezago suelen ser estudiados con métodos cuantitativos de investigación, la recolección de datos se lleva a cabo con la aplicación de cuestionarios centrados en aspectos más de tipo sociocultural, socioeconómicos, de orientación vocacional, de hábitos de estudio e incluso de infraestructura institucional. Por nuestra parte, exponemos un trabajo que ofrece un acercamiento al estudio de factores y causas de reprobación, rezago y deserción en el nivel superior desde una perspectiva metodológica distinta, basada en los métodos e ideas de investigación en *Matemática Educativa*. Específicamente, se toca el problema de *reprobación* y *rezago* en las asignaturas de cálculo que se imparten en las áreas de ciencias matemáticas y ciencias computacionales en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Introducción

Es sabido que una de las mayores preocupaciones de las Instituciones de Educación Superior (IES), ha sido lograr mejorar sus indicadores de eficiencia terminal y logro educativo, al tiempo que abatir el rezago y deserción escolar. Martínez (2002), señala que la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES), ofrece la cifra de 39% como promedio nacional de eficiencia terminal, destacando que la misma ANUIES lo refiere como porcentaje de titulación. No obstante, datos ofrecidos por Díaz de Cosio (1998) citado en Martínez (2002), refiere que a nivel nacional, en promedio, de cada 100 alumnos que comienzan una carrera de nivel licenciatura, 60 terminan las materias en un plazo de cinco años y solamente 20 de éstos obtienen el título, lo que significaría una eficiencia con titulación de solamente 20%.

La Universidad Autónoma de Yucatán, es la única universidad pública en la península que atiende licenciaturas en ciencias matemáticas y computación. Su Facultad de Matemáticas recibe alrededor de 250 estudiantes por año distribuidos en 6 licenciaturas. De este número de estudiantes, aproximadamente la tercera parte de ellos concluyen sus estudios. Es decir, existe un alto índice de reprobación y deserción y, bajos índices de egreso y aprovechamiento.

Cerca de los últimos 20 años, la Facultad de Matemáticas ha presentado problemas de permanencia y eficiencia terminal, particularmente, en las licenciaturas de matemáticas y ciencias de la computación. Sin duda, este hecho se ha visto influenciado por el elevado incremento en sus índices de rezago y deserción escolar. Tal incremento se ha asentado mayormente en los primeros semestres de estudio y de manera muy particular, en las áreas de cálculo y álgebra. Estimaciones realizadas en la propia facultad, sugieren que el tránsito de los estudiantes del primer al segundo año anda alrededor del 60 o 70%.

De esta manera, el compromiso social de formar a esta cantidad de profesionales, advierte la clara necesidad de analizar a detalle, el tipo de factores y causas que afectan negativamente los indicadores de permanencia, eficiencia terminal y por ende, el logro educativo en dicha dependencia. En esta facultad, al igual que en otras dependencias de educación superior en nuestro país, se han implementado diversas acciones remediales y emergentes ante este tipo de problemas. Por ejemplo, se ha llevado acabo la realización de cursos propedéuticos y la implementación de talleres extracurriculares de cálculo a fin de abatir el problema. Sin embargo, los resultados no han sido los deseables y efectivos que se podría esperar. En nuestra opinión, esto obedece por un lado, a que en esencia no existe una cultura de seguimiento y evaluación sistemática del educando en la dependencia y por otro, a la poca o nula evidencia empírica sobre los factores que provocan el problema. Esto me llevó junto con otros colegas de la facultad, a plantearnos como proyecto de investigación, el análisis de factores y causas que inciden negativamente en los asuntos de reprobación, rezago y deserción al interior de la dependencia, concretamente, en aquellos factores que tienen que ver con la asignatura de cálculo. Consideramos que nuestros hallazgos permitirán generar conocimiento confiable y de fondo sobre tales aspectos, al tiempo que se estarán sentando las bases para el desarrollo de acciones en pro de esta situación que coexiste.

Antecedentes y marco referencial

Es sabido que los estudios para explicar los problemas relacionados con el proceso de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo se han tratado desde distintas perspectivas teóricas y con diversos enfoques. Tomemos como ejemplo, la temática: "El futuro del cálculo infinitesimal" atendida por el congreso Internacional de Educación Matemática, ICME-8 por sus siglas en inglés, celebrado en el año de 1996 en la ciudad de Sevilla, España. Al tenor de dicha temática, se discutieron aspectos asociados al entendimiento de los problemas que derivan del proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo infinitesimal en las distintas instituciones de educación media y superior. Asimismo, se reflexionó respecto a los nuevos paradigmas de la matemática contemporánea y las diversas reformas del cálculo que se vivía en distintos países (Cantoral, 2000).

Lo anterior nos permite ofrecer un panorama de la magnitud que ha alcanzado el interés por producir entendimientos sobre las problemáticas asociadas al aprendizaje del cálculo, vía su enseñanza. En esta dirección, podemos encontrar estudios que reconocen la pertinencia y relevancia de disponer de conocimiento entorno a los problemas que genera el aprendizaje de un concepto matemático particular (Demana, Dolores, Sánchez, Alanís, Azcárate, Dubinsky, Cantoral, 2000; Aparicio, Bloch, 2003; Przenioslo, 2004), hasta estudios que marcan reflexiones profundas sobre las reformas al currículo matemático (Dubinsky, 1992; Hitt, 1998; Artigue, 2000). No obstante, en nuestras instituciones de educación media y superior, se mantiene vivo un problema que a todos preocupa o debiera preocupar, este es, los asuntos de reprobación, rezago y deserción entre los educandos del área de ciencias e ingenierías. Al respecto y desde nuestra óptica, la información reportada en la literatura resulta insuficiente en tanto que no se articula con el estudio del quehacer académico-didáctico cotidiano de una dependencia o institución o más aun, del hacer al interior de las aulas.

Aspectos metodológicos

Los problemas que tienen que ver con el bajo rendimiento académico, la reprobación, el rezago y el abandono escolar, por lo regular suelen ser analizados desde una perspectiva de investigación cuantitativa, ignorando en cierto modo, la relevancia del aspecto cualitativo en la obtención de información.

Por nuestra parte, discutimos una alternativa de análisis de tales problemas. Ponemos especial atención, en el desarrollo de una metodología de investigación asociada a los métodos e ideas de investigación en matemática educativa. Por ejemplo, se pone en juego la realización de estudios de corte etnográfico que den cuenta sobre las costumbres didácticas del profesorado al interior de las aulas; se aborda el estudio del escenario escolar con sus actores principales: profesor, alumno y saber; y las interacciones que entre ellos suscita. Todo, bajo el supuesto de que la descripción y caracterización de dicho contexto, habrá de proveer referentes importantes sobre la forma en que se genera y difunde el conocimiento matemático al seno de una institución escolar. Esta forma de mirar el estudio de los problemas, exige la realización de un análisis detallado de los libros de texto que son usados en el desarrollo de los cursos, el estudio de las declaraciones y programas de asignatura, así como el diseño de instrumentos de corte cuantitativo que permitan la recolección y análisis de datos sobre factores y causas de reprobación, rezago y deserción, particularmente, en el área de cálculo.

El proyecto cuenta con la participación de tres matemáticos educativos, siete profesores que constituyen el grupo académico de Ecuaciones Diferenciales y Análisis de la misma facultad y un asesor externo, experto en el área de la matemática educativa. La duración del proyecto es de 24 meses distribuidos en tres etapas. La primera etapa tiene una duración de 10 meses, la segunda 8 meses y la tercera, 6 meses. En la primera etapa se consideró realizar un diagnóstico sobre posibles factores que pudieran tener incidencia directa en los asuntos de reprobación y rezago estudiantil en las 6 licenciaturas que se imparten en la facultad y de manera muy particular, en aquellos factores que se encuentran ligados a la reprobación y rezago en la asignatura del cálculo. Pues en efecto, es en la asignatura de cálculo, en donde se presentan los más altos índices de reprobación y rezago. En la segunda etapa, se contempla el diseño de estrategias tendientes a poner en juego los primeros resultados parciales de la etapa anterior y su respectivo análisis para la adecuación necesaria. La tercera etapa establece la implementación de las acciones y estrategias de tipo académico-administrativas que sugiera el grupo, a fin de ver mejorado los malos indicadores.

Lo desarrollado

Actualmente el proyecto se encuentra en la parte final de su primera etapa. De modo que me referiré a lo desarrollo en la misma y las reflexiones alcanzadas hasta el momento. Iniciaré mencionando el conjunto de actividades desarrolladas y la metodología de trabajo seguida.

Las actividades desarrolladas son:

- Análisis y documentación de los libros de texto respecto a la coherencia de los contenidos, enfoques y objetivos declarados en los programas de curso.
- Información sobre la organización, usos y enfoques, es decir, características del cálculo que se enseña y estudia en la facultad, esto, desde la perspectiva del personal académico.
- El diseño e implementación de dos instrumentos destinados a la identificación de factores y causas de reprobación y rezago por parte de los educandos, así como al análisis de las concepciones y dificultades que pudieran tener algunos estudiantes en el manejo de algunos temas y/o contenidos de cálculo.
- Recabar y documentar información cuantitativa sobre los índices de rezago, deserción y reprobación en cálculo I y cálculo II en las últimas tres generaciones en la facultad.
- La realización de estudios etnográficos sobre las costumbres didácticas de los profesores de cálculo al interior de las aulas.

Los primeros hallazgos

La reflexión de nuestros primeros hallazgos la centraré en los aspectos de orden cualitativo que en nuestra opinión, se pierden al realizar sólo estudios de corte cuantitativo. Para ello, mostraré algunos datos encontrados en uno de los estudios etnográfico realizados al interior de las aulas sobre la costumbre didáctica del profesor.

Situémonos en la clase de un profesor al momento de introducir el concepto de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva, y miremos la interacción entorno a dicho concepto matemático. El Profesor dibuja en la pizarra las graficas de las funciones $y = x$ y $y = x^2$.

Profesor: *Estas funciones son distintas, ¿cuáles serían las características principales que las hacen distintas?*

Am (estudiante mujer responde): *Una es una línea recta y la otra una parábola.*

Am: *En una (refiriéndose a* $y = x$*) hay imágenes negativas y en la otra (refiriéndose a* $y = x^2$*) solo positivas.*

Profesor: *Ajá, ¿que más?, ¿qué otra característica las hace distintas?*

Ah (estudiante hombre responde): *El rango.*

Profesor: *¿Qué va a ser el rango? (...) Las imágenes que puede tener.*

El profesor dice cuál es el rango de $y = x$ y de $y = x^2$

Profesor: *A ver, ¿algo más?*

El profesor dibuja la gráfica del valor absoluto $y = |x|$ al tiempo que expresa la afirmación siguiente: *ahora, el valor absoluto tiene algo común con esta (señalando* $y = x^2$*) pero distinta de* $y = x$*, ¿qué es?*, inmediatamente él mismo contesta, *igual vemos que son positivos*, *¿algo más?* (…). *El rango es nada más de cero a infinito. Queremos encontrar una característica más que nos va a servir. (...)*

Profesor: *Vamos a ver, aquí (señalando el eje* y *en la función* $y = |x|$*) si tomamos el 2, ¿cuántos puntos en el eje* x *tienen ese valor?, ¿cuántos puntos en el eje* x *tienen la imagen 2?, ¿o cuáles van a ser?*

Am: El 2.

Profesor: *El 2 tiene como imagen 2 y el -2 tiene como imagen 2, también tiene imagen 2. Aquí estos puntos se van a la misma imagen. Aquí también (señalando* $y = x^2$*).*

A continuación repite los mismos argumentos para la imagen 3 en la función $y = x^2$

Profesor: *¿Aquí sucede lo mismo (señalando* $y = x$*)?*

Los estudiantes contestando simultáneamente, responden no.

Profesor: *Pues no, todos se van a una sola imagen.*

Observemos como el plan del profesor es considerar esas dos funciones, la lineal y la cuadrática, y de algún modo, el profesor esperaba que de manera inmediata los estudiantes mencionaran aquella diferencia que caracteriza a las funciones inyectivas. Como esto no ocurre, entonces modifica su discurso (no así su intencionalidad). Luego entonces, percibe la necesidad de dibujar la gráfica de la función valor absoluto y vuelve a preguntar como queriendo inducir al estudiante a esa respuesta. Es decir, ¿es natural o no que un estudiante al ver esos ejemplos note esa diferencia?, es posible que para algunos estudiantes lo sea, pero para otros no, empero, notamos que allí no ocurrió. De este suceso, desprendemos que el profesor tiene preparado algo y al momento en que no se sigue el rumbo esperado, trata con mayor insistencia de inducirlo, ¡no cambia de estrategia! Lo anterior muestra en cierta medida, que el estudiante termina por ubicarse en un situación de enseñanza (inducida por el profesor), más no necesariamente de aprendizaje. Este tipo de elementos que brindan información sobre la práctica docente del profesor y las interacciones al interior del aula al momento de tomar una clase de matemáticas, generalmente no son considerados como factor de análisis de reprobación o rezago en la asignatura de cálculo.

Conclusiones

Consideramos que nuestro trabajo ofrece un acercamiento metodológico distinto al regularmente empleado en el estudio de factores y causas de reprobación, rezago y deserción en el nivel superior. Sostenemos, que esta forma distinta de tratar el estudio de los problemas de reprobación y rezago, particularmente aquellos que obedecen a áreas específicas del saber matemático escolar, a partir del uso de los métodos e ideas de investigación en *Matemática Educativa* provee de información significativa sobre el tipo de factores y causas que tienen incidencia directa en los aprendizajes y reprobación escolar en las áreas de ciencias e ingenierías.

Los resultados obtenidos hasta el momento, muestran ciertas inconsistencias en la extensión, profundidad y formalidad de los programas de los cursos de cálculo I y cálculo II. Por ejemplo, hemos observado que la bibliografía marcada en los programas de curso, es una bibliografía en su mayoría más a fin a las asignaturas de Introducción al análisis o análisis que a la asignatura de cálculo. De igual manera, se ha detectado que la cantidad de ejemplares de libros de texto disponibles en biblioteca, no es el mínimo necesario para atender a la cantidad de estudiantes de las 6 licenciaturas. Por otra parte, hemos descubierto que el enfoque que los docentes dan a las asignaturas de cálculo, invariantemente, es el mismo en todas las licenciaturas. Esto en opinión de algunos no debería ser así, sin embargo, los objetivos de los programas y la formación de los mismos profesores, parece estar determinando este hecho. Finalmente, cabe señalar que la práctica docente desarrollada en la facultad, desconoce de los resultados y avances de las investigaciones en matemática educativa, asunto que está en proceso de ser atendido mediante un programa de formación y capacitación docente.

Bibliografía

Aparicio, E., Cantoral, R. (2003). Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio sobre las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Epsilon 56*, 169-198.

Azcarate, P. (1998). La investigación matemática. Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa 3*(2), recuperado en http://www.uv.es/RELIEVE/v3n2/RELIEVEv3n2_0.htm

Azcárate, C., Deulofeu, J. (2000). Investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del análisis en España. En R. Cantoral (Ed.) *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 355-361). México, D.F., México: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal*. México, D.F., México: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México, D.F., México.: Thomson.

Dubinsky, E. (1992). A learning theory approach to calculus. En Z.A.Karian (Ed.), *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Theory* (pp. 43-55). MAA Notes 24, Washington.

Martínez, F. (2002). Estudio de la eficiencia en cohortes aparentes. En [Libros en línea] ANUIES, *Deserción, Rezago y Eficiencia Terminal en las IES: Propuesta metodológica para su estudio*

Romo, A. (2002). Los factores curriculares y académicos relacionados con el abandono y el rezago. En [Libros en línea] ANUIES, *Deserción, Rezago y Eficiencia Terminal en las IES: Propuesta metodológica para su estudio*.

Stage, K. (2001). Symbolic discourse and understanding in a college mathematics classroom. *The Journal of General Education,* 50 (3), 202-229.

DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD COOPERATIVA PARA EL TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE ASÍNTOTA

Cecilia Gaita Iparraguirre
Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú
cgaita@pucp.edu.pe

Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo – Gráfica y funciones

Resumen

El presente trabajo resulta de la experiencia realizada con un grupo de estudiantes universitarios de las especialidades de ingeniería en un primer curso de cálculo diferencial. Responde a una inquietud por garantizar un aprendizaje significativo del concepto de asíntota horizontal y vertical de una función real de variable real ya que en experiencias previas se observó que los estudiantes eran capaces de aplicar el algoritmo descrito en los libros de texto para hallarlas pero no mostraban una comprensión real de dicho concepto. Se optó por el diseño de una actividad cooperativa ya que ésta permitiría desarrollar en los alumnos la habilidad de argumentar ante sus compañeros sus respuestas a las preguntas que se formularan, antes de escribirlas en la hoja de trabajo.

I. Problemática

Pese a que la diferencia fundamental entre la Matemática Elemental, llámense cursos de precálculo, y el curso de Cálculo Diferencial radica en que mientras en la primera se tratan procesos finitos, en los otros se tratan procesos infinitos, no es esta idea la que trasciende para los estudiantes luego de llevar estos cursos de Matemática Superior. Según reportes de varios investigadores, los resultados que se obtienen al evaluar a los alumnos al finalizar los cursos mencionados, muestran que en general existe un buen manejo de algoritmos para calcular límites y derivadas pero que existen dificultades significativas para entender los procesos de límite, derivada e incluso entender que estos conceptos se relacionan con la cuantificación de la variación de una variable cuando otra varía.
En particular, en el tratamiento que se da al concepto de asíntota en los textos de cálculo no se propicia que los estudiantes puedan comprender lo esencial de este concepto. Y si además se considera que en la enseñanza de la matemática existen tres metas centrales: la retención, la comprensión y el uso o la aplicación de los conceptos en la resolución de problemas, entonces los procesos que se llevan a cabo en el aula resultan insuficientes para conseguir estos objetivos.

II. Características de la propuesta

a) Se consideraron actividades que ponían énfasis en clarificar el concepto de asíntota mediante la exploración con distintas funciones, la construcción de ejemplos y contraejemplos, y sobre todo con la interpretación gráfica.

b) Se plantearon preguntas que correspondían a distintos niveles de aprendizaje. Así, el alumno debía conocer el concepto de asíntota, comprenderlo, aplicarlo, analizar situaciones en las que éste estaba presente y finalmente sintetizar lo aprendido en la creación de funciones no triviales que cumplieran determinadas condiciones referidas a asíntotas verticales y horizontales.

c) Las actividades propuestas requerían un trabajo cooperativo. Se consideraron tres etapas:

- en la primera, el trabajo era individual con la finalidad de explorar sobre los conocimientos previos de los estudiantes.
- en la segunda, el trabajo se realizó en parejas en donde cada par se concentraría en el estudio de un tipo de asíntota, y
- en la tercera etapa, el trabajo fue en grupos de 4 alumnos en donde debían resolver un problema complejo que requería del aporte de las dos parejas.

III. Presentación de la propuesta trabajada

Parte I: Trabajo individual

a) Graficar una función que tenga simultáneamente asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

b) Expresar empleando límites lo graficado en a).

Parte II: Trabajo de la pareja 1 Tiempo: 30 minutos

Graficar una función definida por tramos, cuyo dominio sea todos los reales y que verifique las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$$

Luego dar su regla de correspondencia.

Parte II: Trabajo de la pareja 2 Tiempo: 30 minutos

Analizar si la siguiente función posee asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Si la respuesta es afirmativa, encontrarlas.

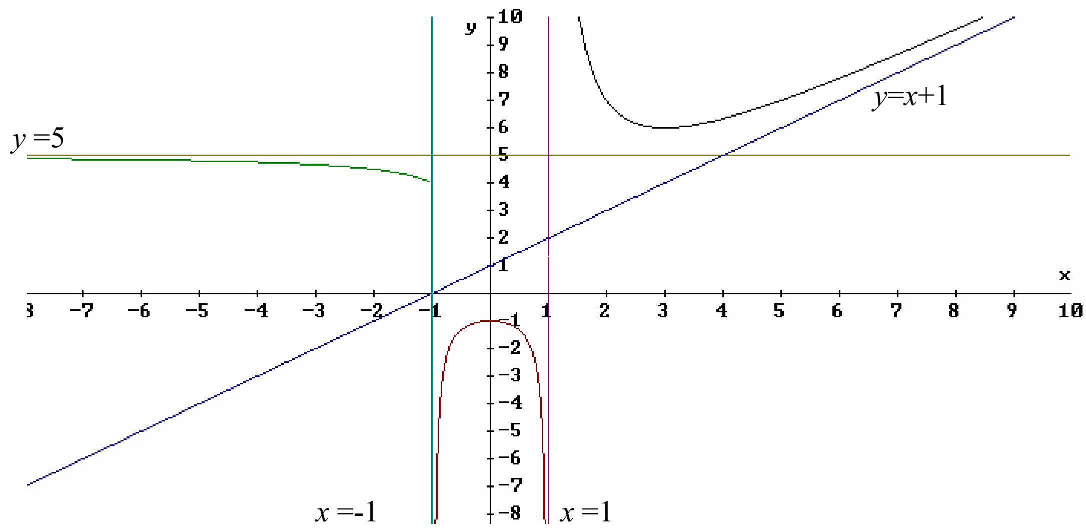
$$g(x) = \frac{x^3(x+1)}{x(x-2)^2}$$

Luego, hacer un esbozo de su gráfica teniendo en cuenta el resultado anterior.

Parte III: Grupo de 4 estudiantes Tiempo: 50 minutos

La siguiente es la gráfica de la función *f* y las rectas mostradas son las asíntotas de dicha función. Encontrar una posible regla de correspondencia para *f*.

Nota: *f* se puede definir a través de una función definida por tramos.



<u>Evaluación individual final</u>

Dar la regla de correspondencia de una función racional *f* (cociente de dos polinomios) que cumpla las siguientes condiciones:

i) Dom(*f*)= IR-{-3; -2; 2; 3}

ii) $\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{9}{2}$.

iii) El $\lim_{x\to 3} f(x)$ es un número real.

iv) Las rectas x = -3 y x = 2 son asíntotas verticales de su gráfico.

Respuestas de los alumnos:

(alumno 1) $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\quad}{x+3} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{\quad}{x-2} = +\infty$

(alumno 2) $y = \frac{9x+9}{(x+3)(x-2)}$

(alumno 3) $f(x) = \frac{-90(x^2 - x - 6)}{(x^2 - 9)(x^2 - 4)}$ Pero no cumple que $\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{9}{2}$

(alumno 4) Antes que nada f debe tener x+2 en el numerador para que se elimine con el denominador ya que –2 no pertenece al dominio.

Numerador de f(x)=(x-3)(x+2)(x^3+4x-2)

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+2)(x^3+4x-2)}{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)}$$

i) dom(f)=R-{-3; -2; 3; 2} cumple

ii) $\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)(x^3+4x-2)}{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)}=\frac{(-5)(-18)}{(-5)(-4)}=\frac{9}{2}$ cumple

iii) $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)(x^3+4x-2)}{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)}=\frac{(27+12-2)}{(6)(5)}=\frac{37}{30}$ cumple

iv) y las asíntotas también son x= –3, x= 2, x= -2 y x= 3.

IV. Resultados obtenidos

Durante el trabajo en aula los resultados obtenidos fueron satisfactorios; se observó un gran nivel de interactividad por parte de todos los estudiantes, se notaba un alto grado de motivación al resolver los problemas planteados.
En la evaluación individual posterior, el 70% de los alumnos resolvió exitosamente la situación problemática presentada pese a que ella realmente era nueva para los estudiantes pero aplicaron adecuadamente los conceptos trabajos en la actividad en grupo nueva que involucraba el concepto de asíntota horizontal y vertical.

V. Bibliografía

Almeida, *et al*.(1994). *Metodología de la enseñanza de la matemática* (Tomo I). México: Universidad Autónoma de Sinaloa. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, Ciudad de la Habana, Cuba.

Artigue, M. (2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? En R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 93-116). Sevilla, España. Grupo Editorial Iberoamérica.

Perkins, D. (1992). *Smart schools*. Nueva York: Basic Books.

Stewart, J. (1999). *Cálculo: Conceptos y contextos*. México: International Thomson Editores.

EL USO DE MATERIALES EDUCATIVOS EN LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Guillermo Jaime Liu Paredes
Colegio Villa María –La Planicie- Lima Perú
gliu@mail.vmaria.edu.pe

Campo de investigación: Modelación matemática; Nivel educativo: Medio básico y Medio superior.

RESUMEN

El uso de materiales didácticos y recursos visuales para la enseñanza y aprendizaje de la matemática se viene haciendo más frecuente, pues se está obteniendo mejores resultados en el logro de procesos de aprendizaje más dinámicos y efectivos. Esto se está dando principalmente en los niveles de primaria y secundaria; pero también ya se viene replanteando con éxito en los niveles de la educación superior, aprovechando los avances en las tecnologías de la información y la comunicación.

Para el presente trabajo, la idea es aprovechar los sentidos, principalmente el tacto y la vista, como ayuda para la construcción de conocimientos. Se busca mostrar que los alumnos pueden desarrollar sus capacidades de encontrar regularidades y de formular generalizaciones.

INTRODUCCIÓN:

Cuando vamos a tratar un determinado tema, cualquiera que sea el curso, en numerosas ocasiones el profesor presenta cierto material para llamar y captar la atención o para motivar al alumno, por lo general, solo se logra de manera parcial que el alumno perciba dicho objetivo, la falta de acción para el descubrimiento hace que muchas veces se torne insuficiente. Sin embargo la manipulación de un material concreto hará despertar mejor los sentidos y agudizará su mente para resolver un problema y así alcanzar ese objetivo central en matemáticas, la generalización. En este caso estamos hablando de los bloques de Cuisenaire, que se constituyen en un medio importante en la búsqueda de determinadas relaciones entre ellos en el afán de lograr no solo una mejor atención sino un aprendizaje significativo.

Los bloques de Cuisenaire vienen en envases con un conjunto de piezas de material sintético, como son triángulos, cuadrados, trapecios, paralelogramos de dos tipos y hexágonos, con los cuales hemos diseñado un conjunto de varias actividades.

A través de los bloques de Cuisenaire, los alumnos, observando un pequeño conjunto de reglas, como en cualquier juego, buscarán de manera adecuada, iniciar los pasos fundamentales para la ejecución de la actividad programada. Esta primera etapa contribuye a romper la vieja tradición del profesor expositor. La idea es empezar con algo muy concreto para luego pasar a lo abstracto. La abstracción comienza a producirse cuando el alumno llega a captar el sentido de las manipulaciones que hace con el material. Este es un paso fundamental para motivar que los alumnos descubran conceptos matemáticos observando relaciones de regularidades y formando generalizaciones.

Por otro lado mediante la modelación matemática, el alumno puede explorar fenómenos semejantes a la realidad, e incluso le brinda la oportunidad de crear, manipular e interpretar situaciones imaginarias al considerar datos irreales. Esto crea una visión más amplia de los fenómenos de las ciencias, favoreciendo así la comprensión de conceptos. Pues los modelos matemáticos sirven para predecir lo que sucedería en una situación real, tanto en condiciones normales, como al modificar algún factor que intervenga en el modelo (Monchón & Rojano, 1998).

Es evidente como también propone la filosofía constructivista, que para los alumnos no hay aventura mas apasionante que la del descubrimiento y que la mejor manera de disfrutarla es cuando él mismo ha sido capaz de experimentar dicho descubrimiento

A continuación incluiremos solo 5 preguntas de las 13 que tiene esta Actividad y así dar un resumen de como alumnas entre 16 y 17 desarrollaron trabajando con dos piezas simultáneamente triángulos y hexágonos, lo escrito en negrita e itálica es el desarrollo hecho por las alumnas y en Relme19, en el Taller que lleva este mismo nombre.

TRIÁNGULOS Y HEXÁGONOS **PRIMERA PARTE**

MATERIALES.- triángulos y hexágonos, cinco piezas de cada uno. Observa que son polígonos regulares y asume que sus lados son iguales y de longitud uno.

OBJETIVOS

1. Encontrar regularidades y expresarlas algebraicamente
2. Resolver problemas y demostraciones usando generalizaciones.

INSTRUCCIONES: Completa la TABLA (1) siguiendo las siguientes instrucciones

a) Toma un triángulo y halla su perímetro, n=1.
b) Toma un hexágono, únelo al triángulo por un lado y halla el perímetro de esta segunda figura, n=2.
c) Sobre la última figura, agrega otro triángulo a un lado del hexágono y halla su perímetro.
d) Continúa uniendo hexágono, triángulo, etc. en forma alternada. Cada vez que se agrega un triángulo o hexágono debes unirlo a la última pieza agregada y no debe ser unida por un lado a ninguna pieza anterior a la última.

I. PERÍMETROS: TABLA (1)

Figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Perímetro (P)	3	7	***8***	***12***	***13***	***17***	***18***	***22***	***23***	***27***

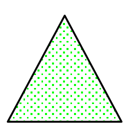


Figura 1 (n=1)

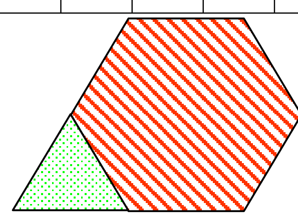


Figura 2 (n=2)

II. TRIÁNGULOS: Observa los lugares impares de las figuras (n) de la TABLA (1). Estos corresponden a los casos en que se ha ido añadiendo un triángulo.

Completa la TABLA (2). Los valores se deben extraer de la TABLA (1).

- En la primera fila aparece el número de triángulos (t) que se han ido agregando en forma sucesiva.

- En la segunda fila aparece el lugar de la Figura (n). **Lugares impares**.
- En la tercera, el perímetro correspondiente, ya sea por el número de triángulos $P_1(t)$ agregados o por el lugar que ocupa la Figura impar $P_2(n)$.

TABLA (2)

Triángulos (t)	1	2	3	4	5	6
Figura (n)	1	3	5	*7*	**9**	***11***
Perímetro $P_1(t)$, $P_2(n)$	3	8	***13***	***18***	***23***	***28***

1) Expresar **n** en función de **t :** **n** $= 2t - 1$
2) Expresar el perímetro en función de **t:** $P_1(t) = 5t - 2$

3) Expresar el P en función de **n** (n es impar) : $P_2(n) =$ **?**

Primera Forma:

Despejando t de: $n = 2t-1$; $\dfrac{n+1}{2} = t$

Reemplazando t en $P_1(t) = 5t - 2$

$$P_2(n) = 5\left(\frac{n+1}{2}\right) - 2 = \frac{5n+1}{2} \qquad \textit{O sea:} \qquad P_2(n) = \frac{5n+1}{2} \quad \forall n \in N; n : impar$$

Segunda Forma:

Los valores del perímetro corresponden a una secuencia de primer orden o una función de primer grado (ecuación de la recta), de la forma $P_2(n) = an + b$ **.**

Tomando dos pares ordenados (figura; perímetro) se forma un sistema de dos ecuaciones con dos variables para hallar las constantes a, b.

$$\left.\begin{array}{l} (1,3) \to \quad a + b = 3 \\ (3,8) \to \quad 3a + b = 8 \end{array}\right\} \quad a = \frac{5}{2} \;;\; b = \frac{1}{2} \qquad \to \qquad P_2(n) = \frac{5n+1}{2}$$

III. <u>SUMA DE PERÍMETROS</u> : usa la TABLA (2) y completa la siguiente. Observa sólo
los lugares impares. Corresponden a los triángulos que se agregan en forma sucesiva.

TABLA (3)

Triángulos (t)	1	2	3	4	5	6
Figura (n)	1	3	5	*7*	***9***	***11***
Suma de Perímetros $S_1(t)$, $S_2(n)$	3	11	***24***	***42***	***65***	***93***

Observación: $S_1(t)$, es la suma de los perímetros en función del número de triángulos usados,

$S_2(n)$ es la suma de los perímetros en función de los lugares impares que ocupan las figuras. Si trabajamos en función de n (n=impar)

Para n = 1. El perímetro es 3.

Para n = 3. Se debe sumar el perímetro de la primera figura con el perímetro de la tercera.

Para n = 5. Se debe sumar el perímetro de la primera figura con el perímetro de la tercera y la quinta, y así se hará sucesivamente en forma acumulada, para los siguientes.

9) Hallar una expresión o fórmula para la Suma de perímetros: $S_1(t)$ (en función de t) : ***Como la secuencia correspondiente a los perímetros: 3 , 11 , 24 , 42 , 65 , 93 , …….. es de segundo orden. Proviene de una función de segundo grado.***

O sea: $S_1(t) = at^2 + bt + c$

Para hallar las constantes: a, b ,c tomamos tres pares ordenados (triángulo, perímetro) y los reemplazamos en la función y resolvemos un sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$(1,3) \rightarrow a + b + c = 3$$

$$(2,11) \rightarrow 4a + 2b + c = 11$$

$$(3,24) \rightarrow 9a + 3b + c = 24$$

Restando la segunda de la primera y la tercera menos la segunda, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + b = 8 \\ 5a + b = 13 \end{array}\right\} 2a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{2} ; b = \frac{1}{2} ; c = 0$$

Como consecuencia obtenemos la fórmula:

$$S_1(t) = \frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = \frac{5t^2 + t}{2}$$

10) Demostrar que si a la suma de los perímetros $S_1(t)$, se le agrega el siguiente término correspondiente al perímetro , se obtiene: $\frac{5t^2 + 11t + 6}{2}$

Teniendo en cuenta parte de la TABLA (2) . Primera y tercera filas.

Triángulos (t)	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***……***	***t***	***t + 1***
Perímetro	***3***	***8***	***13***	***18***	***23***	***…..***	***5t – 2***	***5(t+1)-2***

A la suma de los perímetros desde (1) hasta(t) triángulos, le sumamos el siguiente valor del perímetro:

$$S_1(t) + P_{t+1} = \frac{5t^2 + t}{2} + 5(t+1) - 2$$

$$= \frac{5t^2 + t}{2} + 5t + 3 = \frac{5t^2 + 11t + 6}{2}$$

CONCLUSIONES:

- Durante el año 2004 trabajé con toda una promoción de alumnas de Cuarto de secundaria (cuatro secciones) varias actividades relacionadas a los bloques de Cuisenaire hasta el mes de octubre. Después de 8 meses, en junio del 2005, quisimos comprobar qué tanto recordaban o habían aprendido en la modelación de fórmulas. Por ello, volvimos a trabajar con este mismo grupo de alumnas, aunque esta vez sólo lo hicimos con la mitad de participantes (dos secciones), y realizamos la actividad que ya hemos detallado. Los resultados fueron exitosos, pues casi todos los grupos terminaron la actividad, y aquellos grupos que no lo hicieron, manifestaron en la encuesta que se les tomó que el problema no fue la dificultad sino el tiempo.

- Esto nos permite afirmar que sí es posible lograr un aprendizaje significativo, cuando existen y se dan condiciones favorables para que los estudiantes trabajen por sí mismos y el profesor actúe sólo como un guía. Pues sino: ¿cuál sería la explicación al hecho de que las alumnas hicieran el trabajo sin grandes dificultades?

- Podemos observar que esta Actividad y afines involucran varios conceptos como son: sucesiones, ecuaciones de primer grado: de una variable, de dos variables y de tres variables, ecuaciones de segundo grado, funciones de primer grado y segundo grado, demostraciones (incluyendo la demostración por inducción matemática como se muestra de manera soslayada en la pregunta 10), finalmente conceptos geométricos de áreas y polígonos convexos. Todos estos objetos matemáticos refuerzan la parte cognitiva y contribuyeron en la modelación matemática del problema.

- Si uno de los objetivos de la matemática es la resolución de problemas, la modelación lograda a través de estos materiales, no solo involucra esta actividad sino que cambia la práctica docente y permite revertir el bajo gusto por el aprendizaje de las matemáticas. Es decir, vemos que si es posible que la motivación sea básicamente intelectual, mas que afectiva o emocional (por ejemplo, el asombrarse o deslumbrarse con manipular los bloques de Cuisenaire) puesto que la intención de resolver el problema parte del mismo objeto de estudio y trasciende hacia la curiosidad intelectual del alumno.

- Los bloques de Cuisenaire son un material muy rico, ya que permiten elaborar un número considerable de actividades. Cada tipo de piezas se puede trabajar de manera individual o haciendo combinaciones entre dos piezas distintas Un ejemplo de ello es el trabajo que hemos presentado con triángulos y hexágonos.

- Cuando al inicio mencionamos PRIMERA PARTE es por que de la TABLA (1) se han trabajado sólo con los lugares impares, es decir, cuando se han ido agregando triángulos uno a uno. De la misma forma una SEGUNDA PARTE incluye trabajar solo con los lugares pares, es decir, cuando se van agregando los hexágonos uno a uno. Es mas trabajar al revés, o sea iniciar con hexágonos y triángulos después dan resultados distintos. Lo que da lugar a un buen ejemplo de permutación.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, M., Aldana, J., Alsina, C., & Segarra, L. (2004). *Matemáticas re-creativas* . España: Grao

Alsina, C., Catalá, C., Burgués, C. & Fortuny, J. *(1997). Invitación a la didáctica de la geometría* .España: Síntesis

Calero, M.(2003). *Educar jugando.* México: Alfaomega

Corbalán,F. (2002*) Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* España: Síntesis

Guzmán,M.(1999).*Tendencias innovadoras en educación Matemática* .Lima: Moshera

Martinez, A. & Rivaya, F. (1998). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría.* .España: Síntesis.

COMPETENCIAS HUMANAS GENERALES EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA

Santa Daysi Sánchez González
Colegio Babeque Secundaria. Universidad Autónoma de Santo Domingo. Rep. Dominicana
j.luciano@verizon.net.do

Resumen.

Todos valoramos el papel de las instituciones educativas en el desarrollo del ser humano y en la transmisión de los valores y principios de la sociedad. La influencia del mundo económico y del mundo científico ha sido transferida al ámbito educativo a través de la incorporación de diferentes conceptos como son los de calidad y competencia, entre otros.

Enrolados en la construcción del proyecto curricular del Colegio Babeque Secundaria, de República Dominicana, decidimos adoptar el enfoque de competencias. La experiencia compartida por la comunidad educativa fue muy rica. Seleccionamos y definimos doce competencias humanas generales, que permeando todas las áreas programáticas, como ejes transversales, contribuirían a formar el ser humano integral definido en nuestro proyecto de centro.

En este trabajo se destaca la experiencia de los profesores del área de Matemática del Colegio, en el proceso de selección y definición de estas competencias, así como de su aplicación al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Contextualización.

El Colegio Babeque Secundaria es un centro educativo auspiciado por la Fundación Pedagógica Dominicana Inc., institución sin fines de lucro, nacida en el año 1977 en la ciudad de Santo Domingo, capital de la República Dominicana. El 75% de su población egresa de Babeque Primaria lo que relaciona institucionalmente a ambos colegios. La condición sin fines de lucro favorece la utilización óptima de los recursos para ofertar una educación de calidad.

En el proyecto educativo de centro (2001) se definen los principios que fundamentan la práctica educativa en el colegio. Se concibe el centro educativo como un espacio formativo, cultural, social que ayuda al individuo a interpretar la realidad y a encontrar significados. Se visualiza la institución como abierta, actualizada y de vanguardia; integrada y democrática, que promueve la auténtica participación y el genuino interés por los seres humanos.

Con esta filosofía, junto a Babeque Primaria, el colegio Babeque Secundaria ha mantenido un proceso de reflexión continua y asunción crítica de los lineamientos de la transformación curricular iniciada en el país en los años 90, organizando cursos y talleres de crecimiento orientados a incrementar la capacidad intelectual de los profesores, actualizando sus conocimientos en las diferentes áreas, así como su formación integral. Además, ha puesto en ejecución un programa de formación magisterial para implementar en las aulas el desarrollo de las destrezas de pensamiento y de la conciencia moral y ética, y se ha involucrado en la construcción de un currículo basado en competencias humanas generales.

Competencias humanas generales.

Hablar de competencias en educación lleva a considerar su definición desde diferentes puntos de vista. Algunos la asumen como aprender un contenido desde el conocimiento, como forma de saber. Otros entienden competencia como el saber hacer por la práctica, como capacidad, habilidad, conjunto de atributos, conjunto de tareas, o como guía para ordenar los contenidos del currículo. En el colegio Babeque se ha asumido la concepción del Dr. Ángel Villarini (2000), que define competencia como aquella "*habilidad general producto del dominio de conceptos, destrezas y actitudes, que el estudiante demuestra de forma integral y a un nivel de ejecución previamente establecido por un programa académico que la tiene como su meta*".

En el proceso de construcción del currículo basado en competencias humanas generales en el colegio Babeque se pueden destacar varias fases que no necesariamente se han dado de forma lineal. A saber:

- Fase de construcción y definición de las competencias generales.
- Fase de elaboración de los componentes de las competencias.
- Fase de análisis de las competencias en las áreas académicas.
- Fase de elaboración de sub-componentes que permitan establecer objetivos a lograr según niveles.

La primera y segunda fase permitió la selección y definición de doce competencias humanas generales, así como la descripción de los componentes que rescatan las características esenciales de cada una, para su definición. Estas competencias reflejan la filosofía del colegio y son el producto de un proceso de reflexión, discusión y deliberación entre equipos multidisciplinarios de los profesores de los dos niveles del colegio: básico y medio. Estas competencias son:

- Pensamiento sistemático, creativo y crítico.
- Comunicación significativa y creativa
- Interacción social efectiva.
- Autoestima y autoconocimiento.
- Habilidad psicomotora.
- Conciencia moral y ética.
- Sensibilidad estética.
- Quehacer científico y tecnológico.
- Conciencia de la salud integral
- Conciencia histórico-cívica
- Conciencia económica y administrativa.
- Sentido de trascendencia

Los profesores del área de Matemática tuvieron a su cargo presentar la propuesta correspondiente al pensamiento sistemático, creativo y crítico. Seleccionadas y definidas las doce competencias humanas generales, la pregunta generalizada era cómo reflejar todas estas ideas en el trabajo cotidiano. Las planificaciones, el discurso y la práctica de los profesores empezaron a estar salpicadas por estas competencias.

Análisis de las competencias en las áreas académicas.

Cada área académica analizó las competencias generales y seleccionó aquellas que más se relacionan con su naturaleza, de modo que pudieran ser desarrolladas con las estrategias propias de las asignaturas. Se asumieron algunos componentes de las competencias seleccionadas, tal como estaban definidos, algunos se modificaron y otros se desestimaron. Las áreas hicieron las adecuaciones a las definiciones de los componentes de las competencias seleccionadas, de acuerdo a las particularidades de cada una. En el área de Matemática las competencias se enfocaron en la capacidad de utilizar el conocimiento para enriquecer la comprensión y promover la capacidad de acción. Se seleccionaron ocho competencias, de las cuales presentamos su definición general y los componentes adecuados al área. Son:

PENSAMIENTO SISTEMÁTICO, CREATIVO Y CRÍTICO. Busca información y construye conocimientos de forma sistemática, creativa y crítica, con el propósito de conocer la realidad y transformarla.
-Construye conocimientos matemáticos utilizando las destrezas de pensamiento.
-Examina y desarrolla argumentos matemáticos.
-Plantea problemas y busca soluciones matemáticas para la toma de decisiones.
-Es reflexivo y crítico al evaluar su pensamiento y el de los demás, valiéndose de valores y criterios matemáticos.

COMUNICACIÓN SIGNIFICATIVA Y CREATIVA. Comprende y expresa ideas, razonamientos y sentimientos de forma lógica, sistemática, simbólica y creativa.
-Codifica, decodifica e interpreta el lenguaje matemático.
-Comunica sus ideas matemáticas, de manera clara, precisa y lógica con sentido de pertinencia de acuerdo con el contexto en que se encuentra.
-Se comunica a través de signos, símbolos, imágenes y gráficos matemáticos de manera significativa y creativa.

INTERACCIÓN SOCIAL EFECTIVA. Establece vínculos colaborativos con personas, grupos e instituciones tomando como base los valores humanos universales.
-Comparte ideas y experiencias matemáticas con otras personas en un clima de respeto, confianza y reciprocidad.
-Respeta la diversidad con el fin de promover la convivencia en armonía para el crecimiento mutuo.
-Toma conciencia del valor de la matemática para la toma de decisiones conciliadoras en situaciones de conflictos.

AUTOESTIMA Y AUTOCONOCIMIENTO. Reconoce sus emociones, fortalezas y limitaciones para valorarse, aceptarse, superarse y participar en la vida de modo responsable y autónomo.
-Valora y cultiva sus fortalezas para la matemática, acepta sus limitaciones y hace una reflexión constructiva acerca de sus errores.

CONCIENCIA MORAL Y ÉTICA. Siente, juzga, delibera y actúa conforme a valores morales, de modo coherente, perseverante y autónomo.
-Fomenta y practica en forma autónoma valores universales que son inherentes a la naturaleza de la matemática y que potencian la condición humana.

SENSIBILIDAD ESTÉTICA. Percibe, aprecia, crea y disfruta de obras, objetos, acciones y situaciones, en su dimensión artística, estética y social.
-Valora y disfruta la belleza interna de la estructura de la matemática.
-Evalúa la estética en la presentación de los trabajos e investigaciones en sus diversas manifestaciones.
-Trabaja con creatividad y originalidad estética en sus quehaceres matemáticos.

QUEHACER CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO. Investiga y analiza los fenómenos naturales y sociales para construir conocimientos científicos y tecnológicos y aportar soluciones.
-Analiza los hechos haciendo uso de la metodología de la investigación para construir conocimientos matemáticos.
-Aplica de forma creativa la tecnología y los procesos tecnológicos en la solución de problemas aplicando la Matemática.

CONCIENCIA ECONÓMICA Y ADMINISTRATIVA. Establece prioridades y estrategias que permiten de modo sustentable la satisfacción de necesidades humanas con el mínimo de recursos.
-Cuantifica los recursos humanos, naturales y económicos para establecer estrategias matemáticas que permitan el máximo de provecho.
-Valora el trabajo matemático como actividad propia para su desarrollo personal y colectivo.

Elaboración de Sub-componentes.

Como una forma de acercar más la propuesta al trabajo cotidiano decidimos definir sub-componentes o indicadores para cada uno de los componentes. En la competencia Pensamiento sistemático, creativo y crítico, el área de Matemática definió:

<table>
<tr>
<th>1. Construye conocimientos matemáticos utilizando las destrezas del pensamiento.</th>
<th>2. Examina y desarrolla argumentos matemáticos.</th>
<th>3. Plantea problemas y busca soluciones matemáticas para la toma de decisiones.</th>
<th>4. Es crítico y reflexivo al evaluar su pensamiento y el de los demás.</th>
</tr>
<tr>
<td>-Identifica características de los objetos matemáticos a partir de conocimientos previos.
-Compara características de los objetos matemáticos en términos de semejanzas y diferencias.
-Coloca en sucesión o secuencia de acuerdo a ciertos criterios.
-Agrupa y rotula objetos matemáticos
-Clasifica mediante características y atributos matemáticos.
-Interpreta, traduce y extrapola información
-Reconoce o infiere las diferentes partes de acuerdo a un criterio
-Llega lógicamente a una proposición a partir de una proposición dada
-Toma decisiones, establece propósitos</td>
<td>-Sigue una línea de razonamiento hasta su conclusión.
-Analiza las causas y consecuencias de eventos y evalúa si se corresponde con la metodología del conocimiento que nos brindan.
-Soluciona controversias y consigue evidencias para sostener un determinado punto de vista.
-Entiende el por qué de conceptos, demostraciones, argumentaciones y/o eventos.
-Argumenta y evalúa argumentos con coherencia</td>
<td>-Busca y descubre relaciones entre los elementos de un problema.
-Compara diferentes situaciones para resolver un problema.
-Formula posibles soluciones, conjeturas, hipótesis…
-Jerarquiza las hipótesis o posibles alternativas de solución.
-Hace representaciones mentales y gráficas
-Lleva a cabo la demostración.
-Llega a una conclusión y evalúa los resultados y el proceso.
-Toma decisiones y evalúa si es pertinente la situación planteada.</td>
<td>-Planifica y supervisa su proceso de aprendizaje y evalúa los resultados de su estrategia.
-Es auto crítico y trata objetivamente el punto de vista de los otros.
-Cree en el valor de la racionalidad y en la efectividad del pensamiento matemático.
-Acepta la verdad de una afirmación cuando la evidencia matemática la apoya.
-Confía en evidencias y argumentos matemáticos para llegar a una conclusión, sin dejarse llevar de las emociones.
-Cambia de opinión ante nuevas evidencias matemáticas.
-Admite que puede estar equivocado y que otras ideas pueden estar correctas.
-Se examina con relación al pensamiento de los otros para entablar comunicación e interacción.</td>
</tr>
</table>

Otro análisis realizado por los profesores del área ha sido descomponer los aprendizajes de los estudiantes según tres de los cuatro pilares planteados por J. Delors. De esta manera se facilita la formulación de objetivos de aprendizaje enfocados en el desarrollo de competencias.

Aprender a conocer	Aprender a hacer	Aprender a Ser
-Nombra y define conceptos -Reconoce y usa representaciones equivalentes de un mismo concepto. -Identifica propiedades de un concepto y reconoce las condiciones que determinan un concepto en particular. -Compara y contrasta conceptos y procesos. -Detecta contradicciones. -Analiza situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes. -Utiliza una idea matemática para comprender otras ideas matemáticas.	-Relaciona los procedimientos de una representación con los procedimientos de otra representación. -Explora problemas y describe los resultados usando modelos, representaciones físicas, verbales, gráficas, numéricas y algebraicas. -Construye argumentos sencillos y válidos. -Elabora y comprueba conjeturas. -Aplica conceptos y procesos a situaciones nuevas -Formula contraejemplos. -Utiliza el razonamiento espacial y proporcional -Utiliza el razonamiento deductivo para: verificar una conclusión, juzgar la validez de un argumento. -Usa enfoques de resolución de problemas para investigar y entender contenidos matemáticos -Desarrolla y aplica estrategias integradas de resolución de problemas dentro y fuera de la matemática. -Generaliza soluciones y estrategias para situaciones de problemas nuevos.	-Valora las conexiones entre temas matemáticos, las conexiones entre la Matemática y otras ciencias y entre la matemática y su vida. -Confía en la Matemática para resolver problemas, comunicar ideas y razonar. -Muestra flexibilidad al explorar ideas matemáticas. -Prueba métodos alternativos de solución. -Respeta formas diferentes de enfocar los procesos matemáticos. -Es perseverante para culminar los procesos y resolver problemas.

Un ejemplo de cómo trabajar las competencias humanas generales en el área de Matemática fue desarrollado por la profesora Alma De la Rosa con un grupo de estudiantes de 10mo grado en el año escolar 2004-2005.

Problema: Se presentan datos estadísticos que muestran la cantidad de ciudadanos de 18 años que votaron en las últimas nueve elecciones nacionales. Se pide:

Para desarrollar el pensamiento sistemático, creativo y crítico	-Trazar los histogramas donde se relaciona la cantidad de electores de 18 años, por provincias y por años. -Analizar los porcentajes de participación de esa población con respecto al total de los jóvenes inscritos y al total de la población en general. -Inferir las causas que determinaron los niveles de participación en algunas provincias y las posibles acciones que se deben seguir para lograr que esos índices mejoren.
Para promover la conciencia histórico-cívica:	-Predecir cual de las provincias tendrá la mayor participación de electores de 18 años y en cuáles habrá que motivar de manera más efectiva a la población de esa edad, para que tenga mayor participación cívica.
Para el quehacer científico y tecnológico:	-Determinar las medidas de tendencia central y de dispersión. -Mostrar en Excel todos sus cuadros y gráficas para resultados.
Para la comunicación significativa y creativa:	-Desarrollar diferentes formas de comunicación para expresar sus ideas y conclusiones a los compañeros de forma novedosa.
Para desarrollar autoestima y autoconocimiento	-Mostrar seguridad y firmeza en la manera de trabajar los cuadros y gráficas. -Mostrar independencia en sus deducciones y sus conclusiones.
Para despertar la sensibilidad estética.	-Presentar las graficas de forma creativa, original e innovadora. -Ser observador, curioso, expresivo al apreciar los trabajos de sus compañeros.

Logros y desafíos.

El proceso de elaboración de las competencias generales y sus componentes, sobre la base de un proceso democrático, ha sido uno de los mayores logros. Esto trajo como consecuencia que cada uno de los profesores hiciera suyo el proyecto. La articulación de las competencias generales a través de las áreas académicas y la concepción de un proyecto curricular común para los diferentes niveles dentro del colegio han favorecido la madurez y el crecimiento institucional, lográndose mayor comunicación entre los profesores de las diferentes áreas académicas de los niveles Inicial, Básico y Medio.

Es necesario todavía:

-Aprobar las competencias de las áreas y sus componentes en asamblea general.

-Elaborar sub-componentes que permitan establecer objetivos de competencias a lograr según niveles.

-Seleccionar los contenidos, actividades, estrategias, criterios de evaluación que permitan el desarrollo de las competencias en la cotidianidad, haciendo operativa la propuesta.

-Ejecutar una evaluación que permita articular los elementos de componentes y sub-componentes al desarrollo de las competencias.

-Determinar las estrategias de gestión y los recursos necesarios para el desarrollo de las competencias.

-Mantener el entusiasmo y nivel de participación de los profesores en el desarrollo de las actividades pendientes para lograr los propósitos.

Referencias Bibliográficas.

Colegio Babeque Secundaria (2001). *Proyecto Educativo de Centro* Santo Domingo, Pag. 20

Ministros de Educación de América Latina y el Caribe, (2001), *Proyecto de Recomendación sobre Políticas Educativas al Inicio del Siglo XXI*, Cochabamba, Bolivia.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en Castellano*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

SEE, *Diagnóstico de la Educación Dominicana, Documento base para la Formulación del Plan del Desarrollo para el período 2002-2012,* Santo Domingo.

Villarini, A (1991). *Manual para la enseñanza de destrezas del pensamiento*. Proyecto de Educación Liberal Liberadora. San Juan, P. Rico. .

Villarini, A (2004). *Desarrollo de la Conciencia Moral y Ética: Teoría y Práctica*. OFDP, Río Piedras, Puerto Rico.

Villarini, A (2004). El currículo orientado al Desarrollo Humano Integral. OFDP, Río Piedras, P R

LA DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS
EN LOS LIBROS DE TEXTO DE AYER Y DE HOY

Mario Dalcín
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay.
filomate@adinet.com.uy
Campo de investigación: Epistemología – Estudios socioculturales – Pensamiento geometrico; Nivel educativo: Básico, Medio y Superior

Resumen

Se presenta un análisis de las definiciones y la clasificación de los cuadriláteros que aparecen en los libros de texto antiguos y contemporáneos más usados del Río de la Plata. Se hace la distinción entre definiciones jerárquicas o particionales (de Villiers, 1994, 1998), así como en minimales o no minimales (Vinner, 1991).

Palabras clave: cuadriláteros, definición.

Introducción

De Villiers (1994, 1998) hace una distinción entre las definiciones, y por tanto entre las clasificaciones de conceptos, en jerárquicas y particionales. La clasificación es jerárquica cuando los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales (por ej. cuando los cuadrados son algunos de los rectángulos y estos a su vez son algunos de los paralelogramos). En la clasificación particional de un conjunto de conceptos estos se agrupan en subconjuntos disjuntos (por ej. cuando cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos no tienen características en común).
Otro aspecto relevante en la definición de un concepto es si esta es minimal o no (por ej. definir rectángulo como cuadrilátero con cuatro lados iguales es no minimal ya que la igualdad del cuarto ángulo podría deducirse de la igualdad de los otros tres). Es importante dejar claro que tanto definiciones jerárquicas como particionales, minimales o como no minimales, son válidas.
Analizamos las distintas definiciones/clasificaciones de cuadriláteros que aparecen en libros de texto -recientes y no tanto- usados en el Río de la Plata. Buscamos discutir sus pros y contras, y basándonos en ello proponer nuevas alternativas para la enseñanza de la definición y clasificación de cuadriláteros.

¿Qué es la definición de un concepto matemático?
"...es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de ejemplos." (Calvo, 2001)

¿Para qué sirven las definiciones?
Como no se puede empezar cada tema a partir de conceptos primitivos y axiomas se suele comenzar con nociones y teoremas bien conocidos y a partir de ellos continuar definiendo nuevos conceptos y demostrando nuevos teoremas. A la hora de usar un concepto cuya descripción requiere de un enunciado relativamente largo, se introduce una sola palabra o frase para sustituir dicho enunciado.

Las definiciones cumplen así una función de abreviar, pero también responden a la necesidad de ir organizando la matemática y facilitar así su desarrollo.

¿Cómo se establece una definición?
Las definiciones son convencionales. Definir en matemática es dar un nombre. La cuestión es qué características tomar en cuenta a la hora de establecer la convención.

¿Qué factores influyen en la elección de una definición?
- Estéticos. "Es deseable que la definiciones sean elegantes. Por ejemplo, algunos matemáticos piensan que la definición de valor absoluto

$$|x| = \sqrt{x^2} \text{ es más elegante que: } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{"}$$

(Vinner, 1991)
- Operativos. En ocasiones el criterio usado para establecer una determinada definición se explica por las conclusiones que de ella se pueden extraer o por su potencia como instrumento organizador de una prueba o la resolución de un problema.
- Didácticos. El conocimiento se somete a un proceso de Transposición Didáctica que lo prepara para ser comunicado, lo cual requiere que se elijan las definiciones que se presentarán según los conocimientos previos de los alumnos o los objetivos del curso.
- Según Vinner (1991), otra característica que se le exige a las definiciones por parte de los matemáticos y de los textos es que estas deben ser **mínimas**.

"Por mínimas queremos decir que las definiciones no deben contener partes que puedan ser inferidas, matemáticamente, de otra parte de la definición."
- De Villiers (1994, 1998) hace una distinción entre las definiciones, y por tanto entre las clasificaciones de conceptos, en jerárquicas y particionales.

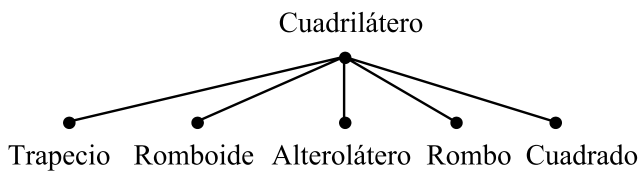
La clasificación es **jerárquica** cuando los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales. Por ejemplo, cuando los cuadrados son parte de los rectángulos y estos a su vez son parte de los paralelogramos.
En la clasificación **particional** de un conjunto de conceptos estos se agrupan en subconjuntos disjuntos. Por ejemplo, cuando cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos no tienen características en común.

Si bien los dos tipos de definiciones -y clasificaciones- son válidos, De Villiers se inclina por las jerárquicas basándose en que:
- A la hora de identificar ejemplos de determinada definición es más económico si la definición es jerárquica.
- Permiten disminuir el número de justificaciones.
- Son más generales.
- Son acordes al funcionamiento de los programas de Geometría Dinámica.

Los textos

✓ **Euclides. *Elementos de Geometría*.**
"De entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es la figura equilátera y equiangular; el alterolátero es equiangular, mas no equilátera; el rombo es equilátera, mas no rectangular; el romboide es la que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, sin ser equilátero ni equiangular. Las restantes figuras cuadriláteras llámense trapecios." (Libro I, Definición 22)

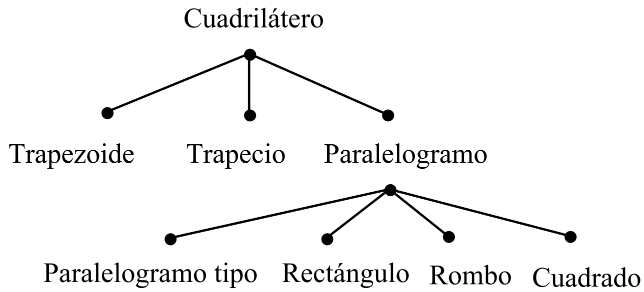
Según las definiciones adoptadas por Euclides, el cuadrado no puede ser considerado como una clase especial de alterolátero (rectángulo) ya que en el primero se exige igualdad de lados y ángulos mientras que en el segundo se exige que los lados no sean todos iguales. En forma análoga el cuadrado no puede considerarse un tipo especial de rombo ya que en este último se exige que los ángulos no sean rectos. Cuadrado, alterolátero y rombo no pueden considerarse como clases especiales de romboide ya que en este último se exige que no sea equilátero ni equiangular. Las definiciones de Euclides implican una clasificación particional de los cuadriláteros.
Las definiciones de cuadrado y alterolátero no son minimales al exigir que sean equiangulares (alcanzaría con tres ángulos iguales); suponemos que la elección de Euclides responde a un factor estético de presentar con igual jerarquía lo equilátero y lo equiangular, aspecto que se mantiene en la definición de romboide que por otra parte tampoco es mínima al exigir igualdad de lados y ángulos opuestos (alcanzaría con una u otra condición).



Definiciones similares se encuentran en Mahler (1927): *"Cuadrado: paralelogramo equilátero y equiángulo. Rectángulo: paralelogramo equiángulo y no equilátero. Rombo: paralelogramo equilátero y no equiángulo. Romboide: paralelogramo no equilátero y no equiángulo."*
Las definiciones de cuadrado, rectángulo, rombo no son minimales (se dice que son paralelogramos).
Acotamos que la clasificación de triángulos de los *Elementos* también es particional: *"Definición 20. De entre las figuras triláteras, es triángulo equilátero la que tenga tres lados iguales; isósceles, la que tenga solamente dos lados iguales; escaleno, la que tenga los tres lados desiguales."*

✓ **Texto único 4º (1979).**
Usado durante años en Enseñanza Primaria, trae las siguientes definiciones:
"Clasificación de los cuadriláteros. Se pueden combinar cuatro líneas de muchos modos: pueden ser dos paralelas cortadas por otras dos paralelas; dos paralelas cortadas por dos no paralelas; dos no paralelas cortadas por otras dos no paralelas.
En el primer caso, el cuadrilátero formado por las paralelas es un paralelogramo; en el segundo caso, es un trapecio, y en el tercer un trapezoide.
Por consiguiente hay tres clases de cuadriláteros: paralelogramos, trapecios y trapezoides.
El paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.
Los paralelogramos son cuatro:
El paralelogramo tipo está formado por cuatro lados iguales dos a dos, dos ángulos agudos y dos obtusos, respectivamente iguales.
El rectángulo está formado por cuatro lados iguales dos a dos y cuatro ángulos rectos.
El rombo está formado por cuatro lados iguales, dos ángulos obtusos y dos agudos, respectivamente iguales.
El cuadrado tienen cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos."

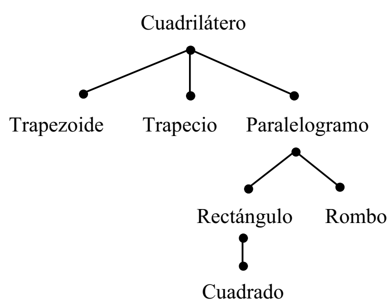
Las definiciones adoptadas son particionales y habilitarían la siguiente clasificación:



- ✓ **Thompson (1991).** ***Geometría.***

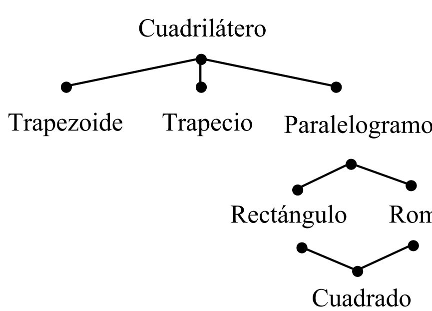
"Un cuadrilátero que no tenga ningún par de lados paralelos, se llama trapezoide...
Un cuadrilátero que tenga solamente dos lados paralelos, se llama trapecio...
Un cuadrilátero que tenga sus lados opuestos dos a dos se llama paralelogramo...
Un paralelogramo cuyos ángulos sean todos rectos, se llama rectángulo.
Un rectángulo cuyos lados sean todos iguales, recibe el nombre de cuadrado...
Si el paralelogramo tiene sus lados iguales pero sus ángulos no son rectos, se llama rombo."

Se usan tanto definiciones particionales (trapezoide, trapecio, paralelogramo) como jerárquicas (cuadrado como caso particular de rectángulo y este como caso particular de paralelogramo). Llama la atención que se adopte una definición particional para el rombo. Algunas definiciones son minimales (paralelogramo) y otras no (rectángulo: tanto por ser paralelogramo como por tener todos los ángulos rectos).



- ✓ **Repetto, Linskens, Fesquet (1991).** ***Geometría 2.***

"Trapezoide es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.
Trapecio es el cuadrilátero que tiene únicamente dos lados opuestos paralelos.
Paralelogramo es el cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos paralelos.
Se llama rectángulo al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.
Se llama rombo al paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
Se llama cuadrado al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados iguales."



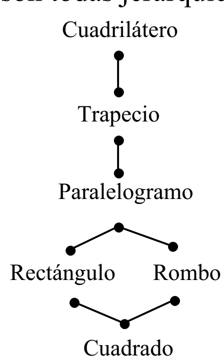
En las definiciones y clasificación anterior se combinan definiciones particionales (trapezoide, trapecio, paralelogramo) con jerárquicas para el caso de cuadrado, rombo, rectángulo y paralelogramo. Algunas definiciones son minimales (paralelogramo) y otras no (rectángulo, rombo).

Idéntico tratamiento se encuentra en Severi (1946), Rey Pastor y Pereyra (1956), Coppetti (1970), Bruño (1981), Coppetti y Coppetti (1983). También en Paz (1963), donde al clasificar los paralelogramos se dice que es *"romboide si sus cuatro lados son desiguales entre sí, así como sus ángulos. Nótese que el romboide es el paralelogramo en general."*

✓ **Petracca, Varela y Foncuberta (1984).** ***Matemática 2.***

"Si un cuadrilátero convexo tienen un par de lados opuestos paralelos, se llama trapecio.
Si tiene los dos pares de lados opuestos paralelos, se llama paralelogramo...
Si en un paralelogramo uno de los ángulos es recto, la figura se denomina rectángulo...
Si en un paralelogramo dos lados consecutivos son congruentes, la figura se llama rombo...
Si un rectángulo es rombo se denomina cuadrado."

Las definiciones adoptadas son todas jerárquicas y minimales.



Idéntico planteo se encuentra en Tapia (1986).

Conclusiones

¿Cuál es la definición correcta de rectángulo (o cualquier otro cuadrilátero)? Pretendemos haber dado respuesta a esta pregunta -frecuente entre estudiantes y profesores tando de enseñanza primaria como media-: pueden haber muchas formas matemáticamente correctas de definir rectángulo (o cualquiero otro cuadrilátero). Queda planteada la tarea de indagar acerca de la conveniencia de usar una u otra definición teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Referencias

Bruño, G. (1981). *Geometría. Curso Superior*. España: Bruño.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre las definiciones y las demostraciones en un curso preuniversitario de Cálculo Diferencias e Integral*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Coppetti, M. (1970). *Geometría racional para Segundo año*. Uruguay: Barreiro y Ramos.

Coppetti, M. y Coppetti, E. (1983). *Geometría y nociones sobre conjuntos*. Uruguay: Barreiro y Ramos.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14 (1)*, 11-18.

De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. En J. King and D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On:Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 15-24). U.S.A. : MAA.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Oliver y K. Newstead (Eds.) *PME 22 Proceedings*. South Africa: Stellenbosch University.

De Villiers, M. (1999). The van Hiele Theory - Defining and Proving within a Sketchpad Context. En *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad* (pp. 11-20). U.S.A.: Key Curriculum Press.

Euclides (1992). *Elementos de Geometría I-II*. México: UNAM.

Mahler, G. (1927). *Geometría del plano*. España: Labor.

Paz, A. (1963). *Geometría I*. U.S.A.: Minerva Books.

Petracca, M.; Varela, L. y Foncuberta, J. (1984). *Matemática II*. Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Repetto, C.; Linskens, M. y Fesquet, H. (1991). *Geometría 2*. Argentina: Kapelusz.

Rey Pastor, J. y Pereyra, M. (1956). *Geometría IV*. Uruguay: Monteverde.

Severi, F. (1946). *Elementos de Geometría. Tomo I*. España: Labor.

Tapia, C.; Tapia, A.; Vázquez, N. (1986). *Matemática 2*. Argentina: Estrada.

Thompson, J. (1991). *Geometría*. México: Uteha.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learnig of mathematics. En D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

VV.AA. (1979). *Texto único 4º*. Uruguay: Barreiro y Ramos.

SABER CALCULAR NO ES SABER MATEMÁTICA

Gustavo A. Duffour
URUGUAY
gustavoduffour@adinet.com.uy
Campo de investigación: Estudios socioculturales; Superior

Resumen

Un poco de historia. Los cálculos eran la preocupación principal de nuestros antepasados, que promovieron el desarrollo de las matemáticas. Así nacieron los logaritmos, en los últimos años del siglo 17. *Decía Laplace en aquello años, "el uso de los logaritmos, acorto el trabajo y duplicó la vida de los astrónomos"*.

En los últimos años de la década 1970 a 1980 se popularizaron las calculadoras. Que no son tan viejas. Yo, no las use. En 1972 entre a la facultad de química y no tenía calculadora. Un año ante, me compre una de las mejores reglas de cálculo. Para usarla deberíamos saber tanto, que nos calificarían de genio en la actualidad.

¿Cual es entonces la premisa de mi pensamiento? *"Saber matemática no es saber hacer cuentas"*

1- USEMOS LA CALCULADORA, ES EL LÁPIZ DEL FUTURO. ACASO CONCEBIMOS UNA CLASE SIN UNA HOJA DE PAPEL Y UN LÁPIZ, NO LA CONCIBAMOS SIN UNA CALCULADORA

Como ven en la transparencia hay una calculadora CASIO. No he logrado aún que CASIO me pague por hacerle propaganda. Simplemente me gustan, me parecen fáciles de usar, pues es la que yo estoy más acostumbrado. Usemos la Casio fx 95MS. ¿Por qué? Pues, porque resuelve casi todo lo que necesitamos a nivel de enseñanza media, incluido, ecuaciones de segundo y tercer grado, sistemas lineales de dos por dos y de tres por tres. Además, por descontado, de hacer las cuatro operaciones básicas.

Por supuesto que existen otras marcas. Hewlett Packard y Texas Instruments, también tienen sus modelos. Todas las demás son "truchas". Es fácil darse cuenta, tan sólo hay que ver si trabajan con fracciones.

Empecemos por el uso de la calculadora en el escuela.

El 27 de julio del 2002 en el Instituto de Profesores Artigas en Montevideo, tuvimos una interesante charla a cargo del Maestro Español Antonio Martín, de Islas Canarias. Que también hemos escuchado aquí en Relme 19. Nos habló de sus experiencias, y nos mostró videos y entrevistas realizadas a niños de 5, 6 y 7 años, usando una calculadora, para aprender las tablas de multiplicar.

Por lo tanto yo también estoy diciendo que ya en la escuela primaria es bueno que cada alumno tenga una calculadora.

Entonces, si nos ubicamos en la enseñanza media, al llegar a tercer año, se hace imprescindible una calculadora científica. Pues tenemos que trabajar con funciones trigonométricas.

Llegamos al bachillerato, y por supuesto, que tanta maravilla nos queda chica y se necesitaría una calculadora graficadora.

Yo me pregunto: ¿quien calcula raíz de 15 sin usar la calculadora?

Debo confesarles que yo ya no hago ninguna cuenta, absolutamente ninguna, sin éstas maravillas.

Y no hablemos de derivadas, determinantes con parámetros, fórmulas de sumatoria, aproximación de funciones con polinomios.

El "Derive" lo hace más rápido y mejor. Por supuesto en una computadora. O en la calculadora TI_92 plus de la marca Texas Instruments.

En el congreso de Maldonado, en agosto de 1999, la Conferencia de Carlos Vasco de la Universidad de Valle, de Colombia, trató este tema: LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES EN EL AÑO 2010. Les leo uno breve párrafo:

"*... por eso veo que los estudiantes van a llevar a los colegios y a los liceos calculadoras cada vez más complejas, a un precio mucho menor que un libro de texto y mucho más útiles. Por lo tanto, vamos a tener que cambiar esa idea de que si los estudiantes usan calculadoras, no van a aprender las operaciones con papel y lápiz, porque nosotros mismos ya no las hacemos tampoco con papel y lápiz; seamos consecuentes y dejemos que ellos utilicen también los elementos que están a su disposición...* "

Entonces me pregunto: ¿debemos, como política de estado, comprarle a cada estudiante una calculadora? Pues, no es ninguna novedad. En otros países ya se hace. Y quizás en Uruguay también. Conozco de varios congresos, charlas que hablan de convenios, sobre todo con Texas Instruments, para trabajar con calculadoras graficadoras.

También en el congreso RELME 15 en Buenos Aires, un taller de gente de Puerto Rico, nos contaba, como era que se le daba a cada alumno escolar, una computadora laptop, para que se lleve a su casa. Y la use durante todo el año lectivo.

Eso si, en este caso pienso, que el profesor debe SABER usar la herramienta, mejor que el alumno y eso lo dudo, porque para la mayoría de los profesores en Uruguay, y que nadie se sienta ofendido, esa es la realidad.

En un taller en el Instituto de Profesores Artigas de Montevideo, en el 2001, sobre el uso del CABRI y el DERIVE, Los jóvenes y no tan jóvenes profesores y estudiantes de profesorado, no sabían ni siquiera usar un ratón.

Y si alguno reflexiona, que nuestros alumnos tienen más necesidad de comer, de abrigo, de un techo… que de calculadoras. Estamos errando las comparaciones, son dos hechos separados, y por supuesto necesarios.

Les leo algo que le preguntaba un periodista a Negroponte, uno de estos gurú de Internet:

¿Convénzame de que un chico del Tercer Mundo, cuya principal preocupación es comer, encontrará útil tener una computadora?

Le contesta.

Probablemente hace unos cientos de años, la gente se preguntaría lo mismo sobre los libros. Dirían;

¿Convénzame de que un niño pobre necesita aprender a leer?

Es evidente que el desarrollo personal, el bienestar y la calidad de vida surgen desde la educación. Con más motivo, que en el mundo rico, los niños de los países pobres deberían tener acceso a toda la tecnología.

2– PROHIBAMOS EL USO DE LA CALCULADORA

EL JÓVEN NO SABE HACER CUENTAS, NO SABE LAS TABLAS DE MULTIPLICAR.

Las siguientes ideas. No digo que sean aplicables en la enseñanza media, PERO, me parecen muy buenas.

Les leo y comento algunas frases de la introducción del SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO 1, año 2001, Universidad de la República del Uruguay. O sea primer año universitario.

- *Una vez iniciada la prueba no se permitirá salir del salón, bajo ningún concepto. El estudiante sólo se levantará del banco para entregar el parcial y retirarse del salón.*

Me gusta mucho que las reglas, en que se va a rendir una prueba, sean claras y conocidas por todos. Y que no dependan del profesor de turno.

- *No se responderá ningún tipo de consulta, la comprensión de la letra es parte de la prueba.*

Cuantos disparates nos preguntan nuestros alumnos. Hagamos una letra, que ya hayamos comentado, tomando cuidado con las palabras usadas. Recordando que muchos jóvenes no conocen el vocabulario más elemental. Varias veces he tenido alumnos de 16 años, que me preguntan: Profe: una línea vertical es así ————

También acaso no es clásica la pregunta: ¿Profe no entiendo la letra?

¿Qué nos está diciendo con esa pregunta?

Que no sabe el tema. Que no sabe matemática, en este caso.

Repito:

- *No se responderá ningún tipo de consulta, la comprensión de la letra es parte de la prueba.*

Si usted no entiende la letra es porque no sabe el tema.

Y aquí viene lo mejor de estas condiciones, para ese parcial en la facultad.

- *No se permitirá el uso de ningún tipo de material, ni calculadoras.*

¿NI CALCULADORAS? ¿Deberíamos prohibir la calculadora?

Es muy fuerte, y parece ir contra los tiempos. No sé cuál es el motivo, de estos profesores universitario, pero me ha servido para reflexionar mucho, muchísimo.

3– AYER, HOY Y MAÑANA SERÁ LO MISMO: SABER CALCULAR NO ES SABER MATEMÁTICA

Dejemos la calculadora, pero no confundan, saber matemática no es saber hacer cuentas.

¿Deberíamos eliminar la calculadora de nuestras clases? Por supuesto.

¿Como?

Haciéndolas obsoletas, trabajando sobre conceptos, no sobre números. Nuestras clases son de matemática. No deberían ser: Operador calculadora, como si fuera Operador PC.

Cualquier joven usa la calculadora, bastante bien, y más, creen que la calculadora le resolverá todos los problemas. Y le permitirá salvar el examen de fin de año, o sacar buena nota en el próximo escrito.

Más de uno ha salido a comprar un modelo más avanzado, cuando se enteran que la torturante fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, no la necesitan más. Que las nuevas calculadoras las resuelven, incluso en los números complejos.

Si nosotros como profesores tuviéramos claro, la relación estudio vs. calculadora. Le deberíamos decir, desde primer año del liceo. QUE ESO NO ES ASÍ. Que la calculadora sólo hace cuentas, y que lo importante va por otro lado:

Aprender a pensar.

Aprender a estudiar, y que sólo se logra con dedicación y estudio.

Pongamos número sencillos, nuestro objetivo es que aprendan matemática.

La mayoría de los jóvenes, no necesita un curso para aprender a usar la calculadora, muchas veces la usan mejor que nosotros y también la usan muy mal, (muy a menudo) y es, porque no saben matemática.

Es clásico que si tienen la siguiente función $f(x) = x^2$ y quieren calcular $f(-2)$ les da -4.

O, con la función $f\ /\ f(x) = \frac{x}{x+3}$ y se les pide calcular $f(2)$ toman la maravillosa calculadora, hacen la cuenta, 2/2+3 y con un tono sobrador contestan 4.

Y cuando contestamos: MAL HECHO, yo suelo decir HORRIBLE. Nos dicen, lo hizo la calculadora.

Les digo.

¿Acaso la calculadora se equivoca?

Pueden incluso, en su ignorancia, llegar/ a decir que si. Pues es mucho más duro, para los futuros genios de la informática, aceptar que no saben las más sencillas reglas del álgebra.

Un poco de historia.

Los cálculos eran la preocupación principal de nuestros antepasados, que promovieron el desarrollo de las matemáticas. Así nacieron los logaritmos, en los últimos años del siglo 17. *Decía Laplace en aquello años, "el uso de los logaritmos, acortó el trabajo y duplicó la vida de los astrónomos".*

Luego vinieron las calculadoras y no son tan viejas, YO, no las use. En 1972 entré a la facultad de química y NO tenía calculadora. Un año antes, me había comprado una de las mejores reglas de cálculo. Para usarlas debíamos saber tanto, que nos habrían calificado de genios en la actualidad.

¿Cuál es entonces la premisa de mi pensamiento?

Saber matemática, no es saber hacer cuentas. Dejemos las calculadoras, que incluso nuestros jóvenes no enseñarán a nosotros, sus trucos. Y seamos coherentes con nuestro cometido, enseñemos matemática.

No vengo a traerles ninguna propuesta nueva. Sino a destacar que el curso de Cálculo, es el que más ha evolucionado, de la mano de muchos profesores, con el advenimiento de las calculadoras.

Estas pruebas que voy a mostrarles, son reales, no son imposibles, no son inalcanzable, solo prueban si el ~~estudiantes~~ estudiante sabe o no los temas del curso.

Que al fin, es lo importante.

JULIO 2000 LICEO Nº 15 ECONOMÍA

1) Definir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ y aplicando la definición demostrar que: $\lim\limits_{x \to 2} (1+3x) = 7$

2) Sea: $f \,/\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4} & \text{" } x > 2 \\ m(x-1) & \text{" } x < 2 \\ b & \text{si } x = 2 \end{cases}$

a) ¿Qué condición debe imponerse a m, para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

b) Indicar valores de m y b para los cuales:

i) exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ pero f no sea continua en 2.

ii) f sea continua solamente en 2^+.

iii) f sea continua solamente en 2^-.

iv) f sea continua en 2.

3) i) Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L(1+x)}{x} = 1$ y que: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

ii) Definir f, derivable en a y f'(a) en este caso.

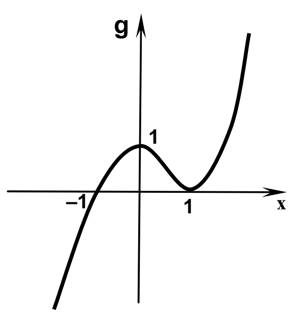
Sean $f/ f(x) = L(x)$ y $g / g(x) = e^x$.

Aplicando la definición, determina si existen: $f'(1)$ y $g'(1)$

iii) f y g son tales que $f'(3)=2$ y $g'(3) = -1$.

Demostar, aplicando la definición, que f+g es derivable en 3.

4)



i) Dada g por el gáfico indicar:

a) signo g(x)

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

c) Intevalos de crecimiento y de decrecimiento de g y signo de g'(x)

ii) f es una función / $f'(x) \equiv g(x)$

a) Si se sabe que $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} f'(x)$

Indicar direcciones asintóticas o asíntotas y límites en el infinito de f.

b) Crecimiento de f.

c) Concavidad de f.

d) Tangentes al gráfico de f en x=0, sabiendo que f(0)=0

e) Bosquejar una función f.

iii) ¿Que punto sirve de contraejemplo a la siguiente afirmación?
$f'(a)=0 \Rightarrow$ f presenta un extremo relativo en a

JULIO 2000 LICEO Nº 15 ECONOMÍA

1) i) Aplicando el método de ábacos, estudiar el signo de:

$g : g(x) = e^{x} + 2x^{2}$

$h : h(x) = e^{x} + x^{3}$

ii) E. A. y R. G. de: (x) — ——

2) i) E. A. y R. G. de (x) | | ——

ii) Determinar f(0) y la tangente al gráfico de f en x=0 . Graficar.

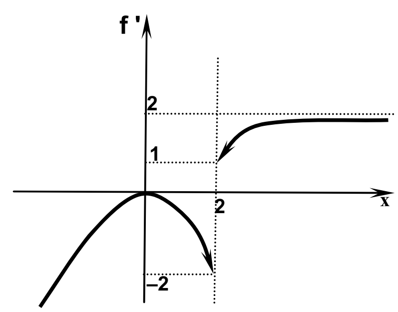
iii) Graficar: $g : g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 1, \quad x < 0 \\ |f(x)| - 4 & 0 \quad x \quad 1 \end{cases}$

3) f es una función definida y continua en *R*.
Se sabe que:
f es un infinito equivalente a 2x, para $x \to +\infty$ y $\lim_{x \quad +} (f(x) - 2x) = -6$

f es un infinto equivalente a x^2 para $x \to -\infty$

i) Determinar: límites de f(x) para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$
asíntotas o direcciones asintóticas de f para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

ii) El gráfico representa f '



Indicar:

a) D(f ')

b) El valor a de x, en que f es continua pero no derivable.

$\lim_{x \to a^+} f'(x)$ $\lim_{x \to a^-} f'(x)$

c) Signo f '(x) y crecimiento de f

d) Crecimiento de f ' , signo f''(x) y concavidad de f.

iii) Graficar f sabiendo además que: f(0)=1 y f(2) = –1

iv) Calcular:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x+1}}{4-x^2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{L\left(x^2-2x+3\right) - L(x+1)}{4-x^2}$$

BIBLIOGRAFÍA.

Vasco C. (1999) *Las matemáticas escolares en el año 2010*. Conferencia en el X CIAM Maldonado Uruguay

Corso L., La Menza A. (1999) *La Matemática: del conflicto al diálogo*. Argentina Editorial Aique

Martín A.R. (2002) *El cálculo mental y la calculadora.* Uruguay Charla en IPA

CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LINEAL DE DOMINIO DISCRETO

Cristina Ochoviet, Mónica Olave, Yacir Testa.
Instituto de Profesores "Artigas" - Uruguay
princesa@adinet.com.uy; matemoni@adinet.com.uy; milefede@adinet.com.uy
Campo de investigación: Gráficas y funciones; Nivel educativo: Medio

Resumen

Se reporta un estudio de casos realizado con estudiantes de 16-17 años en relación a sus concepciones sobre la gráfica de una función lineal de dominio discreto.
En este estudio detectamos que los alumnos presentan dificultades en concebir la gráfica de una función cuando su dominio no es el conjunto de los números reales pues no consideran como gráficas de funciones a aquellas que sean un conjunto de "puntos"[1] y que no formen una "línea continua".

Introducción

Si se les pide a los estudiantes graficar, por ejemplo, una función lineal de R en R, no tendrán dificultad en trazar una recta por el origen del sistema coordenado ayudándose de una tabla de valores pertinente. Sin embargo, cuando se les plantea graficar una función que mantenga la misma expresión analítica que la anterior, pero con dominio el conjunto de los naturales, pueden intuir a lo sumo que se trata de una semirrecta, pero prácticamente nunca llegan a concebir, que se trata de un conjunto de puntos alineados que no completan una semirrecta. Los estudiantes no aceptan la presencia de una gráfico "agujereado", es decir, un conjunto de infinitos puntos alineados que no completan una recta.

Compartimos lo constatado por Farfán (2000) "*que en caso que logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces manejarán el concepto de función no solo como objeto, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad*". Dada la importancia que tiene la visualización de la gráfica de una función tanto en la formación como en el enriquecimiento de este concepto es que nos interesa explorar las concepciones de los estudiantes sobre la gráfica de una función lineal de dominio discreto.

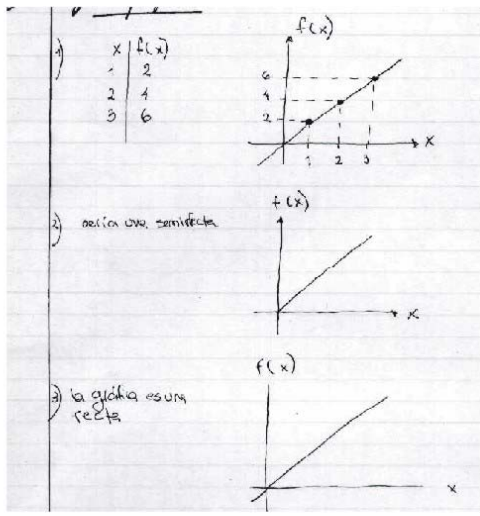
Objetivos y diseño de la secuencia de actividades

El objetivo de la secuencia diseñada era que los alumnos construyeran la gráfica de una función lineal de dominio discreto. Ya conocían la gráfica característica asociada a las funciones lineales cuando el dominio es el conjunto de los números reales.
Se les presentaron a los estudiantes tres actividades a resolver individualmente:

[1] Si bien todas las figuras geométricas son conjuntos de puntos, nos referiremos con "gráfica de puntos" aquellas que corresponden a funciones con dominio discreto.

1) Grafica la función *f* definida de R en R por *f(x)= 2x*. Es decir que la variable *x* toma todos los valores reales. Puedes ayudarte utilizando una tabla de valores.
2) Grafica la función *g* definida de N en N por *g(x) = 2x*. Es decir que la variable *x* toma solamente valores naturales. Puedes ayudarte utilizando una tabla de valores.
3) Grafica la función *h* definida de Z en Z por *h(x) = 2x*. Es decir que la variable *x* toma solamente valores enteros. Puedes ayudarte utilizando una tabla de valores.

Todos los trabajos obtenidos fueron muy similares al siguiente:



Dado que al planificar este estudio se manejó la posibilidad de que la mayoría de los estudiantes "unieran" los puntos de la gráfica en el caso de las funciones *g* y *h*, se preparó otra serie de actividades, con el fin de hacerlos reflexionar acerca de las gráficas realizadas y que pudieran eventualmente modificar sus trabajos. Como en la puesta en práctica, los estudiantes cometieron el error que se había previsto, se les proporcionaron dichas actividades. Se presentan algunas de ellas a continuación:

- Fíjate si los puntos de coordenadas:

(1,5; 3), (-1; -2), (3,5; 7), (3; 6), (0.5; 1), (2; 4), (3; 7), pertenecen a la gráfica de la función *g* que hiciste.

¿Deberían estar todos graficados? ¿Por qué? Explica ampliamente tu respuesta.

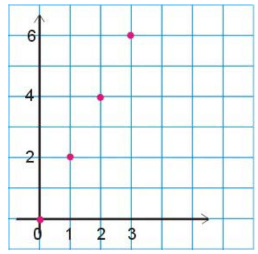
- Fíjate si los puntos de coordenadas:

(1.5; 3), (-1; -2), (-3.5; -7), (0.5; 1), (-2; -4), (3; 6), (-3; -8), pertenecen a la gráfica de la función *h* que hiciste.

¿Deberían estar todos graficados? ¿Por qué? Explica ampliamente tu respuesta.

- ¿De qué te parece que depende que un determinado punto pertenezca a la gráfica de una función?

Posteriormente se realizó una puesta en común para discutir las ideas de cada estudiante y tratar de llegar entre todos a la gráfica adecuada para las funciones *g* y *h*, pero surgieron más dificultades de las previstas, pues los alumnos no podían aceptar que una gráfica del siguiente tipo pudiera ser la gráfica de una función.



Gráfica (1)

Consideraciones teóricas

Para analizar el presente fenómeno tomaremos los siguientes conceptos teóricos:

i) La noción de concepción presentada por Artigue (1983)
ii) La noción de obstáculo presentada en Brousseau (1986)
iii) La noción de contrato didáctico de Brousseau (1980)

i) El término "concepción" se utiliza a fin de establecer una distinción entre el objeto matemático, que es único, y las diversas significaciones que le pueden asociar los alumnos.
Según Artigue (1990) la noción de concepción responde a dos necesidades distintas. Por un lado mostrar los múltiples puntos de vista sobre un mismo objeto matemático y dejar en evidencia cuáles son las adaptaciones que el individuo realiza cuando debe resolver un problema. Por otro, permite diferenciar la enseñanza que se quiere transmitir y los conocimientos que el estudiante efectivamente construye.

ii) Según Bachelard (1938), se debe plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos: *" [...] es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. [...] se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización."*
Brousseau se inspira en esta noción de obstáculo para aplicarla al aprendizaje de la matemática. Señala que son los conocimientos matemáticos perfectamente correctos en su campo de validez los que, al ser extendidos a otros contextos en los que resultan insuficientes o inadecuados, pueden constituirse como obstáculos: *"El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido". (Brousseau, 1986)*

iii)La noción de contrato didáctico es definida por Brousseau en 1980, como el conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno, y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro.

Este contrato se evidencia cuando es roto por algunas de las partes que intervienen en él. Chevallard et al (1997) señalan que en la medida que este contrato evolucione, traspasando a los estudiantes gran parte de la responsabilidad que hoy es asignada al profesor, podremos esperar que los alumnos se responsabilicen de las respuestas que dan a los problemas matemáticos.

Análisis

Se realizó una puesta en común con los estudiantes y a partir de las actividades mencionadas anteriormente se fueron "borrando" puntos de las gráficas que ellos proponían, hasta obtener las gráficas de puntos que eran correctas. A continuación se transcriben algunas ideas de los alumnos, que arrojan luz sobre sus concepciones acerca de la gráfica de una función.

Aparicio: *Todos los puntos deben estar en la gráfica aún cuando no pertenezcan a la función (aludiendo a los puntos que están "entre" los puntos que sí pertenecen a la gráfica). La gráfica (1) no es una gráfica.*

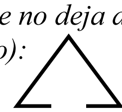
Lucía: *La gráfica (1) es una gráfica incompleta.*

Aparicio: *Si es incompleta entonces no es una gráfica.*

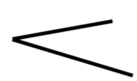
Lucía: *Si a un hombre le falta un brazo por ello no deja de ser hombre.*

Profesora: *Estamos hablando de objetos matemáticos, no tendrían por qué estar en las mismas condiciones que las personas.*

Lucía: *Si a un triángulo le falta una parte no deja de ser triángulo.*
Por ejemplo (y realiza el siguiente dibujo):
Sigue siendo un triángulo.



Aparicio: *Pero esto no es un triángulo:*



Finalmente no hubo acuerdo en si una gráfica que para ellos era "incompleta" tenía el estatus de gráfica. Las ideas vertidas por los estudiantes nos permiten apreciar que la concepción que tienen acerca de la gráfica de una función es la que corresponde a funciones continuas cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Esta concepción, quizás adquirida por el tipo de representaciones gráficas con el cual el alumno ha tenido la

mayoría de sus experiencias, parecería constituir un obstáculo para que el alumno acepte gráficas como la (1) para la gráfica de una función.
Veremos a continuación cómo la concepción de gráfica de Aparicio ha sido consolidada por el tipo de contrato didáctico que se maneja habitualmente en las aulas de matemática: *el profesor enseña lo correcto, lo necesario y lo suficiente para que el alumno haga las cosas bien.*

Profesora*: Ustedes señalaron dos condiciones para que un punto pertenezca a la gráfica de una función y están de acuerdo en que en las gráficas que ustedes hicieron, hay puntos que no deberían estar. Aparicio, ¿cómo podrías explicar la presencia de esos puntos en la gráfica?*

Aparicio: *Esos puntos deben estar en la gráfica para que sea gráfica.*

Profesora: *¿No puedes considerar solamente los puntos "separados"?*

Aparicio: *No. Debo unirlos*

Profesora: *¿Por qué?*

Aparicio: *Porque me lo enseñaron así. Siempre unimos los puntos de las gráficas. Además la gráfica de una función polinómica de primer grado es una recta. Así me lo enseñaron.*

Aparicio no puede ir contra lo que le han enseñado, contra la concepción de gráfica que tiene fuertemente arraigada. Aquí aparece claramente, por un lado, el conocimiento anteriormente establecido (la gráfica es una recta) como obstáculo, de índole didáctica quizás, dada la restricción del universo de gráficas que se le han mostrado a los estudiantes y por otro, la fuerte creencia en las cláusulas del contrato que señalan que los profesores han enseñado lo suficiente para realizar correctamente las tareas. Consideramos que el tipo de contrato didáctico que se maneja habitualmente en la aulas, muchas veces basado en la autoridad del profesor, hace que este estudiante no pueda ir contra lo que él dice que le han enseñado. Parecería no haberse generado la autonomía suficiente como para crear conceptos matemáticos nuevos y válidos, independientemente de la voluntad del profesor. Esto se manifestó claramente cuando después de mucho discutir, los estudiantes solicitaron al docente que dijera si la gráfica (1) era o no la gráfica de una función. Necesitaban que la profesora lo institucionalizara para comenzar a aceptarlo. Ellos reclamaban que la docente a cargo cumpliera con su parte del contrato didáctico: la de decir lo que es correcto y lo que no es, en una clase de matemática. Quizás el tipo de contrato existente está quitando autonomía al pensamiento de los estudiantes, tal vez el contrato didáctico debería evolucionar en el sentido de traspasar la responsabilidad de las respuestas a los estudiantes y no hacerla recaer enteramente en el profesor.

Conclusiones y recomendaciones didácticas

Los estudiantes mostraron resistencia a aceptar una gráfica de puntos como la gráfica de un función. Pensamos que en esto incide el universo de gráficas con las que los estudiantes han tomado mayor contacto en sus actividades escolares: "las de trazo continuo".

A partir de los casos observados, consideramos valioso incorporar en las prácticas de clase un universo rico de representaciones gráficas que incluya diversos ejemplos de gráficas discretas para que los estudiantes puedan tomar contacto tempranamente con diversas situaciones problemáticas a partir de las cuales construyan una amplia gama de gráficas que les permitan construir esquemas conceptuales más completos.

Referencias bibliográficas:

Artigue, M. (1990). *Epistemologie et Didactique*. Recherchez en Didactique des Mathématiques 10 (2), pp. 241-286.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques , 4(2), pp. 165 -198.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de Educación, 22. Barcelona: Horsori Editorial.

Farfán, R. (2000). *Lenguaje algebraico y pensamiento funcional.* En Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.

CANTOR, BORGES Y DESPUÉS…UNA LUZ DE ALMACÉN

Gustavo Franco [(1)], Cristina Ochoviet [(2)]
[(1)] Liceo Solymar I, [(2)] Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.
gfrancoc@hotmail.com, princesa@adinet.com.uy
Campo de investigación: Modelación matemática; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

En este trabajo nos proponemos mostrar algunas ideas del matemático Georg Cantor, acerca de la cardinalidad de los conjuntos infinitos.
Por otra parte, consideramos un fragmento del relato "El libro de arena" de Jorge Luis Borges y nos proponemos responder la siguiente pregunta: ¿podrá ser el cardinal asociado al conjunto de páginas de este libro $\aleph_0$?
Este trabajo constituye una propuesta didáctica sobre la modelación matemática de un texto literario.

Dos consideraciones previas

"[…] si nos aproximamos a los textos de Borges con un enfoque puramente matemático, muy especializado, podemos quedar por encima del texto. Aquí "encima" es en realidad afuera: podríamos encontrar o forzar al texto a decir cosas que el texto no dice, ni tiene ninguna intención de decir. Un error de erudición. Por otro lado, si desconocemos en absoluto los elementos de matemática que están presentes reiteradamente en la obra de Borges, podemos quedar por debajo del texto." (Martínez, 2003)

"[…] los elementos de matemática que aparecen en la obra de Borges […] están modelados y transmutados en "algo distinto": en literatura, y trataremos de reconocerlos sin separarlos de ese contexto de intenciones literarias." (Martínez, 2003)

En la *Posdata del primero de marzo de 1943* al relato *El Aleph*, dice Borges:
"Dos observaciones quiero agregar: una, sobre la naturaleza del Aleph; otra, sobre su nombre. Éste, como es sabido, es el de la primera letra del alfabeto de la lengua sagrada. […] para la *Mengenlehre*[1], es el símbolo de los números transfinitos, en los que el todo no es mayor que alguna de las partes." (Borges, 2002)

Éste era uno de los conceptos de matemática que fascinaban a Borges. Es el quiebre con un postulado aristotélico según el cual el todo debe ser mayor que cualesquiera de las partes. Es más, Euclides lo incluye en los *Elementos* como una de sus *nociones comunes*: "El todo es mayor que la parte". Por ejemplo, siguiendo las ideas de Cantor, se puede demostrar que si bien N (el conjunto de los números naturales) está incluido en Z (el conjunto de los números enteros), el cardinal de ambos conjuntos es el mismo.

[1] La *Mengenlehre* es la denominación en alemán de la teoría de conjuntos creada en 1874 - 1895 por Georg Cantor (1845 - 1918).

¿Cómo llega Cantor a comparar el cardinal de conjuntos infinitos?

Claramente si un conjunto es infinito no podemos contar sus elementos, por lo que si queremos comparar el cardinal de dos conjuntos infinitos debemos establecer algún criterio de comparación. En una primera instancia nos plantearemos cómo comparar el cardinal de dos conjuntos finitos suponiendo que no sabemos contar.

Imaginemos la siguiente situación, estamos en un aula, el profesor tiene en su mano un cierto número de lápices y un alumno también tiene una cierta cantidad de ellos.
¿Cómo podemos hacer para averiguar quién de los dos tiene más cantidad de lápices (o si tienen igual cantidad), si es que no sabemos contar?

Pueden ir tomando de a un lápiz y disponerlos encima del escritorio enfrentados: el profesor toma un lápiz, uno el alumno y los colocan enfrentados, luego toman otro lápiz cada uno y repiten el procedimiento, así sucesivamente hasta que uno (o los dos), agote la cantidad de lápices que habían en su mano. Ahora bien, si por este procedimiento, para cada lápiz del profesor en el escritorio, hay un lápiz del alumno, y para cada uno del alumno, hay uno del profesor, y ambos ya no poseen más lápices en sus manos, diremos entonces que tienen la misma cantidad.
Es decir, en lenguaje matemático, si podemos establecer una función biyectiva entre el conjunto de los lápices del profesor y el conjunto de los lápices del alumno, podemos concluir que la cantidad de lápices del profesor es la misma que la del alumno.

Borges (2002), con sutileza, muestra este procedimiento: ”La operación de contar no es otra cosa para él [Cantor] que la de equiparar dos series. Por ejemplo, si los primogénitos de toda las casas de Egipto fueron matados por el Ángel, salvo los que habitaban en casa que tenía en la puerta una señal roja, es evidente que tantos se salvaron como señales rojas había, sin que esto importe enumerar cuántos fueron.”.

“[…]“en el contexto finito, los conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si puedo establecer una correspondencia perfecta uno a uno entre ellos”. Esta afirmación es muy sencilla de probar. ¿Pero qué ocurre cuando saltamos al infinito? Uno de los dos conceptos equivalentes, “cantidad de elementos”, deja de tener sentido. ¿Qué significa cantidad de elementos de un conjunto infinito cuando uno no puede terminar de contar? Esa parte ya no la puedo usar, pero sí puedo usar todavía la segunda parte. La segunda parte sobrevive, todavía podemos establecer, para conjuntos infinitos, correspondencias perfectas uno a uno […]”. (Martínez, 2003)

Si dos conjuntos A y B, finitos o infinitos, se pueden poner en biyección, es decir que todo elemento de A está relacionado con uno y uno solo de B, y cada elemento de B lo está con uno de A, y uno solo, dichos conjuntos se dicen *equivalentes*, *coordinables* o que tienen la misma *potencia*.

Consideremos la siguiente relación entre el conjunto de los enteros y el de los naturales:

$$\begin{array}{llllllllll}
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & . & . & . \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \\
Z: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & . & . & .
\end{array}$$

Esta relación establece una correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos, por lo que, siguiendo lo anterior, podemos decir que N y Z tienen igual potencia. Cantor introdujo un nuevo número cardinal (transfinito) para representar el número de elementos de todo conjunto que se puede poner en biyección con el conjunto de los números naturales. El símbolo que escogió para este número cardinal transfinito fue $\aleph_0$ (aleph subcero). $\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo.

Pues bien, consideremos ahora algunas líneas del relato de Borges (1997): "El libro de Arena" y analicémoslo desde el punto de vista matemático.

"En el ángulo superior de las páginas había cifras arábigas. Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. […]
Me dijo que su libro se llamaba *El libro de arena*, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin.
Me pidió que buscara la primera hoja.
Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice.
Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.
-Ahora busque el final.
También fracasé; apenas logré balbucear con una voz que no era la mía:
-Esto no puede ser.
[…]
-No puede ser pero es. El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última. No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita admiten cualquier número."

¿Podrá ser el cardinal asociado al conjunto de páginas de este libro $\aleph_0$?

Hasta ahora vimos que este número transfinito representaba el cardinal de N y el de Z, pero el conjunto de páginas del *Libro de Arena* parece tener una característica diferente a la de estos conjuntos, a saber, la densidad. ¿Será entonces, el cardinal de este conjunto, un transfinito mayor que $\aleph_0$? Veamos.

Pensemos en el conjunto de los números racionales, que es denso, y consideremos el conjunto de todas las fracciones organizadas según la disposición siguiente:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \frac{0}{1} & & & & \\
\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{3}{1} & -\frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Nótese que todas las fracciones de la primera columna tienen numerador 1, todas las de la segunda tienen numerador -1, las de la tercera, numerador 2, las de la cuarta, -2, etc. Por otro lado, todas las fracciones de la primera fila tienen denominador 1, las de la segunda, denominador 2, etc. Es así que, dada cualquier fracción, digamos 133/191, podemos localizarla en el cuadro, en la fila 191 y en la columna 265. El cuadro pues, contiene el conjunto de todas las fracciones.

Ahora consideremos la siguiente correspondencia siguiendo las flechas que se muestran en el cuadro:

$$
\begin{array}{lccccccccccccl}
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\
 & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \\
Q: & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{2}{3} & \ldots
\end{array}
$$

En esta correspondencia hemos suprimido aquellas fracciones a/b, para las cuales a y b no son primos entre sí, de esta forma cada número racional aparece representado una única vez.

De este modo hemos establecido una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los racionales, con lo cual, y siguiendo lo visto más arriba, el cardinal de N es igual al cardinal de Q, es decir $\aleph_0$.
Obsérvese que una ordenación de los racionales es posible siempre que no estemos obligados a conservar el orden usual.

Volviendo ahora al *Libro de Arena*, podemos responder afirmativamente a la pregunta que hemos dejado planteada. Se puede identificar el conjunto de las páginas del *Libro de Arena* con el conjunto de los racionales entre 0 y 1, que también tiene cardinal $\aleph_0$. La tapa del libro sería el cero y la contratapa sería el uno. Análogamente a lo que ocurría con el *Libro de Arena*, en el conjunto de los racionales entre 0 y 1, no podemos encontrar el primer número racional después del 0 ni el último antes del 1.

"[…] con esta enumeración se le puede dar un orden consecutivo a los números fraccionarios (sic), un orden, por supuesto, distinto del que tienen en la recta, pero que permite explicar la enumeración de páginas en el Libro de Arena. Esto es algo que posiblemente Borges no supiera. La numeración de páginas que a Borges en el cuento le parece misteriosa y a la que le atribuye una razón también misteriosa, en principio no tiene ningún misterio. No hay contradicción entre el hecho de que entre dos hojas del Libro de Arena siempre hay otra intercalada con el hecho de que cada hoja pueda tener un número: el mismo habilidoso imprentero que pudo coser las infinitas páginas del Libro de Arena pudo también perfectamente numerarlas tal como lo estamos haciendo nosotros." (Martínez, 2003)

Para finalizar

Por último, terminemos con unas líneas de "El Libro de Arena", dice Borges (1997):

"Declinaba el verano, y comprendí que el libro era monstruoso. […]
Pensé en el fuego, pero temí que la combustión de un libro infinito fuera parejamente infinita y sofocara de humo al planeta."

Bibliografía:

Borges, J. L. (1997). El libro de arena. Madrid: Alianza Editorial.

Borges, J. L. (2002). Obras Completas I. Buenos Aires: Emecé Editores, 13ª ed.

Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N. (1995). Los matematicuentos. Presencia matemática en la literatura. Argentina: Serie Eureka.

Euclides. Elementos (Libros I-VI). Madrid: Planeta De Agostini (1999).

Martínez, G. (2003). Borges y la matemática. Buenos Aires: Eudeba.

INTRODUCCIÓN DEL TEMA "INTEGRALES" EN EL BACHILLERATO

Cecilia Calvo – Horacio Castagna – Verónica Molfino – Nora Ravaioli
Adm. Nacional de Educación Pública – Consejo de Educación Secundaria, URUGUAY.
ccalvopesce@hotmail.com – hcastagna@adinet.com.uy – veromol@adinet.com.uy – adecia@adinet.com.uy
Campo de investigación: Pensamiento variacional; Nivel educativo: Medio

Resumen

La presente Comunicación Breve se enmarca dentro de la producción de un grupo de trabajo de docentes uruguayos de diferentes niveles educativos reunidos por un interés común: el de cuestionarse acerca de las prácticas educativas actuales, qué tipo de aprendizaje están provocando y cómo modificarlas para mejorar dichos aprendizajes. En este caso el tema escogido fue el de la incorporación del tema "Integrales" al currículo de Secundaria. Se diseñó una propuesta de enseñanza-aprendizaje para el mismo, teniendo como principio rector el que fuera una primera aproximación de los estudiantes al tema, y por lo tanto sin sentir la necesidad de que se ajustara a lo que generalmente se presenta en los libros de texto actuales.

Introducción

El Bachillerato uruguayo se caracteriza por incluir en el programa de Matemática una introducción relativamente profunda del Cálculo Diferencial en el último año (17 – 18 años) en casi todas sus orientaciones. Sin embargo, y extrañamente, el Cálculo Integral sólo se incluye en la orientación Medicina, por lo que alumnos que después de aprobar el curso quedan habilitados para emprender estudios universitarios de Ingeniería, Arquitectura o Economía, no tienen ningún tipo de acercamiento al tema Integrales.
Un grupo de profesores de ámbitos Secundarios y Terciarios hemos constituido un equipo de trabajo dedicado a la reflexión para la mejora de la Enseñanza de la Matemática. En ese marco hemos trabajado sobre propuestas diversas y en esta oportunidad presentamos la que corresponde a la inclusión del tema integrales al currículo del bachillerato en especial en la opción ingeniería.
Nuestro interés en presentar el tema Integrales en el contexto de un curso de Cálculo en Secundaria se justifica en la idea de completar la visión que se da a los estudiantes al finalizar el Bachillerato del Cálculo Diferencial e Integral, articulando sus dimensiones numérica, gráfica y analítica. También tenemos como objetivos:

- Vincular los conceptos básicos del Cálculo con las ideas geométricas que le dieron origen.
- Integrar comentarios históricos que permitan apreciar la actividad matemática como proceso
- Trabajar con métodos numéricos completando así el acercamiento a distintas estrategias de resolución de problemas que se presentan durante la actividad matemática
- Relacionar lo continuo con lo discreto en contextos cotidianos partiendo de un intervalo continuo, considerar particiones de él (transitando así nociones discretas) y volver a un contexto continuo con el estudio del límite.

En la comunicación nos proponemos exponer y fundamentar la elección de una definición de integral, diferentes abordajes del Teorema Fundamental del Cálculo, así como algunas aplicaciones geométricas y extramatemáticas y problemas relativos a la dimensión numérica del concepto de integral.

Acerca de la definición escogida

Los siguientes son algunos de los criterios que hemos acordado para escoger la definición:

- Introducir el tema a partir de la noción de área –noción familiar para los estudiantes– vinculándola a partir de su acotación mediante figuras incluidas e incluyentes que sucesivamente se van acercando al área de la región en cuestión. Para esto admitiremos que la noción de área tiene sentido para los estudiantes, a partir de las experiencias escolares previas: conocen cómo calcular el área de los polígonos elementales y saben que si dos figuras A y B cumplen que $A \subset B$ entonces $á(A) \subset á(B)$ y que si A y B son figuras disjuntas entonces $á(A \cup B) = á(A) + á(B)$.
- Postergar la vinculación de la integral con la derivada a través del teorema Fundamental del Cálculo.
- Manejar una caracterización que nos permita dar tanto ejemplos de funciones integrables como ejemplos de funciones no-integrables y calcular el valor de la integral en el caso de funciones integrables.
- Trabajar con particiones de intervalos de igual longitud, ya que puede resultar más accesible para los estudiantes.
- Trabajar con una definición equivalente a la de Riemman

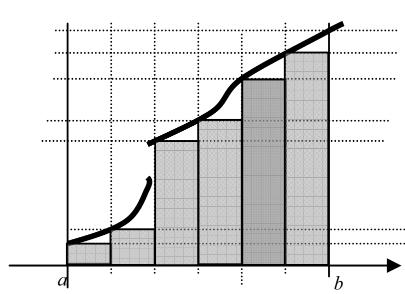
<u>Definición</u>

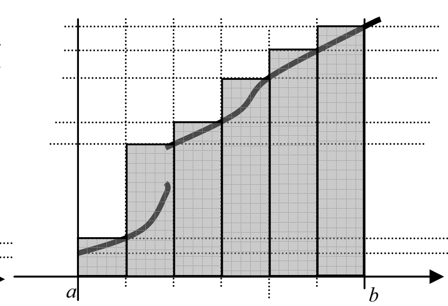
Guiados por la intuición gráfica se llama suma superior al área de una figura que incluye a la región bajo el gráfico de una función acotada cuando ésta es positiva, y de igual forma suma inferior al área de una figura incluida en tal región.

Como pretendemos que no sea necesario exigir condiciones para el signo de la función las sumas superiores las definimos de manera que respete esa intuición pero resulte aplicable también a funciones negativas o de signo no constante.

Empecemos por considerar una función acotada en un intervalo [a, b] y la partición de dicho intervalo en un número n de subintervalos del mismo tamaño.

Para ello tomaremos $x_0 = a, x_1 = a + \dfrac{b-a}{n}, x_2 = a + 2.\dfrac{b-a}{n}, ..., x_n = b$ o sea $x_i = a + i.\dfrac{b-a}{n}$ con $i = 1, 2, ...n$ y en cada uno de los subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ se consideran l_i y u_i los valores ínfimo y supremo respectivamente de la función en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. A partir de tales valores definimos





$$s_n = l_0.\frac{b-a}{n} + l_1.\frac{b-a}{n} + ... + l_{n-1}.\frac{b-a}{n} \qquad S_n = u_0.\frac{b-a}{n} + u_1.\frac{b-a}{n} + ... + u_{n-1}.\frac{b-a}{n}$$

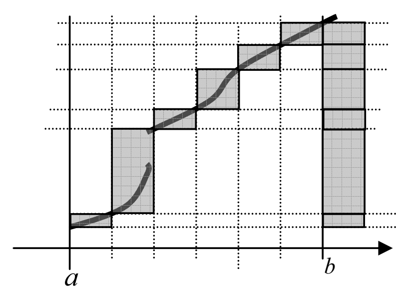
Proponemos definir que una función acotada es integrable cuando lim Sn = lim sn y que, en ese caso, $\int_a^b f = \lim S_n$.

Es esta igualdad la que proponemos tomar como definición, sabiendo que no es la usual (en la cual las particiones no son sólo aquellas en que todos los subintervalos tienen la misma longitud) pero que es equivalente a ella tal como se puede probar. En el trabajo original incluimos una demostración de dicha demostración.

Ejemplo: con esta definición es fácil ver que las funciones monótonas son integrables, con la siguiente demostración visual (en este caso para una función creciente):

$$S_n - s_n = suma\ \ de\ \ cuadraditos\ \ coloreados$$
$$= (f(b) - f(a)).\frac{b-a}{n}$$

Por lo tanto, para todo m > 0 se puede encontrar n tal que *Sn -sn < m*, lo que prueba que la función es integrable.



No ejemplo: $f:[0,1] \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in R-Q \end{cases}$

Se puede probar que esta función no es integrable usando el hecho de que para cualquier partición, $S_n = 1$ y $s_n = 0$.

Teorema fundamental del Cálculo: diversas versiones

Partimos del supuesto de que introducir en un primer curso de Cálculo los temas "Integrales" y "Derivadas" en forma independiente, requiere que luego se preste especial atención a los resultados que permiten vincular ambos conceptos. Por esta razón nos propusimos encontrar diferentes maneras de trabajar dicha relación en el aula, de manera de ofrecer diferentes acercamientos. Encontramos que como esos conceptos fueron presentados a partir de los problemas geométricos que les dieron origen, resulta oportuno que el vínculo entre ellos se establezca también en el ámbito geométrico, desde una perspectiva epistemológica.

Proponemos observar previo a la introducción del teorema:

- que es posible a partir de cada función f integrable en [a, b] considerar una nueva función F definida en ese intervalo de modo que F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ (esto ha mostrado no ser trivial para los estudiantes que tienen un primer acercamiento al cálculo).
- que las funciones que hasta el momento se estudiaron verifican que $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$. Una de los aspectos positivos de este acercamiento al tema es la cantidad de ejemplos de funciones integrales y de sus respectivas primitivas que se pueden calcular desde la introducción del tema.

- que es necesario para que se cumpla la propiedad anterior que la función f sea continua. Se analiza para ello un ejemplo de una función definida en un intervalo que no es continua en un punto, es integrable y tiene una función primitiva, pero no derivable en el punto de discontinuidad, por lo que f y F' no coinciden en todo el dominio.
- el teorema del valor medio para integrales.

En el trabajo se presentan varias versiones del Teorema Fundamental del Cálculo, resultado de un análisis del desarrollo del mismo a lo largo de la historia de la disciplina. Varios de ellos son expuestos en el apartado de Profundizaciones, al final del trabajo. Dentro de ellas optamos por estas dos versiones. Consideramos que articulándolas en clase a través de aplicaciones los estudiantes podrán manejar con precisión la relación entre el concepto de derivada y el de integral.

<u>Primer teorema fundamental del Cálculo:</u>
Si una función f es continua en un intervalo [a,b], c es un punto del mismo, F: [a,b] $\to$ R tal que F(x) = $\int_c^x f(t)dt$, entonces F es derivable en (a,b) y F'(x) = f(x) $\forall x \in (a,b)$.

<u>Segundo teorema fundamental del Cálculo (o Regla de Barrow):</u>
Si una función f es continua en un intervalo [a,b], G una función cuya derivada coincide con f en [a,b][1] entonces $\int_a^x f(t)dt$ =G(x) – G(a)

En la demostración de este último teorema se hace explícito que todas las primitivas de una función difieren en una constante.

Aplicaciones geométricas (al cálculo de áreas y volúmenes de revolución)
Debemos aclarar que en el caso particular de las aplicaciones geométricas trabajamos con las sumas de Riemann. Esta decisión se debe a que:

- Nos permite trabajar los cálculos en forma más simple que con los máximos y mínimos en cada intervalo.
- Si una función es integrable el límite de las sumas de Riemann coincide con la integral como puede observarse, si consideramos f integrable en [*a,b*] y en ese intervalo una partición, donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y m_i y M_i son mínimo y máximo respectivamente en cada intervalito tendremos:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i).(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{i=n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

"La moraleja de este cuento es que todo lo que se asemeje a una buena aproximación de una integral lo es realmente, siempre que todas las longitudes de los intervalos de la partición sean suficientemente pequeños"

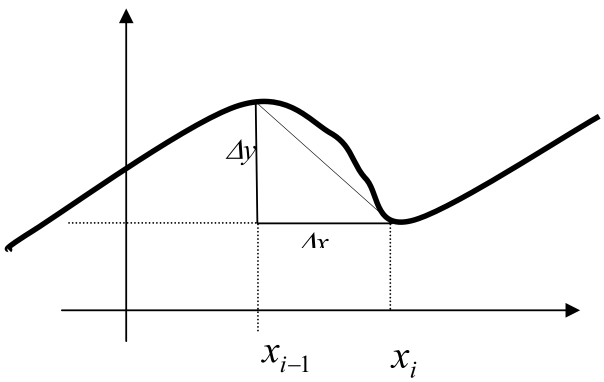
---

[1] Se dice en estos casos que G es una *primitiva* de f.

(Spivak, 1987).

Mostraremos a continuación algunos ejemplos:

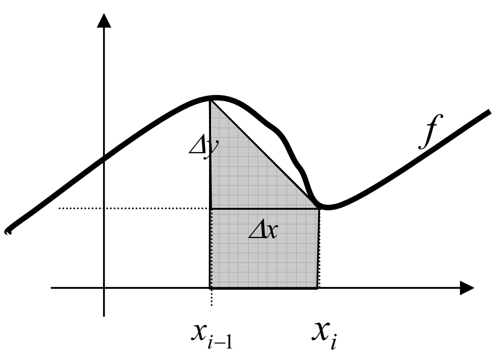
Longitud de curva



Es razonable pensar que tomando en $[a,b]$ intervalos de longitud suficientemente pequeña podremos aproximar la longitud de una curva con la poligonal inscrita. Si tomamos en cada uno de los intervalitos de la partición el triángulo rectángulo que tiene por catetos la diferencia de abscisas Δx y la diferencia de imágenes Δy y aplicamos el Teorema de Pitágoras obtenemos algo "parecido a una buena aproximación de una integral", por lo que la longitud de la curva en $[a,b]$ estará dada por :

$$\sum_1^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_1^n \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i \to \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Superficie de Revolución



Es razonable pensar que tomando en $[a,b]$ intervalos de longitud suficientemente pequeña podremos aproximar en cada uno de los intervalitos de la partición la superficie de revolución (generada al hacer girar f alrededor del eje ox) con la superficie lateral de un cono truncado.

En este caso la superficie de ese cono truncado se calcula como:

$$\pi\big(f(x_i) + f(x_{i-1})\big)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

La superficie de revolución estará dada entonces por:

$$\pi \sum_1^n \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = 2\pi \sum_1^n f(\delta)\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \to 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Estos son algunos de los ejemplos que ilustran el enfoque propuesto. Otras aplicaciones geométricas desarrolladas en el trabajo son el cálculo del área del círculo, una estrategia para la aproximación del número π y el cálculo del volumen de cuerpos de revolución.

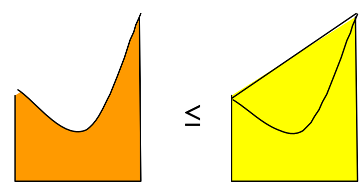
Dimensión numérica

Consideramos que desarrollar la dimensión numérica del concepto de integral se justifica tanto por la presentación de las estrategias que se ponen en juego como por la posibilidad de dar respuesta aproximada al cálculo de la integral de funciones sin primitiva elemental como podría ser f(x)=e^{x^2} .

Como métodos de aproximación numérica de una integral trabajamos los métodos: trapezoidal, rectangulares (con altura la ordenada del extremo izquierdo de cada intervalo, con altura la ordenada del extremo derecho de cada intervalo, con altura la ordenada del punto medio de cada intervalo, con altura la ordenada de un punto cualquiera de cada intervalo, con altura el supremo de los valores funcionales de cada intervalo, con altura el ínfimo de los valores funcionales de cada intervalo) y el de Simpson.

En la propuesta se hace tanto énfasis en la búsqueda de una buena aproximación como en el control del error de dicha aproximación y en las justificaciones visuales y algebraicas que validan estas aproximaciones. Por ejemplo, en el caso de funciones (positivas y derivables varias veces), cuando la concavidad es positiva se estudia que el método trapezoidal:

- Ofrece una aproximación por exceso del área bajo la curva (la figura ilustra como resultaría aplicado a cada subintervalo de la partición)



- El error de esta aproximación es menor que

$$error \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}B$$

siendo a y b los extremos del intervalo de integración, n la cantidad de subintervalos en que se divide [a,b] y B el máximo de la derivada segunda de la función en cuestión en el intervalo [a,b].
- Ese error, para una misma partición, es menor que el que ofrece el método rectangular con altura la ordenada del punto medio de cada subintervalo.
- En el caso de la integral de f(x)= e^{x^2} en el intervalo [0,1], considerando la partición {0, ½, 1} se obtiene como aproximación por exceso $\frac{1+2\sqrt[4]{e}+e}{4}$ = 1,571... con un error menor que $\frac{e}{8}$ cuando se sabe que el valor real de esta integral es 1,462...

Bibliografía

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. Y Casellas, E. (1996) *Cálculo Diferencial e Integral.* Madrid, España: Ed. Síntesis.

Dalcín, M.; Molfino, V y Pérez, G. (2002). *Orígenes del Cálculo Infinitesimal: de la Antigüedad al Teorema Fundamental*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 15, Tomo I. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid, España: Ed. Pirámide.
Grupo Cero (1985). *Matemática para el bachillerato, curso 2.* España: Editorial Teide.

Spivak, M. (1987) *Cálculo infinitesimal*. España: Editorial Reverté.

UN CRITERIO ,¿EVALÚA?

Alejandra Pollio Lezama , María Berenice Verdier Mazzara
St.Brendan's School – URUGUAY
apole@adinet.com.uy – bverdier@adinet.com.uy

Campo de investigación: Evaluación; Nivel educativo: Medio

RESUMEN:

Un permanente desafío al cual se enfrentan todos los docentes en su diaria labor es cómo evaluar para que los estudiantes realmente demuestren lo que aprendieron de lo que el docente se propuso enseñar .

La claridad y la transparencia son características fundamentales que no pueden omitirse en ninguna evaluación .

La evaluación basada en criterios es un modelo que permite tener una buena información de cómo van los procesos de enseñanza y aprendizaje ya que los objetivos propuestos se traducen en los criterios. También permite al docente focalizar sus intenciones de enseñanza y a los estudiantes les permite ver claramente donde estuvieron sus errores y sus acierte. En cierto modo es un modelo que tiene algo de autorregulación.

DESARROLLO:

BREVE MARCO TEORICO

De las distintas actividades y funciones profesionales que lleva a cabo el docente, la evaluación es una de ellas; que se distingue de las otras por las múltiples funciones que ella puede tener y consecuencias que puede producir. Por un lado evalúa , pero por otro lado enseña, demuestra, critica. Consiste en una relación de tareas y decisiones que conducen a valorar el proceso de enseñanza y de aprendizaje, observando múltiples factores del mismo y detectando posibles causas de algunos comportamientos o problemas; en suma es un recurso para el perfeccionamiento de los dos procesos : enseñanza y aprendizaje.

La evaluación debería intentar cubrir todos los aspectos que están comprometidos en el proceso de aprendizaje Pero también ,para que tenga sentido debemos en primer lugar recoger la información para luego interpretarla. El proceso de evaluación quedaría completo con una interpretación de los datos y adecuada construcción de un juicio de valor

Las conclusiones acerca del desempeño presente y futuro del alumno, en cuestiones específicas, se desprenderán de las apreciaciones del aprendizaje que efectúa el instrumento de evaluación, siempre y cuando esté presente en dicho instrumento, un grado de organización suficiente y sea coherente con la concepción de enseñanza que se tenga

Una de las características que ha de tener un instrumento de evaluación es que cuente con preguntas y / o cuestiones concernientes con los objetivos que previamente se hayan programado en la unidad objeto de evaluación.. Es decir, establecer situaciones según las cuales pueda ser demostrada la consecución del objetivo.

Es importante chequear que cada elemento del instrumento de evaluación esté relacionado con el contenido y la destreza o capacidad que efectivamente se quiera evaluar y, también, que la dificultad este acorde con la trabajada a lo largo del curso.

Los elementos que vayan a formar parte del instrumento deben ser revisados, seleccionados y ordenados. A los efectos de su ordenamiento es mas motivante para los estudiantes comenzar con los elementos mas sencillos y pasar gradualmente a los elementos mas difíciles

Las características generales que los instrumentos de evaluación deben reunir son : validez, confiabilidad, practicidad y utilidad .

Se dice que un instrumento de evaluación es válido cuando evalúa lo que se pretende evaluar con él. Como un instrumento es utilizado para apreciar ciertos logros de aprendizaje de un cierto grupo de alumnos en una cierta circunstancia y en un cierto momento de su proceso de aprendizaje, la validez de un instrumento ha de ser determinada en relación con su adecuación a los propósitos y situación especifica. Cuando se requiere saber si un instrumento de evaluación es válido se requiere conocer los criterios que han presidido su construcción y administración.

Un instrumento de evaluación es confiable cuando une la exactitud en la medición y sensibilidad para la apreciación de la presencia y las diferencias de magnitud de los rasgos que mide. Debe ser capaz de aislar factores externos así como también detectar pequeñas diferencias .

La practicidad de un instrumento resulta de las conjunción de su administrabilidad, facilidad de análisis y elaboración de conclusiones .

La utilidad ,asociada a las tres características anteriores, resulta de su capacidad de satisfacer las necesidades especificas relacionados con los proceso de enseñanza y aprendizaje. Si los resultados de la evaluación no resultan útiles para orientar a los docentes, a los alumnos poco importa que el instrumento sea confiable y práctico.

Dentro de los distintos modelos de evaluación encontramos la evaluación basada en criterios. La evaluación basada en criterios centra su atención en lo que alumno puede hacer; comparando su ejecución con un criterio de rendimiento conductual En las pruebas basadas en criterios existe el interés de asegurarse que los ítems midan determinados objetivos específicos y si el alumno los ha ejecutado satisfactoriamente .

La prueba basada en criterios permite estimar la proporción de ejecuciones específicas que un estudiante puede lograr en un campo determinado En lo que se refiere a la información de los individuos que conforman el grupo de clase o de la institución, el docente necesita contar con la mejor información. Para obtenerla puede recogerla de las situaciones naturales tal como ocurre en una sala clase. O bien generar una situación especifica Dichos datos se pueden obtener en situaciones especialmente diseñadas para recoger una información que se considera relevante como indicadora del estado de situación de los aprendizajes que se quiere evaluar. Para que haya una evaluación con sentido es indispensable que existan criterios que permitan construir juicios de valor acerca de lo que la información recogida significa en términos de aprendizaje.

Los criterios de evaluación son las afirmaciones que precisan el grado y tipo de aprendizaje que van a permitir adquirir las capacidades estipuladas. En los criterios de evaluación, los objetivos se traducen en capacidades que se pretenden lograr.

Una de las funciones básicas que deben cumplir los criterios son: selección adecuada y analizada; posicionamiento frente a la materia; facilitar la toma de decisiones.

Un criterio debe permitir seleccionar actividades para desarrollarlo y poner de manifiesto lo que es importante en la asignatura. Cuando se explicita lo que un alumno sea capaz de hacer hay que indicar hasta donde se quiere que lo haga.

Las condiciones que deben cumplir las expresiones criteriales son: utilidad, precisión, variedad, reflejo del nivel de complejidad, objetividad. Por lo tanto para asumir y expresar un criterio se debería usar una formulación adecuada que precise donde se pone el énfasis evaluador.

La base para elaborar los criterios será la Taxonomia de Bloom, la cual determina los objetivos de conductas que se pretendía evaluar, para después elaborar las pruebas correspondientes a los mismos.

Las categorías que componen en el ámbito intelectual son:

Conocimiento :

▪Conocimiento de hechos específicos. Conocimiento de terminología, de datos concretos. Es a partir de estos conocimientos que se pueden construir formas más abstractas de conocimientos

▪Conocimientos de medios y formas de trabajar con hechos específicos. Abarca el conocimiento de formas de organizar, estudiar, juzgar; conocimiento de clasificación

▪.Conocimiento de representaciones abstractas. Abarca el conocimiento de principios, leyes y teorías; el dominio de grandes generalizaciones o estructuras de conocimientos correspondientes a diversas áreas del saber

Comprensión

▪Traducción: Se refiere al conjunto de conductas por las que se traslada un contenido a otro lenguaje.

▪Interpretación: Conjunto de conductas que suponen en el alumno la capacidad para explicar o resumir un comunicado, reorganizarlo y presentarlo en forma personal. El alumno organiza personalmente los métodos a seguir en la resolución de problemas

▪Extrapolación: Conductas centradas en la capacidad de extraer consecuencias. Ver mas allá de los datos.

Aplicación

▪Se pone en juego la capacidad de utilizar ideas, principios, teorías o métodos generales en situaciones concretas, en casos particulares

Análisis

▪Conductas centradas en la capacidad para el fraccionamiento de la comunicación, tratando de aclarar la jerarquía existente entre su parte y la relación que se establece entre las mismas. Las distintas categorías: análisis de elementos, análisis de relaciones entre lo elementos, análisis de principios de organización.

Síntesis

▪Capacidad de reunir elementos y partes a fin de formar un todo

▪Producción de una comunicación original; en la transmisión de ideas, pensamientos

▪Producción de plan de trabajo, de actuación

▪Elaboración de un conjunto de relaciones abstractas, para clasificar o explicar datos o fenómeno particulares. Elaboración de informe luego de una recogida de datos.

Evaluación

▪Consiste en la emisión de juicios cuantitativos y cualitativos sobre materiales y métodos. Dicha evaluación puede entenderse como realizada en función de criterios internos o externos.

LA PRUEBA:

La prueba que se presenta fue aplicada a un grupo del 3º año del Ciclo Básico, alumnos de 14 a 15 años.

Se realizó en el marco de una actividad interdisciplinaria de las asignaturas, Física y Matemática. El diseño de la actividad, los criterios y los descriptores, lo re realizaron conjuntamente los profesores de las asignaturas involucradas.

La misma se aplicó en dos períodos de 40 minutos cada uno y formó parte de una evaluación sumativa , en ambas asignaturas , recordando que una evaluación sumativa se aplica al final de un período de aprendizaje. Se califica al alumno de acuerdo a su nivel de eficacia según una escala de suficiente o no, de acuerdo al trabajo desarrollado o lo que se considere que haya aprendido. Establece un juicio global sobre la superación o no del proceso didáctico.

Los alumnos tenían conocimiento de los criterios con los cuales serían evaluados, y al finalizar la prueba debían hacer una reflexión final sobre cómo influyó en su trabajo el conocimiento de los criterios que los evaluarían

La elección de los contenidos formaba parte del universo de contenidos que cubre todo el programa y abarcada dos unidades didácticas: una de Matemática y una de Física Los contenidos concretos se especifica más adelante en la descripción de los criterios .

Los objetivos generales de la prueba fueron:
Conocer y aplicar definiciones
Conocer y aplicar propiedades
Pasar de un lenguaje a otro
Deducir fórmulas
Efectuar justificaciones
Verbalizar sus secuencias de razonamiento
Los objetivos específicos se traducen en los criterios. [1]

CRITEROS A USAR EN LA EVALUACIÓN
Los alumnos serán evaluados de acuerdo a:

CONOCIMIENTOS – COMPRENSIÓN

- Conocimientos y comprensión de los temas: Cinemática (Movimientos Rectilíneos) y Funciones (Función lineal).
- Aplicación de conceptos matemáticos y físicos para tomar decisiones al momento de resolver la actividad propuesta.
- Análisis y evaluación de la información dada.
- Uso de las diferentes formas de representaciones: numérica, algebraica y gráfica.
- Pasaje de una representación a otra.

COMUNICACIÓN

- Uso del lenguaje científico y matemático adecuado, para comunicar razonamientos y resultados.
- Codificación y decodificación de la información dada.
- Descripción verbal de secuencias de razonamiento.
- Presentación de la información, resolución y conclusión con claridad y lógica.
- Manejo de las unidades de medición (Sistema Internacional de unidades ; S.I.)

Mega criterio: (2)[2]
Se espera de los alumnos:
- Saber usar el idioma para describir, explicar, argumentar, analizar,

---

[1] En el diseño de la actividad, así como en el de los criterios de evaluación y descriptores, intervino el Prof. de Física Gustavo Deambrosio
[2] Extraído del Mega Criterio elaborado por la sala de Lenguas del Instituto ST. Brendan.

sintetizar.

- Adecuar el lenguaje al contexto.
- Atender la presentación y la prolijidad.
- Cuidar la ortografía y la sintaxis.

ACTIVIDAD:

Un cuerpo se desplaza en una trayectoria rectilínea de manera tal que: en los primeros 10 segundos su velocidad varía al transcurrir el tiempo según la expresión $V(t) = 3.0t+10$ estando t y V(t) en el Sistema Internacional de Unidades. A continuación mantiene una velocidad constante durante otros 10 segundos y finalmente su velocidad disminuye en forma uniforme hasta detenerse a los 40 segundos.

1) Graficar la velocidad en función del tiempo de dicho cuerpo en los primeros 40 segundos.
2) ¿Qué velocidad tiene el cuerpo en el instante 7,0 s?
3) ¿Qué aceleración desarrolló en los primeros 10 segundos?
4) Indique la expresión de la V(t) durante el intervalo en que desaceleró.
5) ¿Cuál fue el desplazamiento en los primeros 10 segundos?
6) ¿En que instante la velocidad del cuerpo vuelve a ser la que tenía al comenzar el estudio del movimiento?

CONCLUSIONES:

La corrección de los trabajos y calificación de los mismos, fue realizada por ambos profesores, cabe destacar que en base a los criterios establecidos y teniendo como patrón, los descriptores previamente diseñados, ambos profesores coincidieron en su evaluación.

Los alumnos en su mayoría, manifestaron que el conocer como serían evaluados, les dio tranquilidad, les ayudó a ordenarse en el trabajo y a cotejar su labor.

Las reflexiones a cerca de los resultados, así como el verbalizar la secuencia de razonamiento realizada, mostró no solo los conocimientos que manejaba cada alumno sino también el grado de comprensión que habían alcanzado. De los mismos.

BIBLIOGRAFÍA

Alicia R. W. De Camilloni, Susana Celman, CarmenPalou de Maté,Edith

Litwin(1998) “La evaluación de los aprendizaje en el debate didáctico contemporáneo” Buenos Aires Ed. PAIDOS

Jean Marie De Ketele, (1984) “Observar para educar”. Madrid. Ed.MORATA

Norman Gronlund (1973) “Medición y evaluación en la enseñanza”.Mexico. Ed. PAX

Carlos Rosales(1998)”Criterios para una evaluación formativa” Madrid.ED.NARCEA

Joaquín Giménez Rodríquez (1997) “Evalaución en Matemática. Una Integración de Perspectivas” .Madrid. Ed.SINTESIS.

ANEXO

DESCRIPTORES DEL NIVEL DE LOGRO

En base a los objetivos propuestos y a los criterios con los que serían evaluados los alumnos, de diseñaron los siguientes descriptores para determinar los niveles de logro de cada alumno:

Para evaluar Conocimientos y Comprensión:

Nivel de logro	Descriptores
0	El alumno no alcanza ninguno de los niveles especificados en los descriptores que se detallan seguidamente.
1 - 2	El alumno demuestra ser capaz de recordar alguna información y expresarla con sus propias palabras. Maneja conceptos cinético-matemáticos y los aplica con escaso acierto. Intenta hacer la gráfica de la situación planteada mostrando cierta capacidad para seleccionar la información sin que las asociaciones sean correctas. Demuestra escasos conocimientos sobre las unidades de medición. (S.I.)
3- 4	El alumno demuestra conocer los conceptos cinemáticos (desplazamiento, velocidad, aceleración) y matemáticos(función lineal, imagen, pendiente), y los aplica adecuadamente. Efectúa el análisis gráfico demostrando una aceptable comprensión sobre la variación de las variables en cada tramo. Pasa de la expresión algebraica y de la interpretación de la expresión verbal a cerca de la velocidad, a la representación gráfica y lo hace con bastante acierto. Maneja y asocia adecuadamente el concepto de imagen y de pendiente. Intenta hallar una expresión algebraica de V(t) partiendo de la gráfica en el último tramo. Demuestra conocimientos sobre las unidades de medición.(S.I.)
5 - 6	El alumno demuestra conocer los conceptos cinético-matemático (desplazamiento, velocidad, aceleración, móv. acelerados y desacelerados, función lineal, imagen, preimagen, coef. angular, pendiente, ordenada .en el origen) , los asocia y los aplica con acierto en todas las situaciones. Observa y explica la información, maneja y organiza datos saca conclusiones acertadas. Hace bien la gráfica V(t) en todos los tramos demostrando completa comprensión sobre la variación de la velocidad al transcurrir el tiempo.(Variable dependiente-independiente) Pasa de las expresiones algebraica y verbal a la representación gráfica y viceversa, y lo hace con seguridad, comprensión e interpretación. Demuestra buenos conocimientos sobre las unidades de medición.(S.I.) Analiza pertinencia de resultados

Para evaluar Comunicación:

Nivel de logro	Descriptores
0	El alumno no alcanza ninguno de los niveles especificados en los descriptores que se detallan seguidamente.
1 - 2	El alumno intenta comunicar la información empleando algunos términos científicos y verbalizar cuando analiza el problema planteado en contexto conocido. Reconoce y usa símbolos y lenguaje matemático básico. Los errores de ortografía son frecuentes; la puntuación y la sintaxis dificultan, en general, la comprensión. La presentación y la prolijidad merecen reparos.
3- 4	El alumno comunica la información científico - matemático de manera adecuada, utilizando formas de representación simbólica. Verbaliza algunas secuencias de razonamiento y explica las soluciones del problema. El vocabulario, es en general, relativamente apropiado a la intención del trabajo. Los errores de ortografía, puntuación y sintaxis a veces dificultan la comprensión. La información recogida está organizada. La presentación y la prolijidad son aceptables.
5 - 6	El alumno comunica la información científica eficazmente, reconociendo y empleando lenguaje científico – matemático con amplia gama de símbolos, en forma correcta. Verbaliza las secuencias de razonamiento y explica las soluciones del problema con claridad El vocabulario es variado y apropiado a la intención del trabajo. no se registran errores de ortografía, la puntuación es adecuada. La presentación y prolijidad son muy buenas.

DOS CONCEPCIONES ACERCA DEL INFINITO. EL INFINITO ACTUAL Y EL INFINITO POTENCIAL

Gustavo Franco [1], Cristina Ochoviet [2]
[1] Liceo Solymar I, [2] Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.
gfrancoc@hotmail.com, princesa@adinet.com.uy

Campo de investigación: Historia de la matemática- Interdisciplinariedad; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

A partir de textos literarios de Jorge Luis Borges y de José Mauro de Vasconcelos se introducen la nociones de infinito potencial y actual.
La propuesta da una mirada sobre estas dos concepciones del infinito desde la filosofía, la literatura y la matemática.
Este trabajo constituye una posible propuesta para llevar estos temas a la clase de matemática desde una perspectiva integradora.

El infinito potencial y el infinito actual

La diferencia entre el infinito potencial y el infinito actual está emparentada con la diferencia entre el devenir y el ser, entre el mundo de Heráclito y el de Parménides.
"El infinito potencial se obtendría mediante procesos que no nos enfrentan en ningún momento con el infinito en su totalidad, sino con un infinito que aparece como posibilidad (en potencia) y que se va realizando progresivamente". (Palacios et al., 1995)

Consideremos la sucesión de los números naturales:
0, 1, 2, 3, 4, 5, …
En esta sucesión no hay ningún número natural que sea infinito. El infinito no aparece sino que se va desarrollando; nos damos cuenta de que los números naturales son potencialmente infinitos pues si pensamos en un natural muy grande alcanza con sumarle uno para obtener otro mayor y así sucesivamente.
Creemos que el siguiente texto de Vasconcelos (1996), de su novela "Rosinha, mi canoa", ilustra esta idea del infinito potencial:
"[...] Metía la mano en la arena finita y se quedaba como cerniéndola. Sonrió; recordaba que de chico, cuando estudiaba en la ciudad, en los colegios de sacerdotes, el ejemplo que le dieron de la eternidad era: "Si un palomo, cada mil años, llegase a la tierra y se llevara un granito de arena cada vez, cuando se gastara la arena del mundo entero la eternidad aún estaría comenzando."

Veamos ahora qué entendemos por infinito actual. "Admitamos que se pueda definir el conjunto de los números naturales, y llamemos N a este conjunto (desprovisto de toda idea de orden). No tiene ningún sentido decir que los elementos de N "devienen", o que "se hacen cada vez más grandes". Están todos allí, simplemente, actualmente (en el sentido de acto y no en sentido temporal). Todos los conjuntos que estudia la matemática tienen existencia actual en este sentido; los conjuntos están dados, y con ellos la totalidad de sus elementos: no hay nada parecido a una evolución, a un devenir. […] el infinito potencial

[…] es una propiedad de un conjunto y un orden, el infinito actual […] es una propiedad de conjunto simplemente (con abstracción de todo orden)”. (Palacios et al., 1995)

El texto de Borges (2002), que es un fragmento del relato “El Aleph”, nos acerca a la idea del infinito actual:
“Aclaró que un Aleph es uno de los puntos del espacio que contiene todos los puntos. […]
–Sí, el lugar donde están, sin confundirse, todos los lugares del orbe, vistos desde todos los ángulos.”
Y más abajo continúa:
“Lo que vieron mis ojos fue simultáneo: lo que transcribiré, sucesivo, porque el lenguaje lo es. Algo, sin embargo, recogeré.
En la parte inferior del escalón, hacia la derecha, vi una pequeña esfera tornasolada, de casi intolerable fulgor. Al principio la creí giratoria; luego comprendí que ese movimiento era una ilusión producida por los vertiginosos espectáculos que encerraba. El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño. Cada cosa (la luna del espejo, digamos) era infinitas cosas, porque yo claramente la veía desde todos los puntos del universo. Vi el populoso mar, vi el alba y la tarde, vi las muchedumbres de América, vi una plateada telaraña en el centro de una negra pirámide, vi un laberinto roto (era Londres), vi interminables ojos inmediatos escrutándose en mí como en un espejo, vi todos los espejos del planeta y ninguno me reflejó, vi en un traspatio de la calle Soler las mismas baldosas que hace treinta años vi en el zaguán de una casa en Fray Bentos, vi racimos, nieve, tabaco, vetas de metal, vapor de agua, vi convexos desiertos ecuatoriales y cada uno de los granos de arena […]”.

Podemos pensar el *Aleph* como la materialización del infinito actual; un punto del espacio donde se puede visualizar ese infinito.
Lo visto por *Borges* en el *Aleph* fue simultáneo, que es la forma de concebir el infinito actual, pero, como el personaje advierte, el lenguaje lo puede describir solamente de un modo sucesivo, que escapa a la esencia misma de esta concepción del infinito; lo sucesivo estaría vinculado con el infinito potencial. Aquí ambas ideas conviven, podríamos decir, haciendo un poco de literatura, que desde el infinito potencial (el lenguaje) se habla del infinito actual (el *Aleph*).

Georg Cantor (1845-1918), después de un trabajo solitario de treinta años deja totalmente formulada, a fines del siglo XIX, una teoría matemática del infinito actual. Este matemático introduce una nueva visión: hasta él la forma de concebir el infinito en matemática era la de infinito potencial. El siguiente fragmento, de su ensayo titulado “Sobre los conjuntos lineales” (1883), nos ilustra sus ideas acerca del infinito, y de alguna manera resume lo que hemos dicho anteriormente:
“Es tradicional considerar al infinito como lo indefinidamente creciente o bajo la forma, estrechamente ligada a la anterior, de una sucesión convergente, que adquirió durante el siglo XVII. Por el contrario, yo considero al infinito en la forma definida de algo ya consumado, de algo capaz, no sólo de formulación matemática, sino de ser definido por un número. Esta concepción del infinito es opuesta a las tradiciones que durante tanto tiempo me fueron tan queridas, y fué más bien contra mi propia voluntad el como me vi forzado a aceptar este otro punto de vista. Pero varios años de ensayos y de especulaciones científicas me han conducido a estas conclusiones como a una necesidad lógica, y por esta razón yo

creo que no se me podrán presentar objeciones válidas que yo no pueda refutar." (Referido en Dantzig, 1947)
Una carta escrita por Gauss a Schumacher en 1831 da muestra de la resistencia de la época a aceptar estas nuevas ideas: "En cuanto a vuestra prueba, yo debo protestar vehementemente contra el uso que hacéis del infinito como algo consumado, porque esto no es permitido jamás en la matemática. El infinito es simplemente una manera de hablar; una forma abreviada para establecer que existen límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se quiera mientras que otras magnitudes pueden crecer hasta más allá de los límites...
No surgirán contradicciones mientras el Hombre Finito no cometa el error de tomar el infinito como algo fijo, mientras él no adquiera el hábito mental de considerar al infinito como algo limitado." (Referido en Dantzig, 1947)

El infinito actual representa el quiebre con un postulado aristotélico que incluso Euclides, en los "Elementos", incluye como una de sus *nociones comunes*: "El todo es mayor que la parte".
¿Por qué decimos esto?
Evidentemente, si un conjunto es finito, no puede ser *equivalente*, es decir, no se puede poner en biyección, con ninguno de sus subconjuntos propios. En cambio, si un conjunto contiene infinitos elementos es equivalente a algunos de sus subconjuntos propios. Por ejemplo, la relación:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots & n^2 \ldots \end{array}$$

establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números naturales y un subconjunto propio, a saber, el formado por los cuadrados de dichos números naturales. Y esto es, en esencia, lo que Cantor utiliza para decir que estos conjuntos, ambos infinitos, tienen el mismo cardinal. Cantor designó con la letra aleph $\aleph$, la primera del alfabeto hebreo, y con un subíndice 0 ($\aleph_0$), al cardinal de cualquier conjunto que se pueda poner en biyección con el conjunto de los números naturales. En ese caso se dice que el conjunto tiene *potencia* $\aleph_0$ y se denomina *numerable*. A $\aleph_0$ se lo llama número transfinito.

La posibilidad de establecer una correspondencia entre conjuntos infinitos aparece ya en uno de los diálogos de Galileo ("Diálogos acerca de dos nuevas ciencias", 1636); es el primer documento histórico sobre el tema de los conjuntos infinitos:
"No veo que se pueda llegar a otra decisión, sino a decir que infinita la totalidad de los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; y que la multitud de cuadrados no es menor que la de la totalidad de los números, ni ésta menor que aquélla, y en última instancia, que los atributos de "igual", "mayor" y " menor", no tiene lugar en los infinitos, sino sólo en las cantidades limitadas. Por ello, cuando Simplicio me propone varias líneas desiguales, y me pregunta cómo puede ser que no haya en las mayores más puntos que en

las menores, yo le respondo que no hay más, ni menos, ni tantos, sino infinitos en cada una.” (Referido en Dantzig, 1947)

“*La parte tiene la potencia del todo*. Tal es la esencia de la paradoja de Galileo. Pero mientras Galileo esquivaba la solución declarando que: “*los atributos de igual, mayor y menor no son aplicables al infinito, sino únicamente a las cantidades finitas”,* Cantor toma esta conclusión como punto de partida para su teoría de los conjuntos.” (Referido en Dantzig, 1997)

Para Cantor sí es posible comparar los cardinales de conjuntos infinitos, y prueba que el cardinal del conjunto de los números reales es distinto del cardinal del conjunto de los números naturales.

Veamos, en principio, la no numerabilidad del intervalo (0,1).

La demostración es por reducción al absurdo; se supone que el conjunto de los números naturales y el intervalo (0,1) pueden ponerse en biyección y se llega a una contradicción. Para evitar dos representaciones decimales del mismo número se elegirá, cuando corresponda, el desarrollo terminado en infinitos ceros. Por ejemplo, entre la representación 0,4999… y 0,5000… elegiremos esta última para ½, con esto nos aseguramos que la representación decimal de cualquier número real del (0,1) es única.

Supongamos entonces que hemos puesto en biyección el conjunto de los naturales con el de los reales del intervalo antedicho, y los presentamos en la siguiente lista:

$x_1 = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2 = 0,\ b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \ b_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_3 = 0,\ c_1\ \ \ c_2\ \ \ c_3\ \ \ c_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_4 = 0,\ \ d_1\ \ \ d_2\ \ \ d_3\ \ \ d_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

……

Veremos que, cualquiera sea esta lista, siempre existe un número real x en el (0,1) que no figura en la misma y que por lo tanto no es posible poner en correspondencia “uno a uno” al conjunto de los reales del intervalo con el de los números naturales.

Determinaremos el número x por el procedimiento llamado de *diagonalización*:

$x = 0,\ a_1'\ b_2'\ c_3'\ d_4' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

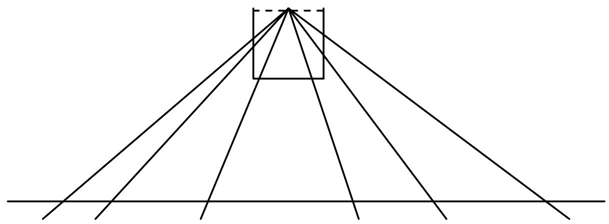
donde a_1' es una cifra distinta de cero, de nueve y de a_1, b_2' es una cifra distinta de cero, de nueve y de b_2, c_3' es una cifra distinta de cero, de nueve y de c_3, etc.

Observemos que:

1) x tiene infinitas cifras decimales que no son ni todas ceros ni todas nueves por tanto x no es ni 0,000…=0, ni 0,999…=1. En otras palabra x pertenece al (0,1).
2) x es distinto de todos los números de la lista pues difiere de x_1 en la primera cifra decimal, de x_2 en la segunda, de x_3 en la tercera, y en general, de x_n en la enésima.

Por tanto existe un número real x del (0,1) que no aparece en la lista, con lo que queda probado, por el absurdo, la no numerabilidad del intervalo (0,1).

Mostraremos ahora, a través de un procedimiento geométrico, que la potencia del intervalo (0,1) es igual a la del conjunto de todos los reales. Para ello estableceremos una biyección entre un segmento abierto de medida la unidad y una recta. Procedemos de la siguiente manera: se "forma" con el segmento una poligonal abierta de tres lados, de longitudes 1/3, y se proyecta desde un punto conveniente:



De este modo mostramos que el conjunto de los puntos de la recta no es numerable. El cardinal de los números reales se denomina *c* y se puede demostrar que es un número transfinito mayor que $\aleph_0$.

Terminemos con la bellísima enumeración, de la cual ya hemos dado cuenta en parte, de lo que el personaje Borges vio en el *Aleph*:
"[…] vi la circulación de mi oscura sangre, vi el engranaje del amor y la modificación de la muerte, vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y el Aleph en la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo." (Borges, 2002)

Referencias bibliográficas:

Borges, J. L., (2002). Obras Completas I. Buenos Aires: Emecé Editores, 13ª ed.

De Vasconcelos, J. M. (1996). Rosinha, mi canoa. Buenos Aires: Editorial "El ateneo", 15ª ed.

Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N., (1995). Los matematicuentos. Presencia matemática en la literatura. Argentina: Serie Eureka.

Euclides. (1999) Elementos (Libros I-VI). Madrid: Planeta De Agostini.

Dantzig, T. (1947). Número. El lenguaje de la ciencia. Buenos Aires: Colección "Ciencia y método".

DISEÑO DE UN CURSO NIVELACIÓN AL INGRESO A LA UNIVERSIDAD, A PARTIR DE LA CARACTERIZACIÓN DEL PERFIL DE LOS INGRESANTES.

Walter Álvarez, Eduardo Lacués, Magdalena Pagano.
Universidad Católica del Uruguay (UCU); Uruguay
walvarez@ucu.edu.uy, elacues@ucu.edu.uy, mapagano@ucu.edu.uy

Campo de investigación: Diseño Curricular
Palabras clave: ingresantes, universidad, competencias, currículo

Resumen

Este informe da cuenta de un trabajo de diseño curricular en el área de Matemáticas, correspondiente a la formación universitaria inicial. En él se describe la planificación e implementación de un curso de ingreso dirigido a los alumnos ingresantes a la Universidad Católica del Uruguay, que han sido diagnosticados como con alta probabilidad de fracaso en sus cursos de Matemáticas en el primer año universitario.
Se indican los contenidos disciplinares a trabajar, explicando su selección no sólo por su valor disciplinar, sino por la oportunidad que brindan de organizar actividades para su enseñanza que además sean ocasión de estimular el desarrollo de competencias.

1- Introducción

Este informe da cuenta de un trabajo de diseño curricular en el área de Matemática correspondiente a la formación universitaria inicial. En él se describe la planificación e implementación de un curso de ingreso dirigido a los alumnos ingresantes a la Universidad Católica del Uruguay, que han sido diagnosticados como con alta probabilidad de fracaso en sus cursos de Matemática en el primer año universitario.

El diseño se realizó sobre la base de tres insumos principales: el perfil de los ingresantes construido a partir de instrumentos de diagnóstico elaborados y validados en investigaciones anteriores (Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M.), el marco teórico provisto por las nociones de Zona de Desarrollo Proximal (Vigotski, L.S.) y de Aprendizaje Significativo (Ausubel, D.), basando en ellas el diseño de una enseñanza enfocada al estímulo y al desarrollo de competencias, y la consideración de las nuevas demandas de formación que se presentan al sistema universitario (Monereo, C. y Pozo, J.I.)

2- Fundamentación

El problema constituido por los altos índices de reprobación en primer año, en particular en asignaturas del área Matemática, tiene extensión prácticamente universal.

Es posible encontrar numerosos intentos de atender a esta situación, a través de cursos de ingreso especiales que imparten las universidades, ya sea a los aspirantes a ingresar en ellas o a quienes ya han ingresado y están cursando el primer año, o mediante procesos de selección previa a través de exámenes de ingreso. La mayoría de estos intentos comparten dos cualidades:

- La presunción que la causa, al menos la causa principal, del fracaso de los estudiantes es su desconocimiento de los contenidos disciplinares que se supone debieron adquirir en secundaria.
- El énfasis, casi exclusivo, puesto en la enseñanza de algoritmos de resolución de ejercicios tipificados, con mínimos vínculos a las nociones teóricas que los justifican y la casi total ausencia de instancias de aplicación fuera de la Matemática de las nociones tratadas.

Sin embargo, la evaluación del éxito que estos programas han tenido (casi insignificante en muchos casos) permite cuestionar estas orientaciones. Sin dejar de reconocer la importancia que los aspectos aludidos tienen, es necesario considerar otros.
En la transición entre la secundaria y la universidad actúan factores cognitivos, afectivos y sociales de gran relevancia, que el planteo de cursos de ingreso debe tener en cuenta, para buscar maneras de prestar atención a cuestiones como el desarrollo de capacidades (cognitivas, afectivas, sociales) y la adopción de actitudes positivas en relación con el trabajo en la universidad (valoración del saber, disposición a realizar esfuerzos prolongados, asunción de la propia responsabilidad en la formación personal y profesional). En efecto, si bien no cabe pensar que la inserción de un estudiante en la universidad culmine al completarse un curso introductorio, tampoco puede negarse que estos constituyen espacios privilegiados para ayudar a conseguir una adecuada incorporación a la vida universitaria.
En otro orden, el conocimiento matemático no se agota en el dominio de algoritmos, sino que incluye la construcción de redes conceptuales complejas, para lo cual es necesario, además de los procedimientos, el manejo de estructuras lógicas, la disponibilidad de diversas formas de representación de las entidades matemáticas y la comprensión de diversas formas de interpretar en la realidad el significado de los resultados disciplinares.

3 - Diagnóstico

Entre los años 2000 y 2003 se ha desarrollado una investigación, para caracterizar el perfil de los alumnos que ingresan en la Universidad Católica del Uruguay. Entre los objetivos de esta investigación está la obtención de información pertinente para el diseño de los cursos de ingreso, con los que se busca apoyar a los estudiantes. Se indagó acerca del desempeño de los ingresantes en cuatro aspectos:

- Manejo elemental de cálculo numérico o algebraico.
- Dominio de estructuras lógicas.
- Nivel de uso del lenguaje simbólico.
- Conocimientos previos de Cálculo Diferencial.

En el primero de estos aspectos se encontró un escaso dominio de propiedades elementales de las funciones exponenciales o logarítmicas, así como evidencia de dificultades para ejecutar cálculos algebraicos asociados con procesos de resolución de ecuaciones o inecuaciones.
En cuanto al dominio de estructuras lógicas existe confusión entre el enunciado de un teorema y el de su recíproco, así como una creencia generalizada que si un teorema es válido, su recíproco también. Del mismo modo, los estudiantes evidencian creer que la no aplicabilidad de un teorema implica que lo asegurado en la tesis del mismo es falso. Se detecta también una inadecuada idea del uso de un contraejemplo para invalidar un enunciado.
En lo referente al nivel de uso del lenguaje simbólico fue detectada una habitual confusión entre los conectivos "y" y "o" en los procesos de traducción entre el lenguaje coloquial y la formulación simbólica de operaciones entre conjuntos. Así mismo se encontró un buen desempeño en relación con la construcción de modelos.
Los ítems referidos a los conocimientos previos de Cálculo Diferencial permitieron constatar un buen desempeño en tareas tipificadas, donde se dispone de algoritmos para obtener el resultado, sin embargo dejaron evidencia que los estudiantes no han desarrollado vínculos entre los resultados conceptuales que justifican los procedimientos que usan y el uso de estos procedimientos.

3 - Marco Teórico

De acuerdo con lo ya expuesto en la fundamentación de este trabajo, el diseño del curso de ingreso se apoya en la creencia que un estudiante universitario debe lograr aprendizajes de orden superior, esto es lo que Ausubel (2001) y otros autores denominan desde la Psicología de la Educación, aprendizajes significativos. Según Novak (1998) en su interpretación de la teoría de Ausubel, el aprendizaje significativo es capacitador, lo cual implica que tiene poder de transferencia y promueve la creatividad. Si se pone el énfasis en el aspecto cognitivo del aprendizaje, el aprendizaje significativo estaría caracterizado principalmente por la adquisición y empleo de conocimientos.

Ausubel postula que el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el aprendiz ya sabe. Propone que la enseñanza proceda a introducir los conceptos inclusores que sirvan como ideas de anclaje a los nuevos saberes, para propiciar dos procesos en el aprendiz:

–Diferenciación progresiva (desarrollo y ampliación de los conceptos inclusores existentes en la estructura cognitiva)

–Reconciliación integradora (establecimiento de interrelaciones entre los conceptos inclusores e incluidos que permite detectar similitudes y diferencias)

Por lo tanto, de acuerdo con los autores no es suficiente que el estudiante posea ciertos conceptos, sino que además estos conceptos deben haberse presentado de forma tal que actúen como conceptos inclusores que permitan ser ampliados e interrelacionados con otros conceptos del mismo orden o de orden superior

Por otra parte, Vygotski introduce la noción de zona de desarrollo proximal como la diferencia entre lo que el aprendiz puede realizar por sí solo y lo que podría hacer con el apoyo de un profesor o un aprendiz más aventajado. Es el potencial de un aprendiz y no su grado de desarrollo actual, el que establece las expectativas que es razonable tener acerca de su desempeño futuro.

En este sentido, el lenguaje juega el rol de organizador de tareas complejas; en Matemática el dominio del lenguaje algebraico y de los diferentes sistemas de símbolos es parte esencial de las necesidades para comprender formulaciones abstractas, realizar diversos tipos de cálculo o resolver problemas.

Es a partir de los aportes teóricos de ambos autores que se diseña un curso de ingreso que atienda tanto a la comprensión de los conceptos matemáticos como a la aplicación consciente de los mismos a diversas situaciones no tipificadas. Del mismo modo se prestará especial atención a la adquisición de un adecuado manejo del lenguaje simbólico, tanto para comprender enunciados como para expresar la solución de las tareas planteadas

A continuación se describe una forma de organización de un curso de ingreso que tiene en cuenta los argumentos de la discusión anterior.

4- Organización del curso de ingreso

4.1 - Diagnóstico

En la primera semana de cursos se propone una prueba de diagnóstico, en la que no sólo se examinan conocimientos algorítmicos, sino también el grado de desarrollo de ciertas capacidades y el grado de construcción de algunos conceptos importantes para el desarrollo de los cursos iniciales en la universidad. Con el resultado de esta prueba es posible identificar a los que más probablemente encontrarán dificultades en los cursos de Matemática, que son principales destinatarios del curso que se propone.

4.2 - Metodología

Es posible utilizar metodologías complementarias, tratando de obtener el máximo beneficio de cada una según el tipo de aprendizajes que se pretenda propiciar. Éstas son: el uso de tecnologías para formación a distancia, las clases magistrales, los trabajos en grupo y las consultorías individuales a estudiantes. A continuación se discute cuál usar en relación con qué tipo de aprendizajes.

El aprendizaje de algoritmos de resolución de situaciones tipificadas requiere de la ejecución reiterada de ejercicios muy similares, donde la variaciones que se presenten no afecten ningún elemento esencial del tipo de problemas en cuestión. Por eso, una vez ejemplificada la forma de ejecución del algoritmo, es necesario el trabajo individual consistente en reiterar el procedimiento hasta que se alcance el nivel requerido de experticia. La modalidad de trabajo a distancia se adecua bien a las necesidades de esta tarea.

En efecto, se puede organizar a través de soportes informáticos la presentación de ejemplos desarrollados detalladamente con los comentarios pertinentes, seguidos por la propuesta de un número suficiente de ejercicios. La evaluación del aprendizaje conseguido puede realizarla el propio estudiante a través del mismo medio, a partir de pruebas diseñadas para medir diferentes grados de dominio de los procedimientos en cuestión.

Además de los aprendizajes disciplinares que se pueden lograr con esta forma de trabajo, también hay cuestiones actitudinales importantes a considerar. Con estas actividades se traslada la responsabilidad al estudiante, ya que es él quien debe fijar los tiempos y el nivel que pretende alcanzar, y tiene que asumir que es el principal actor en sus procesos de construcción de conocimientos.

Una cuestión diferente es la que se plantea en relación con la adquisición de otros contenidos matemáticos. El uso de sistemas matemáticos de símbolos, la explicitación de las estructuras lógicas subyacentes en un argumento, las interpretaciones de las entidades matemáticas, los procesos por los que se obtienen procedimientos a partir de definiciones o teoremas, las estrategias de abordaje de problemas, la noción de rigor matemático, entre otros temas, son de una complejidad tal que requieren para su construcción de ambientes de discusión y negociación entre el profesor y sus alumnos y de los estudiantes entre sí. Las clases magistrales y actividades de trabajo en grupos son apropiadas para desarrollar la enseñanza de asuntos como éstos.

Para sacar el máximo provecho del tiempo dedicado a las clases magistrales pueden seleccionarse temas que sean representativos de diversas actividades matemáticas. Sin ser exhaustivos, pueden mencionarse como ejemplos: la construcción de modelos de la realidad, que permite trabajar con diferentes interpretaciones de los instrumentos matemáticos utilizados, lleva a la necesidad de manejar diversos algoritmos de cálculo y pone de relieve las implicaciones de las decisiones que se toman a partir de modelos; las tareas donde se puedan manejar más de una representación, que conducen a procesos de traducción entre diferentes registros y de producción de información dentro de cada registro; la construcción de procedimientos a partir de definiciones o teoremas, que es ocasión para analizar estructuras lógicas y da lugar a discutir acerca de la noción de rigor.

Es de esperar que en estas actividades surjan y se aprovechen oportunidades en las que se pueda discutir acerca del valor del conocimiento matemático no sólo como instrumento o herramienta en aplicaciones, sino también como construcción cultural.

Los aspectos estéticos, la evolución histórica que ha tenido y los valores presentes en la cultura matemática son otros temas cuya discusión puede encontrar ambiente adecuado en aulas magistrales.

Por su parte, los trabajos en grupo pueden ser importantes en situaciones donde deban debatirse los significados, en particular, la noción de verdad matemática. Además, pueden ser usados a propósito de la propuesta de problemas, donde la elaboración de la solución es compartida y puede ser una tarea prolongada.
En esta modalidad se insiste en la asunción de la responsabilidad propia, ahora no sólo ante uno mismo, sino ante los pares del grupo. También se resalta la existencia de diversas formas de acercase al mismo tema, con perspectivas diferentes que pueden entrar en conflicto o complementarse.
En otro orden, un complemento necesario tanto a las actividades a distancia como a las presenciales que se han descrito, consiste en la realización de clases de consulta, donde el estudiante encuentre instancias más personalizadas en las que plantear dudas acerca de la corrección de sus producciones personales y aclaraciones adicionales que eventualmente resulten necesarias. Esta forma de trabajo es insustituible, porque es la única que permite al profesor acceder directamente a la situación del alumno (no sólo en el aspecto cognitivo, sino también en lo afectivo y social) e intervenir a propósito de los aspectos puntuales que identifique.

4.3 - Carga y distribución horaria

La propuesta de este curso abarca en extensión el primer semestre de cursos de la universidad. Dado que las actividades a distancia están destinadas a partir de muy diferentes instancias, es difícil estimar cuánto tiempo pueden requerir. Sin embargo, no parece que sea suficiente una dedicación personal de menos de tres horas semanales a esta fase del programa.
En cuanto a las actividades presenciales, se propone tener dos sesiones semanales de dos horas cada una, lo que requeriría al menos de cuatro horas de estudio personal por semana. A esto debe agregarse una hora de concurrencia optativa a clases de consulta.
En definitiva, se plantea que cada alumno dedique semanalmente al menos doce horas a este curso. Esta necesidad puede verse sensiblemente incrementada en algunos casos, sobre todo en aquellos estudiantes que en secundaria hayan optado por orientaciones con escasos contenidos matemáticos.

4.4 - Contenidos

Existe consenso en que entre los contenidos disciplinares imprescindibles para poder acceder al aprendizaje de Matemática en la universidad, se cuentan:

- nociones sobre los sistemas numéricos;
- formulación y resolución de ecuaciones o inecuaciones, algebraicas o trascendentes, y de sistemas de ecuaciones o inecuaciones;
- propiedades de funciones elementales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas;

Estos temas constituyen la base sobre la cual se desarrollan los de Cálculo Diferencial y de Álgebra Lineal que integran los programas de los cursos de primer año en la mayoría de las universidades. A continuación se presenta una lista más detallada de los contenidos a abordar.

- Sistemas numéricos: descripción del conjunto de los números naturales (**N**), del de los enteros (**Z**), del de los racionales (**Q**) y del de los reales (**R**); operaciones y propiedades en cada sistema; valor absoluto de un número real
- Formulación y resolución de ecuaciones o inecuaciones de primer y segundo grado; representación gráfica de las soluciones; formulación y resolución de sistemas de ecuaciones o inecuaciones.

- Polinomios: notación; operaciones (cálculo de los coeficientes del resultado a partir de los coeficientes de los operandos); gráficas; construcción de la gráfica del polinomio de segundo grado a partir de la de $P(x)=x^2$ mediante operaciones sobre las gráficas; raíces; divisibilidad; descomposición factorial; identidad de polinomios; relaciones entre coeficientes y raíces; resolución de problemas y construcción de modelos.
- Funciones exponenciales; funciones logarítmicas: definición, dominio, recorrido; gráficos, construcción de gráficas a partir de otras conocidas, análisis de los dominios y recorridos de las nuevas funciones obtenidas; resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas; resolución de problemas y construcción de modelos.
- Funciones trigonométricas: definición de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico; relaciones entre las funciones trigonométricas; gráficas; construcción de gráficas a partir de otras conocidas; resolución de problemas y construcción de modelos.
- Funciones: definición de función como correspondencia entre conjuntos; dominio, recorrido; gráficas de funciones reales de variable real; construcción de gráficas a partir de otras conocidas mediante operaciones de traslación dilatación o simetrías; funciones inyectivas, sobreyectivas o biyectivas; composición de funciones; representación gráfica del proceso de composición; funciones invertibles; representación gráfica del proceso de inversión.

4.5 - Evaluación

En cuanto a los aspectos procedimentales, se plantea la realización de cierto número de pruebas cortas, de no más de media hora de duración, consistentes en la resolución de ejercicios tipificados, distribuidas a lo largo del semestre a partir del desarrollo de los diferentes temas.

Los contenidos abordados en las clases magistrales se pueden evaluar en pruebas un poco más prolongadas, de hasta una hora y media de duración. Se pretende realizar dos o tres pruebas de este tipo.

Los trabajos en grupo son instancias especialmente apropiadas para ser evaluadas mediante la elaboración de un informe en el que se detalle la solución obtenida, pero además se describan los procesos que el grupo siguió para obtenerla, las relaciones interpersonales que surgieron a propósito de la realización de la tarea y otros elementos que se juzguen relevantes.

Bibliografía

Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M. (2003) Diseño y validación de un instrumento predictor del éxito académico de alumnos ingresantes a la universidad, Reporte de investigación presentado en la RELME XVII, julio 2003, Santiago de Chile, Chile.

Ausubel, D. (2001) Adquisición y retención del conocimiento, Paidós, Madrid.

Monereo, C, y Pozo, J.I. (2003) La cultura educativa en la universidad: nuevos retos para profesores y alumnos, en Monereo, C, y Pozo, J.I. (editores) La universidad ante la nueva cultura educativa: enseñar y aprender para la autonomía, (pp15-30), Madrid, Editorial Síntesis.

Novak, J. (1998) Conocimiento y aprendizaje. Madrid. Alianza.

Vygotski, L.S. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores, Barcelona. Grupo editorial Grijalbo.

CONTRASTACIÓN DE LOS DESEMPEÑOS DE ALUMNOS INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD EN UNA PRUEBA DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA, EN RELACIÓN CON LA ORIENTACIÓN DE BACHILLERATO DE LA QUE PROCEDEN.

Walter Álvarez, Gabriela Isolabella, Eduardo Lacués, Magdalena Pagano.
Universidad Católica del Uruguay (UCU); Uruguay; Universidad de la República(UDELAR); UCU; UCU, respectivamente.
walvarez@ucu.edu.uy, gisolabe@fmed.edu.uy, elacues@ucu.edu.uy, mapagano@ucu.edu.uy
Campo de investigación: Articulación enseñanza media-universidad
Palabras clave: bachillerato, ingresantes, universidad, evaluación diagnóstica

Resumen

En esta investigación se contrastan los desempeños de los alumnos ingresantes a la Facultad de Medicina (FMED) de la UDELAR con los de las Facultades de Ciencias Empresariales (FCE) y de Ingeniería y Tecnologías (FIT) de la UCU, en 14 ítems comunes a las pruebas de evaluación diagnóstica que cada Facultad de las mencionadas propone a los alumnos que ingresan a ellas.
Los alumnos ingresantes se han clasificado según su orientación en el bachillerato: Ingeniería, Ciencias Económicas y Medicina y en tres niveles, según su desempeño en la prueba diagnóstica: bajo, medio y alto. Se comparan los resultados obtenidos por los alumnos, con la finalidad de establecer si existe asociación entre la variable "orientación en el bachillerato" y la variable "desempeño en la prueba diagnóstica" Finalmente, se presentan algunas conclusiones y se plantean posibles continuaciones de esta investigación.

Introducción

El marco teórico constituido por las nociones de Aprendizaje Significativo de Ausubel (Ausubel, D., 2001; Novak, J., 1998) y de Zona de Desarrollo Proximal (ZDP) de Vygotksi (Vygotski, L.S., 1979) se usa en este trabajo para clasificar en tres tipos (algorítmicas, conceptuales, de aplicación) las tareas presentadas en los ítems analizados de las respectivas pruebas de ingreso. Estas nociones constituyen el marco teórico de este trabajo y se presentan brevemente en la primera sección.
La clasificación de las tareas se realiza en la segunda sección, justificando su clasificación a partir de las referencias teóricas señaladas.
En la tercera sección se analizan los resultados obtenidos, explicando la construcción de los índices utilizados y su significado, y se dan interpretaciones acerca de algunos hechos constatados.
Finalmente, se presenta un conjunto de consideraciones a modo de conclusiones y recomendaciones para investigaciones posteriores..

Primera sección: marco teórico

Desde el punto de vista de la teoría de Ausubel un aprendizaje puede considerarse significativo si tiene poder de transferencia y promueve la creatividad. Esto es, los conocimientos adquiridos pueden aplicarse en situaciones nuevas y permiten, además, la adquisición de nuevos conocimientos actuando como ideas de anclaje.

La propuesta de tareas algorítmicas, conceptuales y de aplicación apunta a conseguir información acerca del grado de complejidad de las redes conceptuales construidas por el alumno.

En efecto, una tarea algorítmica puede, hasta cierto punto, ser resuelta repitiendo los pasos del algoritmo, incluso apelando exclusivamente a la memoria. Pero es posible proponer tareas algorítmicas que permitan explorar un poco más allá, diseñándolas de manera que la aplicación del algoritmo no sea directa, sino que requiera activar previamente relaciones conceptuales complejas. Al presentar la clasificación de las tareas se vuelve sobre esta distinción.

Por otro lado, las tareas conceptuales buscan información acerca de los contenidos declarativos aprendidos, o de los vínculos lógicos entre éstos, o de los procesos de traducción necesarios para representarse el mismo concepto en diferentes formatos o registros.

Finalmente, las tareas de aplicación proporcionan la oportunidad para explorar hasta qué punto conocimientos adquiridos en un contexto pueden utilizarse en otros.

Por otro lado, la determinación de la ZDP permite al profesor plantear las tareas al estudiante en condiciones en las que él puede abordarlas con los conocimientos que tiene, y construir nuevos conocimientos a partir de las tareas realizadas.

En relación con esta idea, una posible delimitación de la ZDP proviene de considerar la diferente dificultad entre dos tareas, una que consiste en la simple aplicación de un algoritmo y otra que requiere reconocer ciertas relaciones generales antes de poder ejecutarlo. Otro límite proviene al analizar la diferencia existente entre enunciar un contenido conceptual, por un lado, y por otro, poder establecer relaciones lógicas entre enunciados o moverse entre diferentes representaciones simbólicas del mismo concepto.

Segunda sección: clasificación de las tareas

Las tareas propuestas figuran en el Anexo I clasificadas en tres categorías: algorítmicas, conceptuales y de aplicación. Todas las actividades propuestas apelan a una comprensión significativa de los conocimientos adquiridos; todas ellas van más allá de la memorización de un contenido o la aplicación de un determinado algoritmo. Aparecen involucrados procesos de traducción entre registros así como procesos de conversión al interior de un mismo registro (Duval, R., 1998). De acuerdo con Duval, un proceso de traducción es más que una simple codificación-decodificación entre registros; lo cual permite detectar aquellos conocimientos en los que los alumnos solo han desarrollado un aprendizaje memorístico y aquellos en los cuales han construido redes conceptuales más amplias.

Teniendo en cuenta que la evaluación iba dirigida a alumnos con diferentes orientaciones en el bachillerato, se eligieron los ítems sobre contenidos disciplinares comunes.

Se consideran algorítmicas las tareas de los ítems 2, 4, 6, 11 y 12.

El ítem 2 requiere una trascripción verbal de una fórmula algebraica, y el 6 necesita una traducción gráfica de una formulación algebraica; en ambos casos, el proceso de traducción es casi la única tarea a realizar.

El ítem 4, además de la traducción desde un registro verbal al algebraico, es imprescindible una transformación en este registro y una nueva traducción en sentido contrario al primero.

El ítem 11, en forma previa al cálculo algorítmico de la derivada, precisa del reconocimiento de ciertas relaciones que aparecen presentadas en forma simbólica (presencia de una composición entre una función dada explícitamente por medio de una fórmula con otra de la que sólo conoce su derivabilidad).

El item 12 presenta un cálculo directo a partir de la definición que se da en el propio enunciado de una ley de composición entre número naturales, por lo que sólo requiere la comprensión de la definición y ejecutar las operaciones.
Se consideran conceptuales las tareas de los ítems 1, 5, 7, 9, 10, 13 y 14.
Para responder correctamente el ítem 1 sólo es necesario reconocer un enunciado válido entre varios que se presentan en relación con la noción de valor absoluto.
El ítem 5 demanda correlacionar las definiciones de operaciones (unión, intersección) o relaciones (inclusión) entre conjuntos con el significado de estructuras lógicas (disjunciones, conjunciones y condicionales)
Los ítems 7 y 13 exploran acerca de la utilización de estructuras lógicas para vincular enunciados presentados en forma verbal o simbólica, permitiendo evaluar las nociones de condición necesaria o de condición suficiente.
El ítem 9 requiere la adecuada asociación entre una fórmula algebraica con dos parámetros y las representaciones gráficas de las funciones asociadas a la fórmula, a partir de asignar valor constante a cierto parámetro y considerar como variable al otro; por eso, sirve para establecer la existencia de nexos entre la representación algebraica y la gráfica.
Los ítems 10 y 14 necesitan de procesos de traducción entre diferentes formas de representar una función, y de correlacionar los cambios en un registro de representación con los de otro; por lo tanto, exploran acerca del nivel de complejidad de la red conceptual asociada a la noción de función.
Los ítems 3 y 8 fueron considerados como de aplicación.
El ítem 3 refiere a la comprensión de un modelo elemental que utiliza funciones lineales, por lo que responderla correctamente requiere reconocer el rol de cada variable y el significado de los datos numéricos que se dan.
El ítem 8 pide la toma de una decisión a partir del valor dado de un parámetro, de manera que exige comprender un cierto enunciado y resolver una inecuación.
Considerados en su conjunto, estos catorce ítems permiten explorar el grado de elaboración conceptual que los estudiantes han conseguido en torno a ciertos temas que se consideran importantes, desde la perspectiva teórica asumida, para el desarrollo posterior de los cursos de Matemática: funciones, lenguaje simbólico y estructuras lógicas.

Tercera sección: análisis de los resultados

Para construir los índices se consideraron los catorce ítems comunes a las pruebas de las diferentes facultades.
El índice de dificultad de un ítem se define como la frecuencia relativa de respuestas incorrectas, es decir, como el cociente entre el número de respuestas incorrectas y el número total de respuestas. Por lo tanto, este índice es un número comprendido entre 0 y 1. Es una manera de medir el grado de dificultad: un índice cercano a 1 indica un ítem de gran dificultad, en tanto uno próximo a 0 señala uno fácil. Por otro lado, el índice de dificultad promedio de los ítems de la prueba sirve para medir la dificultad global de la misma.
El índice de discriminación tiene una definición un poco más complicada. En primer lugar se constituyen dos grupos, que se llaman de los sobresalientes y de los deficientes, constituidos respectivamente por quienes han obtenido una puntuación comprendida en el 27% superior o inferior de las registradas en la aplicación de la prueba. La elección de este porcentaje del 27%, que parece arbitraria, tiene que ver con el uso estadístico de este índice como estimador de la probabilidad de que un ítem tenga un índice de dificultad intermedia. El índice de discriminación se define como la diferencia entre la

frecuencia relativa de respuestas correctas en el grupo de los sobresalientes y la frecuencia de respuestas correctas en el grupo de los deficientes. Por lo tanto, éste índice es un número comprendido entre –1 y 1. Un ítem cuyo índice de discriminación sea negativo no cumple con la finalidad de distinguir a los que han tenido un buen resultado en la prueba de los que no. Entre tanto, un ítem con un índice de discriminación mayor que 0,4 se considera altamente discriminador.
Se admite, además, que calidad de la prueba está relacionada directamente con la cantidad de ítems que discriminan adecuadamente. De la misma manera que para el índice de dificultad, el promedio de los índices de discriminación es un indicador del poder global que tiene la prueba para distinguir entre buenos y malos desempeños.
La noción de confiabilidad de una prueba hace referencia a dos factores: el primero es la condición de que los resultados efectivamente obtenidos en ella no difieran mayormente de los que obtendrían los mismos participantes en una prueba equivalente; el segundo es que estos resultados no dependan del azar.
Dado que es muy difícil establecer que dos pruebas son equivalentes, una forma de analizar la confiabilidad de una prueba es a través del procedimiento de dividirla en dos mitades al azar y comparar estadísticamente los resultados de los participantes en estas dos mitades como si fueran dos pruebas separadas. Este procedimiento da origen al llamado coeficiente de Spearman-Brown. La confiabilidad de la prueba resulta estar directamente relacionada con el valor de este coeficiente. El cálculo de estos índices para esta prueba se presenta en el Anexo 5.
Las tablas con los respectivos índices de discriminación y dificultad se presentan en los Anexos, como se detalla más adelante, así como las tablas de doble entrada donde se muestra el cruce de las variables rendimiento en la prueba de diagnóstico y orientación en el bachillerato
A los efectos de ver si la orientación del bachillerato está asociado con el rendimiento en la prueba de diagnóstico clasificamos los rendimientos en tres clases: Bajo entre el 0 y 40%, Medio entre 40% y 60% y Alto de más del 60%. A los efectos de ver si las proporciones de rendimiento son las mismas en las diferentes opciones de bachillerato se utilizó la estadística U de Pearson.aproximada por Chi cuadrado.
Un primer resultado surge del análisis para establecer si existen diferencias significativas entre los grupos formados a partir del bachillerato cursado. La variable “orientación en el bachillerato” se clasificó en tres niveles Ingeniería, Ciencias Económicas y Medicina y también en tres niveles se separó el desempeño en la prueba diagnóstica: bajo (los que consiguieron menos de un 40% de respuestas correctas), medio (los que consiguieron entre 40% y 60% de respuestas correctas) y alto (los que consiguieron más de un 60% de respuestas correctas). Cabe señalar que el límite inferior del nivel alto fue establecido teniendo en cuenta la exigencia mínima que existe para aprobar un examen en cualquiera de las facultades donde se llevó a cabo este estudio.
La tabla del Anexo 2 muestra claramente que existen diferencias significativas entre los tres grupos. La proporción de alumnos que cursaron Ingeniería que se ubican en el nivel alto más que triplica a la de los Ciencias Económicas en ese nivel, que a su vez casi triplica a los de Medicina que alcanzan este rendimiento. En el nivel medio los porcentajes son casi iguales en las tres orientaciones, y en el nivel bajo el porcentaje en Ingeniería es menos de la mitad que el de Ciencias Económicas y un poco mayor que la tercera parte de los de Medicina.
Era esperable que existieran diferencias entre estos grupos, sobre todo teniendo en cuenta las diferentes cargas horarias dedicadas a Matemáticas en cada una de las orientaciones. Sin embargo, es bastante sorprendente la magnitud de diferencias

constatadas. Esto lleva a pensar que quizás no sea suficiente el argumento de la diferencia de dedicación a Matemática en las diferentes opciones, sino que resulte necesario explorar más detenidamente si no existen diferencias en los estilos de enseñanza y de evaluación que practican los profesores en las distintas orientaciones. Este tema escapa al alcance de este trabajo, pero es una de las cuestiones que queda abierta a partir de los resultados conseguidos.

La conclusión anterior se ve reforzada si se considera la información de la tabla del Anexo 3, en la que se presentan los promedios de respuestas correctas por cada ítem y cada orientación de bachillerato. En todos los ítems los promedios de Ingeniería superan a los demás. En general, salvo en el ítem 4, el desempeño de los estudiantes de Ciencias Económicas supera o es poco inferior al de los de Medicina. Teniendo en cuenta el enunciado del ítem 4, que hace referencia a resistencia de fluidos en un tubo, una posible explicación a esta discrepancia es que los alumnos de Ciencias Económicas hayan sentido que eran necesarios conocimientos de Física para responder, y eso haya actuado afectivamente en contra de sus posibilidades de responder correctamente. Si esta explicación es correcta, es un llamado de atención en el momento de elaborar pruebas de diagnóstico como la que se está analizando. Más adelante se señalarán otros elementos de reflexión en este mismo sentido.

Las tablas del Anexo 4 muestran los índices de dificultad y los de discriminación.

En el mismo sentido que las conclusiones anteriores, los índices de dificultad muestran que a los estudiantes de Ingeniería todos los ítems les resultaron más fáciles que a los de las demás orientaciones, y que de nuevo con la excepción del ítem 4, los alumnos que cursaron Ciencias Económicas encuentran menos difíciles o apenas más difíciles las tareas propuestas que los de Medicina.

Finalmente, en la presentación de los índices de discriminación aparecen algunos elementos a destacar. En relación con los estudiantes de Ingeniería, todos los ítems discriminan en forma adecuada. Sin embargo, los ítems 10, 11 y 14 no discriminan correctamente ni en el grupo de alumnos de Ciencias Económicas ni en el de Medicina. Aunque más adelante se analizan estos ítems entre otros, vale la pena efectuar aquí un comentario.

El conjunto de índices de discriminación es un indicador de la calidad de una prueba; en este sentido, resultaría que el cuestionario propuesto es un buen instrumento aplicado a los estudiantes de Ingeniería y no lo sería tanto aplicado a los estudiantes de Ciencias Económicas o Medicina. Esto pone un toque de alerta en relación con la construcción de pruebas estandarizadas, ya que señala que una prueba que resulta de alta calidad en un grupo de estudiantes, puede no serlo en otro, por lo tanto no parece lógico hablar genéricamente de la calidad de una prueba; variables como la orientación en el bachillerato deberían ser tenidas en cuenta.

Pasando a la consideración de los ítems, aparecen algunos elementos notables.

El item 3 está clasificado como de aplicación y plantea la construcción de un modelo más bien elemental utilizando funciones lineales; resultó difícil para todos los estudiantes, y los promedios de respuestas correctas entre los estudiantes de Ciencias Económicas y de Medicina están entre los más bajos. Teniendo en cuenta que el contenido matemático es más bien elemental, resulta llamativo este resultado. Una posible explicación es que este tipo de tareas no integra las prácticas de enseñanza más extendidas, y por eso haya extrañado a los estudiantes.

El ítem 11 trabaja como contenido conceptual la regla de la cadena, y fue clasificado como algorítmico porque requiere el uso de dos procedimientos: el reconocimiento de una composición de funciones (que aparece un poco disimulada) y posteriormente la aplicación de la propia regla de la cadena. Resultó difícil para todos los estudiantes, pero, como se comentó antes, discriminó bien sólo en el grupo de los que cursaron el bachillerato de Ingeniería. Este resultado puede interpretarse en un sentido parecido al anterior: podría ocurrir que las tareas más habitualmente propuestas a los estudiantes incluyan sólo la aplicación directa de la regla de la cadena, sin referencias a otra justificación que no sea la del uso de tablas; si esto fuera así, sería explicable el fracaso en esta tarea, al no poder reconocer la composición que aparece encubierta y, por lo tanto, no tener disponible el recurso de cálculo algorítmico.

La consideración conjunta de los ítems 6, 10 y 14 permite efectuar otras reflexiones. Los tres giran en torno a la representación gráfica de funciones. El 6 fue clasificado como algorítmico porque sólo necesita de la lectura de datos en una gráfica y la comparación de los valores leídos, mientras que tanto el 10 como el 14 se consideran como conceptuales porque plantean procesos de traducción entre distintos registros de representación (gráficos, verbales o algebraicos). El ítem 6 resultó fácil para todos los estudiantes y discrimina bien en cada uno de los tres grupos, mientras que los otros dos resultaron difíciles para todos, y no discriminan bien ni en el grupo de los que cursaron el bachillerato de Ciencias Económicas ni en el de los que eligieron el de Medicina. Teniendo en cuenta que la capacidad de transitar entre diferentes representaciones de un mismo concepto es un indicador de la complejidad de la red conceptual construida, estos resultados estarían mostrando un aprendizaje más bien superficial. Puede plantearse como explicación a este hecho una similar al argumento esgrimido a propósito del ítem 11. En efecto, teniendo en cuenta el peso que tienen en los cursos de cálculo diferencial en cualquiera de los bachilleratos las tareas de representación gráfica a partir del estudio analítico de una función, podría especularse que la enseñanza enfatiza sólo los aspectos algorítmicos de la representación gráfica, y pospone los que se refieren a la comprensión de las relaciones entre las diferentes formas de representación.

En el análisis de los ítems se ha insistido en que una posible explicación de los resultados obtenidos tiene que ver con los estilos de enseñanza habituales, incluyendo en ellos las prácticas más comunes de evaluación. Tal como se señaló antes, esta cuestión es imposible de resolver con este estudio y podría integrarse en una investigación que tuviera por objeto la identificación de estilos y prácticas de enseñanza usuales en la enseñanza media.

Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se compararon los desempeños de alumnos ingresantes a la universidad provenientes de distintas orientaciones en el bachillerato (Ingeniería, Ciencias Económicas, Medicina) en una prueba de diagnóstico sobre contenidos matemáticos comunes a estas orientaciones.

Por un lado, se constató que existen diferencias entre los tres grupos, siendo el grupo de los que cursaron bachillerato de Ingeniería el de mejor desempeño, seguido por el del Ciencias Económicas; aunque esta situación era esperada, resultó sorprendente la magnitud de las diferencias constatadas.

En segundo término, se pudo consignar que los estudiantes tienen dificultades para enfrentar tareas que requieran el uso de relaciones entre diferentes conceptos, o de las que existen entre diferentes representaciones del mismo concepto.

La tercera reflexión surge al considerar la calidad de la prueba. Resultó que para el grupo de estudiantes egresados del bachillerato de Ingeniería, la prueba fue de adecuada dificultad y todos los ítems discriminaron correctamente. Sin embargo, algunos de ellos resultaron con un índice de discriminación muy bajo en los otros dos grupos de

estudiantes. Esto es un llamado de atención en el momento de elaborar pruebas estandarizadas.
Una conjetura que puede ser objeto de investigación es que es posible correlacionar los estilos de enseñanza y de evaluación en enseñanza media con el desempeño de los estudiantes en la prueba. En particular, es de interés preguntarse acerca del lugar y la importancia que tienen en las prácticas habituales de enseñanza la propuesta de tareas no rutinarias y de problemas, que requieran del estudiante el desarrollo de redes conceptuales complejas.

Bibliografía

Alvarez, W; Lacués, E; Pagano, M. (2003) Diseño y validación de un instrumento predictor del éxito académico de alumnos ingresantes a la universidad, Reporte de investigación presentado en la RELME XVII, julio 2003, Santiago de Chile, Chile.

Ausubel, D. (2001) Adquisición y retención del conocimiento, Paidós, Madrid.

Duval, R., Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Fernando Hitt Espinoza (editor) Investigaciones en Matemática Educativa II, México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Ebel, R., Fundamentos de la medición educacional. Editorial Guadalupe. Buenos Aires, 1977.

Gronlund, N.(1973). Medición y evaluación de la enseñanza. Editorial Pax. México.

Novak, J. (1998) Conocimiento y aprendizaje. Madrid. Alianza.

Vygotski, L.S. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores, Barcelona: Grupo editorial Grijalbo.

LAS DEFINICIONES EN MATEMÁTICAS Y LOS PROCESOS DE SU FORMULACIÓN: ALGUNAS REFLEXIONES

Greisy Winicki Landman
California State Polytechnic University, Pomona – USA
greisyw@csupomona.edu
Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo – Métodos de demostración; Nivel educativo: Superior

Resumen

Las definiciones, junto a los axiomas y los teoremas son los ladrillos con los que se construyen todas y cada una de las teorías matemáticas. Durante la formación del profesor de matemáticas, éste se ve expuesto a definiciones en áreas tan diversas como la geometría, el análisis matemático, el álgebra lineal, el álgebra moderna, la probabilidad, etc. Raramente es invitado a reflexionar sobre temas como las características comunes a las definiciones matemáticas, las diferencias entre una definición matemática y otros tipos de definiciones, los roles que las definiciones cumplen en el desarrollo de las matemáticas, la definición como objeto y el definir como proceso, los factores que influyen en la elección de una proposición como definición de un concepto matemático, las consecuencias de esta elección.
En esta ocasión, se argumenta sobre la importancia del tratamiento explicito de estos temas en la formación del profesor y se propondrán actividades concretas para tal objetivo.

Introducción

Las definiciones, junto a los axiomas y los teoremas son los ladrillos con los que se construyen todas y cada una de las teoría matemáticas. Los futuros profesores de matemáticas, durante su educación y posterior desarrollo profesional se ven expuestos a definiciones de conceptos matemáticos en áreas diversas como la geometría, el análisis matemático, el álgebra lineal, el álgebra moderna, la probabilidad, etc. Sin embargo, raramente son invitados a reflexionar explícitamente sobre su propia experiencia durante el proceso de definir un concepto matemático. Esa reflexión es imprescindible para poder desarrollar su propia concepción sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y particularmente sobre los distintos aspectos relacionados al aprendizaje de conceptos y su definición.
Por la relativa complejidad de la mayoría de los conceptos de las áreas de las matemáticas anteriormente mencionadas y la perspectiva en sus primeros pasos de desarrollo que el futuro profesor posee al comienzo de su formación como docente, es posible que éste no posea la madurez matemática ni pedagógica necesaria para analizar de modo reflexivo su propia experiencia. Por eso se sugiere la siguiente actividad basada en un concepto matemático relativamente sencillo, que facilita una situación de auténtico aprendizaje y provee los elementos necesarios para la discusión de dicho proceso.

Definición: Un número *mágico* es un número natural que tiene un número impar de divisores. Consigna: Investigar el concepto definido y justificar cada proposición.

Este es el escenario ideal para precisar los distintos componentes de la genuina actividad matemática: construir ejemplos (instancias positivas) para el nuevo concepto así como no-

ejemplos (instancias negativas); buscar invariantes; conjeturar; relacionar el nuevo concepto con otros conceptos anteriormente definidos; formular preguntas; determinar condiciones necesarias o suficientes; etc.
En esta actividad se manifiesta una idea que en la mayoría de los libros de texto y programas escolares se asume implícitamente y es que los conceptos matemáticos son, básicamente, desarrollados a partir de sus definiciones. En otras palabras, que las matemáticas son una sucesión de "definiciones – teoremas – problemas".
Esta consideración ilustra la primera disonancia entre la idea de *definición* como producto y el *definir* como uno de los procesos envueltos en el quehacer matemático. Ya desde los tiempos de Euclides, ciertamente, en la pulida *exposición* de una teoría matemática, el profesional presenta primero sus axiomas y conceptos primitivos, luego desarrolla sus definiciones, para finalmente formular teoremas y demostrarlos siguiendo el paradigma axiomático-deductivo. Pero la secuencia basada en *definición – teoremas – problemas* refleja solamente el resultado final del esfuerzo matemático y no así el proceso creativo de las matemáticas que generalmente, no es lineal ni puramente deductivo. "Parece existir un grave peligro en el excesivo predominio del carácter axiomático-deductivo de las matemáticas. Ciertamente, el elemento de invención constructiva, de intuición directora, escapa a una cierta formulación filosófica; sin embargo sigue siendo el núcleo de todo resultado matemático, aún en los campos más abstractos. Si la forma deductiva cristalizada es la meta, la intuición y la construcción son, cuando menos, las fuerzas directrices" (Courant y Robbins, 1967, p.5). Hay hasta quien considera que "las matemáticas son una ciencia experimental y las definiciones no aparecen primero, sino más tarde"[1]. Más precisamente, podría decirse que parte de la *creación* matemática surge de secuencias del tipo *uso – descubrimiento - exploración-desarrollo-definición*, como lo sugiere, por ejemplo, la historia de los números complejos (Kleiner, 1988). Cuando este nuevo paradigma es reflejado en la enseñanza, se denomina método genético. Este se basa en la premisa que durante su aprendizaje el alumno debe reconstruir, aunque más no sea parcialmente, el camino andado por el investigador y debe ser expuesto a los procesos por los cuales nuevos contenidos matemáticos son originalmente desarrollados. En esta ocasión, los dos paradigmas anteriormente presentados se traducen en la pregunta: ¿Enseñar definiciones o enseñar a definir? (De Villiers, 1998)

En la formación de los futuros profesores, éstos han de ser expuestos también a actividades del tipo propuesto por Hershkowitz (1989), en la que se presentan instancias positivas y negativas del concepto de *Tricuad* y los participantes son invitados a construir, a partir de esa colección de instancias, una definición del concepto. En esa actividad se enfatiza el rol que desempeñan los ejemplos visuales en la creación de la imagen conceptual de un concepto geométrico. La imagen conceptual consiste, según Tall y Vinner (1981), en toda "la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto dado y que incluye todas las imágenes mentales (gráficas, numéricas, simbólicas) así como las propiedades y procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos". Esta estructura no es necesariamente coherente y puede contener aspectos muy diferentes a la definición formal del concepto, lo que puede crear conflictos cognitivos durante el proceso de aprendizaje.

[1] Heaviside, O. (1893). On operators in physical mathematics part II, *Proceedings of the Royal Society of London*, 54, 121.

En este tipo de actividad el futuro profesor puede distinguir los atributos críticos de un concepto de las propiedades irrelevantes y desarrollar la idea de ejemplo prototípico. Asimismo constituye una alternativa a la secuencia clásica: *definición, ejemplos, no-ejemplos*, promueve la reflexión acerca del proceso de formación de la imagen conceptual y plantea la diferencia entre la *definición formal* del concepto - que es la definición matemática que la comunidad de profesionales ha aceptado - y la *definición personal* que utilizan las personas, como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal. De este modo será más consciente, por ejemplo, que si al presentar triángulos isósceles elige únicamente aquellos con un eje de simetría vertical, se alimenta la creación de una imagen conceptual parcial del concepto triángulo isósceles porque los alumnos, de modo natural, asumirán esa característica como atributo crítico del concepto.
Otro de los mensajes implícitos en la mayoría de los textos es que las definiciones, así como toda la matemática, son absolutas. Actividades como las presentadas por Furinghetti (2000) y Winicki-Landman (2004) e implementadas en la formación de profesores, muestran el uso de fuentes originales provenientes de distintas épocas en la historia de la matemática y el análisis de la definición de algunos de los diferentes conceptos que allí aparecen y pueden desarrollar una perspectiva más genuina y más humanista sobre la matemática. Es indispensable que el futuro profesor reconozca que así como los estándares de rigor en matemáticas han cambiado (Kleiner, 1991, p.291) y la concepción de los matemáticos sobre lo que constituye una demostración aceptable ha evolucionado, las definiciones evolucionan también.

¿Qué es una definición? ¿Cómo son las definiciones?

"La matemática aparece, de manera cada vez mas clara, como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos *entes abstractos definidos de manera arbitraria*, con la única condición de que estas definiciones *no conduzcan a una contradicción*" (Borel, 1965). Pero Borel mismo agrega que "para no confundir con la lógica ni con juegos tales como el ajedrez, estas definiciones arbitrarias han sido *sugeridas primariamente por analogías con objetos reales*"(ibid., p.25) En general, definir es el acto o proceso por el cual se establece de modo conciso el preciso significado o acepción de un concepto. Es el establecimiento de las propiedades esenciales (la *intención*) que caracterizan a todos y solamente a los elementos de la *extensión* del concepto. Pero "definir es un acto matemático y lógico, demasiado esencial para ser confundido con simplemente designar... Algunas veces la palabra a ser definida es una etiqueta atribuida a un objeto construido dentro de una teoría matemática y suficientemente importante para que distintas caracterizaciones hayan sido consideradas para él; la designación aparece cuando el objeto es bien distinguido de los otros objetos de la teoría. O, y esto es más serio, uno crea una nueva noción, lo que lleva una extensión de la teoría" (Felix, 1960, pp.148-149).
En el proceso de definir influyen criterios que no siempre se revelan cuando las definiciones son presentadas como hechos consumados. Esos criterios son básicamente lógicos, estéticos, y pedagógicos (Winicki-Landman y Leikin, 2000).

Desde el punto de vista *lógico*, la definición de un concepto

a) Debe ser precisa.
b) Debe basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos (criterio de jerarquía, según Van Dormolen y Zaslavsky, 2003)
c) Debe ser consistente con definiciones anteriores en la que ella se apoya.
d) Es arbitraria.

e) Establece condiciones necesarias y suficientes, es decir es bicondicional.

Desde el punto de vista *estético*, la definición de un concepto

a) Debe ser minimalista, no debe contener partes que pueden deducirse lógicamente de otras partes de la definición.

b) Debe ser preferiblemente elegante, lo que puede entenderse de distintas maneras: sencillez en el uso de simbolismo, simplicidad de su presentación, etc. Se podría decir, junto a Polya que "la elegancia de un teorema [y de una definición] es directamente proporcional al número de ideas que en él se puede identificar e inversamente proporcional al esfuerzo necesario para ello".

El proceso de definir está compuesto por el enfoque elegido, la propia elección de una definición y su presentación. En este proceso, los criterios anteriormente mencionados pueden ser contradictorios. Por intermedio del análisis de varias situaciones didácticas, se ilustrará parte de esas contradicciones que el futuro profesor deberá identificar y decidir sobre los posibles modos de resolverlas.

Primera Situación

Considérese la siguiente definición: "Circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro."

Conforme al criterio de jerarquía, esta definición se basa en conceptos primitivos como *punto*, *plano* y *conjunto* pero también emplea el concepto de *distancia*. La distancia es una idea intuitiva y si se recurre a la definición enciclopédica se vería que la *distancia* es presentada como "Espacio o intervalo de lugar o de tiempo que media entre dos cosas o sucesos." [2]

Claramente esa no puede ser una definición matemática por su poca precisión. Otra definición de *distancia* provista por esa misma fuente es "Longitud del segmento de recta comprendido entre dos puntos del espacio" la cual es más cercana a la idea manejada en la escuela secundaria, pero requiere definir *longitud* como concepto de partida. Al consultar nuevamente esa fuente se constata que el concepto de longitud es definido como "Magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos." Es decir que una definición enciclopédica, a diferencia de una del tipo matemático, puede ser circular.

En niveles superiores de matemáticas, la distancia se define axiomáticamente de la siguiente manera: Dado un conjunto X, se dice que la función d: X x X $\rightarrow$R es una métrica (o *función distancia*) si para todos los elementos(puntos) x, y, z de X se cumple:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular)

Se requiere un grado de abstracción considerable para comprender esta definición axiomática de distancia y por eso, parece pedagógicamente razonable que la idea intuitiva de distancia sea aceptada como suficiente en la escuela secundaria.

Como ejercicio, se sugiere considerar las siguientes funciones en las que X=R^2 y que demuestre que cada una de ellas son efectivamente funciones distancia:

$$d_E : R^2 \times R^2 \rightarrow R \quad / \quad d_E(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

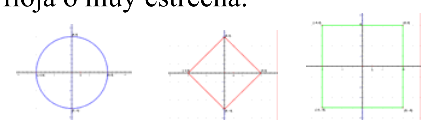
---

[2] Real Academia de la Lengua Española - http://www.rae.es/

$$d_V : R^2 \times R^2 \to R \quad / \quad d_V(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

$$d_T : R^2 \times R^2 \to R \quad / \quad d_T(A,B) = max(|y_A - y_B|, |x_A - x_B|)$$

Luego, se sugiere construir una circunferencia de centro (0,0) y 4 unidades de radio, conforme a cada una de esas funciones distancia. Esta situación ejemplifica nuevamente el carácter relativo de las definiciones en matemáticas y que “el rigor matemático es como el vestido: su estilo debe estar acorde a la ocasión y reduce el confort o limita la libertad de movimiento tanto si es muy floja o muy estrecha.”[3]



Segunda Situación

Al analizar la secuencia en la que se presenta la función exponencial, dado un número natural n y un número real a, primero se define a^n, luego se demuestra que para todo par de naturales $n > m$ si $a \neq 0$ se cumple $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ y finalmente se considera el caso en el que $n = m$. En este caso, los estudiantes deben reconocer la diferencia entre una definición y un teorema e identificar que $a^0 = 1$ es una definición que se elige de esa manera para extender de modo *consistente* la propiedad anteriormente mencionada. De un modo más profundo, en su libro *Proofs and Refutations*, Lakatos (1976) presenta la interacción entre definiciones y teoremas que conducen al refinamiento progresivo de la idea de poliedro. En otras palabras, así como la arbitrariedad es uno de los criterios que influye en el proceso de la formulación de definiciones, la interacción con posibles teoremas y sus demostraciones es también un factor capital en esa elección.

Tercera Situación

La definición de *suma de números racionales es* otra situación que ejemplifica la idea de consistencia. Al definir la suma de números racionales, es importante discutir porque al sumar números racionales no se usa la analogía al producto:

> Dados *a, b, c, d* números enteros tales que $b \cdot d \neq 0$, si $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, por qué no definir $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$?

Hay varias razones para ello y la *coherencia* con resultados anteriormente establecidos es una de las principales. De hecho, si se definiese la suma de ese modo, se obtendría que $3 + 4 = 7$ pero también que $\frac{3}{1} + \frac{4}{1} = \frac{7}{2}$, lo cual es una contradicción de las siguientes propiedades:

- la suma de dos números naturales es un número único;
- la suma de dos números naturales es un número natural,
- la suma de dos números naturales es mayor que cada uno de ellos.

[3] Simmons, G.F. (1991) *The Mathematics Intelligencer* 13(1)

Por otra parte, se tendría que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, lo cual contradice, entre otras cosas, a la propia definición del número $\frac{1}{2}$ como solución de la ecuación $x + x = 1$. Este resultado "seria absurdo aplicado a la medición de cantidades. Reglas de tal tipo, aunque permisibles lógicamente, harían de la aritmética de nuestros nuevos símbolos un juego carente de sentido. El juego libre del intelecto debe estar guiado aquí por la necesidad de crear un instrumento capaz de ser utilizado por la medida" (Courant y Robbins, 1967, p.62)

Cuarta Situación

Tradicionalmente, después de definir la circunferencia y sus elementos, se presentan las siguientes definiciones:

Una recta, coplanar a una circunferencia es:
exterior a la circunferencia cuando la intersección con la circunferencia es vacía.
tangente a la circunferencia cuando la intersección con la circunferencia es un conjunto unitario.
secante a la circunferencia cuando la intersección con la circunferencia es un conjunto de dos puntos.

Después de estas tres definiciones, para ser sistemático, se debería considerar la siguiente pregunta: es posible que una recta y una circunferencia tengan más de dos puntos de intersección? Solamente cuando esta pregunta esté resuelta, tendrá sentido terminar la caracterización de un modo coherente. El profesor debe saber crear situaciones en las que sus alumnos participen del proceso de formulación y elección de las definiciones y este tipo de discusiones constituyen un modo de facilitarlas.

Quinta Situación

Una de las manifestaciones del criterio de arbitrariedad es la libre elección del término para nombrar al concepto definido. Esa expresión de libertad que es la esencia de esa arbitrariedad tiene también limitaciones.
Considérese un cuadrilátero regular, es decir un *cuadrado* y considérese el número 3^2 que se lee '*tres al cuadrado*'. Se debe discutir explícitamente con el futuro profesor acerca del derecho de usar el mismo término en referencia a dos conceptos diferentes.
Otro caso, quizás más delicado, sea el del término *recta*. En la geometría euclidiana, recta es un concepto primitivo; luego se dice que la representación grafica de la ecuación $y=mx+b$ en un sistema cartesiano es una recta. El término *recta* está usado en dos situaciones diferentes, hecho que debe ser justificado.

Sexta Situación

Otra de las manifestaciones del criterio de arbitrariedad es la libre elección entre un conjunto de proposiciones equivalentes, esa que funcionará como definición del concepto. Esta elección determina que las demás proposiciones se conviertan en teoremas a ser demostrados.

Considérese las siguientes definiciones del concepto *circunferencia*:
Definición I: Se llama circunferencia al conjunto de los puntos del plano que equidistan de otro punto dado llamado centro.

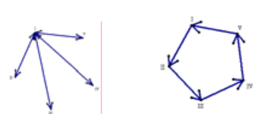
Definición II: Dados un punto C(a,b) y un número real positivo r, se llama circunferencia al conjunto de puntos P de coordenadas (x,y) para los cuales se cumple: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Definición III: Dado un segmento AB en un plano, una circunferencia es el conjunto de los puntos A, B y los puntos del plano desde los que este segmento se ve bajo un ángulo recto.

Definición IV: Dados dos puntos A y B en un plano y un número real positivo $k \neq 1$, una circunferencia es el conjunto de los puntos X del plano para los cuales la razón de las distancias a los dos puntos dados A y B es igual a k.

Definición V: Dados dos puntos A y B en un plano y un número real positivo m, una circunferencia es el conjunto de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de las distancias a los dos puntos dados A y B es igual a m.

Se sugiere que el futuro profesor construya cada una de esas figuras, luego demuestre la equivalencia de esas definiciones y finalmente reflexione sobre las consideraciones y estrategias empleadas. Por ejemplo, un modo de proceder es demostrar que todas las definiciones son equivalentes a una dada; otro modo sería demostrar cada una a partir de la definición propuesta antes que ella. Gráficamente, las dos estrategias se podrían representar así:



Las definiciones matemáticas son formuladas en el marco de una teoría matemática y posibilitan el enunciado de teoremas y su demostración. Esos teoremas complementan y enriquecen el entendimiento del concepto definido y a veces, pueden considerarse incluso como definiciones alternativas. Aunque lógicamente equivalentes a la definición I, las otras definiciones de circunferencia dejan de ser pedagógicamente equivalentes a ella, por no ser tan intuitivas. Esta situación ilustra una vez más que al elegir una definición, el profesor no puede considerar únicamente criterios lógicos.

Séptima Situación

Otra situación que enfatiza la relación lógica entre distintos conceptos surge del análisis de las siguientes definiciones[4]:

Un cuadrilátero *bello* es un cuadrilátero con un eje de simetría axial.
Un cuadrilátero *hermoso* es un cuadrilátero con dos ejes de simetría axial.
Un cuadrilátero *agraciado* es un cuadrilátero con tres ejes de simetría axial.
Un cuadrilátero *sublime* es un cuadrilátero con cuatro ejes de simetría axial.
Un cuadrilátero *divino* es un cuadrilátero con cinco ejes de simetría axial

Esta actividad podría ser apropiada para enfatizar el carácter bicondicional de las definiciones, así como la representación por intermedio de diagramas de Venn de proposiciones condicionales del tipo *"Todo romboide es un cuadrilátero bello"* o "*Un cuadrilátero es sublime si y solo si es un cuadrado*" y el uso de cuantificadores, como en el caso "*Existen cuadriláteros bellos que no son sublimes*" o "*Todo cuadrilátero agraciado es un cuadrilátero sublime*". A través de ellas se puede aclarar también que la existencia de

[4] Se sugiere elegir términos arbitrarios para neutralizar la familiaridad con los conceptos.
Esta actividad es modificada a partir de una propuesta original de Leikin y Winicki-Landman (2000)

instancias del concepto no esta garantizada por su definición. En este caso, se necesitaría verificar la existencia de cada uno de esos cuadriláteros. Por ejemplo, es fácil demostrar que *existen cuadriláteros hermosos* porque, por ejemplo, los rectángulos tienen dos ejes de simetría axial. Pero es importante identificar que *no existen cuadriláteros divinos* porque un cuadrilátero no puede tener más de cuatro ejes de simetría axial.

Octava Situación

La elección de una proposición más restringida como primera definición y luego decidir sobre su extensión o no, es una manifestación de la combinación de criterios pedagógicos y del criterio de arbitrariedad en el proceso de definir. Por ejemplo, en algunos textos el *trapecio* es considerado un cuadrilátero con un par de lados paralelos (TR1) y en otros es considerado un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos (TR2).

La elección de una de esas definiciones es responsabilidad del profesor el cual debe ser consciente de las consecuencias a las que esa elección acarrea, como por ejemplo que según TR1 todo paralelogramo es un trapecio y por lo tanto, todo teorema relativo a los trapecios, queda automáticamente demostrado para los paralelogramos.[5] Empleando la terminología usada por De Villiers (1994), el profesor debe tener la madurez matemática y pedagógica necesaria para poder elegir entre *definiciones jerárquicas* - como TR1 - , que en general son más elegantes y económicas, y *definiciones partitivas* – como TR2 -, que pueden ser consideradas más sencillas para el alumno.

Otro ejemplo clásico en la enseñanza de las matemáticas en el que se elige al comienzo una definición estricta y luego esta es perfeccionada, es el caso de *recta tangente a una curva* (Winicki-Landman y Leikin, 2000, p. 19-20). En la enseñanza básica y media se trabaja con la tangente a una circunferencia, la que puede definirse como una recta perpendicular a un radio de la circunferencia por un punto de ella (TA 1) o como una recta que interseca a una circunferencia en únicamente un punto (TA 2).

Posteriormente se necesita definir *recta tangente a una parábola* y obviamente TA1 no es apropiada porque la parábola no tiene radios. TA2 tampoco es apropiada porque existen rectas, como el eje de simetría, que intersecan a la parábola en exactamente un punto y no son tangentes a dicha curva. Se podría intentar agregar la condición que la recta deje a toda la curva en el mismo semiplano, pero esa elección no seria apropiada para curvas como el gráfico de la función $y = x^3$ en el punto (0,0). Por otra parte, la tangente al gráfico de la función $y = x^3-x^2$ en el punto (0,0) corta al gráfico en otro punto (0,1), lo que determina que ninguno de esos atributos sean atributos críticos del concepto *recta tangente a una curva*.

Esta discusión podría ser oportuna para desarrollar imágenes conceptuales apropiadas antes de introducir formalmente los conceptos correspondientes en el cálculo diferencial, así como para exponer el proceso de refinamiento progresivo de una definición.

Novena Situación

Formalmente, se puede exigir que una definición cumpla con el criterio de minimalidad pero esta exigencia puede ser contra-intuitiva.

Por ejemplo, al definir *congruencia de dos triángulos*, se exigen seis congruencias pero luego se demuestra que algunas ternas de congruencias constituyen condiciones suficientes

[5] Por ejemplo, la fórmula para calcular su área.

para la congruencia de los triángulos. En este caso, la exigencia de cierta combinación de tres condiciones, en lugar de seis, cumpliría con el criterio de minimalidad desde el punto de vista lógico pero posiblemente no sería efectiva para *introducir* el concepto de congruencia de triángulos y definitivamente no sería apropiada para extenderla y definir la *congruencia de dos figuras* en general.

Conclusión

Se han presentado varios dilemas pedagógicos y matemáticos que el profesor de matemática enfrenta durante su trabajo con definiciones. Para poder tomar decisiones responsables e inteligentes, es imprescindible que durante su formación como docente y su posterior desarrollo profesional discuta esos temas con sus colegas y que la comunidad pedagógico/matemática apoye esa discusión permanentemente. Pero esa comunidad debe tener siempre en cuenta que "El pensamiento constructivo, guiado por la intuición, es la verdadera fuente de la dinámica matemática. A pesar de que la forma axiomática es un ideal, es una peligrosa falacia creer que la axiomática constituye la esencia de la matemática. La intuición constructiva de los matemáticos da a esta ciencia un elemento no deductivo e irracional que la hace comparable con la música y el arte" (Courant y Robbins, 1967, p.228).

Referencias

Borel, E. (1962). La definición en matemáticas. En F. LeLionnais et al. (Eds.) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (pp. 25-35). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Courant, R. Robbins, H. (1967) *Qu*é *es la matemática*? Madrid: Aguilar S.A. de Ediciones

De Villiers, M.D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

De Villiers, M.D. (1998). To teach definitions or to teach to define? En A.Olivier y K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Stellenbosch, South Africa, 2, 248-255.

Dewey, J. (1947). Definition *The Journal of Philosophy* 44(11), 281-306.

Felix,L. (1960). *The Modern Aspects of Mathematics* N.Y : Basic Books, Inc.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university *teaching. Internacional Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 31(1), 43-51.

Hershkowitz, R.(1989) Visualization in Geometry – Two Sides of the Coin. *Focus on Learning problems in Mathematics* 11(1), 61-76.

Kleiner, I. (1991). Rigor and Proof in Mathematics; a Historical perspective. *Mathematics Magazine* 64(5), 291-314.

Kleiner, I. (1988). Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral). *The Mathematics Teacher* 81(7), 583-592.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.

Leikin, R. Winicki-Landman, G. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions-Part I I *For the Learning of Mathematics* 20(2), 24-29.

Tall, D. Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept definition in mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

Van Dormolen, J. Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior 22*, 91-106.

Winicki-Landman, G. (2004). Another episode in the professional development of mathematics teachers: the case of definitions. *HPM 2004 Fourth Summer University History and Pedagogy of Mathematics Proceedings* Uppsala, 451-456.

Winicki-Landman, G. Leikin, R.(2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions-Part I *For the Learning of Mathematics* 20(1), 17-21.

EL ANÁLISIS SEMIÓTICO PARA CARACTERIZAR LOS SIGNIFICADOS ELEMENTALES Y SISTÉMICOS PUESTOS EN JUEGO EN UN LIBRO DE TEXTO

Mario José Arrieche Alvarado
Universidad Pedagógica Libertador- Maracay-Venezuela
marrieche@ipmar.upel.edu.ve; marioarrieche@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología- Formación de Profesores; Nivel educativo: Básico, Medio y Superior

RESUMEN

Esta investigación se centra en la caracterización de los significados elementales y sistémicos (o praxeológicos) puestos en juego en la interpretación del texto (Krause, 1991) usado en el proceso de estudio de los temas conjuntos, relaciones y funciones de un grupo de maestros en formación. El trabajo se inserta en un proyecto macro sobre "el papel de la teoría de conjuntos en la formación matemática de los maestros de educación primaria" Para tal fin aplicamos el análisis semiótico, técnica generada del modelo semiótico-antropológico de la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino y Batanero, 1994). Para ello, incluimos la descripción y las unidades de análisis de cada uno de estos contenidos, los componentes praxeológicos, y conocimientos puestos en juego (interpretados como funciones semióticas).

1. INTRODUCCIÓN

En Arrieche (2002) se aplicó, y en cierta medida desarrollamos y precisamos, la técnica que en Godino (2001) Y Godino y Arrieche (2001) se designa como "análisis semiótico", la cual permite caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un texto matemático.

Llamaremos *análisis semiótico* de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos. El análisis semiótico será pues la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la transcripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos *de hecho* por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre *conflictos semióticos* potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos.

Esta técnica analítica se basa en el uso sistemático de la noción de función semiótica y de la ontología matemática propuesta por Godino (2001). La comparación entre los significados atribuidos a los objetos matemáticos por dos instituciones o por una persona y un referente institucional nos permite identificar conflictos semióticos entre dichos agentes. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes. El análisis se basará en descomponer el texto en unidades, que denominaremos semióticas. El criterio para definir las unidades de análisis será el cambio de elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones.

El análisis semiótico fue aplicado, en el capítulo 6 de Arrieche (2002), para caracterizar los significados elementales y sistémicos puestos en juego en los bloques de contenido sobre "conjuntos y operaciones", “funciones, composición, función biyectiva” y “relaciones” del texto utilizado como recurso de estudio en la experiencia de enseñanza observada. Este análisis nos va a permitir describir el “significado institucional local” del contenido estudiado, en nuestro caso “conjuntos, relaciones y funciones”, y la distribución temporal de sus distintos elementos. Ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. También permitirá formular explicaciones plausibles de las dificultades de los estudiantes tras el proceso de estudio.

2. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE ANÁLISIS SEMIÓTICO

En este apartado se aplica la técnica de "análisis semiótico" para caracterizar los significados elementales y sistémicos puestos en juego en los bloques de contenidos sobre "conjuntos y operaciones", "funciones, composición y funciones biyectivas" y "relaciones" en el texto que sirve de base al proceso de estudio (Krause, 1991) de estos contenidos en un grupo de maestros en formación. (el texto completo de las secciones del libro utilizadas se incluyen en el Anexo 1 de Arrieche (2002)).

Para cada uno de estos contenidos incluimos el texto y las unidades de análisis, los componentes praxeológicos, y conocimientos puestos en juego (interpretados como funciones semióticas). También se estudian los conflictos semióticos entre los significados puestos en juego en el texto y los atribuidos a las expresiones por una institución de referencia, que en este caso viene dada por la interpretación que hace el investigador de los textos sobre “teoría de conjuntos, relaciones y funciones”. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa; los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes.

En una primera fase del análisis consideramos útil clasificar la información del texto en tres componentes: *Praxis*, que incluye las situaciones-problemas y los elementos actuativos; *Lenguaje*, que se refiere a los términos, expresiones, notaciones, gráficos; *Teoría*, que abarca los conceptos-definición, las propiedades y argumentaciones.

Proponemos como una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático la siguiente: unidades iniciales (apartados o secciones del texto), unidades primarias (oraciones o sentencias), unidades elementales (términos y expresiones que designan uno de los seis tipos de entidades elementales descritos en el marco teórico) y unidades secundarias (combinación de dos o más unidades primarias).

A manera de ejemplo mostramos el análisis realizado, a una de las secciones del bloque de contenido sobre "conjuntos y operaciones". Se remite al lector interesado a Arrieche (2002) donde se hace el análisis completo de este bloque y los restantes bloques sobre relaciones y funciones.

6.2.1. UNIDADES DE ANÁLISIS, COMPONENTES PRAXEOLÓGICOS Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES.

6.2.1.1. Conjuntos y operaciones

El bloque sobre "conjuntos y operaciones" está dividido en 9 subsecciones que consideramos como unidades iniciales de análisis. Son las siguientes:

1. Definición de conjunto
2. Notaciones
3. Subconjuntos
4. Ejercicios (2.1)
5. Operaciones con conjuntos; intersección, unión, complementario
6. Producto cartesiano
7. Diagramas de Venn para la resolución de problemas
8. Ejercicios (2.2)
9. Propiedades de las operaciones conjuntistas

1. Definición de conjunto

<u>Texto y unidades primarias de análisis</u>

1.1	El concepto de *conjunto* es muy general y muy simple.
1.2	«Cualquier colección de cosas es un **conjunto**.»
1.3 1.4	Sin embargo, hay que señalar que para que un conjunto esté *bien definido*, es preciso poder conocer *todos sus miembros* o una *cualidad* de ellos que nos permita saber si un nuevo objeto *está o no* dentro de ese conjunto.

<u>Componentes y unidades elementales</u>

Praxis	Lenguaje	Teoría
	- Términos y expresiones: conjunto; concepto, colección; cosas; miembros; cualidad; estar dentro de un conjunto	- Conceptos (definiciones): conjunto; conjunto bien definido; pertenencia a un conjunto - Propiedades: el conjunto, concepto muy general y muy simple

<u>Conocimientos y conflictos semióticos:</u>

1.1. Con el término 'conjunto' se designa a un objeto no ostensivo que es calificado de concepto; se supone que el lector conoce el uso del término 'concepto' como resultado de aprendizajes anteriores. Se atribuye una propiedad al concepto de conjunto: "el ser muy general y muy simple". Se supone que el 'concepto de conjunto' viene regulado por el enunciado del párrafo siguiente y que al ser breve, el atributo de "muy general y muy simple" se refiere a esa característica. Esto no se puede justificar desde el punto de vista del significado de referencia si tenemos en cuenta la complejidad del concepto desde el punto de vista matemático experto.

1.2. La descripción que se da de conjunto es un ejemplo de concepto, que en este caso se trata de un concepto-definición. No hay un discurso teórico sobre el concepto, pero sí una praxis sobre esa noción. Se utilizan los términos 'colección' y 'cosas' cuyo significado se supone conocido del lector y se corresponde con su uso en el lenguaje ordinario. Los propios conjuntos deben ser consideramos como "cosas" ya que pueden ser también miembros de conjuntos; el uso de 'colección' en el lenguaje ordinario no se aplica al caso de conjuntos unitarios y del conjunto vacío.

1.3. Se usa la expresión 'conjunto bien definido' para designar aquellos conjuntos para los cuales se dispone de un criterio que permita determinar si un objeto es o no miembro del conjunto. No se descarta que las colecciones que no cumplan esta condición no se designan como conjuntos. Se trata en realidad de un atributo aplicable a las colecciones, pero no a los conjuntos.

1.4. No se asigna a los términos 'miembro', 'cualidad' y a la expresión 'estar dentro' un significado específico. Se usan con su significado propio del lenguaje ordinario. Se atribuye al conjunto el rasgo metafórico de ser un recipiente y, por tanto, como algo de naturaleza ostensiva; esto oculta su naturaleza lingüística.

En este primer apartado no se incluye ningún elemento situacional ni operatorio; los objetos que se ponen en juego son de naturaleza lingüística y teórica.

3. SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS

Pensamos que la técnica del análisis semiótico que hemos aplicado y desarrollado en este trabajo, constituye un recurso útil para la investigación en didáctica de las matemáticas. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de "microcóspico", permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso de términos y expresiones. A un nivel más general permite describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja, como puede ser la "teoría de conjuntos, relaciones y funciones" implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos conflictos semióticos pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con nuestro análisis es necesaria si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño e implementación del proceso de estudio y determinar los recursos materiales y de tiempo necesarios.

A título de ejemplo, y como resumen, reseñamos a continuación los principales conflictos semióticos encontrados en el análisis realizado.

1. La definición de conjunto dada en 1.2 es una simplificación de la dada por Cantor. Como sabemos, una definición tan general de la noción de conjunto provoca la aparición de paradojas en la teoría que serán superadas a base de no considerar como conjuntos ciertas colecciones excesivamente grandes, como el conjunto de todos los conjuntos. Como se sabe, para solventar el problema de las paradojas se elaboraron diferentes teorías axiomáticas como la Zermelo-Fraenkel, Von Neumann, Bernays, Gödel y Ackermann.

Aunque parece obvio que estas dificultades técnicas de la teoría no pueden ser discutidas en un texto dirigido a la formación de maestros si nos parece que la definición presentada requiere matizaciones, ya que será conflictivo para el estudiante considerar a un conjunto unitario como una colección, y mucho más hablar de colecciones vacías y colecciones infinitas (discretas y continuas). También parece necesario precisar la noción de "cosa" ya que como elementos de conjuntos el estudiante encontrará a las propias colecciones. No es pues de extrañar que los estudiantes tengan dificultades ante tareas en las que intervengan estas colecciones "extrañas".

Con respecto a la noción de función, creemos que el texto usa un procedimiento muy largo para introducir este concepto, el cual, puede ocasionar conflictos al estudiante para asimilarlo adecuadamente. Por otro lado, pensamos que la explicación de los ejemplos propuestos por el autor para ilustrar la definición de función puede contribuir a que el estudiante logre su aprendizaje en una forma más rápida y eficaz. Además en un texto dirigido a la formación de maestros con estas características se ha podido definir una función, entre los elementos de dos conjuntos A y B, como a toda relación de A en B que permite asociar a cada uno de los elementos de A uno y sólo un elemento de B.

En cuanto al concepto de relación en un conjunto A, consideramos que la forma como el texto introduce la definición: "se puede definir la relación como una generalización de aplicación de un conjunto en sí mismo", y luego describe que una relación en un conjunto A es un subconjunto de AxA; nos parece muy abstracta considerando que el texto va dirigido estudiantes que se caracterizan por tener un nivel matemático bajo, lo cual puede producir serios conflictos a estos alumnos al intentar estudiar este concepto. También parece necesario la aclaración del término es "una generalización de aplicación" que es ambiguo para los estudiantes de este nivel.

Podemos describir esta clase de conflictos con las definiciones de los objetos matemáticos como *conflictos conceptuales*. En el caso del concepto-definición *conjunto*, la regla presentada no contempla la verdadera complejidad de uso del término correspondiente. Pero también puede ocurrir que en el proceso de estudio se ponga en juego una noción, como la diferencia de conjuntos, que no ha sido introducida. Es de hacer notar que, en el estudio del concepto de función biyectiva, se trata implícitamente las nociones de función inyectiva y sobreyectiva sin estudiarlas separadamente. Otra noción que consideramos fundamental para el estudio de las funciones y las relaciones, que es introducida sin dedicar un tiempo a su enseñanza es el concepto del conjunto grafo o gráfico de una función (o relación).

2. El análisis semiótico permite analizar la dialéctica entre lo "concreto" y lo "abstracto", que en el modelo teórico adoptado se contempla al introducir la dimensión extensiva – intensiva, o lo que consideramos equivalente, la distinción ejemplar – tipo. En la actividad matemática hay siempre una tensión hacia la generalización, a considerar problemas y técnicas cada vez más generales que resuelvan el mayor número posible de problemas particulares. Esto lleva al uso de variables, instrumentadas en notaciones y convenios generales.

En diversas unidades hemos visto que el autor designa un conjunto genérico con la letra A, por ejemplo, (P en otra ocasión), y a continuación la misma notación designa "el conjunto de los pares", y otros conjuntos se designan con letras diferentes. El uso indiscriminado de estas notaciones puede dificultar el desarrollo del razonamiento abstracto que se pretende ir construyendo progresivamente. También se resalta que el texto no presenta una notación genérica para indicar que dos elementos de un conjunto están relacionados mediante una determinada relación, lo cual, puede ocasionar serios conflictos al estudiante al intentar aplicar las propiedades de una relación.

3. Los conjuntos se han expresado con notaciones diversas: letras mayúsculas, enumeración de elementos entre llaves, enunciado de una propiedad entre llaves, diagramas de Venn, diagrama cartesiano, etc. De igual manera, las funciones han sido representadas de diversas formas, mediante un diagrama de flechas, una tabla, un conjunto ordenado de pares, una gráfica y una fórmula. El conocimiento de las circunstancias en que cada notación resulta apropiada, y las traducciones entre ellas no han recibido la atención necesaria en el texto, lo que a priori puede resultar conflictivo para los sujetos a los que se dirige (conflictos notacionales).

4. En diversas unidades de análisis hemos identificado un conflicto potencial que se puede describir como "generalización docente abusiva". Se trata de requerir del lector la realización de tareas para las que no ha recibido instrucción suficiente: pedir la formación de las particiones de un conjunto con cinco elementos, hallar el cardinal de conjuntos que cumplen ciertas condiciones en situaciones que involucran tres conjuntos, comprobar mediante ejemplos las propiedades de las operaciones conjuntistas, determinar el número de funciones entre dos conjuntos finitos, dada la gráfica de una función determinar las imágenes y preimagenes de ciertos elementos, cuántas funciones biyectivas hay entre dos conjuntos finitos, estudiar las propiedades de una relación, etc. En estas tareas se requieren conocimientos previos tales como, conjunto de partes, familia de conjuntos, verificación de igualdades, rango de una función, conjunto gráfico de una función (o relación), conocimiento de combinatoria, etc.

5. Ausencia de justificación o explicación de algunas propiedades mencionadas, como que $\varnothing \subset A$, $A \subset A$, para todo conjunto A, las propiededes reflexiva, simétrica y transitiva de una relación. También se detecta la falta de mención de los conectivos lógicos (conjunción, disyunción, implicación, doble implicación), los cuales son usados implícitamente o explícitamente en las definiciones presentadas.

4. REFERENCIAS

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. y Arrieche, M. (2001). *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería.

Godino, J. (2001). Un enfoque semiótico de la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Pendiente de publicación. Recuperable en: http://www.ugr.es/local/jgodino/).

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355.

Krause, E. (1991). *Mathematics for elementary teachers*. Lexington, Ma: D. C. Heath.

UNA EXPERIENCIA EN INVESTIGACIÓN-ACCIÓN TÉCNICA:
"EL PASO DEL INFINITO POTENCIAL AL INFINITO 'COMO UN TODO' PARA COMPRENDER LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONJUNTOS INFINITOS"

Carmen M. Valdivé Fernández
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"-Venezuela
Valfer16@yahoo.com
Campo de investigación: Formación de profesores; Nivel educativo: Superior

Resumen

La experiencia del docente de matemática en los diferentes niveles del sistema educativo venezolano, nos hacen repensar el papel crucial que éstos representan en la relación teoría-praxis-investigación en temas tan neurálgicos como lo es, la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, puesto que involucra el "corazón de la matemática": el infinito (Valdivé, 2003; Garbin y Azcárate, 1999, Arrigo y D'Amore, 1998). Por tal razón se presenta esta experiencia de carácter fenomenológico (Carr y Kemmis, 1988), la cual tuvo como objetivo describir, analizar e interpretar las acciones de 15 profesores, los cuales utilizaron la investigación acción técnica (Habermas,1971; Lokpez, 2001). Los resultados se enfocaron en 2 dimensiones: a) El papel del profesor y sus modelos mentales y b) La ideología del profesor en las prácticas escolares.

Introducción

La labor docente del profesor de matemática es particularmente investigativa por las características propias del saber que se enseña y por la gama de estrategias que el profesor utiliza cuando aborda una temática en especial. Estrategias que se corresponden muchas veces a su experiencia, a las literaturas de trabajos de investigación o bien a las que los libros y programas le sugieren. En virtud de sus expectativas como investigador, el profesor de matemática, al inscribirse en programas de maestría, busca enriquecer su repertorio tratando de mejorar su praxis, encontrando muchas veces que esa praxis no va emparejada con su teoría ni con los niveles de actuación de la Educación Matemática: cultural, social, institucional, pedagógico e individual y que repercuten indudablemente en los procesos enseñanza y aprendizaje. (Mora, 2002). Por tal motivo, la experiencia que se presenta en este trabajo, recoge las actividades realizadas por un conjunto de 15 profesores involucrados como coinvestigadores, al abordar la temática sobre la construcción de los conjuntos infinitos desde la modalidad de la investigación-acción técnica, la cual tiene como propósitos generales diseñar y aplicar un plan de intervención que sea eficaz en la mejora de habilidades profesionales y en la resolución de problemas prácticos produciendo con ello un saber instrumental (Carr y Kemmis, 1988).

Desarrollo

Para abordar la experiencia, se consideró asumir un enfoque de investigación: la investigación acción técnica, por ser un proceso de investigación cíclico de exploración, actuación y valoración de resultados, en consecuencia es una forma de entender la enseñanza y no solo una manera de investigar, debe ser un proceso de investigación social, en el cual todos los participantes estén implicados en la toma de decisiones (Lokpez, H., 2001). En este trabajo, los implicados fueron el investigador "principal" (observador participante), los coinvestigadores (los 15 profesores de matemática), los

estudiantes de los diferentes planteles donde laboran los coinvestigadores y los directores de esos planteles.
La metodología se centró en la recopilación de información utilizando entrevistas, observación participante y no participante, narración profesional e informes de ejecución de las clases (crónica de la lección: desde el profesor, desde el alumno y desde el proceso enseñanza y aprendizaje).

Procedimiento

Los 15 profesores conformaron grupos de investigación y de actuación. En cada grupo existía el profesor que impartía el plan de clase y dos observadores. El proceso investigación acción técnica se llevó a cabo cumpliendo los ciclos y las fases de cada ciclo que utiliza la investigación acción:

Primer ciclo

Fase diagnóstica

Se promovió un diálogo entre los 15 coinvestigadores y la investigadora principal. El diálogo versaba sobre la pregunta ¿qué estrategias o actividades y conceptos involucran ustedes como profesores de matemáticas, al construir con sus alumnos los conjuntos infinitos? Para el análisis de las narrativas profesionales, se utilizó la estrategia de las comparaciones constantes, diseñada por Glaser y Strauss (citado por Goetz y LeCompte, 1988), pues combina las codificaciones de categorías inductivas con un proceso simultáneo de comparación. Las categorías obtenidas se orientaron en dos direcciones: a) Conceptos matemáticos y b) Actividades y prácticas.

Para el conjunto infinito: N

Conceptos matemáticos	**Actividades y prácticas**
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, diagramas de Venn	Planteamos ecuaciones
La recta numérica	Con figuras y diagramas
	Con situaciones problemáticas

Para el conjunto infinito: Z

Conceptos matemáticos	**Actividades y prácticas**
Insuficiencia de N	Planteamos ecuaciones
La recta numérica	Con figuras y diagramas
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, { }, ∩, unión	Con situaciones problemáticas de la vida diaria
Ecuaciones	

Para el conjunto infinito: Q

Conceptos matemáticos	**Actividades y prácticas**
Insuficiencia de Z	Situaciones problemáticas
La recta numérica	Relaciones físicas
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, { }, ∩, unión.	Repaso de Z

Ecuaciones	Utilizamos las fracciones
Notación científica	
Fracción decimal y expresión decimal	
Fracción generatriz	

Para el conjunto infinito: R

Conceptos matemáticos	**Actividades y prácticas**
Insuficiencia de Q con $X^2 = 2$	Situaciones problemáticas
La recta numérica	Repaso de Q
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, { }, ∩, unión.	Trabajo con la calculadora para encontrar las raíces no exactas
Ecuaciones de la forma $X^2 = 3, \ldots$	No uso de la recta para representar los Irracionales
Decimales periódicos y no periódicos	Separa los decimales periódicos con los no periódicos
	El intervalo [0,1] pues trabajo con Estadística y Probabilidad

***Interpretación de la Diagnosis*:**
a) Los profesores utilizan elementos de la teoría conjuntista como un contenido que no aparece como objetivo explícito de enseñanza en los programas escolares.
b) Los profesores no hacen mención en sus diálogos, el por qué N, Z, Q y R son conjuntos infinitos.
c) Los profesores no expresan en sus diálogos, acerca de la representación de cada conjunto en la recta numérica y de cómo se van incorporando nuevos elementos, a medida que se van introduciendo otros conjuntos numéricos.
Se reflexionó en torno a esos resultados, a fin de tomar decisiones y elaborar un Plan de Acción, con todos los involucrados, el cual se detalla a continuación:

- Revisar los programas de Básica, Media, Diversificada y Superior (Matemática I).
- Revisión bibliográfica acerca de la manera de construir los conjuntos infinitos bajo la mirada de la Teoría Cantoriana (Tirosh, D.,1991, Arrigo y D'Amore,1998).
- Revisión histórica del concepto infinito matemático.
- Diseñar una Estrategia de Enseñanza, adaptarla y exponerla para construir un conjunto infinito, tomando en cuenta la revisión de la literatura, el grado o año escolar, el tiempo, el contexto y la diagnosis.
- La investigadora principal, modelizó la Teoría Cantoriana desde la perspectiva de Tirosh, D. (1991) como un paso al infinito "actual" y demostró los dos teoremas de Cantor, propuestos por Arrigo y D'Amore (1998).

Fase de Ejecución o acción:
Los 15 profesores de matemática desarrollaron su estrategia de acción en las aulas de clases, una vez que fue revisada y expuesta ante la investigadora principal. En esta fase, los docentes además de ejecutar su plan de clases bajo la teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau ,1997), debían evaluarlo y reflexionar sobre él.
Para El conjunto Numérico N y Z: Los profesores hicieron la construcción utilizando clases de equivalencia.
Para el conjunto Numérico Q y R: Utilizaron la insuficiencia de Z y Q respectivamente.

Para el conjunto R: Utilizaron los decimales periódicos y no periódicos con la regleta.

Fase de Evaluación:
En esta fase, los profesores mostraron el desarrollo de las clases a la investigadora principal, las dificultades y las fortalezas encontradas tanto para ellos como para sus alumnos. Así mismo, se mostraron videos de clases grabadas, las crónicas de los observadores participantes desde el aprendizaje de los alumnos y desde la enseñanza.

Fase de Reflexión
Una vez pasadas las fases anteriores, los profesores dialogaron con la investigadora principal y entregaron un informe sobre las crónicas de clases. En estas narraciones profesionales dialogadas y en los informes, los profesores expresaban (algunas transcripciones de la investigadora principal y tomadas de los informes de los profesores):

a) "Algo muy interesante y curioso ocurrió en el momento de la representación de Z, los alumnos lo hicieron así: $\{-\infty,\ldots,-2,-1,0,1,\ldots\infty\}$, los alumnos utilizaron el infinito como objeto".
"Los alumnos ubicaron en la recta real $\sqrt{44}$ entre 6,6 y 6,7 utilizando primero la notación:
$6 < \sqrt{44} < 7$ luego $6{,}6 < \sqrt{44} < 6{,}7$ luego $6{,}63 < \sqrt{44} < 6{,}64$ y $6{,}63 < 6{,}633249... < 6{,}64$"

b) "La docente al representar Z en la recta, ubicó el cero e indicó a los alumnos que a la izquierda de cero representaríamos los enteros negativos y a la derecha los enteros positivos, destacando que el conjunto de los números enteros es un *conjunto infinito* ya que al escoger un número entero en la recta, siempre encontraremos un sucesor e indicando que los puntos suspensivos sugerían que siguen indefinidamente, dejando bien claro lo que es un conjunto infinito".

d) "...la actividad se ejecutó en un contexto rico en participación por parte de los alumnos...sin embargo se presentaron ciertos problemas al dividir y obtener la fracción decimal y por tanto al obtener la serie geométrica de la sucesión 0,3; 0,03; 0,003,..., por lo que consideramos explicar cómo obtener la fracción decimal. Por lo demás consideramos que fue muy provechoso construir el conjunto Q de esta manera, pues cuánto ignorábamos como profesor lo referente a esta construcción. Además lo enriquecedor de inducir en el alumno el por qué Q es un conjunto infinito, finalidad del guión de clase".

De las reflexiones realizadas por los profesores, surgieron hipótesis de investigación formuladas para poder realizar planes de acción y mejorar con ello sus prácticas y de las reflexiones de la investigadora principal surgieron hipótesis de investigación acerca de la importancia de incorporar a los docentes activos como coinvestigadores, pues asumen la triada teoría-praxis-investigación como un medio de generar conocimiento acerca de la enseñanza.

Segundo Ciclo

Culminadas las cuatro fases del Primer ciclo de la investigación acción técnica, la investigadora inicia conjuntamente con sus coinvestigadores un segundo ciclo, pero esta vez con una primera fase: 1) *La diagnosis*, la cual consistió en aplicar un cuestionario contentivo de 4 preguntas referentes a las concepciones de los profesores sobre el infinito matemático. Los datos se organizaron utilizando redes sistémicas (Bliss y Ogborn, 1983) y para el análisis se utilizó la estrategia de las comparaciones constantes, estrategia en la que el investigador codifica y analiza los datos en forma simultánea para desarrollar conceptos (Rodríguez, Gil y García, 1999). Algunas respuestas dadas por los 15 profesores se muestran a continuación:

2) ¿Es 0,999... = 1?	Si (5)	a) $x = 0,\dot{9}$ $10x = 9,\dot{9}$ $10x = 9,\dot{9}$ $- x = - 0,\dot{9}$ $9x = 9$ $x = \frac{9}{9} = 1$
	Si (4)	b) Si, se puede demostrar por sucesiones de Cauchy
	Si (2)	c) Si, por aproximación
	No (4)	No, le falta un pedacito para llegar a 1
4) a)¿Son infinitos los conjuntos *N, Q* y *R*? Explica	Si (1)	*N y Q son infinitos porque no son finitos y R más infinito que los anteriores, porque contiene otros conjuntos infinitos.
	Si (1)	*Porque se pueden establecer biyecciones entre *N* y *Q*. *R* es infinito no numerable ya que no se puede establecer una biyección entre *N* y *R*.
	Si (10)	*Porque puedo tomar subconjutos propios de *N*, por ejemplo los pares y establecer una biyectividad entre ellos y *N*. Luego *N* es infinito. De la misma manera *Q* es infinito ya que *N* es subconjunto de *Q* y puedo establecer biyectividad entre ellos. Y *R* es infinito por la misma razón, puedo establecer correspondencia entre R y el intervalo *(0,1)*. *R* tiene una cardinalidad mayor que todos los conjuntos infinitos anteriores.
	Si (2)	*Todos son infnitos.
	Omitida(1)	
b) ¿Es *R* equipotente a *N*? Explica	No (10)	*La cardinalidad de *N* es $\aleph$ al igual que la de *Q* pero *R* es más infinito que ellos, es no numerable, no se puede poner en correspondencia uno a uno con *N* *No, ya que *R* no se puede poner en correspondencia con *N*. *N* tiene cardinalidad $\aleph$ y *R* tiene cardinalidad $2^{\aleph}$.
	Si (4)	*No *Si se pueden relacionar. *N* es subconjunto propio de *R* Son ambos infinitos.
	Omitida (1)	

Los resultados se orientaron en dos direcciones utilizando la estrategia de las comparaciones constantes: a) La influencia de los modelos en nuestro razonamiento en el dominio del infinito matemático. b) La persistencia e impacto de tales modelos en individuos entrenados en matemática, concientes de la naturaleza abstracta del objeto matemático: infinito

Conclusiones

En virtud de los profundos cambios en la enseñanza de las matemáticas y por los momentos que se viven hoy en cuanto a experimentación en este campo, se deducen de este trabajo, las siguientes conclusiones:

1. Promover la investigación-acción en Educación Matemática pues es una forma de entender la enseñanza y no solo una manera de investigar, debe ser un proceso de investigación social, en el cual todos los participantes estén implicados en la toma de decisiones.
2. Proveer cursos de actualización a los docentes de matemática en ejercicio, sobre los conjuntos infinitos como un paso al infinito "actual" de manera que la transición a la matemática de educación superior en conceptos como límite, derivada e integral no cause conflictos cognitivos o incoherencias.
3. La estrategia desarrollada en la unidad de aprendizaje sobre los conjuntos infinitos y finitos, logró que diez de los profesores llegaran a adquirir intuiciones consistentes con la teoría cantoriana aprendida. Sin embargo cinco de los 15 profesores conservaban los modelos de razonamiento que poseían antes de comenzar la instrucción y dos presentaban incoherencias en sus respuestas, resaltando los modelos tácitos que cada uno tiene como docente.

Referencias

Arrigo G. y D'Amore, B. (1998). *Lo veo pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual.* Educación Matemática (11) 5-24
Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. En Balacheff, N. y col. (Eds) Kluwer Academic Publishers.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría Crítica de la Enseñanza. La investigación acción en la formación del profesorado*. España: Ediciones Martínez Roca.

Garbin S. y Azcárate C. (1999).*Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual.* Educación Matemática (12) 5-18

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Morata

Habermas, J. (1971). *Conocimientos e intereses*. Madrid: Taurus

Lokpez de G., H. (2001). *El Pensamiento Reflexivo*. En Cambiando a través de la Investigación Acción Participativa. Caracas: Ediciones Comala.com.

Mora, D. (2002*). Didáctica de las Matemáticas en la educación venezolana.* Caracas: EBUC.

Rodríguez, Gregorio; Gil, Javier y García Eduardo (1999). Metodología de la Investigación Cualitativa. Ediciones Aljibe: Málaga.

Tirosh, D. (1991). *The role of students intuitions of infinity in teaching the cantorian theory*. En Tall, D. (ed.) Advanced Mathematical Thinking, pp 199-214. Dordrecht/Boston/Londres: Kluwer Academic Publisher.

Valdivé, C. (2003). *Visualización del Infinito Matemático*. Ponencia presentada en Decimoséptima reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Chile.

UNA APROXIMACIÓN COMPRENSIVA A LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICA

Andrés Moya Romero
Instituto Pedagógico de Miranda. Universidad Pedagógica Libertador. Venezuela
moyaromer@yahoo.com

Campo de Investigación: Evaluación en Matemática; Nivel eductaivo: Superior

Resumen

Se plantea la necesidad de generar una teoría diferenciada de la evaluación en matemática ya que existen elementos propios que hacen necesario considerar la evaluación en matemática como un campo autónomo, conectado pero diferenciado del campo general de la evaluación. Dentro del marco de la Educación Superior se plantean las siguientes interrogantes: cómo contribuye la evaluación al aprendizaje matemático de los estudiantes, cómo está relacionada la evaluación con los modelos epistemológicos que subyacen a la enseñanza de la matemática y cómo se dan los modelos docentes que se desarrollan en el aula de clase. Se hacen algunas reflexiones para la comprensión de algunos de los modelos que existen hoy para la evaluación de la matemática y se aportan algunos elementos iniciales para la elaboración de un modelo alternativo, de evaluación en matemática, en la educación superior.

A manera de Introducción. La evaluación, y en particular la evaluación de los aprendizajes, está en la obligación de responder a una concepción de procesos de enseñanza y de aprendizaje que deben darse de una forma cohesionada e interactiva, donde se concibe el aprendizaje como un proceso constructivo (Giménez, 1997). En los profundos cambios de los diseños curriculares, la práctica evaluativa no puede ir separada de la práctica pedagógica, lo que en el área de Educación Matemática también conduce a una reconceptualización de lo que significa evaluar. La evaluación en matemática se considera como un elemento permanente y fundamental del sistema educativo en todos sus niveles. Sin embargo, no es hasta fechas relativamente recientes que se comienza a considerar la evaluación en Matemática como un campo de estudio diferenciado, en el sentido de que existen elementos propios y relevantes que hacen necesario considerarla como un campo autónomo, conectado con la evaluación en general pero con características intrínsecas al quehacer de la educación matemática. Webb (1992) ha planteado la situación con base en las siguientes interrogantes: a) ¿Es necesaria una teoría diferenciada de la evaluación en matemática? y b) ¿Difiere tanto de la evaluación en otras áreas hasta el punto de que tenga sentido una teoría diferenciada de la evaluación en matemática? Estaríamos entonces ante dos preguntas que consideramos trascendentales para el análisis que se pueda realizar de la evaluación en matemática.

La Educación Matemática, como un campo de investigación relativamente reciente, ha estado particularmente interesada en estudiar diferenciadamente la evaluación en matemática (Webb, 1992; Niss, 1993; Romberg, 1995; Rico y otros, 1997). Las conexiones con el campo general de la evaluación son, necesariamente, múltiples y diversas, pero también están presentes una serie de consideraciones que avalan la necesidad de contemplar la evaluación en matemática como un área temática propia sobre la que deben converger una serie de aspectos teóricos y prácticos que conduzcan a su consolidación como campo de estudio diferenciado.

Siguiendo con pautas similares, la reformulación curricular que la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) llevó a cabo durante el año 1996, señala una manera distinta de lo que deberá ser la evaluación, donde el enfoque cualitativo cobra una importancia capital. En el Documento Base del Diseño Curricular de la UPEL (1999), se manejan dimensiones éticas y sociales, afirmándose que uno de los propósitos de la Universidad es orientar su acción hacia la formación de profesionales de la docencia con la siguiente característica: "Conscientes de las implicaciones éticas del proceso educacional, que permitan el desarrollo de estrategias de trabajo y modalidades de evaluación pertinentes a la situación educativa en el aula y fuera de ella". Varios factores han sido parte de las investigaciones realizadas en el lapso de los últimos diez años, donde ha habido un creciente interés por la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el nivel de educación superior. Uno de esos factores se refiere a que la concepción, implícita o explícita, que tenga el docente acerca de cómo enseñar y aprender matemática va a influenciar, en una cierta medida, la manera de evaluar. Por otra parte, las concepciones previas de los estudiantes acerca de lo que es la matemática tiene incidencia acerca de sus percepciones sobre la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la misma (Berry y Nyman, 2002). Crawford et al (1998) reportan el hallazgo de que los estudiantes entran a la universidad con diferentes concepciones acerca de lo qué es la matemática y la aproximación a su aprendizaje.

Comprendiendo la Complejidad. En aras de la comprensión de la complejidad de la evaluación, es necesario señalar que ésta no es una acción esporádica o circunstancial de los docentes o de la institución escolar; muy al contrario, obedece, entre otros aspectos, a modelos pedagógicos implícitos o explícitos en las instituciones, a concepciones epistemológicas sobre el conocimiento que se evalúa, sobre la enseñanza y la naturaleza del aprendizaje. El reconocimiento a condicionamientos institucionales conduce a aceptar que la evaluación es un proceso que tiene características subjetivas, que se lleva a cabo de acuerdo con las normas creadas por una comunidad y responde a hábitos exigidos por la institución escolar. Por tal razón, son procesos construidos y afectados por marcos axiológicos, institucionales y sociales. Este significado, comienza a poner en evidencia interferencias inherentes a los procesos de evaluación versus el carácter de objetividad que tradicionalmente se le ha asignado, puesto que nos dice que el establecimiento de puntos de referencia o indicadores para la evaluación, pasa a ser dependiente del significado que una institución asuma sobre los objetivos motivo de evaluación. A estas "interferencias" se agregan las de tipo personal como las opiniones del docente sobre determinados aspectos de la persona que evalúa, prejuicios y actitudes favorables o desfavorables hacia determinados aspectos de la personalidad del evaluado. Estas situaciones pueden conducir a la evaluación como una práctica de poder, que significaría preguntarse acerca de en qué lugar se origina el poder de evaluar, quién lo distribuye, cómo se consume y cuáles son los factores que determinan ese consumo. Una segunda reflexión, con base en los aportes de la investigación en educación matemática, conduce a que los problemas de la evaluación de los conocimientos matemáticos deben ser planteados desde una dimensión epistemológica, puesto que el objeto de la evaluación del aprendizaje es el mismo objeto de conocimiento que la enseñanza pone en acto, por lo que revela posicionamientos epistemológicos sobre la matemática y, en particular, la matemática que podríamos denominar escolar. Ello conduce a que esas posiciones epistemológicas, implícitas o explícitas, deben ser desentrañadas y analizar de que manera podrían influenciar en la evaluación en matemática.

Epistemología y Evaluación de la Matemática. Según Ernest (1994), las diferentes escuelas que han caracterizado la naturaleza del conocimiento matemático a lo largo de las diferentes épocas se pueden constituir en dos grandes grupos que están en correspondencia con las concepciones que ellas tienen sobre la Matemática: la prescriptiva o normativa, y la descriptiva o naturalista. En la concepción prescriptiva de la Matemática, se considera a la tradición absolutista, representadas por el formalismo y el logicismo, junto al platonismo como corriente filosófica fundamental. En la concepción descriptiva o naturalista de la matemática, se incorpora un aspecto novedoso e importante del conocimiento matemático que no es considerado por la concepción prescriptiva, como es la práctica matemática y sus aspectos sociales. Por tanto, dota de subjetividad a los objetos matemáticos y sus relaciones. Surgen de esta manera corrientes como el cuasi-empirismo de Lakatos y el constructivismo social. El cuasi-empirismo (Lakatos, 1978, 1981) incorpora la dimensión histórica de la Matemática, a partir de la cual se puede mostrar por qué se desarrollaron los conceptos y resultados particulares de la Matemática, considerando como base los problemas concretos así como las dificultades históricas para su resolución. Por su parte el constructivismo social, se nutre de una concepción naturalista ya que sitúa el análisis de la naturaleza del conocimiento humano no en los sistemas formales, sino en la propia actividad humana (Wilder, 1981). Desde la visión del constructivismo social, el desarrollo del nuevo conocimiento matemático y la comprensión subjetiva de la matemática provienen del diálogo y las negociaciones interpersonales. Vendría a constituir esta postura una visión relativista de la racionalidad matemática como contraste a una visión absolutista. La incorporación de posiciones relativistas a los diseños curriculares ha traído como consecuencia una concepción de la evaluación del aprendizaje de los alumnos como una instancia orientadora y formativa antes que sumativa y sancionadora. Es así que según Socas y Camacho (2003), en correspondencia con esta posición, afirman: "La evaluación debe tener en cuenta no sólo el dominio de definiciones y conceptos, sino que debe contemplar competencias más generales, incluyendo la actitud hacia la propia Matemática".

Modelos Epistemológicos y Modelos Docentes. Siguiendo a Gascón (2001), consideramos que es necesario poner de manifiesto cómo el modelo epistemológico, implícito pero dominante en la clase y, por ende, en la institución escolar, puede influir sobre las características del modelo docente, es decir sobre la manera sistemática y compartida de organizar y gestionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en dicha institución. Lakatos (1978) distingue dos grandes grupos de teorías epistemológicas generales, o patrones de la organización matemática considerada como un todo, que han existido a lo largo de la historia de la matemática, como son: teorías euclídeas y teorías cuasi-empíricas. Gascón adiciona un tercer grupo de teorías epistemológicas, las cuales son las teorías constructivistas. De manera muy sucinta, el programa conformado por las teorías euclídeas propone que todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas, llamadas axiomas, que constan de términos perfectamente conocidos, denominados términos primitivos. Sin duda que las teorías euclídeas del saber matemático han tenido una larga vida y muestra de ello es su revitalización en el siglo XX con el logicismo de Russel, el formalismo de Hilbert y el intuicionismo de Brouwer. Lo que ha tenido en común esa larga historia es el predominio fundamental del carácter axiomático-deductivo de la matemática. Gascón (2001) propone que esta posición epistemológica puede dar origen a dos tipos de modelos docentes, que denomina como "modelos docentes clásicos", como son el teoricismo y el tecnicismo.

Por otra parte, surge una epistemología cuasi-empírica que plantea y pretende resolver un problema más amplio y de naturaleza no estrictamente lógica: el problema del desarrollo del conocimiento matemático. Tal como habíamos presentado en el apartado anterior, para Lakatos (1978), la matemática se desarrolla siguiendo el patrón de las conjeturas, pruebas y refutaciones. La consecuencia de los modelos cuasi-empíricos sobre los modelos docentes imperantes es que provoca una tendencia a identificar el saber matemático con la actividad matemática exploratoria. Esos modelos docentes serían, según Gascón (2001): el modernismo y el procedimentalismo.

El tercer grupo de teorías epistemológicas que Gascón (op.cit) adiciona es el de las teorías constructivistas. Para este autor la tesis central de la epistemología constructivista podría formularse de la manera siguiente: "para abordar el problema epistemológico es imprescindible utilizar como base empírica, al lado de los hechos que proporciona la historia de la ciencia, los que proporciona el estudio del desarrollo psicogenético". A partir de la epistemología constructivista se podrían caracterizar modelos docentes constructivistas, los cuales interpretan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática con posibilitar que los estudiantes "construyan" los conocimientos matemáticos. Para Gascón (op.cit.), existirían dos vertientes de esos modelos: el constructivismo psicológico y el constructivismo matemático. Estos modelos docentes que se corresponden con una epistemología constructivista permitirían, en nuestra opinión, avanzar en la constitución de un modelo constructivo de la evaluación en matemática, pero habría que considerar cómo incorporar el papel del desarrollo de las técnicas matemáticas en la propia actividad matemática, el cual es un aspecto al cual se le da un papel secundario en estos modelos.

Creencias y Actitudes. En diversos diseños curriculares, de diferentes niveles educativos, podemos determinar la presencia de concepciones de cómo enseñar matemática, de concebir cómo se aprende matemática y de cómo se debe evaluar, dando la posibilidad de indagar acerca de los modelos epistemológicos y docentes que, teóricamente, sustentan a tales diseños. Pero la distancia entre la teoría y la práctica, entre el currículo propuesto y el currículo implementado, sigue siendo bastante grande. En la propuesta hecha para el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS, 1994) se considera que existe un currículo intencional o previsto, que corresponde al que oficialmente se fija en la normativa educativa; el currículo impartido o práctico, que es aquel que los profesores enseñan a los alumnos al desarrollar en el aula el currículo intencional y, finalmente, el currículo alcanzado o efectivo, que es lo que aprenden realmente los alumnos. Ante los cambios propuestos en los diseños curriculares sería importante indagar hasta que punto los docentes de matemática comparten la posición epistemológica, implícita o explícitamente, de un conocimiento matemático como proceso, es decir, como un conocimiento que debe ser construido desde una perspectiva histórica, contextualizado y que tiene un contexto social y cultural. Indagar en qué medida una serie de creencias y actitudes, determinadas por esa posiciones epistemológicas han marcado esa distancia entre un currículo propuesto y un currículo alcanzado, produciendo efectos sobre las prácticas evaluativas.

Modelos de Evaluación de los Aprendizajes. La comprensión de los modelos existentes para la evaluación de la matemática requiere tener en cuenta sus funciones y sus diversos componentes. Giménez (1997) considera que los modelos de evaluación de los aprendizajes tienen en cuenta tres elementos fundamentales. A saber: La materia y cómo se interpreta, el sujeto y sus características y las condiciones del entorno (condiciones ecológicas). En función de ello se consideran tres tipos fundamentales de variables en la evaluación: *curriculares, psicológicas y ambientales*. Los tres tipos de variables enunciadas se pueden asociar a modelos distintos según que se enfaticen unas sobre las otras, pero no suele ser común que un cierto modelo se centre, exclusivamente, en alguna de ellas.

Van den Heuvel-Panhuizen (2003), plantea un modelo didáctico de la evaluación donde se parte del concepto de la matemática como una actividad humana, acorde con una concepción naturalista y relativista donde se privilegia la interacción y práctica social. Se habla de una "evaluación didáctica" ó "evaluación instruccionalmente integrada", donde la evaluación es entendida como una instancia para promover los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y estaría estrechamente ligada a las prácticas educativas cotidianas de los docentes. Por tanto, la concepción que tenga el docente acerca de cómo la matemática es aprendida y cómo la matemática debe ser enseñada, tiene que estar en correspondencia acerca de cómo la matemática debe ser evaluada. Linchevski y Kutscher (1999), presentan el modelo de evaluación TAP (**T**ogether and **Ap**art) que trata de promover el concepto de equidad, entendido como la conformación de una comunidad, de un medio ambiente de aprendizaje, donde a partir de una interacción social se produzca un conocimiento matemático compartido, lo que permite que todos los miembros de esa comunidad puedan expresar sus diversos puntos de vista. El reconocimiento de esa diversidad no obsta para que se plantee la construcción, por parte del estudiante, de un "conocimiento matemático indispensable. Giménez (1997), presenta un modelo donde se considera la evaluación como un proceso crítico de reflexión-acción (que forma parte del propio proceso de enseñanza y aprendizaje) en el cual se registran y analizan los cambios que se producen en, lo que dicho autor denomina, el "modelo matemático del estudiante y del profesor", por la acción del aprendizaje. Ese "modelo matemático del estudiante" sería el conjunto de variables que reconocen las bases del conocimiento del estudiante en su trabajo cotidiano que debe ser evaluado y lo definen en cuanto su adquisición, comprensión y posición general frente al contenido y su desarrollo en el aula. Se consideran una serie de variables que serían fundamentales para identificar ese conocimiento matemático del estudiante. Ellas serían: pensamiento matemático, capacidades matemáticas, habilidades y destrezas matemáticas, análisis de contenido y modelo cognitivo matemático, razonamiento matemático e integración en el aula de matemática. La importancia del abordaje de este modelo es que trata de superar lo que algunos autores denominan una visión esencialista del conocimiento matemático, que ha devenido en una aproximación precaria a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Se haría necesario desarrollar una nueva visión del conocimiento matemático que conduzca, en consecuencia, a nuevos procedimientos de valoración que permitan reflejar los cambios en las concepciones epistemológicas y metodológicas de abordar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

A manera de conclusión. Se ha presentado el acto complejo que representa la evaluación ya que está signada, entre otros aspectos, por modelos pedagógicos implícitos o explícitos en las instituciones y por concepciones epistemológicas. Por tanto, son procesos construidos y afectados por marcos axiológicos, institucionales y sociales. Tal como se ha presentado en esta revisión bibliográfica existe, por una parte, una concepción prescriptiva de la matemática en donde lo que predomina es lo estrictamente formal donde el conocimiento matemático es absolutamente fijo y objetivo. Por otro lado, se tiene a la concepción descriptiva o naturalista de la matemática, donde se incorpora un aspecto novedoso e importante del conocimiento matemático como es la práctica matemática y sus aspectos sociales, dotando de subjetividad a los objetos matemáticos y sus relaciones. En el análisis documental se reportó que esas posiciones epistemológicas pueden dar origen a diversos tipos de modelos docentes, que tienen consecuencias en la manera de identificar el saber matemático. La adopción de alguna de esas posiciones dentro de los diseños curriculares tiene consecuencias sobre la concepción de la evaluación del aprendizaje de los alumnos, aunque no hay un modelo de implicación directo que pueda llevar a afirmar, de manera absoluta, que la opción por una cierta posición se vea reflejada, de manera directa, en la evaluación que se hace en el aula. En el aula de matemática se encuentran, al menos, tres actores fundamentales: el docente, los estudiantes y el conocimiento matemático. Por tanto, cualquier modelo de evaluación en matemática tiene que tratar desentrañar la complejidad de esa interrelación y, en consecuencia, presentar una propuesta de cómo abordar esa complejidad.

REFERENCIAS

Berry, J. y Nyman, M. (2002). Small-group assessment methods in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnhology*, 33(5), 641-649.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J. y Prosser, M. (1998). *Studies Higher Education*, 23, 87.

Ernest, P. (1994). *The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics.* En R. Biehler et al. (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 335-349). Dordrecht: Kluwer.

Gascón, J. (2001). *Incidencia del Modelo Epistemológico de las Matemáticas sobre las Prácticas Docentes.* (Documento en Línea). Disponible: http://www.clame.org.mx (Consulta: 2004, Junio 23).

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una Integración de Perspectivas.* Madrid: Síntesis.
Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Universidad.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza.

Linchevski, L. y Kutscher, M. (1999). *Assessment in support of equity.* (Documento en línea). Disponible: http://academic.sun.ac.za/mathed/MALATI/Assess99.htm (Consulta: 2005, abril).

Niss, M. (1993). *Investigations into Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Fernández, F. y Segovia, I. (1997). Cuestiones abiertas sobre evaluación en matemáticas. *Uno*, 4(11), 7-23.

Romberg, T. (1995). *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment.* Nueva York: Suny Press.

Socas, M. y Camacho, M. (2003). Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 151-171.

TIMSS (1994). *Trends in International Mathematics and Science Study.* (Documento en línea). Disponible: http://www.timss.org/ (Consulta: Julio, 2004).

UPEL. (1999). *Diseño Curricular. Documento Base.* Caracas: Autor.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). Towards a Didactic Model for Assessment Design in Mathematics Education. En A.J.Bishop, M.A.Clements, C.Keitel, J.Kilpatrick y F.K.S.Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 689-716). Dordrecht: Kluwer.

Webb, N. (1992). Assessment of Students Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. En Grouws, D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan.

Wilder, R. (1981). *Mathematics as a cultural system.* Oxford: Pergamon Press.

ESTUDIANTES DE ALTA REPITENCIA EN MATEMÁTICA. UN PLAN DE SUPERACIÓN

Nelly Elizabeth González de Hernández
Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela
gonzalne@yahoo.com

Campo de investigación: Didáctica de la Matemática; Nivel educativo: Superior
Metodología de Investigación: Mixta
Palabras Clave: Matemática, eficiencia, investigación, fallas

RESUMEN

Cuando hablamos de eficiencia en el trabajo educativo nos enfrentamos al estudio de múltiples variables: número de estudiantes aprobados, calificaciones promedio, proporción de retiro o abandono de un curso, uso de recursos económicos, entre otros. Al consultar la opinión de los docentes de Matemática en la Universidad, sobre el bajo rendimiento estudiantil en la asignatura, las explicaciones apuntan, en una significativa mayoría, a señalar como responsables, las fallas que el alumno arrastra desde su proceso de aprendizaje en Educación Media. Este documento registra los resultados de una investigación donde el estudio, la dedicación y sobre todo la voluntad permite acercarnos a una experiencia exitosa para recuperar a los estudiantes de bajo rendimiento o de alta repitencia en Matemática.

INTRODUCCIÓN

El nivel de egreso y la permanencia de los alumnos en la Universidad es objeto de preocupación constante entre quienes tenemos la responsabilidad de formar a los futuros profesionales. Existen altos valores de fracasos, elevados índices de deserción, gran cantidad de alumnos repitientes, traducidos en multiplicación de esfuerzos tanto para los docentes como para los estudiantes. Un ligero comentario sobre las causas nos lleva a esta situación indeseada es atribuir gran parte de las fallas a la formación e información recibida durante los estudios de Educación Media, sobre todo en Matemática. Otros comentarios nos podrían llevar a cuestionar nuestros métodos para seleccionar a los alumnos de cada carrera pues aparentemente los requisitos para ingresar se suavizan mientras las características que exige el mercado de trabajo se endurecen. Y otros más discernirían sobre lo inadecuado e inútil de los cursos propedéuticos, de inducción, de iniciación o como los quieran llamar.

A partir de esta preocupación la Escuela de Administración y Contaduría de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Central de Venezuela, desde el año 1999 ha organizado diferentes experiencias con la finalidad de ayudar a los alumnos a superar sus deficiencias. Consideramos que estas experiencias deben estar apoyadas en estudios donde las sugerencias estén construidas en resultados y registros confiables que permitan a quienes organizan estas actividades tener instrumentos de investigación diseñados especialmente para evaluar esta tarea.

Como se explicó en el párrafo anterior, no existen trabajos de investigación que evalúen las *experiencias de recuperación* en ninguna de sus áreas, lo máximo de que disponemos son los informes de los coordinadores de área donde notifican cual y cuanto fue el personal docente utilizado y una cita de los programas dictados.

Es por muchos reconocido que el rendimiento en la cátedra de Matemática de la carrera de Administración y Contaduría, se ve afectado por fallas de conocimiento de las herramientas básicas de aritmética y álgebra que el alumno arrastra desde su formación en educación secundaria. Este reconocimiento está apoyado en los resultados de las distintas evaluaciones en Matemática I, II y III, en la experiencia en los cursos de Iniciación y en los resultados de la Prueba de Admisión. De cara a esta experiencia propusimos una experiencia, que identificamos con el nombre de *Plan de Superación*, que podría ofrecernos soluciones a una situación reconocida por todos pero no atendida hasta el momento.

¿Quienes participarían en la experiencia? Estudiantes que han repetido Matemática I más de una vez, o quienes se encuentren afectados por las Normas de Permanencia y que tengan inscrita la asignatura, o estudiantes que lo expresen voluntariamente.

Los objetivos del *Plan de Superación* son: revisar con estudiantes que presentan bajo rendimiento en Matemática, algunos conocimientos de aritmética y álgebra, y estimular al alumno en el estudio por la Matemática, realizando énfasis en la ejercitación y la discusión de los resultados individuales y colectivos.

Metodología de la Investigación

Conjunto histórico de pruebas realizadas al inicio del semestre bajo estudio (primero 2005) y cada cinco (5) semanas para evaluar los objetivos del *Plan*. Está información fue recolectada en instrumentos diseñados por una investigación previa, cuyo diseño permitirá registrar los datos de interés con eficiencia y rapidez pues éste fue el propósito al momento de su preparación.

El tipo de muestreo será exhaustivo, (83 estudiantes)

Modalidad de trabajo del *Plan de Superación*

- Realizaremos una Prueba Diagnóstico al comenzar la experiencia. Los objetivos a evaluar serán: resolución de ecuaciones, planteamiento de problemas y resolución de sistemas de ecuaciones
- Durante dieciséis (16) semanas se asistirá a una hora de clase teórica, cada semana, con la finalidad de recibir una información básica que permitirá desarrollar la práctica. Este curso es paralelo a las asignaturas que el estudiante tiene inscritas, no representa el reconocimiento de créditos, la recompensa será superar deficiencias en matemática
- Cada semana se tendrá una asignación de ejercicios que el alumno debe resolver y entregar al profesor del curso, una semana después de la asignación
- Dispondremos de horas de consulta en horarios que se publicarán en la cartelera del Departamento de Estadística y Matemática

- Cada cinco (5) semanas se evaluará un objetivo de manera que podamos revisar si la situación detectada en el diagnóstico ha sido superada. La situación se revisará para cada estudiante y para el grupo.

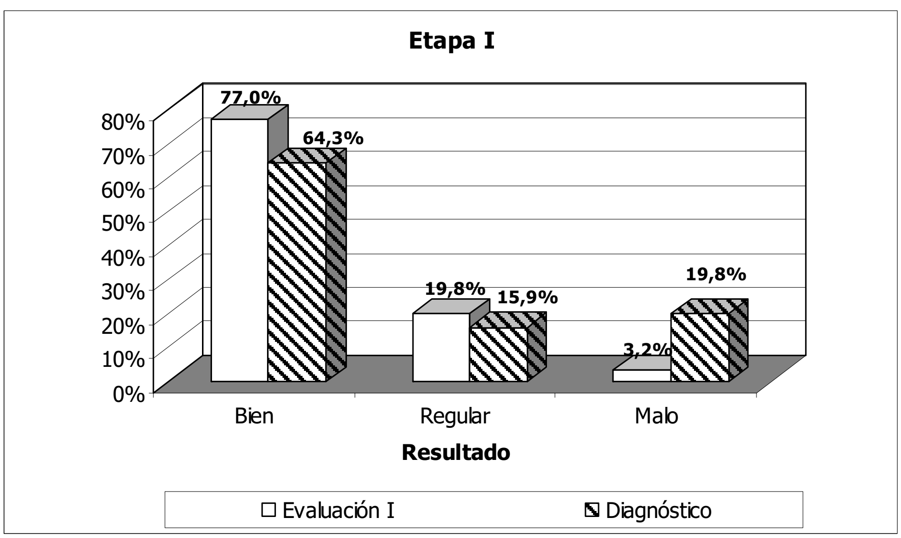
Desarrollo del *Plan de Superación*

La evolución de la revisión y superación de los objetivos de la experiencia se apreció gracias a instrumentos que se aplicaron cada 5 semanas. En cada oportunidad se trabajó con el contenido estudiado durante ese período, de manera que tenemos que presentar resultados para estas 3 experiencias, que denominaremos como Evaluación I, II y III. El objetivo de cada evaluación era indagar sobre los conocimientos de cálculo de ecuaciones de Primer y Segundo Grado, en una primera etapa, luego se abordó el planteamiento de problemas, las operaciones con polinomios y la evaluación de expresiones algebraicas, por último en una tercera etapa se procedió a solucionar Sistemas de Ecuaciones, donde evidentemente se haría uso de las herramientas practicadas anteriormente.

Resultados de la Evaluación I

Las ecuaciones de primer y segundo grado constituyeron el primer objetivo de revisión en el Curso de Recuperación. Realizamos una evaluación al inicio del Semestre y cinco (5) semanas después, después de un proceso de ejercitación, explicación en aula y consultas, revisamos el objetivo. Si comparamos los resultados de las evaluaciones encontraremos gráficamente la siguiente situación:

Gráfico 1 Comparación de resultados Evaluación diagnóstico – Evaluación I

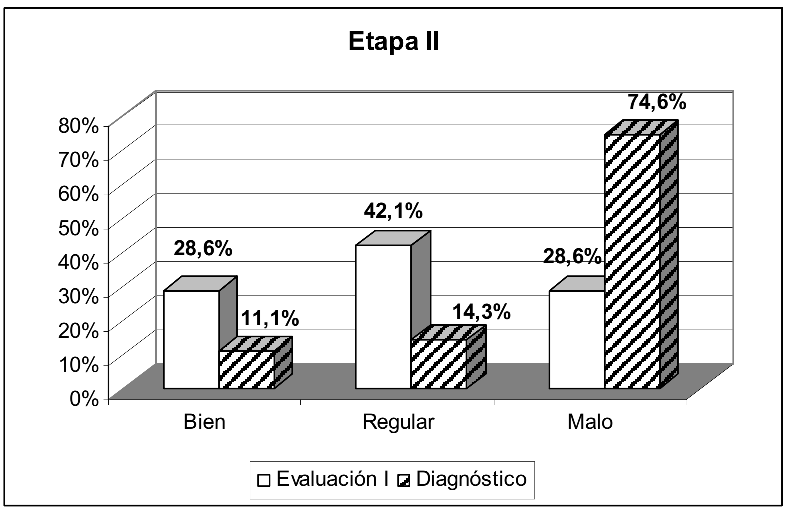


El número de estudiantes que resuelven correctamente el ejercicio propuesto se incrementa de 64,3% a 77%, quienes reciben la calificación de *Regular* se mantiene prácticamente igual y aquellos que lo hacen *Mal* desciende 12 puntos. Las expectativas del investigador eran superar con mayor amplitud los resultados, dado que se trata de los ejercicios más sencillos de toda la experiencia y que durante las actividades en clase, la participación de los estudiantes revelaba que dominaban este objetivo, sin embargo la realidad nos presenta que aún debemos cuidar este aspecto pues se siguen registrando errores tales como: operar equivocadamente la reducción de términos semejantes de distinto signo y mala trascripción de la notación algebraica. Al revisar los ejercicios con los estudiantes algunos de ellos señalaron que se confiaron por sentir que era muy sencillo el problema y otros reconocieron que mantienen sus limitaciones en el área.

Resultados de la Evaluación II

Satisfacer este objetivo requería resolver problemas donde se debía definir 2 incógnitas y la resolución de un sistema de 2 ecuaciones. En esta oportunidad el número de estudiantes que resolvieron perfectamente el ejercicio se incrementó de 11,1% a 28,6%, una proporción de 42,1% logró realizar una definición correcta de las variables pero incurrieron en algún desacierto en la resolución del sistema, la proporción de respuestas erradas descendieron de 74,6% a 28,6%

Gráfico 2 Comparación de resultados Evaluación diagnóstico – Evaluación II



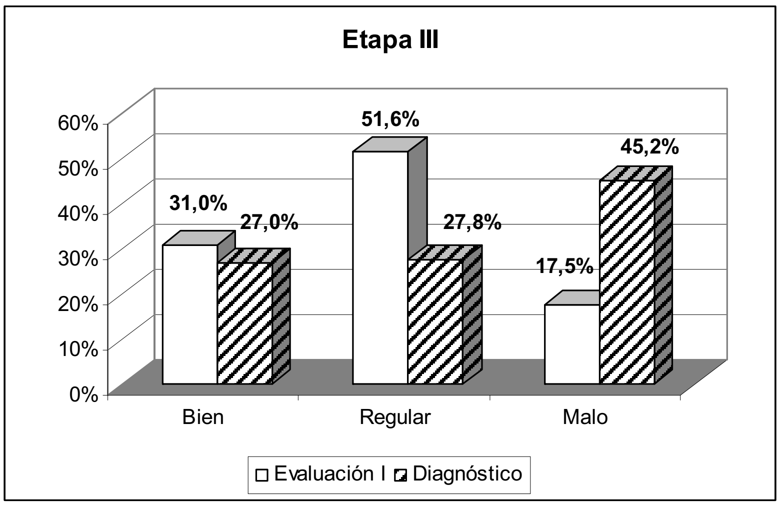
Observamos que el efecto es el deseado parcialmente, logramos mejorar el resultado en la resolución y disminuir el número de respuestas erradas, sin embargo si consideramos que se trataba sólo de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas ya podemos prever que para sistemas más complejos la posibilidad de llegar a un resultado exitoso está mermada.

La discusión de estos resultados con los alumnos permitió apreciar que reconocer las incógnitas del problema y traducir las palabras a ecuaciones matemáticas representan para ellos la mayor dificultad, cuando el problema ya está planteado ellos sienten mayor confianza para iniciar los procesos. No nos desanima que en apariencia hemos desmejorado en nuestro *Plan*, reconocemos que debemos insistir en la problemática de usar los lenguajes y volver a estimular la capacidad aparentemente "oxidada" pero completamente rescatable.

Resultados de la Evaluación III

El objetivo que hemos identificado con el título "Evaluación III" exigió la resolución de sistemas de tres (3) ecuaciones con tres (3) incógnitas, donde sumamos el manejo de las herramientas revisadas en los objetivos anteriores. El resultado fue el siguiente:

Gráfico 3. Comparación de resultados Evaluación diagnóstico – Evaluación III



Ya en el momento que realizamos la prueba diagnóstico realizamos el siguiente comentario: "La solución al sistema de ecuaciones fue realizada correctamente por aproximadamente una cuarta parte del curso. Considerando que se trata de un planteamiento muy sencillo consideramos que este es un resultado poco favorable". Después del trabajo de revisión en el aula apenas logramos un incremento de aproximadamente 4 puntos en quienes responden *Bien* y duplicamos la proporción de quienes lo hacen *Regular*, resultados muy por debajo de los esperados.

Conclusiones

El grupo de docentes involucrados en esta experiencia esperaban mejores resultados, sin embargo hemos tomado todo lo positivo que representó convocar a un grupo de estudiantes que reconocieron sus deficiencias y que aceptaron la responsabilidad de superarlas. Estamos claros que en dieciséis (16) semanas no se revisa la información que deberían traer procesada y aprendida de cinco (5) años de Educación Media pero si quedó en el ánimo que un grupo numeroso de alumnos manifestó su satisfacción al comprobar que mejoraba en su desempeño y que este proceso puede continuar.

A mediano plazo nos proponemos proponer a la Coordinación del Curso de Iniciación la supervisión constante de los estudiantes de nuevo ingreso. Si nos percatamos, como en este caso, de las fallas que arrastran nuestros alumnos podemos medir paso a paso su superación. En esta investigación palpamos que existen mejoras, tímidas quizás pero que podemos intensificar exigiendo en primer lugar que se mantenga la exigencia de conocimientos matemáticos en la Prueba de Admisión y suministrando con anticipación materiales para facilitar el repaso y en algunos casos el aprendizaje.

No debemos perder de vista la posibilidad de ofrecer el Curso de Iniciación a distancia, esto permitiría trabajar por un período más extenso pues como demostramos la proporción de estudiantes que durante el curso pasaron de respuestas *Malas* a *Regulares* fue significativo en cada uno de los objetivos, sin embargo esta no era la meta del *Plan de Superación*, lo deseado era lograr que todos, sin excepción, resolvieran los ejercicios y aplicaran sus conocimientos a la perfección.

Los docentes de la cátedra de Matemática fueron entrevistados para conocer su opinión sobre el programa que se dictaría en el Semestre de Iniciación y sobre los materiales de instrucción que se utilizarían como apoyo en la enseñanza. En un 100% coincidieron en lo adecuado que resultaría revisar las herramientas matemáticas que los estudiantes debían manejar con destreza para iniciar su carrera universitaria, recomendando que los ajustes se deberían realizar sobre el tiempo que se dedica a cada Unidad, la experiencia que desarrollaríamos con la evaluación continua sería una buena oportunidad para apreciar donde se debe insistir o donde se puede aligerar el paso. Otra conclusión de significativa importancia es que cada profesor en el aula debería tener independencia para señalar las características propias de su curso en el sentido que pudiese adelantar o retrasar el inicio de cada tema dependiendo de la respuesta queden los estudiantes, se apreció en cursos anteriores que las secciones diurnas y vespertinas tenían menos dificultades que las nocturnas y resultaba en algunas oportunidades contraindicado la instrucción de cumplir con un programa estricto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coordinación Académica (2004) *Informe de Rendimiento Estudiantil Control de Estudio* EAC FaCES UCV. Venezuela

Coordinación Estudiantil (2004) *Informe de resultados de Prueba Interna EAC FaCES* UCV. Venezuela

González, N. (2003) *Revisión de los procesos de iniciación en la carrera de Administración y Contaduría de la UCV. Área de Matemática* Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico UCV. Venezuela.

LOS ANÁLISIS A PRIORI EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN PARA EL TEMA “INTERVALOS DE CONFIANZA”

Anido de López, Mercedes y Terán, Teresita E.
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística – U.N.R. - Argentina
teresitateran@hotmail.com
Campo de investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria; Nivel educativo: Superior

Resumen

En este trabajo se presentan los “análisis a priori” de problemas desarrollados como test de evaluación en el tema Intervalos de Confianza. Esta evaluación forma parte de una investigación cuyo objetivo es indagar el significado de los Intervalos de Confianza para alumnos de un primer curso de Estadística en la Universidad Nacional de Rosario. En el marco de la teoría de Godino (1999) se trata de conjeturar por medio de esta evaluación la presencia de distintos elementos de significado: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos, que son reveladores de la comprensión del tema. El tema Intervalos de Confianza es utilizado en la resolución de situaciones problemáticas en las distintas especialidades, ya sea en investigaciones o en el propio desarrollo de la práctica profesional, de allí su importancia.

El problema de investigación y marco teórico

La inferencia estadística es una de las grandes ramas de la Estadística y una herramienta metodológica fundamental en las ciencias empíricas.

Sin embargo, ya desde su comienzo se han descrito numerosos errores en la aplicación de la inferencia estadística en la investigación, con las consiguientes implicaciones sobre la validez de los resultados obtenidos. Yates (1951), por ejemplo, sugirió que los científicos dedicaban demasiada atención al resultado de sus contrastes, olvidando la estimación de la magnitud de los efectos que investigaban.

Numerosos trabajos de investigación indicarían que estas falencias perduran. Podríamos pensar que esta situación se debe a una enseñanza insuficiente del tema, a pesar de que la estadística es una asignatura obligatoria en la mayor parte de las licenciaturas e ingenierías.

En el marco teórico de Godino (1999) los objetos matemáticos, en nuestro caso, los Intervalos de Confianza emergen de la actividad de resolución de problemas.

Godino y Batanero (1994) introducen dos tipos de entidades primarias: prácticas significativas y significado de un objeto para los cuales postulan dos dimensiones interdependientes: personal e institucional.

Una práctica es significativa para una persona o para una institución si desempeña una función en la resolución del problema o si es útil para comunicar, validar o extender la solución a otros problemas.

En la construcción del significado y la comprensión sobre un objeto matemático (concepto, procedimiento, proposición, etc.) intervienen diversos tipos de objetos:

- Los problemas y situaciones de donde surge dicho objeto.
- Las expresiones del lenguaje, gráficos, manipulativos y cualquier otra representación del mismo.
- Sus definiciones, propiedades, y relaciones con otros objetos.

- Las acciones y procedimientos para resolver problemas y operar con el objeto.
- Los argumentos que damos para probar las propiedades o validar las soluciones a los problemas.

Godino y Batanero (1994), definen los siguientes tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática y que llamaremos *tipos de elementos de significado* y facilitan su análisis:

Extensivos: las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto (situaciones-problemas, aplicaciones), de donde se induce y hacia donde se aplica la noción de Intervalo de Confianza y su contexto.

Ostensivos: representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos); en ellas se incluyen en general las entidades lingüísticas/notacionales, por ejemplo, la notación de los Intervalos de Confianza, la notación de las distintas distribuciones que se utilizan , las gráficas de la función de densidad de dichas distribuciones, etc. Estos elementos ostensivos o representacionales se pueden observar y manipular y tienen una doble función, por un lado sirven para evocar los objetos abstractos inobservables, por otro, se usan para operar con ellos (en representación de los correspondientes objetos matemáticos) y producir resultados aplicables a dichos objetos.

Actuativos: procedimientos y estrategias para resolver los problemas (procedimientos, algoritmos, operaciones), se ponen de manifiesto, por ejemplo a través de los diversos procedimientos que se realizan cuando se efectúa una representación gráfica o una simulación.

Intensivos: propiedades características y relaciones con otras entidades: definiciones, teoremas y proposiciones (conceptos, proposiciones), como por ejemplo, las ideas de estadístico, parámetro, población o muestra en relación a los intervalos de confianza.

Validativos: tipos de argumentaciones para validar proposiciones (demostraciones, comprobaciones, justificaciones).

Descripción del estudio

Como nuestra investigación se centra en el significado de los Intervalos de Confianza para los alumnos universitarios, una de las preguntas que nos formulamos es ¿cuál es la comprensión de los alumnos en el tema en un primer curso de Estadística en la Universidad? ¿Qué elementos de significado se revelan en una evaluación? Para contestar estas preguntas elaboramos una primera evaluación completada individualmente por los alumnos.

Esta primera evaluación fue elaborada con el fin de detectar las dificultades que poseen los alumnos y los errores más frecuentes en el tema Intervalos de Confianza. A su vez, a través de errores y aciertos indagar sobre los elementos del significado personal de los alumnos en el tema Intervalos de Confianza.

Se siguieron en la confección de esta evaluación los lineamientos propuestos por Cruise, Dudley y Thayler (1990) en el libro “Una guía de recursos para la Estadística Introductoria”, como así también los cuestionarios elaborados por Vallecillos (1999) y Tauber (2000).

Con estos aportes, sumados a nuestra experiencia personal como docente, esbozamos la evaluación exploratoria con preguntas abiertas, cerradas y de opción múltiple.

Se sometió a consulta con profesores del Departamento de Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, y se tomó a título de prueba a un grupo de alumnos avanzados de la carrera de Estadística. Los aportes que resultaron de estas consultas llevaron al diseño de la evaluación definitiva, que se estructuró de acuerdo a los siguientes lineamientos en cuanto a contenidos:

a) los campos de problemas cuya resolución hace surgir la idea de los intervalos de confianza (Elementos extensivos),
b) las definiciones, propiedades de los Intervalos de Confianza y su relación con otros conceptos (Elementos intensivos),
c) las representaciones gráficas, numéricas, verbales, algebraicas de los intervalos de confianza a través de una doble función simbólica e instrumental (Elementos ostensivos),
d) las técnicas específicas realizadas para la resolución de problemas (Elementos actuativos),
e) las solicitudes de interpretación, argumentación, justificación y síntesis (Elementos validativos).

Esta evaluación se llevó a cabo por alumnos pertenecientes a las carreras de: Contador Público, Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración, Licenciatura en Estadística (Facultad de Ciencias Económicas y Estadística U.N.R.); Ingeniería Industrial (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura U.N.R.) y Medicina Veterinaria (Facultad de Ciencias Veterinarias U.N.R.).

La evaluación contiene nueve ítems y veinticinco subítems. Durante el diseño del cuestionario de evaluación se elaboró una tabla detallada donde se especifican por ítem el o los elementos de significado que entran en juego.

A continuación presentamos el análisis previo de algunos de los problemas.

PROBLEMA 2

a) Escribe simbólicamente el nivel de confianza correspondiente al nivel de significación α.
b) Escribe simbólicamente el valor crítico de t (bilateral) correspondiente a un nivel de confianza $(1-\alpha)$, para escribir un Intervalo de Confianza para la media poblacional, basado en una muestra de tamaño n.
c) Escribe simbólicamente el intervalo que contenga al verdadero valor poblacional μ con una confianza de $(1-\alpha)$ en el caso de que $n > 30$.

El objetivo del problema 2 es:

- Saber si el alumno conoce la simbología a utilizar en función de los elementos teóricos proporcionados.

Este problema comprende el análisis sólo de elementos ostensivos que se refieren en la pregunta 2.a a la expresión simbólica del nivel de confianza; en la 2.b la expresión simbólica del valor crítico de t bajo determinadas condiciones y en la 2.c a escribir en forma simbólica un intervalo de confianza para μ bajo determinadas condiciones.

Si bien todos los ítems requieren la utilización de una notación simbólica, esperamos mayores errores en el punto c) por cuanto la escritura completa de un intervalo de confianza es más compleja que la de sus elementos por separado.

PROBLEMA 5

Se realizó un ensayo con suplementación con sorgo molido en la alimentación de novillos para estudiar las posibilidades de superar la baja disponibilidad de forraje durante el período invernal en la pradera. Se necesita estimar la ganancia en peso de los animales obtenida con este tipo de alimentación. Los datos relevados son los siguientes:

62 – 64 – 60 – 85 – 70 – 64 – 83 – 99 – 87 – 65 – 74 – 89 – 86 – 91 – 75 – 63 – 78 – 85- 68 – 73

- $n = 20$
  $\bar{x} = 76.05Kg.$
  $S = 11.47Kg.$

a) Calcula un intervalo de confianza del 95% para el promedio de ganancia de peso de la población.

b) ¿Este intervalo del 95% de confianza contiene el verdadero valor promedio de la ganancia de peso en Kg.?

☐ Verdadero ☐ Falso ☐ No se sabe

c) Con respecto a este intervalo específico no se sabe si cubre al verdadero valor.

☐ Verdadero ☐ Falso

d) Si se desea disminuir el error de estimación un 10%. ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra?

Son objetivos del problema 5 saber si el alumno es capaz de:

- Estimar un intervalo de confianza para la media poblacional.
- Determinar el tamaño de muestra necesario para obtener un intervalo de confianza deseado.

  En la pregunta 5.a se estudiaron elementos extensivos, actuativos, ostensivos e intensivos. El elemento extensivo correspondió al análisis del problema de donde surge la estimación de un intervalo de confianza para la media poblacional, el elemento actuativo se refirió al cálculo utilizando operaciones algebraicas para hallar el intervalo de confianza correspondiente. Los elementos ostensivos se refirieron al empleo de la simbología adecuada: $\bar{x}, S, n, t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$. En los elementos intensivos se evaluó la comprensión de la definición de intervalo de confianza para la media poblacional.

Los problemas 5.b y 5.c correspondieron a elementos intensivos con las mismas características expresadas en el ítem 5.a.

La pregunta 5.c corrobora lo expresado en el punto 5.b.

En la pregunta 5.d se analizan elementos actuativos e intensivos. Los elementos actuativos corresponden a las operaciones algebraicas necesarias para el cálculo del tamaño de muestra, y los elementos intensivos a la determinación del tamaño de muestra para estimar un intervalo de confianza para la media poblacional.

En la elaboración se supuso que los errores más frecuentes provendrían del la primer parte del problema por la falta de aprehensión del concepto de los intervalos de confianza, y en la segunda parte, por una falta de dominio de la relación entre el error de estimación y el tamaño muestral.

PROBLEMA 6

Una caja contiene un gran número de bolillas rojas y azules. Un estudiante es asignado a la tarea de construir un intervalo de confianza para la proporción de bolillas rojas en la caja. Éste toma una muestra aleatoria simple de tamaño n = 100, de las cuales 53 son rojas y calcula:

$$[0{,}53 - 1{,}96 \,.\sqrt{\frac{0{,}53.0{,}47}{100}}\,;\, 0{,}53 + 1{,}96 \,.\, \sqrt{\frac{0{,}53.0{,}47}{100}}\,] = [0{,}43;\, 0{,}63]$$

Concluye que el intervalo de confianza del 95% de la proporción de las bolillas rojas en la muestra es de [0,43; 0,63]. Cuando el profesor le corrige; pone mal. Detecta el error en la conclusión.

El objetivo del problema 6 fue:

- Detectar la capacidad de argumentación que poseen los alumnos en base a sus conocimientos sobre la estimación de un intervalo de confianza para la proporción poblacional.

Se presenta como situación problemática una aseveración aparentemente resuelta con un error conceptual y se solicita que lo determine y explique la naturaleza del error. Si bien entran en juego elementos ostensivos, predominan los intensivos y sobre todo la capacidad de argumentación (validativos).

Suponemos que los errores cometidos en este problema se deberán a una falta de incorporación del concepto de estimación en general, y de los intervalos de confianza en particular.

PROBLEMA 9

Existen varias maneras de reducir la amplitud de un intervalo. Indica cuál de estas opciones es verdadera:

☐ ➢ Manteniendo el mismo nivel de confianza, la misma variancia y aumentando el *n*.

☐ ➢ Manteniendo el mismo tamaño de muestra *n*, la misma variancia y aumentando el nivel de confianza.

El objetivo del problema 9 fue:

- Discriminar entre distintas aseveraciones, teniendo en cuenta las características de los intervalos de confianza y sus relaciones entre el nivel de confianza, la variancia y el tamaño muestral, cuál es la correcta.

El alumno debe aquí indicar la opción correcta, teniendo en cuenta las características de los intervalos de confianza y la relación entre los distintos elementos que intervienen en su construcción. Se analizan aquí solamente elementos intensivos referidos a las características de los intervalos de confianza.

Conclusión

En este trabajo se han presentado los análisis Teóricos previos y el análisis a priori de una Ingeniería Didáctica (Artigue, 1990).

Este análisis a priori ha estado constituido por la elección del profesor orientado a una detección de los elementos de significado que debe poseer el alumno para la comprensión del concepto de Intervalos de Confianza.

Creemos que este análisis puede constituir un aporte para la evaluación de la comprensión de conceptos estadísticos en otros temas.

Bibliografía

Artigue, M. (1990). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9(3), 281-307. La Pensée Sauvage: Grenoble, Francia.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Cruise, J., Dudley, R. y Thayer, J. (1984). *A resource guide for introductory statistics.* Dubuque, Iowa: Kendall/Hunt.

Godino, J. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. Comunicación presentada en el *VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica.* Granada.

Godino, J. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 196-212). Valladolid.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 14(3), 325-355.

Tauber, L. (2001). La construcción del significado de la distribución normal en un curso de análisis de datos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, España.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute. Tome 58, Book 2 (pp.201-204). Helsinki, Finland: International Statistical Institute.

EL CONCEPTO DE LÍMITE EN LOS LIBROS DE
TEXTOS UNIVERSITARIOS

Nora Gatica. Gladys May, Analía Cosci, Graciela Echevarría, Juan Renaudo, Marcela Carranza
nimberti @fices.unsl.edu.ar; gcmay @fices.unsl.edu.ar; gecheva@fices.unsl.edu.ar
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales Universidad Nacional de San Luis (Argentina)
Campo de investigación: Educación continua; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

El aprendizaje de los temas de Cálculo en primer año de la Universidad, suele ser problemático para los alumnos, lo que conlleva a una gran cantidad de fracasos y posteriormente, en muchos casos, a la deserción de los estudiantes.
En el presente trabajo, tomando como referencia los registros de representación semiótica (Duval, 1998), analizaremos las distintas formas de abordar la definición del concepto de límite en los libros de textos que forman parte de los recomendados en la asignatura.
Dado el carácter exploratorio de la investigación que hemos abordado, el estudio de los textos no tiene un carácter exhaustivo ni representatividad estadística.

INTRODUCCIÓN

Como docentes de las carreras de Ingeniería, una de las problemáticas que nos preocupa, es la enseñanza del concepto de límite en los alumnos de primer año de esta carrera.
Elegimos este tema, por tratarse de una noción que requiere altos niveles de abstracción, su aprendizaje se reduce a una mera memorización de la definición del concepto, la que fácilmente es olvidable, ya que no tienen una interpretación funcional de la misma, presumiblemente, por la falta de articulaciones entre varios registros. Sin embargo, los alumnos después de su enseñanza, pueden realizar el cálculo correspondiente sin mayores (o con ciertas) dificultades.
Lo expresado anteriormente, en parte, es avalado a través del bajo rendimiento en las evaluaciones correspondientes, a través de los años.
Desde otra perspectiva, los estudiantes de las carreras de Ingeniería tienen el convencimiento de que sólo les interesan las matemáticas que tienen aplicaciones directas y, por tanto, el concepto de límite, tal y como se viene enseñando en los estudios de Ingeniería, les resulta demasiado árido, no saben aplicarlo ni a situaciones problema ni a nuevos planteamientos matemáticos, y ni siquiera son capaces de establecer conexiones con el cálculo de límites.
La verdadera dificultad para poder comprender esta definición radica en el hecho de que debemos concebirla como una idea dinámica como si fuese el resultado de un movimiento: recorremos los valores de la variable x hacia un determinado punto y observamos el comportamiento de la función.
En el estudio que presentamos, nos hemos dedicado a analizar el significado institucional del concepto de límite funcional. O sea, el significado que el docente al momento de enseñar el tema lleva incorporado. Pero, ¿Cómo lo determinamos? Dado que los libros de textos son el principal referente para los docentes al momento de preparar el tema, nos hemos abocado en el análisis de distintos textos.

Este trabajo forma parte de una investigación mas amplia en el que hemos analizado el significado personal de los alumnos mediante cuestionarios, como así también el desarrollo histórico del concepto.

MARCO TEORICO DUVAL

Para el análisis de textos hemos considerado los registros de representación semiótica de Duval.
Debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, Duval (1998) enfatiza la importancia de la *representación* en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella.
A estas representaciones, las clasifica en dos clases:

Registros de representación semiótica

Duval introduce el concepto de *sistema semiótico* como un *sistema de representación*, el cual puede ser un *registro de representación* si permite tres actividades cognitivas, a saber:

- La ***presencia de una representación*** identificable como una representación de un registro dado. Por ejemplo: el enunciado de una frase o la escritura de una fórmula.
- El ***tratamiento de una representación*** que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- La ***conversión de una representación*** que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento. Duval afirma que no existen y no pueden existir reglas de conversión a la manera que existen reglas de tratamiento y de conformidad.
En esta teoría se considera que la *comprensión integral de un concepto* está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.
Este marco teórico nos ayudará a analizar que cambios de registros ofrecen los libros de textos para la enseñanza del tema, además que libros de textos dan mayor motivación, que tipo de definición utilizan, si hay actividades en donde se solucionen problemas de la vida real, pero nos enfocaremos principalmente en las actividades propuestas, en lo que se refiere a cambios de registros, si son actividades de tratamientos entre registros (tipo calculo) o de conversión entre ellos, ya que Duval establece que para que haya verdadera comprensión es necesario dar actividades de cambios de registros

Análisis de los Libros de Texto

Los aspectos analizados en estos libros se refirió a:

1. Si los libros relacionaban este tema con los estudiados anteriormente (Enlace con ideas previas)
2. Si se especificaba cuales eran los conocimientos necesarios para abordar este tema (conocimientos previos)
3. ¿Estaban planteados claramente los objetivos pretendidos al desarrollar el tema?

4. Se apoyaron en la historia para introducir el tema? (referencias históricas)
5. Como introducían el tema en lo referente a si planteaban problemas, gráficos, tablas o algún otro tipo de instrumento didáctico?
6. ¿Definían el límite en forma intuitiva o formalmente?
7. Proponen algún tipo de actividad con el objetivo de mostrar la necesidad de la utilización de este concepto.
8. Se apoyan en el registro gráfico para explicar esta definición.
9. Que tipos de actividades o ejercicios presentan estos libros de texto.

Elementos de Cálculo Diferencial e Integral - Sadosky Guber
Editorial Alsina. 1973 (Décima edición corregida y aumentada).

Enlace con ideas previas	No
Conocimientos previos	Unidad anterior funciones
Objetivos	No
Referencias históricas	No
Introducción	No contiene
Definición de Límite	Definición intuitiva (no contiene). Definición rigurosa: Se dice que una función y = f(x) tiende el límite L cuando x tiende al valor a si el valor absoluto de la diferencia f(x) - L puede hacerse tan pequeña como se quiera en las proximidades del punto x = a (sin interesarnos lo que ocurre en el punto x = a).
Situaciones que dan sentido al concepto	Mediante el ejemplo de $f(x) = (x – 1)^3$. Contiene seis ejemplos expresados en el mismo registro. Ejemplos de funciones expresados en registro algebraico y gráfico. Tratamiento gráfico de la definición sobre la misma Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si
Ejercicios a resolver	Siete ejercicios donde se solicita la demostración de existencia de límite.

Obeservación: Con respecto a esta definición la da en forma coloquial y no en forma algebraica como normalmente se la damos a nuestros alumnos.

Cálculo Diferencial e Integral . Tomo I – N.Piskunov
Ed. Mir Moscú. Ed. 3ra- 1977

Enlace con ideas previas	Número Variable y función
Conocimientos previos	No Presenta
Objetivos	No Presenta
Referencias históricas	No Presenta

Introducción	Da una definición intuitiva de límite a través de sucesiones.
Definición de Límite	Definición rigurosa: Supongamos que y = f(x) está definida en determinada vecindad del punto a o en ciertos puntos de la misma. La función y = f(x) tiende al límite b ($y \to b$) cuando x tiende a ($x \to a$), si para cada número positivo ε por pequeño que este sea es posible indicar un número positivo δ tal que para todos los valores de x ,diferentes de a, que satisfacen la desigualdad $\lvert x-a \rvert < \delta$, se verificará la desigualdad $\lvert f(x)-b \rvert < \varepsilon$
Situaciones que dan sentido al concepto	No hay
Definición : gráfica	Si hay
Ejercicios a resolver	Siete ejercicios donde se solicita la demostración de existencia de límite

El Cálculo con Geometría Analítica – Louis Leithod.
Ed. Harla Mexíco. Ed. 6ta Edición - 1992

Enlace con ideas previas	En la unidad anterior hay números reales, funciones y gráficas
Conocimientos previos	Intervalos y Entornos
Objetivos	No Presenta
Referencias históricas	No Presenta
Introducción	No Presenta
Definición de Límite	Definición intuitiva con un ejemplo Definición rigurosa: utiliza el ejemplo anterior para introducir la definición formal. Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a **a** excepto, posiblemente en el número **a** mismo. **El límite de f(x), cuando x tiene a a es L**, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si el siguiente enunciado es verdadero. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar cuan pequeño sea, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < \lvert x-a \rvert < \delta$ entonces $\lvert \mathrm{f(x) - L} \rvert < \varepsilon$
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos de funciones expresados en registro gráfico y registro algebraico. Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si presenta

Cálculo Conceptos y Contextos - Stewart, James
Ed. International Thompson Editores (1999)

Enlace con ideas previas	Si (Fotográficamente)
Conocimientos previos	Si (tangente a la curva)
Objetivos	No
Referencias históricas	Artículo Newton y los límites.
Introducción	Como surgen los límites cuando se intenta hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto. Presentando dos ejemplos.
Definición de Límite	*Definición intuitiva* A través de registro tabular. Dando distintos ejemplos, presentado diferentes situaciones. *Definición rigurosa*: Escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y decimos "el límite de f (x), cuando x tiende a, es igual a L".Si podemos acercar arbitrariamente los valores de f(x) a L (tanto como deseemos), escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos de funciones expresados en registro tabular, algebraico y gráfico. Tratamiento gráfico de la definición sobre la misma Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	No contiene
Ejercicios a resolver	Presenta ejercicios en los tres registros del concepto de límite.

Cálculo con Geometría Analítica – Dennis G. Zill.
Grupo Editorial Iberoamérica. **(1987)**

Enlace con ideas previas	Funciones
Conocimientos previos	No
Objetivos	No
Referencias históricas	Al finalizar el capítulo hay una referencia histórica.
Introducción	Da una noción intuitiva del concepto de límite relacionado los distintos registros (algebraico, gráfico y tabular). Donde cada ejemplo es una situación diferente. A continuación presenta teoremas acerca de límite, concepto de continuidad. Luego da la definición rigurosa de límite
Definición de Límite	*Definición rigurosa*: Supóngase una función f definida en un intervalo abierto que contiene al número a , excepto posiblemente en el propio a. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$, significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

	$\lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon$, siempre que $0<\lvert x-a\rvert<\delta$
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos de funciones expresados en registro algebraico y gráfico. Tratamiento gráfico de la definición sobre la misma Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si contiene
Ejercicios a resolver	Presenta ejercicios en los tres registros del concepto de límite.

Conclusiones

Dado que los libros de textos son el principal referente para los docentes al momento de preparar un tema es por ello que hemos hecho este análisis, del cual extraemos las siguientes conclusiones:

- Es notable el cambio que se ha producido en el abordaje del tema en las últimas décadas, comparadas con libros.
- La rigurosidad de la definición utilizada en los libros mas viejos con respecto al enfoque dado por los libros mas recientes es notable, tanto en el Stewart como en el Zill, este tema se trata desde el punto de vista , descriptivo gráfico numérico y algebraico. Dejando la definición precisa épsilon delta de límite en el apéndice, para aquellos alumnos que quieran profundizar sobre el tema. (A pesar de que estos autores declaman "…que aún espero que en mis propias clases los estudiantes sepan la definición formal de límite y que sean capaces de interpretarla gráficamente…". Me gustaría que supieran que la intuición, las gráficas y los cálculos puedan ser convincentes, pero que a menudo tienen por así decirlo sus propias limitaciones (Zill, 1987, pag.
- Otra observación es la tendencia de atraer visualmente al lector, con el uso de los diferentes registros.
- Se ha ido incluyendo cada vez más en la introducción de tema los cambios de registros para la comprensión de tema.
- El avance tecnológico (el uso de computadoras) es más utilizado en libros recientes.
- En los dos primeros libros se hace mas hincapié en la definición épsilon – delta. (Piskunov, Sadosky).
- ZIll " yo no pongo mucho énfasis en la búsqueda , a menudo poco compensatoria, de la "delta" desconocida, dada la misteriosa "épsilon"
- Se hace más hincapié en una noción más geométrica e intuitiva que la definición épsilon –delta.
- Es notable la diferencia de la presentación de los prólogos o prefacios de los libros más nuevos. Los autores mas nuevos hacen referencia de lo que quieren o como van a tratar cada tema. Mientras que en los anteriores hacen agradecimientos
- Cambios registros de cambio entre la edición vieja y otra mas nueva
- Recursos tecnológicos como usar la calculadora

Bibliografía

Debur, L y otros (2000): *Análisis del desarrollo histórico del límite y continuidad de una función.* Acta IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "Thales". San Fernando (Cadiz), España. (pp.201-204)

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Fabra M. y Deulofeu J. (2000): *Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos".* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol.3, Num.2, (pp. 207-230).

Gatica N., Tauber L. y Ruiz F. (2002). "Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería". En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales.* (pp.417-430). Universidad de Alicante (España).

Gatica, N. Carranza, M., May G., Cosci C. (2002). El concepto de función en los libros de textos universitarios *XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativ*a. (pp.131 - 136)Buenos Aires.

Leinhardt G., Zaslavsky O. y Stein M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*. 60(1), (pp. 1 - 64).

Villalobos A. y Farfan R. (2001): *Identificación de obstáculos en la construcción de gráfica de funciones.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 14. Panamá (pp. 396-399)

ZIll, Dennis G.. Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Grupo Editorial Iberoamericano (1987)

Leithod, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Harala Sexta edición 1992.
Stewart, James Cálculo Conceptos y Contextos - Ed. International Thompson Editores 1999

Sadosky,M,Guber, R (1973).Elementos de Cálculo Diferencial e Integral Tomo I .Librería y editorial Alsina. Buenos Aires. Argentina.

Piskunov. N (1977) Cálculo Diferencial e Integral . Tomo I-Ed. Mir Moscú. Ed. 3ra

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS (HM) CON CINE

Marger da Conceição Ventura Viana
Departamento de Matemática-Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Brasil
marger@iceb.ufop.br ou Venturaviana@aol.com
Campo de investigación: Formación de profesores; Nivel educativo:Superior

Resumen

Este trabajo es una presentación de la asignatura HM administrada en la UFOP. Son considerados tres componentes esenciales de la formación del profesor de Matemáticas: investigación, teoría y práctica. Se utilizan películas que retratan ciertas épocas como recurso para enseñar el contexto en que los conocimientos matemáticos fueron construídos/descubiertos. Además de eso, proporcionan recursos para investigar hechos en detalles. Así, el estudiante aprende a buscar fuentes de consulta, incluso utilizando nuevas tecnologías (Internet). Aprende a comunicar lo que fue encontrado, a argumentar, contestar y defender ideas en seminarios realizados en clase. Se presentan también un breve relato de la trayectoria seguida en la asignatura HM, la opinión de algunos investigadores del área, además de películas y textos utilizados y de la bibliografía recomendada.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, formación del profesor de Matemáticas, proceso de enseñanza/aprendizaje, investigación, películas.

1. Introducción

Este trabajo tuvo origen en estudios realizados para la elaboración de la tesis de doctorado titulada: Perfeccionamiento del Currículo para la formación del profesor de Matemáticas en la UFOP (Viana, 2002a), defendida en enero de 2002 en Cuba.

Fueron establecidas las exigencias para la formación del profesor a partir de los estudios teóricos realizados y de las condiciones sociales de Brasil.

Los resultados permitieron formular el perfil del profesor de Matemática y los demás componentes del currículo por nosotros considerados. A partir de ahí, fue elaborada una propuesta curricular, validada por medio de análisis de expertos “Método Delphi”.

Porque en su práctica el profesor de Matemáticas se depara con múltiples problemas, es preciso, para enfrentarlos con éxito que, en su formación, sean contemplados: *teoría* (todas las asignaturas que componen la matriz curricular), porque el profesional necesita apropiarse de parte de la cultura de la humanidad; *investigación* (sistema de actividades de investigación), porque la investigación científica es instrumento básico para la profesión, y *práctica*, que es la vía principal para la preparación profesional, ya que el hombre se forma y se transforma por el trabajo (Viana, 2002c).

Para proporcionar al profesor conocimiento matemático sólido, ampliando y profundizando los contenidos ya estudiados en la Enseñanza Fundamental y Media, se abordarán contenidos relacionados con la Matemática superior, permitiendo comprender la esencia de la naturaleza de la Matemática. Conocer los obstáculos del proceso de enseñanza/aprendizaje así como el camino posible para la comprensión y apropiación de los

conocimientos, forma parte de la tarea docente. Así, es importante conocer la evolución de cada concepto, la relación con otros y las dificultades y retos que aparecieron en la trayectoria de su construcción/descubrimiento. Siendo así, la HM tiene que estar presente en la formación de profesores de Matemática. Los Parámetros Curriculares Nacionales: Matemática (Enseñanza Fundamental y Enseñanza Media), Ciencias de la Naturaleza, Matemática y sus Tecnologías, también apuntan en esa dirección (Brasil,1998,1999).
De esa forma, en la propuesta de currículo que elaboré está la asignatura HM, (Brolezzi y Viana,1998). En algunos de los currículos analizados aparecen dos asignaturas *Historia*. En algunos currículos se encuentran asignaturas *Historia de las Ciencias*, lo que está de acuerdo con Silva (2001).
Por otra parte, según Grimberg(2004), los programas hacen declaración de intenciones, pero no expresan contenidos ni metodologías necesarias para la utilización de la Historia en las clases de Matemática. En mi opinión, actualizarlos es una tarea para los educadores matemáticos. Esta actualización, aunque no sea simple, podrá ser realizada con investigación y experiencias.
Resumiendo: mi interés por la HM es consecuencia de la investigación realizada sobre currículos para la formación de profesores de Matemática.
Actualmente, doy clase de la asignatura. Mi propuesta está basada, principalmente, en investigadores de HM y de Educación Matemática. Tengo hechas investigaciones en el área: Viana (2002b, 2004a, 2004c), frecuentado Seminarios y Coloquios de HM e Historia y Tecnología en la Enseñanza de Matemática, además de Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) y otros eventos relacionados.

2. Lo que dicen algunos investigadores en HM

Miguel(1997), a partir de una colección de documentos extraídos de periódicos, libros, anales de eventos nacionales e internacionales de Educación Matemática, obras de matemáticos, historiadores de las Matemáticas y educadores matemáticos, reunió una serie de argumentos que defienden la utilización didáctica de la HM. Después de un análisis cuidadoso de esos argumentos, concluye que: "solamente una historia(...) viva, humana, esclarecedora y dinámica, viniendo a sustituir las enfadosas historias evolutivas de las ideas matemáticas, casi siempre desligadas de las necesidades externas y/o internas que estuvieron en la base de su origen y transformación podría constituirse en punto de referencia para una práctica pedagógica problematizadora en matemática que tuviese por meta una problematización, entendida como simultáneamente lógica, epistemológica, psicológica, sociológica, política, ética, estética y didáctica l" (p.103).
Siendo así, no parece que la asignatura HMs cumpla siempre su papel. Busqué, entonces, una forma de, por lo menos, aproximación al ideal defendido por Miguel.
Silva (2001), otra investigadora en HM, en un libro titulado: A Historia da Matemática e os Cursos de Formación de Profesores, después de largos análisis y discusiones a nivel nacional e internacional sobre la HM en los libros de texto nacionales, la asignatura HM en los currículos de las licenciaturas en Brasil y el pensamiento de profesores y estudiantes de Matemática sobre la relevancia de la asignatura HM, presenta dos posibilidades de abordaje de la asignatura.

La discusión, los argumentos presentados y mi propia historia me llevaron a optar por la segunda: un abordaje que muestre la evolución de la Matemática dentro de un contexto sociocultural, que nos permita una mejor comprensión de nuestra herencia cultural. Una historia construida por seres humanos, con sus momentos de genialidad, momentos de fracaso, de trabajo arduo, mostrando ejemplos de personas que dedicaron sus vidas a la búsqueda de soluciones de problemas lo más variados posible: de aquellos surgidos de las necesidades del día a día a otros, totalmente teóricos, haciendo, así, crecer el campo de conocimientos matemáticos. En fin, mostrar la cara humana de esa área del conocimiento" (p.164).
Struik (1985), conocido historiador de la Matemática, en un libro titulado: "Por que Estudar a História da Matemática?", discute ampliamente los motivos de la inclusión de la disciplina, resumiéndolos de la siguiente manera: "1)Ella satisface el deseo de muchos de nosotros de saber cómo se originaron y se desarrollaron las cosas en matemática; 2) el estudio de autores clásicos no solo puede ofrecer una gran satisfacción en sí mismo, sino que también puede ser un auxiliar en la enseñanza y en la investigación; 3) ayuda a entender nuestra herencia cultural, no solo a través de las aplicaciones que la matemática tuvo y aún tiene en la astronomía, en la física y en otras ciencias, sino también debido a las relaciones que ella tuvo y todavía tiene con campos variados como el arte, la religión, la filosofía y las técnicas artesanales; 4) puede proporcionar un campo donde el especialista en matemática y los de otros campos de la ciencia puedan tener un interés común; 5) ofrece un telón de fondo para la comprensión de las tendencias en educación matemática en el pasado y en el presente". Con respecto a los reflejos de la HM en la Educación Matemática, D'Ambrosio (1999), presenta el capítulo: "La HM: cuestiones historiográficas y políticas y reflejos en la Educación Matemática". Al final de sus análisis y discusiones, concluye: "la búsqueda de alternativas historiográficas que conduzcan a una historia que no venga embebida de un determinismo eurocéntrico, favoreciendo el mantenimiento del statu quo y desencajando la superación de la desventaja actual, esencial en este momento de cuestionamiento del actual orden internacional"(p.115).Es necesario investigar también sobre la vida y la obra de matemáticos brasileños, en el contexto en que vivieron o viven. De acuerdo con Baroni y Nobre (1999), biografías, organizaciones institucionales y análisis histórico y crítico de fuentes literarias, son campos que pueden ser considerados totalmente inexplorados en lo que se refiere a la historia del desarrollo de las Matemáticas en Brasil.

3. La Propuesta en Práctica

Características de la asignatura HM(MTM 102) de la Licenciatura en Matemática de la UFOP. *Sumario de la asignatura*: Estudio de Tópicos la Historia da Matemática; Relación entre HM y Educación Matemática. *Programa*: Fuentes de la HM Antigua y Medieval; El adviento de los libros de HM; Presentación de la HM por las Cronologías; Biografías; Organización de la HM por asunto; Otras formas de abordaje de la HM; Investigación en la Internet.
Para optar por una alternativa para la asignatura HM en el curso de formación de profesores de Matemática, es necesario situarse ante lo que se entiende por currículo y por proceso de enseñanza/aprendizaje para la adecuada conducción de tal proceso. Le considero un proceso activo, social, individual, significativo, consciente, comunicativo y cooperativo. Y en mi concepción de currículo, él es uno de los componentes del mismo.

Conforme lo que fue expuesto, se destacan tres componentes del currículo para la formación de profesores de Matemática: la investigación, la teoría y la práctica. Con esto, la propuesta es llevar al estudiante a trabajar con los compañeros, leyendo e interpretando textos, elaborando resúmenes, y a participar activamente en las clases, expresando sus ideas, defendiéndolas con argumentación y fundamentación, investigando y presentando los resultados en seminarios.
Al participar activamente, el alumno va a desarrollar habilidades y capacidades. Aprendiendo a buscar fuentes para investigar, leyendo, interpretando y escribiendo, el estudiante adquiere el hábito de buscar lo que no sabe y solucionar dudas individualmente o en cooperación con los demás, en los trabajos de equipo.
La utilización de películas posibilita contextualizar los hechos contenidos en la HM. Además de eso, se presentan pretextos para que los alumnos realicen investigaciones, por ejemplo, con la utilización de nuevas tecnologías (Internet), en libros, periódicos, artículos publicados en anales de eventos, entrevistas, etc.
Tomé conocimiento de la posibilidad de utilizar películas y conseguí una lista de ellas, al participar de mesas-redondas realizadas en la XI CIAEM y VIII ENEM de las cuales también participaron, entre otros investigadores, Sérgio Nobre, que indicó varias películas con esa finalidad.
Después de esos eventos, adquirí cintas de vídeo y dvds y elaboré los guiones para los alumnos, siguiendo los análisis metodológicos sobre el uso del cine en las clases mostrados por varios estudiosos del tema.
Los guiones elaborados contienen preguntas simples a las que se puede contestar después de ver la película y otras que exigen investigación a ser realizada y presentada en equipos previamente combinados. Los textos de la bibliografía marcados con (*) fueron leídos, resumidos y discutidos en clase.
En cuanto a la evaluación del aprendizaje, ella es continua, realizada en todas las clases por medio de la observación de la participación de los equipos. En números, eso representa 30 puntos. Otra forma es la presentación y participación en seminarios, discusión y elaboración de textos, que representan otros 30 puntos. El trabajo final, presentado en una carpeta conteniendo todas las actividades realizadas por el alumno durante el curso y entregado en la última clase, cuando es realizada una evaluación conjunta de la asignatura, también vale 30 puntos. La media final entregada al Departamento de Matemática es obtenida de la suma de los puntos (90 puntos) dividida por 9.

4. Sugerencia de películas:

1) 1492-La Conquista del Paraíso, 2) Desmundo, 3) Una mente brillante, 4) Noches Arabes, 5) El Nombre de la Rosa, 6) Reina Margot, 7) La Misión, 8) Punto de mutación, 9) Danton, el Proceso de la Revolución, 10) La Guerra del Fuego, 11) El acorazado Potemkim.

5 Bibliografía

Anglin, W. (2001). Matemática e História. Carlos Roberto Vianna y Maria Laura M. Gomes (Trad.) *Revista História & Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de História da Matemática, Rio Claro, SP, 1(1). 11-21. (*)

Ávila, M. y Groenwald, C. (2003) A história da matemática como recurso didático no estudo metodológico da resolução de problemas. XI CIAEM. FURB. Blumenau: FURBCD-CARD. (*)

Baroni, R. e Nobre, S. (1999).A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. En: M. A. V. Bicudo (Ed.) . *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* (pp. 129-136). São Paulo: UNESP. (*)

Bernadet, J. (1980). *O que é cinema*. São Paulo: Brasiliense.2003.

Bicudo, I. História da matemática: O Pensamento da filosofia Grega Antiga e Seus Reflexos na Educação Matemática do mundo ocidental. En: M. A. V. Bicudo (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* (pp.117-127).São Paulo: UNESP. (*)

Boyer, C. (1959). *The History of Calculus and its conceptual development*. New York: Dover.

Brasil. (1999). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*/Ministério da Educação–Brasília: MEC/SEF.

Brasil.(1998).Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília:MEC/SEF.

Brolezzi, A., Viana, M. (1998). Projeto pedagógico do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Universidade Federal de Ouro Preto.

Cabrero, J. (1989).*Tecnologia Educativa: utilización didáctica del vídeo*. Barcelona: PPU.

D'Ambrosio, U. (1999). A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. En: M. A. V. Bicudo (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* (pp. 97-115). São Paulo: UNESP. (*)

Dias, A. (2002). Matemática no Brasil: Um estudo da trajetória da historiografia. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Rio Claro, SP: SBHMat, 2(4),169-195. (*)

Eisenstein, S. (1977). *Anotaciones de un director de cine*. La Habana: Editorial Arte y Literatura.

Eves, H. (2004).*Introdução à História da Matemática*. Hygino H. Domingues (Trad.). Campinas:Unicamp.

Castro, V. (1986). *Teoría y práctica de los medios de enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Grimberg, G. (2004).História da Matemática e Educação matemática. En Luiz Mariano de Carvalho e Carlos A. de Moura (Eds.) *Segundo Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática*. (pp. 265-271). Rio de Janeiro: IME-UERJ.

Hernández, E. (s/f). *Acercamiento a la educación por la imagen con la utilización del cine y el vídeo.* Tesis de maestría no publicada. La Habana: s/ed.

Machado, A. (2003). *La utilización de películas históricas comerciales para el desarrollo de la crítica en la enseñanza de la Historia en el nivel medio*. Tesis de doctorado no publicada, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, Mined, La Habana, Cuba.

Mendes, I. (2003).História da matemática: um enfoque transdisciplinar. XI CIAEM. FURB. Blumenau: FURB. CD-CARD. (*)

Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetikë-Cempem,-FE/Unicamp*,5(8) 73-103. (*)

Napolitano,M. (2003). *Como usar o cinema na sala de aula*. São Paulo: Contexto.

Radice, L.(1985). *A Matemática de Pitágoras a Newton*. Lisboa: Edições 70.

Santos, C. (1972). *Bases Culturais da Matemática*. Belo Horizonte: Vega S. A.

Silva, C. (2001). A História da Matemática e os Cursos de Formação de Professores. En: Helena Noronha Cury (Ed.). *Formação de Professores de Matemática: uma visão multifacetada*.(pp. 75-89). Porto Alegre: EDIPUCRS. (*)

Soares, M. (2001). *A história vai ao cinema*. Rio de Janeiro: Record.

Struik, D. (1985). Por Que Estudar História da Matemática? T. A. Queiroz y Ruy Gama (org.) Célia Regina A. Machado y Ubiratan D'Ambrosio(trad.). En: *História da técnica e da tecnologia: textos básicos* (pp.191-215). São Paulo: EDUSP. (*)

Struik, D. (1985). Por Que Estudar História da Matemática? T. A. Queiroz y Ruy Gama (org.) Célia Regina A. Machado y Ubiratan D'Ambrosio(trad.). En: *História da técnica e da tecnologia: textos básicos* (pp.191-215). São Paulo: EDUSP. (*)

Tomei, C. (2003). Euclides- *A Conquista do Espaço*. São Paulo: Odisseus.

Valente, W. (1999).*Uma História da Matemática no Brasil* (1730-1930). (2ª ed.) São Paulo: Annablume/FAPESP.

Valente, W.. (2002). História da Matemática na Licenciatura: uma contribuição para o debate. *Educação Matemática em Revista: Licenciatura em matemática: um curso em discussão*. Edição especial. 90(11a), 88-94.

Viana, M. (2002b).Currículos para a formação de professores-transformações curriculares e currículos para a formação de professores de Matemática no Brasil. En: Luiz Mariano Carvalho y Luiz Carlos Guimarães (Eds.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática.* (pp. 335-346). Vol.1. Rio de Janeiro:IME-UERJ.

Viana, M. (2002a). *Perfeccionamiento del currículo para la formación de profesores de Matematica en la UFOP.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, Mined, La Habana, Cuba.

Viana, M. (2002c). Algunos componentes del Currículo para la formación de profesores de Matemática. *Resúmenes de la VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur.* 22 al 26 de julio de 2002, Buenos Aires.

Viana, M. (2004a).Vale utilizar softwares no ensino de Cálculo? En: *Segundo Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática*. (pp. 131-138). Luiz Mariano de Carvalho y Carlos A. de Moura(Eds.) Rio de Janeiro: IME-UERJ.

Viana, M. (2004b).O Movimento de Matemática Moderna e suas Implicações no Ensino de 10 e 20 Graus no Brasil. *Revista Escritos Sobre Educação***.** Ibirité, 3(1), 27-40.

UNA EXPERIENCIA SOBRE HABILIDADES PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Analía Mena, Marta Golbach, Adriana Pérez y María Rosa Rodríguez.
Facultad Regional Tucumán - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
m-pappalardo@cgcet.org.ar , mgolbach@tucbbs.com.ar , mrestofan@tucbbs.com.ar
Nivel educativo: Superior
Palabras Claves: Habilidades, Matemática, Diagnóstico, Pensamiento Formal.

RESUMEN

Es explícito el propósito de preparar profesionales creativos, críticos y con habilidades para resolver problemas diversos. Las asignaturas del área Matemática se proponen que los contenidos se aprendan significativamente, por ello los alumnos deberían al menos desarrollar previamente algunas habilidades generales y afianzar el pensamiento lógico formal. El presente trabajo intenta detectar el nivel de desarrollo de habilidades matemáticas, alcanzados por los alumnos ingresantes a una carrera de Ingeniería. Para ello se realizó una prueba diagnóstica, que implicó la puesta en práctica de ciertos procesos cognitivos que integran el grupo de habilidades generales imprescindibles para su trabajo. Del análisis de los resultados se destaca que es insuficiente el nivel alcanzado en el desarrollo de las habilidades traductoras, heurísticas y metacognitivas.

1.- Introducción

En las instituciones de educación superior se hace explícito el propósito de preparar profesionales creativos con capacidad de pensamiento crítico y con habilidades para resolver problemas diversos, teniendo como hipótesis tácita que el dominio de las "habilidades cognoscitivas básicas" favorecerán su desarrollo. En educación los términos conocimiento, habilidad y comprensión suelen confundirse, sin embargo, representan realidades bien diferenciadas. El conocimiento es información disponible. Un alumno conoce cuando reproduce, cuando puede decir *el qué es, el cómo es, el cuándo acerca de un objeto.* La habilidad es algo mas, es la puesta en marcha de algo que se conoce. Un alumno es hábil cuando puede decir *para qué es y cómo se usa.* La comprensión implica la aplicación apropiada de conceptos y principio a problemas.

De las investigaciones realizadas en el proceso enseñanza – aprendizaje surge que los alumnos ingresan a la universidad con una comprensión muy superficial de los conceptos básicos, almacenando información en forma mecánica y reproduciéndola, sin lograr la adquisición de habilidades que les permitan transferirlos a diversos problemas.

Consideramos que la Matemática debe *desarrollar habilidades generales* que le sirvan al alumno para comprender la realidad en la que se encuentra inmerso. También, la conceptualización y significación de los procesos matemáticos, le permiten saber dónde son aplicables y bajo qué condiciones, evitando el aprendizaje mecánico. Existen muchas investigaciones que afirman que un alto porcentaje de ingresantes a la universidad tiene deficiencias para razonar, al nivel de operaciones formales, y para pensar en forma crítica y creativa. Dichas deficiencias causan un descenso progresivo en el desempeño académico de los estudiantes. Su análisis ha llevado a suponer que muchas de estas deficiencias, en cuanto a sus habilidades para pensar, se deben a la falta de estructuras cognitivas debidamente consolidadas para realizar procesos mentales de operaciones formales (Gardner, 1985; Pozo y Gómez – Crespo, 1998). Como el objetivo de las asignaturas del área Matemática es que los contenidos se aprendan significativamente, los alumnos deberían al menos haber desarrollado previamente algunas habilidades generales y afianzado el pensamiento lógico formal.

De investigaciones realizadas en el marco del Proyecto: “Factores que influyen en el Rendimiento Académico de los alumnos de Matemática de la F. R. T. de la U. T. N. – Indicadores y Estrategias Superadoras”, surge que la mayoría de los estudiantes llegan a la universidad con grandes falencias que arrastran desde etapas previas de la educación formal. Entre ellas, la falta de hábitos de estudio, las diferencias de niveles cognoscitivos, el escaso desarrollo de habilidades y destrezas y la falta de permanencia de los conocimientos adquiridos. Estas les crean serias dificultades de aprendizaje que influyen en su rendimiento.

El presente trabajo, sustentado en las concepciones constructivistas del aprendizaje, tiene por objetivo detectar el nivel o grado de desarrollo de habilidades o procedimientos generales matemáticos, alcanzados por los alumnos ingresantes al primer año de la carrera de Ingeniería de Sistemas de Información de la F. R. T. Para ello se realizó un estudio exploratorio, mediante una prueba diagnóstica que consistió en la resolución de ejercicios y situaciones problemáticas vinculadas con la vida real, que implicaron la puesta en práctica de los procesos cognitivos de recodificar, comparar, identificar, interpretar, resolver y modelar. Todos ellos integran, según la Dra. Herminia Hernández, un Sistema Básico de Habilidades Matemáticas, que se fundamenta en la teoría psicológica de la actividad, la cual expresa que “*no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer”* (Talízina, 1984).

2.- Marco Teórico

En la concepción constructivista, el conocimiento que un estudiante posee es el resultado de un proceso que realiza a partir de sus conocimientos previos, es decir a partir de su estructura cognitiva. Desde este enfoque, la atención se centra en cómo aprende el individuo más que en qué, por ende el aprendizaje no se ve como la acumulación de conocimientos sino como un conjunto de esquemas o estructuras mentales en las que está organizado el conocimiento. Los modelos de caracterización de las habilidades cognoscitivas, entonces, parten de la hipótesis de que las tareas cognitivas se pueden especificar por los procesos que la componen, por las estrategias utilizadas o por las estructuras de conocimiento involucradas en la solución de una tarea. La mayoría de los acercamientos constructivistas comparten los supuestos de que los estudiantes desarrollan modelos mentales internos para resolver problemas, que prosperan gracias a la experiencia personal y se usan para resolver situaciones similares que se encuentran en la vida cotidiana. Estas hipótesis se han tomado como punto de partida en la búsqueda de nuevos modelos para valorar las habilidades en términos de la capacidad para resolver problemas.

2.1.- Procedimientos o Habilidades Generales Matemáticos

Son modos generales de actuación que permiten poner en movimiento los conocimientos y convertir el aprendizaje en desarrollo del individuo. La presencia de estos procedimientos es insustituible en el quehacer matemático.

Son habilidades generales: Interpretar, Identificar, Recodificar, Calcular, Algoritmizar, Graficar, Definir, Demostrar, Modelar, Comparar, Resolver, Optimizar, Aproximar.

Por el tipo de función que realizan, los procedimientos o habilidades se agrupan en:

♦ *Habilidades Conceptuales:* Aquellas que operan directamente con los conceptos (definir, demostrar, identificar y comparar).

♦ *Habilidades Traductoras:* Aquellas que permiten pasar de un domino a otro del conocimiento (interpretar, modelar y recodificar).

♦ *Habilidades Operativas:* Aquellas que operan generalmente como auxiliares de otras más complejas y que están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar y calcular).

♦ *Habilidades Heurísticas y Metacognitivas:* Aquellas que emplean recursos heurísticos y metacognitivos y están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver).

En el estudio exploratorio realizado a los alumnos se contempló la realización de tareas que implicaban la ejecución de los procesos cognitivos de *recodificar*, *comparar, identificar, interpretar, modelar, y resolver* que, según la clasificación de H. Hernández [1989, 1990, 1993] y R. Delgado Rubí [1995] constituyen el grupo de las habilidades generales imprescindibles para el trabajo en Matemática. Entre ellas:

✓ *Recodificar:* Es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. Permite la flexibilidad del pensamiento en la resolución de problemas, pues posibilita asumir la resolución del problema desde otra perspectiva, en otro dominio del conocimiento matemático o haciendo reacomodos convenientes del objeto en cuestión. Esta habilidad distingue indefectiblemente al experto del novicio, pues está vinculada al trabajo con lo esencial y no con lo aparente.

✓ *Comparar:* Es establecer una relación entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase, asociándolos según determinadas características comunes a ambos.

✓ *Identificar:* Distinguir el objeto de estudio matemático sobre la base de sus rasgos esenciales; determinar si el objeto pertenece a una determinada clase que presenta ciertas características distintivas. H. Hernández y J.R. Delgado Rubí (ob. cit.) sostienen que su ejercitación en el proceso enseñanza-aprendizaje posibilita un dominio adecuado de los conceptos y disminuye la omisión de errores en el quehacer matemático. La formación de esta habilidad complementa al sujeto de un recurso teórico insustituible para la toma de decisiones y la resolución de problemas contribuyendo, por lo tanto, a la formación de un pensamiento matemático riguroso, reflexivo y profundo.

✓ *Interpretar:* Atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate. Esta habilidad permite adaptar a un marco matemático, el lenguaje de las otras disciplinas objeto de estudio, para luego, en un proceso reversible, traducirlo de nuevo al lenguaje del usuario.

✓ *Modelar:* Es asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones y características.

Posibilita el estudio del mundo objetivo que rodea al hombre a través de la simulación y procesamiento matemático de los comportamientos y características de los objetos. En la actualidad la formación de esta habilidad es fundamental.

✓ *Resolver:* Es encontrar un método o vía que conduzca a la solución de un problema matemático. La formación de esta habilidad es una necesidad imperiosa puesto que en ella confluyen recursos cognitivos, metacognitivos y heurísticos. La habilidad de "resolver" un problema presenta un carácter relativo y subjetivo porque aunque el problema esté resuelto para la ciencia y para el profesor, puede ser considerado sin resolver para el estudiante si no conoce las vías de solución.

3.- Metodología

Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 235 alumnos de un total de 600 al inicio del cursado de las asignaturas "Álgebra y Geometría Analítica" y "Análisis Matemático I" de la carrera de Ing. en Sistemas de Información de la Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional. Todos los alumnos que participaron de la experiencia aprobaron un Curso de Ingreso a la Universidad de carácter obligatorio.
Para ello se utilizó un muestreo estratificado por comisiones de los tres turnos de dictado de las asignaturas. Para la recolección de la información se utilizó una prueba diagnóstica semiestructurada con la que se pretendía analizar el desempeño de los estudiantes al enfrentarse con tareas que exigen el dominio de habilidades generales básicas para la matemática y que son, parar los alumnos que ingresan a la Universidad, un prerrequisito indispensable. La misma contenía cinco ejercicios:

♦ el primero referido a la transferencia del lenguaje coloquial al simbólico, a los fines de detectar el grado o nivel de la habilidad de **recodificar**. Por cuanto el lenguaje simbólico (matemático, o nivel de desarrollo gráfico) es un agente esencial en el proceso de adquisición del conocimiento. Este ejercicio contaba con cuatro (4) apartados, siendo su puntaje total 2. Para medir el grado de desarrollo de dicha habilidad se consideraron cuatro (4) niveles:

Nivel	Muy Bajo	Bajo	Medio	Alto
Escala	[0, 0.5]	(0.5, 1]	(1, 1.5]	(1.5, 2]

♦ el segundo de respuesta objetiva (verdadero o falso), a los fines de detectar el grado o nivel de desarrollo de la habilidad de **comparar**, por cuanto dicha habilidad esta presente en todo quehacer matemático. Este ejercicio contaba con cinco (5) apartados, siendo su puntaje total 1.75. Para medir el grado de desarrollo de dicha habilidad se consideraron, también cuatro (4) niveles:

Nivel	Muy Bajo	Bajo	Medio	Alto
Escala	[0, 0.5]	(0.5, 1]	(1, 1.5]	(1.5, 1.75]

♦ el tercero de reconocimiento de una función a los fines de detectar el grado o nivel de desarrollo de la habilidad de **identificar** ya que posibilita un dominio adecuado de los conceptos, en el proceso enseñanza-aprendizaje. Este ejercicio contaba cone tres (3) apartados, siendo su puntaje total 1.5. Para medir el grado de desarrollo de dicha habilidad se consideraron también cuatro (4) niveles:

Nivel	Muy Bajo	Bajo	Medio	Alto
Escala	[0, 0.25]	(0.25, 0.75]	(0.75, 1.25]	(1.25, 1.5]

♦ en el cuarto se les planteó la resolución de una situación problemática de la vida real, mediante un enunciado gráfico, con el fin de detectar el grado o nivel de desarrollo de la habilidad **interpretar** ya que es de vital importancia que el estudiante no sólo interprete un enunciado sino que también analice el significado de la respuesta obtenida. Su puntaje total fue 2.5. Para medir el grado de desarrollo de dicha habilidad se consideraron nuevamente cuatro (4) niveles:
♦

Nivel	Muy Bajo	Bajo	Medio	Alto
Escala	[0, 1]	(1, 1.5]	(1.5, 2]	(2, 2.5]

♦ y en el quinto se les planteó la resolución de una situación problemática, mediante un enunciado formulado en forma coloquial, con el fin de detectar el grado o nivel de desarrollo de las habilidades de **modelar, resolver e interpretar**. Su puntaje total fue 2.25. En este ejercicio se midieron tres (3) habilidades y para cada una de ellas se consideraron dos (2) niveles:

Nivel	Escala
No hizo/ Mal	0
Bien	1

En la realización de las tareas pedidas y particularmente en la resolución de la situación problemática, el alumno tuvo que recurrir a procesos que requieren el uso del lenguaje simbólico, la ubicación de sistemas de referencias y la utilización de esquemas de razonamiento lógico-matemáticos correspondientes al pensamiento lógico formal.

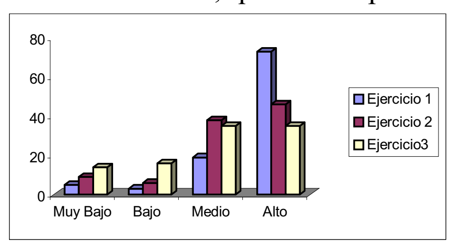
3.1.- Análisis de los Resultados

Los resultados obtenidos de las pruebas diagnósticos son:

Distribuciones Porcentuales de los Niveles de las Habilidades Recodificar, Comparar e Identificar

Niveles Alcanzados	% alumnos-Ejercicio 1	% alumnos-Ejercicio 2	% alumnos-Ejercicio3
Muy Bajo	**5**	**9**	**14**
Bajo	**3**	**6**	**16**
Medio	**19**	**38**	**35**
Alto	**73**	**46**	**35**

Al comparar los resultados obtenidos en los tres ejercicios se destaca el porcentaje de alumnos que alcanzaron el nivel más 'alto' en la habilidad recodificar, que casi duplica en el mismo nivel a las otras habilidades. Esto nos lleva a pensar que la habilidad traductora de recodificar está incorporada en la mayoría de los alumnos. Son similares los porcentajes de alumnos que alcanzaron los niveles 'medio' y 'alto' en las habilidades conceptuales de identificar y comparar, concentrándose en estos dos niveles la mayoría de los alumnos.



Distribución Porcentual de los Niveles de la Habilidad Interpretar

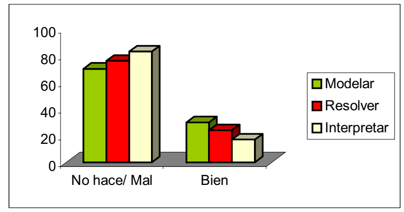
Niveles Alcanzados	Muy Bajo	Muy Bajo	Muy Bajo	Muy Bajo
% alumnos-Ejercicio 4	**76**	**76**	**76**	**76**

Como se observa en el cuadro, un alto porcentaje de alumnos no logran interpretar correctamente el enunciado del problema, ya que el porcentaje de alumnos que alcanzaron los niveles 'medio' y 'alto' es de sólo un 22%. Esto pone en evidencia las dificultades e inconvenientes que tienen los estudiantes en la resolución de un problema planteado en forma gráfica. O sea que no saben atribuir significado matemático a una situación problemática de la vida real, mostrando un escaso nivel de desarrollo en la habilidad traductora de interpretar a diferencia de la de recodificar.

Distribución Porcentual de los Niveles de las Habilidades Modelar, Resolver e Interpretar

Niveles Alcanzados	Modelar % Alumnos Ejercicio 5	Resolver % Alumnos Ejercicio 5	Interpretar % Alumnos Ejercicio 5
No hace/ Mal	**70**	**76**	**83**
Bien	**30**	**24**	**17**

Resolver un problema matemáticamente presupone interpretar un enunciado formulado en forma coloquial para modelar, es decir generar una representación matemática útil de una situación real, para luego resolver e interpretar los resultados obtenidos. Del análisis de los resultados surge que el 70% de los alumnos no logró interpretar bien el enunciado, sin lograr la modelación del problema propuesto, por cuanto ni siquiera intentan esbozar una respuesta. Esto refleja el escaso desarrollo de la habilidad de construir modelos matemáticos a partir de un enunciado. Es preocupante el pobre desempeño de los alumnos, lo cual nos induce a pensar que los mismos no han desarrollado satisfactoriamente, capacidades que de acuerdo a la teoría piagetiana del desarrollo de la inteligencia caracterizan el pensamiento lógico formal.



El análisis descriptivo de la variable "Puntaje Total" obtenida con la prueba diagnóstica aplicada a la muestra seleccionada fueron:

N	Media	Mediana	Mín	Máx	1er Cuartil	3er Cuartil	Dist. Intercuart	Desv Estándar
235	5,34	5,00	0,00	10,00	4,25	6,75	2,50	2,06

De la tabla se observa que el promedio obtenido de 5,34 fue alcanzado especialmente con el desarrollo de los ejercicios 1 a 3, donde se midieron los niveles de las habilidades que operan directamente con los conceptos. Si se considera que un buen rendimiento académico debiera ser de siete (7) o más, el que se obtuvo con esta prueba no es el esperado. También, se ve que aproximadamente el 25% de los alumnos obtuvo 4,25 o menos, mientras que aproximadamente el 25% de los alumnos obtuvo 6,75 o más. Debido a los resultados obtenidos se quiso indagar si existían algunas otras razones que justifiquen el comportamiento de esta variable. Para ello se agruparon los datos según fueran alumnos inscriptos o reinscriptos.

El análisis descriptivo de la variable "Puntaje Total" obtenida con la prueba diagnóstica aplicada a los alumnos inscriptos fue:

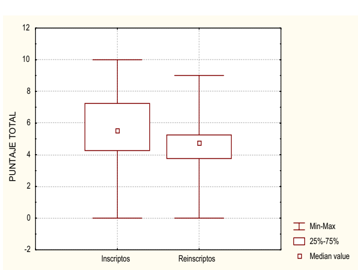
N	Media	Mediana	Mín	Máx	1er Cuartil	3er Cuartil	Dist. Intercuar	Desv.Estándar
145	**5,78**	**5,50**	**0,00**	**10,00**	**4,25**	**7,25**	**3,00**	**2,14**

Para los alumnos reinscriptos fue:

N	Media	Mediana	Mín	Máx	1er Cuartil	3er Cuartil	Dist. Intercuar	Desv.Estándar
90	4,66	4,75	0,00	9,00	3,75	5,25	1,50	1,75

De ambas tablas se observa que los valores de la media, mediana y máximo son menores en el grupo de los reinscriptos. También, la desviación estándar y la distancia intercuartil son menores, lo que significa que los puntajes en este grupo presentan menor variabilidad. Se observa claramente en el diagrama tipo caja para cada grupo.

Box Plott del Puntaje Total clasificado según su condición de Inscriptos o Reinscriptos



Los Box Plott de la variable puntaje total para los dos grupos muestran que esta puede ser considerada una variable aleatoria normal. Por ello, para comparar las medias se puede realizar un test paramétrico de comparación de medias de los dos grupos, bajo el supuesto de que las varianzas de las poblaciones son desconocidas y distintas. Se obtiene para el estadístico del test el valor F = 1,487703 con p- value = 0,043023 por lo que se rechaza la hipótesis nula al 5%. Es decir las medias de los dos grupos son diferentes.

4.- Conclusiones

Del análisis de los resultados se puede concluir que las habilidades conceptuales están suficientemente desarrolladas en los estudiantes, dado que su desempeño fue en general muy bueno, mientras que surgieron marcadas deficiencias en el grado de desarrollo de las habilidades traductoras, heurísticas y metacognitivas. Por ello, es conveniente proponer otras metodologías de enseñanza y estrategias cognitivas generales que estimulen el desarrollo del pensamiento lógico formal y el logro de habilidades cognitivas y metacognitivas. Respecto al comportamiento cognitivo global de los estudiantes de la muestra, se puede señalar que es muy bajo el porcentaje de alumnos que posee un buen nivel de conocimientos matemáticos previos, que le sirvan de basamento para el aprendizaje de los nuevos contenidos. Esto se acentúa en los alumnos reinscriptos, donde se observa que el 75% de los alumnos han obtenido un puntaje menor que el valor promedio de los inscriptos. Esto nos lleva a sugerir que se profundice en el estudio de las causas de estos resultados.

Bibliografía

Coll, C., Pozo, J., Saravia, B., Valls, E. (1992). *Los contenidos en la Reforma Enseñanza y Aprendizaje de Conceptos, procedimientos y Actitudes.* Madrid, España: Santillana.

Delgado, J. (1995). *Un Sistema de Habilidades para la Enseñanza de la Matemática*. Memorias de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba.

De Sánchez, M. (1991). *Desarrollo de habilidades del pensamiento. Razonamiento verbal y solución de problemas.* México: Trillas.

PRODUCCIÓN DE SIGNIFICADOS PARA LA REPRESENTACIÓN DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO, A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE LAS ARGUMENTACIONES DE ESTUDIANTES DEL BÁSICO DE INGENIERÍA.

Nadia González Daza [1] y Janete Bolite Frant [2]

1. Facultad de Ingeniería. Universidad de Carabobo. Venezuela.
2. Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica De São Paulo.

1: ngonzale@uc.edu.ve y 2: janeteb@pucsp.br

Campo de investigación:Lenguaje y aprendizaje matemático; Nivel educativo: Superior

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación en curso sobre la producción de significado matemático a través del análisis del discurso de estudiantes de Física. Con el fin de obtener información y data pertinente, se han ejecutado una serie de tareas, en las cuales, grupos de alumnos, cursantes de la Asignatura Física I, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo (Venezuela), se dedican a resolver y discutir un conjuntos de situaciones relacionadas con el fenómeno del movimiento rectilíneo y su representación en diversas formas. Las tareas han sido filmadas en video y los estudiantes participantes en ellas, se han prestado voluntariamente para participar en tales actividades.

Antecedentes, Justificación y Problema

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo (Venezuela) desde finales de los 90 se ha establecido en los Planes de Estudio del Ciclo Básico (1999), que las asignaturas que conforman el área Matemática deben preparar al estudiante para que sea capaz de: "relacionar conceptos teóricos con soluciones prácticas, crear modelos para la descripción de fenómenos físicos, utilizar la Matemática como: herramienta de cálculo, marco conceptual y lenguaje", como parte de una serie de alternativas para hacer frente a un sistema educativo tradicionalista que desperdicia las capacidades intelectuales del estudiante.

Los altos índices de alumnos reprobados en las asignaturas Análisis Matemático I (cálculo diferencial y sus aplicaciones) y Física I (mecánica clásica), han motivado ciertas acciones (relacionadas con reformas curriculares, cursos de nivelación para los estudiantes y revisión de la metodología empleada por profesores al enseñar, principalmente), pero se han ido postergando prácticas centradas en el estudiante y su formas de pensar sobre la matemática, las cuales consideramos fundamentales para mejorar la problemática de su aprendizaje.

Esta necesidad ha sido motivación particularmente, para indagar qué sucedía con los estudiantes que aprobaban la asignatura Análisis Matemático I, al cursar en el segundo semestre de la carrera, la asignatura Física I, en relación a sus conocimientos sobre el concepto de derivada, su interpretación física como velocidad y su significado geométrico como la pendiente del grafico de una función (González 2002).

Los resultados obtenidos en este trabajo, reflejaron que la mayoría de los alumnos presentaban dificultades para describir los procedimientos utilizados para resolver los problemas; usaban algunos conceptos matemáticos y físicos implicados con fallas de diferenciación; y utilizaban escasas argumentaciones para justificar por escrito sus procedimientos. Además se detectó que la mayoría de los estudiantes, presentaban dificultades para interpretar y hacer el análisis global de gráficos de posición-tiempo y de velocidad-tiempo, así como para realizar la deducción de gráficos de velocidad-tiempo a partir de gráficos posición-tiempo.

Esos resultados, conjuntamente con el bajo rendimiento de los estudiantes en las evaluaciones regulares de las asignaturas Análisis Matemático I y Física, nos condujeron a recurrir a otras formas de explorar, los conocimientos matemáticos en estudiantes de Física. Se resolvió entonces, mediante el análisis del lenguaje de los estudiantes observar y estudiar cómo utilizan sus conocimientos sobre matemática, al resolver situaciones problemáticas relacionadas con la cinemática del movimiento, específicamente, con el movimiento rectilíneo y sus formas de representación.

Actualmente, el discurso en el aula de clases se ha convertido en un campo de estudio prioritario para muchos investigadores y por medio de su análisis se ha pretendido conocer sobre el proceso de enseñanza aprendizaje y muy particularmente acerca del pensamiento matemático de profesores y estudiantes. Es así como se ha considerado necesario detenerse en la exploración de las formas, características y maneras como los estudiantes hablan, esto es, analizar su discurso mirando siempre hacia el componente argumentativo, mientras se ocupan de representar e interpretar el movimiento rectilíneo de un cuerpo, partícula o personaje en particular, para reconocer en sus hablas, la producción de significado matemático.

Para desarrollar la investigación se han considerado los trabajos de Frant y Rabello (2002, 2004) quienes formulan un modelo alternativo para analizar el discurso en el aula de clases, apoyándose en el modelo teórico de los campos semánticos de Lins (1997) el cual reconoce que el conocimiento es producto de la enunciación del sujeto. Este modelo también esta basado en el análisis de los argumentos, fundamentándose en las teorías de Perelman y Olbrech (1994). El interés se enfoca en la producción de significado matemático y en el uso del lenguaje y la argumentación como metodología de análisis. También se han considerado los trabajos de Cross (2003), en los que se establecen criterios para clasificar y analizar las estrategias de tipo argumentativo característicos del discurso en el aula.

En relación con el aprendizaje del cálculo y la representación del movimiento, se han considerado: los trabajos de Sherin (2000), quien se sitúa en un contexto particular (estudiantes que aprenden a construir representaciones del movimiento físico); los experimentos en aprendizaje de Maher y otros (2003), basados en la representación del movimiento y en el estudio del cómo los estudiantes le dan sentido al movimiento; los trabajos de Marrongelle (2001), quien particularmente examina, cómo la comprensión de conceptos físicos por parte de los estudiantes influye sobre su comprensión de conceptos del cálculo y los estudios de Radford y otros (2003), donde se analiza el proceso de producción de significado de estudiantes, a través de diversas formas de fuentes semióticas tales como gestos, gráficos y palabras que se entrelazan durante la actividad matemática.

Preguntas de la Investigación

La investigación se ha organizado de acuerdo a las siguientes cuestiones:

¿Que clases de argumentaciones, de acuerdo a la perspectiva de Frant y Rabello (2002, 2004), los estudiantes nóveles de ingeniería usan para producir enunciados y expresar la producción de significado matemático en cuanto a los conceptos de pendiente, derivada, velocidad, función, variable, sistemas y ejes coordenados, cuando ellos:

- Describen verbalmente el movimiento rectilíneo que probablemente realiza una pelota lanzada por un personaje, presentada en una secuencia de dibujos.
- Tratan de caracterizar con sus propios cuerpos el movimiento rectilíneo que probablemente realiza una pelota lanzada por un personaje, presentada en una secuencia de dibujos.
- Representan en un gráfico posición/tiempo, el movimiento rectilíneo caracterizado por sus propios cuerpos

Consideraciones Teóricas

Según la perspectiva de Frant y Rabello (2002, 2004), el pensamiento es algo que se hace posible a través del lenguaje y se origina a partir de los vínculos o enlaces establecidos entre núcleos de significados producidos por individuos en interacción. No hacen distinción entre un posible lenguaje interno -propio del pensar- del lenguaje externo -superpuesto al interno-, que lo traduce y lo expresa exteriormente. El lenguaje es considerado como un fenómeno ideológico por excelencia, constituido a partir de la praxis social de los individuos; además sostienen que la relación del individuo con el mundo y con otros individuos se organiza según prioridades e intereses que se establecen en el lenguaje cotidiano.

Bajo esta perspectiva, se han considerado en este estudio, las creencias y justificaciones generadas por los estudiantes, mientras hablan entre ellos, o cuando son cuestionados por la profesora-investigadora, durante la ejecución de las acciones pedidas en la tarea. Así que para tratar de entender la producción de significado de un estudiante se analizan sus acciones, sean verbales, escritas, pictóricas, entre otras. De esta manera el interés recae en levantar los argumentos engendrados por los estudiantes para expresar creencias y justificaciones en actividades de aprendizaje, asentando el análisis de tales argumentos, en las teorías de la argumentación (principalmente en la de Perelman, 1994), ya que se considera que el proceso de producción de significados para objetos matemáticos es similar al proceso de producción de significados para objetos de lo cotidiano.

Consideraciones Metodológicas

Se describe aquí un estudio de caso, en el cual, tres estudiantes (Marla, Luis y Betzi), realizan la tarea correspondiente a la representación gráfica del movimiento rectilíneo de un cuerpo luego de observar, escribir y discutir entre ellos acerca de una secuencia de dibujos en los que aparece un niño lanzando una pelota en diferentes etapas. Además los estudiantes realizaron ellos mismos, los movimientos del niño con la pelota, discutieron sobre los posibles movimientos efectuados, realizaron gráficos de posición/tiempo e interpretaron los gráficos elaborados. Los tres integrantes del grupo han sido grabados en video durante la ejecución de las tareas, haciendo énfasis en grabar lo que dicen los estudiantes -el lenguaje- y sobre todo los argumentos empleados en los diálogos establecidos entre ellos. Por medio de estas grabaciones se ha recolectado la data para el subsiguiente análisis.

Para realizar el análisis del discurso de los estudiantes, se utiliza el Modelo de Estrategia Argumentativa (Frant y Rabello, 2000, 2002; Frant, 2004), el cual permite construir una red de argumentación -que incluye la intencionalidad del habla- y funciona para analizar episodios en el aula de clases. El análisis de un episodio requiere la recreación del contexto de los enunciados que se producen en él.

El episodio se describe a través de un esquema, en el cual, está presente el argumento que esta siendo utilizado por el orador a través de afirmaciones simples. La articulación de cada elemento de la argumentación comienza con la identificación y la evaluación de una regla de inferencia que debe dar soporte a la tesis enunciada por el orador. Se asume que cada elemento esta presente en el esquema argumentativo por ser esencial en si mismo.

A partir de las transcripciones de estas interacciones, diálogos y discusiones, se realiza la construcción de la estrategia argumentativa, tratando de componer una totalidad coherente de la siguiente forma:

- Reconstrucción de secuencias (preguntas-respuestas) coherentes de razonamiento (esquematizar los argumentos utilizados, dados y resumidos a través de enunciados simples, por los estudiantes)
- Completar los espacios implícitos o reemplazar los espacios explícitos, en el habla de los estudiantes
- Identificar los significados producidos (identificar la regla de inferencia que origina la tesis)
- Caracterización y Montaje de los argumentos a través de esquemas
- La interpretación de esos esquemas (establecer estrategias argumentativas utilizadas por los estudiantes)

Resultados

Se han conseguido construir 5 posibles redes argumentativas, las cuales han sido aisladas en 5 episodios, en los cuales se realizan las siguientes tareas:

- Representando el movimiento rectilíneo dibujando gráficos posición/tiempo.
- Representando el movimiento rectilíneo accionando con el propio cuerpo.
- Dibujando e interpretando gráficos posición/tiempo mediante secuencia de dibujos.
- Dibujando e interpretando gráficos posición tiempo mediante el movimiento rectilíneo producido por el propio cuerpo.
- Situando el eje de referencia de lo que se mueve.

En estos episodios, fue posible obtener algunas reglas de inferencia que permitirán el establecimiento de algunas posibles estrategias argumentativas:

- Forma del grafico y tipo de movimiento
- Pasar de una dimensión a dos dimensiones.
- Pasar de dos dimensiones a una dimensión.
- Pasar de un gráfico de posición /tiempo a un gráfico de velocidad/tiempo.

- Distinguir entre caminar, correr, parar, ir adelante, ir hacia atrás, regresar, en un gráfico usando enunciados matemáticos.
- Aparición del concepto de pendiente para distinguir diferentes etapas o formas en un movimiento rectilíneo.
- Aparición del concepto de velocidad.
- Posibilidad de distinguir el uso de algunas metáforas primarias en los diálogos.
- Ver el grafico como una relación entre variables o como un objeto, o dibujo.
- Conectar un gráfico con el concepto físico de un movimiento rectilíneo.
- Uso de algunos conceptos matemáticos implicados en la resolución.

También se observa que las intervenciones de la profesora-investigadora producen interferencias en las argumentaciones de los estudiantes, ya que transforman las secuencias argumentativas de los episodios.

Conclusiones e Implicaciones

Los resultados aun parciales del estudio, permiten destacar algunas observaciones:

- Tratar de caracterizar con sus propios cuerpos el movimiento rectilíneo que probablemente realiza un balón lanzado por un personaje, presentado en una secuencia de dibujos; puede mejorar la habilidad del estudiante para interpretar cualitativamente gráficos posición/tiempo

- En relación con la interpretación de representaciones del movimiento rectilíneo, la discusión de las ideas y pensar acerca de la resolución de una tarea particular, en formas que le dan sentido al estudiante es positiva

- Se considera importante examinar como las actividades con gráficos son usadas en la conversación y en la discusión de los estudiantes para obtener información sobre sus conocimientos acerca de conceptos matemáticos y físicos

- Usar múltiples formas para representar el movimiento rectilíneo puede servir como un medio para expresar conocimiento matemático

Referencias

Cerulli M., Demers S., Guzmán J. & Radford L. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. *Proceedings of the 27 Conference of the international group for thenpsychology of mathematics education (PME27 –PMENA25),* Vol. 4, pp. 55-62. University of Hawaii,.: N. Pateman, B. Dougherty and J. Zilliox (Eds.).

Cros, A.. (2003). *Convencer en clase: Argumentación y discurso docente*. Barcelona, España: Ariel Lingüística

Frant, J. & Rabello de C, M. (2000). Estrategia Argumentativa: um modelo. *Proceedings of I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemá*tica*, p.381-383.* Brasil: SIPEM

Frant, J. & Rabello de C, M. (2002). Production de signifies pour fonction: analyse basee sur l'estrategie argumentative. *Proceedings/Actes of the CIEAEM- 54, 62-64*. Vilanova i la Gertrú. Cataluña, España: CIEAEM.

Frant, J. (2004). Seminário: Corpo, Linguagem e Cognição Matemática. *Jornadas de Investigación en Didáctica de las CE y la Matemática.* UB. España: Documento no publicado.

González, N. (2002). Undergraduates'difficulties in solving problems of variation. speed. *Proceedings/Actes of the CIEAEM- 54, 62-64*. Vilanova i la Gertrú. Cataluña, España: CIEAEM.

Lins, R. & Jiménez, J. (1997). *Perspéctivas para a Aritmética e a Algebra do Seculo XXI*. Brasil: ED. Papyrus

Maher, C., Speicer, B. & Walter, C. (2003). Representing motion: an experiment in learning. *Journal in Mathematical Behavior. 22 (1-35).*

Marrongelle, K. (2002). The role of physics in students' conceptualizations of calculus concepts: implications of research on teaching practice. *Proceedings/Actes of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* University of Crete.1–6. Greece: ICTM.

Olbrechts-Tyteca, L. y Perelman, Ch. (1994). *Tratado de la argumentación*. Madrid: EDT. Gredos

Serrín, Bruce. (2000). *How students invent representations of motion?: A genetic account. Journal of Mathematical Behavior.* [En red] Junio, 2004. Disponible en: http://www.ls.sesp.nwu.edu/people/faculty/Bruce%20Sherin/ SherinInventingReps.pdf

Universidad de Carabobo. (1998). Plan De Estudios. Estudios Básicos. Facultad de Ingeniería. Valencia, Venezuela: Universidad de Carabobo.

CATEGORÍA 2:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

LA PRÁCTICA DOCENTE A PARTIR DEL MODELO DECA Y LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Fernando Guerrero, Neila Sánchez y Orlando Lurduy[1]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Bogotá, Colombia
nfguerreror@udistrital.edu.co, neisanher52@yahoo.com, jolurduy@udistrital.edu.co
Campo de investigación: Formación de profesores – Resolución de problemas; Nivel educativo: Superior

Resumen

El presente trabajo da cuenta de las características de dos modelos de resolución de problemas que se han aplicado en cursos de practica docente con Estudiantes para profesores de Matemáticas, en torno a la enseñanza de los conceptos matemáticos en la Educaciòn básica y media del Distrito Capital. Algunas categorías teóricas para este análisis son las de conocimiento practico, conocimiento didáctico, situación fundamental, devolución, contrato didáctico, entre otros.
Se presentan *algunas conclusiones* a manera de análisis en los modelos de enseñanza, referidas a los tipos de razonamiento pedagógico en las prácticas docentes de los profesores de matemáticas, en el diseño y planeación del trabajo de aula, a partir de lo que se ha denominado el Modelo DECA y la Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.

Palabras clave*: practica docente, resolución de problemas, aprender a enseñar , secuencia didáctica, modelos de enseñanza*

Objetivos:
Analizar características de los modelos de enseñanza que durante las practicas docentes de los profesores permiten configurar conocimiento sobre el diseño y planeación.
Analizar características de las actividades de referencia durante las fases de resolución de problemas según modelos de enseñanza.

Marco de referencia teórico
La pretensión de formar profesores de matemáticas que superen los modelos tradicionales supone el diseño de actividades de formación que tengan como referentes cuatro aspectos fundamentales:

1. La materia a enseñar, es decir las matemáticas escolares.
2. Las teorías sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas que se producen en las investigaciones.
3. La práctica docente
4. Las nuevas teorías curriculares que han aparecido desde los años 80 y que colocan el énfasis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas.

En la actualidad existe un rechazo generalizado hacia los modelos de formación de profesores denominados genéricamente tradicionales. Ellos corresponden - desde

[1] Comunicación oral presentada a la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa , en Montevideo (Uruguay), Julio 11 al 15 de 2005. Profesores del Grupo de practica docente de la Universidad Distrital en el proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM)

nuestra perspectiva - a lo que Porlan (citado por Santaló, 1998) denomina “modelo didáctico tradicional”. Este modelo está:
“centrado en una visión academicista, racionalista y formal del conocimiento escolar, en una visión del aprendizaje como “saco vacío”, de la metodología como la explicación directa de los contenidos acabados a los alumnos y de la evaluación como medición de la capacidad de reproducir las formas lingüísticas de los conceptos, y no de sus significados internos” (Porlan, p. 33).
El paradigma de formación se basa en considerar que para enseñar basta con saber aquello que se pretende enseñar. Las investigaciones recientes han mostrado que este tipo de concepción permitió a los profesores su conversión en “administradores” de currículos.
Tal como afirma Blanco (1998), citado por Santaló:
“el modelo de racionalidad técnica considera a los profesores como técnicos que aplican recetas aprendidas en contextos similares, basadas en unos repertorios previamente estudiados. La experiencia e investigaciones realizadas han mostrado que no funciona ni en la formación inicial ni en la formación permanente. Los profesores encaran situaciones concretas de enseñanza caracterizadas por la complejidad, la incertidumbre, la inestabilidad, etc. Y estas situaciones, difícilmente pueden ser resueltas por el modelo de racionalidad técnica.”
Como se puede desprender del análisis anterior los conceptos sobre las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza están fuertemente relacionados y sobre todo condicionan en gran medida las prácticas docentes. Las investigaciones sobre los procesos de aprender a enseñar demuestran que:
“(...) los estudiantes para profesor poseen un conocimiento y concepciones sobre aspectos de su futura labor profesional generados en una determinada cultura escolar, que determina por otra parte, la forma en que ellos dotan de significado al tipo de actividades que tienen que realizar como profesores” (Llinares, 1996, citado por Santaló).
Todas las políticas internacionales y las nacionales, proponen un cambio en la cultura matemática escolar imperante y como consecuencia de ello del tipo de acciones que se desarrolla en las aulas escolares.
“Adoptar esta perspectiva ante el proceso de aprender a enseñar tiene implicaciones en la forma en que los programas de formación deben articularse a través de la práctica y mediante actividades en las que se pueda compartir / discutir / negociar los significados personalmente generados.” (Llinares, 1996, citado por Santaló)
Se afirma, entonces que la resolución de problemas es el marco de actuación del profesor y que la actividad matemática es la generadora del significado. Constituye ésta (la resolución de problemas) entonces un aspecto fundamental de la práctica docente del profesor, ya que indagando las concepciones y creencias que éste tiene sobre la gestión curricular, se puede dar cuenta de qué privilegia, en torno por ejemplo, a lo declarado por él en su propuesta de trabajo (planeación y diseño), si es consistente con la manera como actúa en clase (gestión de aula), cómo da cuenta de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes (evaluación del aprendizaje). En otro trabajo, hemos llamado a esta perspectiva de la practica docente “La resolución de problemas del profesor de matemáticas”.
En la literatura sobre formación de profesores, autores como Shulman (1986), Llinares (1998), Blanco (1998) entre otros, introducen como base para la investigación lo que se denomina el Conocimiento Didáctico de Contenido (C.D.C.)[2] para referirse al

[2] En ingles PCK (Pedagogical Content Knowledge). Citado por Llinares (1998). Ver SANTALO, Luis. Enseñanza de la matematica en Educaciòn Intermedia. Madrid:Rialp.

conocimiento práctico del profesor. Según estos autores, existen diversos tipos de conocimiento involucrados en la acción didáctica del profesor (conocimientos estratégicos, de casos, de toma de decisiones) dispuestos en dimensiones o componentes. Para Blanco (1998), por ejemplo, existe una componente estática (organizada por conocimientos teóricos sobre matemáticas, el proceso instructivo, psicopedagogía, etc) y una componente dinámica (organizada por conocimientos sobre casos de aula, situaciones, experiencias, etc) que generan formas de razonamiento pedagógico en el profesor sobre el proceso de construcción de los significados matemáticos.

La planeación y diseño del trabajo de aula: La secuencia didáctica

La secuencia didáctica se entiende aquí como el plan de actuación del profesor, corresponde a lo que Llinares (1991) denomina la fase preactiva, donde se explicitan aquellos aspectos del sistema didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje; la secuencia didáctica es un aspecto central de la metodología de la Ingeniería didáctica necesaria para estructurar el trabajo de aula de manera sistemática, en la relación estudiante, profesor, saber y entorno (relación didáctica).

Todo esto ocurre con relación a los ambientes e interacciones entre los distintos subsistemas como una totalidad. Chevallard (1991) introduce el concepto de Noosfera para explicar algunas características de las influencias sobre el sistema didáctico.

Pragmáticamente, un plan de actuación del profesor es en este sentido, una manera de entender la secuencia didáctica como la operativización o instrumentalización de la relación didáctica, sustentada a partir de poner en momentos claramente diferenciados la construcción del significado matemático por parte del profesor y los estudiantes , los roles (compromisos y responsabilidades del estudiante y el profesor prescritos en el contrato didáctico), la organización de aula (formas de trabajo que propician ambientes favorables), el tiempo requerido para su implementación (se refiere a la cronogénesis del conocimiento matemático o tiempo didáctico), la descripción de la actividad (informar sobre la intención de la actividad, explicitar en que consiste), los materiales didácticos(materiales tangibles y manipulables como fichas, palabras escritas o dichas, gráficos) y los referentes teóricos para la actividad.

Fases o momentos del desarrollo de la secuencia didáctica

Dentro del desarrollo o implementación de la secuencia hay un momento inicial denominado *"actividad diagnóstica"*, cuyo propósito fundamental es indagar por las concepciones del estudiante sobre la temática de estudio. Esta actividad metodológicamente sitúa al profesor para saber cuáles son los puntos de partida que tiene el estudiante y cómo ponerlo desde ahí en el nivel de desarrollo real (el nivel desarrollo real se mide en la zona de desarrollo próximo, ZDP).

Entonces, durante el diseño de la actividad el profesor debe considerar qué mirar y cómo mirar lo que tiene y no tiene el estudiante. Se trata de construir un perfil de entrada con las características de los significados ya construidos por el estudiante.

La categorización de la información y análisis de resultados a la luz de los referentes teóricos, permitirá entre otras cosas caracterizar mejor la problemática, los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, ajustar los indicadores de evaluación.

Este momento inicial de la resolución de problemas de los estudiantes correspondería a lo que el Grupo DECA denomina las actividades de Inicio e introducción:

"Las actividades de iniciación e introducción, sirven para que el alumnado:

- Explicite y exteriorice sus ideas previas sobre los contenidos que se van a tratar en la UD.

- Compruebe la necesidad de trabajar esos contenidos.
- Se predisponga favorablemente para afrontar el desarrollo de la UD con una actitud positiva.
- Compruebe que sus conocimientos y estructuras conceptuales anteriores no son las más adecuadas para tratar esas situaciones y que por tanto, deben ser transformados o ampliados.
- Caiga en un conflicto cognitivo interno que le fuerce a un cambio en sus esquemas de conocimiento"(Grupo Deca, 1992, p. 33)

En la propuesta de la Teoría de las situaciones didácticas, Brousseau no hace explícito este momento, aunque es posible, que en las denominadas situaciones de acción haya necesidad de considerarlo como una insuficiencia del estudiante sobre los medios acción presentes (o recursos o medio didáctico) para construir una estrategia óptima. Es el momento para conjeturar, hipotetizar, anticipar, establecer conexiones lógicas entre los datos e informaciones provistas. El profesor ni sus compañeros tienen una influencia directa sobre la producción del estudiante. Se sabe que este proceso depende de la elección de las situaciones didácticas consideradas por el profesor.
Según Godino (2004), para la teoría de las Situaciones didácticas la elección de buenas situaciones problema es la clave para generar los conocimientos matemáticos pretendidos por el estudiante.
Ahora bien, en cada una de las dos perspectivas, bien sea el modelo DECA o el de la Teoría de situaciones didácticas es importante considerar lo *que se está entendiendo por aprendizaje y el lugar que ocupa en éste la idea de esquema*. Esto implica que el cambio de estado cognitivo frente a situaciones nuevas para el estudiante vendrá determinado por la modificación de esquemas en el tiempo.
Con relación a esta visión del aprendizaje, el profesor, durante el diseño de las actividades genera unos indicadores empíricos basados en su experiencia docente, en la teoría curricular adoptada (por ejemplo, los estándares curriculares) y el conocimiento matemático a generar en los estudiantes, ubicando niveles de complejidad y los procesos cognitivos que les subyacen. Necesita algo con que *mirar* a los estudiantes.

Las otras fases o momentos de la secuencia didáctica

Otras nociones importantes que se debe tomar en cuenta en el diseño de la secuencia en los modelos DECA y Teoría de situaciones didácticas son la idea de devolución, consigna y situación adidáctica dentro del contrato didáctico establecido en clase por el profesor y el estudiante. Es justamente en los siguientes momentos cuando se requiere mirar la gestión de las variables didácticas por parte del profesor para producir la estrategia de base. Examinaremos brevemente las características de las fases según cada modelo introduciendo estas nociones, a fin de poder hacer una mejor caracterización de la gestión en el aula.
El segundo bloque de actividades propuesto por el grupo DECA se denomina desarrollo y reestructuración, cuya intención se manifiesta en:
"Las actividades de desarrollo y reestructuración, nos van a servir para:

- Tomar contacto, asimilar y practicar los nuevos contenidos.
- Reflexionar sobre su utilidad a la hora de enfrentarse a nuevas situaciones.
- Comparar con los conocimientos anteriores, comprobar sus ventajas e incorporarlos a su experiencia personal.
- Producir el cambio deseado en sus esquemas mentales, como consecuencia de la superación del conflicto cognitivo aparecido con las actividades de iniciación." (Grupo Deca, 1992, p.33)

Es evidente que un conocimiento no se produce por reestructurarlo y desarrollarlo tomando contacto con este tipo de actividades, se entiende que esto se hace a lo largo de todo el proceso de aprendizaje, como se entiende por ejemplo el aprendizaje de los campos conceptuales, por tanto lo que aquí se expresa es la naturaleza de éstas.
No se discute, por tanto sobre la efectividad de la acción didáctica del profesor, ni sobre el tiempo empleado en la implementación de las actividades, se considera necesario el análisis que hace sobre el tipo de contrato didáctico establecido, sobre las variables didácticas consideradas y de manera determinante sobre el modo como se hace la devolución de la situación adidáctica por parte del estudiante.
Las situaciones de *formulación y comunicación* consisten en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de informaciones. (Brousseau, 2000, p.19). El estudiante intercambia información con uno o varios interlocutores, el profesor puede ser uno de ellos, los dos pueden ser estudiantes o grupos de ellos. (Chamorro, 2003, p.77).
Según se entiende en el planteamiento anterior, es importante que el profesor tome en cuenta como el estudiante hace la devolución de la situación adidáctica, para saber con que repertorio de conocimientos, envía mensajes a sus compañeros de clase (o el profesor) y los instrumentos de mediación que usa (medio material /simbólico).
En el modelo DECA la sucesión de actividades desde las de inicio a las de reestructuración no sugiere que la interacción social en clase sea un aspecto central en la resolución de problemas, aunque se supone que la construcción del conocimiento por parte del estudiante ocurre bajo la tutoría y orientación del profesor o sus compañeros de clase.
En el siguiente bloque de actividades el grupo DECA sugiere que con las actividades de profundización y aplicación el estudiante desarrollará procesos como el de transferencia y metacognitivos. De esta manera se dice que:

"Las actividades de aplicación y profundización nos van a ser útiles para:
- Aplicar a otras situaciones los nuevos conocimientos adquiridos.
- Reflexionar sobre las características esenciales de esos contenidos.
- Ampliar el conocimiento conseguido, para trabajar nuevas situaciones y contextos.
- Facilitar el trabajo en pequeñas investigaciones relacionadas con los contenidos trabajados.
- Proponer situaciones de carácter opcional, dependiendo del nivel de dificultad y de la situación personal de cada alumno/a." (Grupo Deca, 1992, p.34).

Según se sabe por la teoría piagetiana, la transferencia es un proceso cognitivo complejo, que supone aprendizajes adaptativos al medio, consecuencia de acomodaciones y asimilaciones sucesivas.
Dado que en ninguna de los tipos de actividades propuestas por el grupo Deca se hace explicito el papel de la argumentación como requerimiento en los contextos de comunicación en el aula, para la validación de los conocimientos matemáticos generados por el estudiante, suponemos que se da como condición necesaria (por derivar de un enfoque constructivista), por lo tanto, ésta debe ser objeto de estudio en cada momento de la secuencia.
En la Teoría de las situaciones didácticas, el momento de la validación juega el papel más importante, dado que lo que se produce por efecto de las negociaciones durante la argumentación son las valoraciones externas por parte de los interlocutores (profesor o compañeros), la aceptación de una estrategia de solución viene acompañada de una

prueba o una demostración, sin embargo, no todos los contextos se deben considerar de validación, para que ello ocurra afirma Chamorro (2003) que:
"-Que haya necesidad de comunicación entre los alumnos oponentes (proponente y oponente).
-Que las posiciones de los alumnos sean simétricas en relación con los medios de acción sobre el medio y las informaciones.
-Que el medio permita retroacciones a través de la acción (mensajes) y con el juicio del interlocutor.
El interés de las situaciones de validación reside en que ponen en juego reglas de debate que tienen un estatuto paramatemático."
El último bloque de actividades propuesto por el grupo DECA esta relacionado con las actividades de evaluación. Estas pretenden revisar el proceso en su conjunto, es decir, valorar la efectividad del trabajo en el aula, así como la pertinencia de la secuencia didáctica, el logro de los objetivos.
Al respecto afirma:
"Todas las actividades sirven para conocer los progresos de los alumnos, pero éstas de modo específico pretenden:

- Conocer el grado de los aprendizajes que los alumnos han adquirido.
- Permitir que los mismos alumnos conozcan la utilidad del trabajo realizado y lo que han aprendido.
- Verbalizar algunos aprendizajes.
- Detectar errores, inexactitudes, fallos.
- Permitir reforzar aprendizajes.

Las actividades de evaluación, aunque situadas al final de la unidad, hay que verlas como un continuo dentro de todo el proceso" (Grupo Deca, 1992, p.34).
En este bloque de actividades al igual que en las situaciones de institucionalización en la Teoría de las situaciones didácticas, el estudiante requiere que el profesor, que es quien representa a la institución, legitime y valide su conocimiento redespersonalizandolo y descontextualizandolo, dándole estatus de verdad o de objetividad.

Bibliografía

Brousseau, G. (1986).*Fundamentos y métodos en Didáctica de las matemáticas*. Traducción Julia Centeno. Documento bajado de Internet

-------Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas. En: *Revista Educación Matemática, Vol.12, No. 1, Abril de 2000*

Chamorro, C. (2003). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: Pearson

Grupo DECA. "Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación". En: *Revista AULA, No.6, Septiembre de 1992.*

Sánchez, N., Guerrero, F. y Lurduy, O. *La resolución de problemas del profesor*. En: Memorias XVII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Fondo publicaciones UD, 1998.

Santalo, L. (1998). *La enseñanza de la matemática en educación intermedia. Madrid: Rialp.*

EL TALLER DE PRODUCCIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO: UNA EXPERIENCIA DE PRODUCCIÓN COLABORATIVA

Medina, Mabel A.; Rubio Scola, Héctor E.; Anido, Mercedes A.
FCEIA, CIUNR, Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
erubio@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Formación de profesores
Palabras Claves: Producción colaborativa, Material didáctico, Scilab, Herramienta computacional.

Resumen

En este reporte se muestra la estrategia desarrollada para afrontar uno de los problemas, históricamente más difíciles en carreras en las que la Matemática tiene un carácter predominantemente instrumental: la "integración de los profesores de distintas áreas de conocimiento en un trabajo de investigación colaborativa". En este caso se ha tratado del estudio de potencialidad de la herramienta computacional en cuanto a la facilitación de un aprendizaje significativo y su efectiva incorporación a la práctica docente. La estrategia empleada, ha sido el diseño de un taller cuyo objetivo inmediato es desarrollar materiales didácticos y experimentar su utilización, con un criterio específico, en función de un proyecto educativo y con un marco teórico que justifique las decisiones en el momento de analizar y evaluar dichos materiales.

LA UBICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el Documento de Discusión Sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario propuesto por: "The International Commission on Mathematical Instrucción" (ICMI-1998) se propone: "considerar formas de mejorar la preparación de los docentes de matemáticas de nivel universitario".

El documento plantea las siguientes preguntas como generadoras de investigación:¿Cómo ha cambiado la tecnología el contenido y la filosofía del currículum? ¿Cómo pueden beneficiarse los estudiantes del uso de la tecnología de las computadoras? ¿Cómo pueden beneficiarse los que se especializarán en otras disciplinas? ¿Deberían darse los programas existentes de la misma forma que en el pasado, o puede la tecnología asistir en el desarrollo de habilidades superiores o más importantes?¿Existen otras formas de participación que tengan el potencial para realizar un mejor aprendizaje en los diversos temas? (en "laboratorios de matemáticas" donde los estudiantes exploran familias de objetos matemáticos mediante computadoras) ¿Cómo puede evaluarse el impacto de las clases basadas en resolución de problemas, o el uso de computadoras, o trabajos de proyectos, etc.?.

Con relación a estos problemas y con una visión precursora, en la Universidad Nacional de Rosario, se comienza a trabajar en 1992 en lo que ya se ha consolidado como una "investigación evaluativa" (Cook-Reichardt, 1995) de experiencias innovadoras, respecto a la clase expositiva tradicional. . El común denominador de todas ellas ha sido la utilización herramientas CAS (Computer Assistant System) en la enseñanza de la Matemática. Estas investigaciones han surgido en cátedras autónomas por la comunidad de intereses de docentes, participantes de un Programa de hecho en el sentido de Lakatos que estudia la potencialidad de esas herramientas computacionales para la enseñanza de la llamada Matemática Básica en el nivel universitario. Este proyecto fue institucionalizado originariamente, tanto en el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario como en la Secretaría de Ciencia y Técnica, bajo el nombre: "La enseñanza de la Matemática con herramientas computacionales" (Anido; Rubio Scola; 1999)

Se ha partido del supuesto: "el docente universitario incorpora la herramienta computacional a su práctica docente a partir de su propia experiencia de aprendizaje y producción en talleres de reflexión docente en los que se trabaje sobre la potencialidad matemática y didáctica del computador". A partir del mismo se han desarrollado institucionalmente más de 30 cursos y/o talleres de formación.

Con el objeto de evaluar la aplicación de las competencias adquiridas a la práctica docente y conocer la valoración del propio docente de las herramientas C.A.S. como herramientas cognitivas; se ha realizado una encuesta dirigida a los que participaron en al menos uno de los cursos de formación.

Ante los interrogantes:

- ¿Se utiliza la herramienta computacional en cursos de Matemática Básica de la Universidad, como fruto de la formación impartida; o las capacidades adquiridas han quedado como bagaje personal de conocimientos?
- Si no ha concretado la formación adquirida en la práctica docente, ¿cuáles son las causas?

Dos tercios de los docentes encuestados dicen haber aplicado en algún momento la herramienta C.A.S. a su práctica docente. Justifican la no aplicación permanente de las competencias adquiridas, en orden de prioridad, a las siguientes razones: cursos demasiado numerosos de alumnos (lo que impide el trabajo en el laboratorio donde existe un requerimiento mayor del apoyo del docente), carencia de tiempo curricular en virtud de la densidad de los contenidos, estructura curricular rígida de la Cátedra, temor a los imprevistos técnicos que pueden presentarse en el trabajo computacional frente a una clase, carencia de un laboratorio debidamente equipado (software legal actualizado , por ejemplo), carencia de material didáctico especialmente preparado para esta modalidad, exigencia de tiempo y esfuerzo que debe dedicarse a los procesos demostrativos formales….

Se define así un nuevo problema:

¿Cómo realizar un trabajo de formación docente en la utilización adecuada de herramientas computacionales, que promueva un mayor compromiso de gestión y aplicación de las competencias adquiridas, a la propia práctica?

En respuesta a esta situación problemática y con el objeto de romper la inercia propia del sistema universitario y lograr un mayor compromiso de gestión de los docentes de la universidad con lo que ya podemos considerar un reclamo social; se presenta como respuesta y propuesta, una estrategia desarrollada para resolver conjuntamente otro de los problemas, históricamente más difíciles en carreras en las que se asigna a la Matemática un carácter instrumental: la "integración de los profesores de distintas áreas en un trabajo de investigación colaborativa" cuyo objetivo específico es el análisis y elaboración de materiales didácticos.

FUNDAMENTOS

En un sentido muy amplio Parceriza Arán (1996) define como materiales curriculares "cualquier tipo de material destinado a ser utilizado por el alumno juntamente con los materiales dirigidos al profesorado que se relacione directamente con aquellos, siempre y cuando estos materiales tengan como finalidad ayudar al profesorado en al proceso de planificación y/o desarrollo y/o evaluación del curriculum".

Las unidades didácticas son concebidas como conjunto integrado, organizado y secuenciado de los elementos básicos que integran el proceso de enseñanza-aprendizaje, Los propios docentes deberán tomar parte directa en la producción de materiales. Wittman (1995) propone "experimentos clínicos de enseñanza" en los que los materiales didácticos no sólo son instrumentos, sino objetivo de estudio.

La secuencia de actividades y problemas que se proponen como material didáctico desde un contexto matemático, a partir de una situación didáctica fundamental (Peltier, 1993), permiten al investigador, seguir las ideas del estudiante en las situaciones donde el conocimiento interviene como instrumento explícito de resolución, o en su descontextualización y relación con conocimientos anteriores.

LA INVESTIGACIÓN EVALUATIVA DE LA EXPERIENCIA

Se elige, como estrategia, una propuesta de taller para un trabajo en los siguientes ejes:

- conocimiento y manejo de una herramienta apta para la operatoria en la Matemática Básica en Carreras de Ingeniería, Ciencias Exactas, Ciencias Económicas, etc.,
- reflexión sobre la potencialidad didáctica de dicha herramienta y sus posibilidades de inserción en algunas asignaturas de la Matemática Básica;
- tratamiento computacional de algunos problemas específicos con un enfoque actualizado.
- análisis, desarrollo y producción de materiales didácticos;
- experimentación de su utilización, con un criterio específico, en función de un proyecto educativo y con un marco teórico que justifique las decisiones;
- análisis a posteriori para la evaluación de dichos materiales.

PROPUESTA DEL TALLER

En el año 2004, comienza el "El primer Taller de Producción de Material Didáctico con Software Libre" en el que participan docentes de diferentes departamentos y escuelas de la FCEIA. En este taller se están diseñando guías de trabajo autocontenidas en distintas áreas de la Matemática Básica, la Física y la Ingeniería.

Metodología de trabajo

La producción de material didáctico, del taller que estamos describiendo, se ha nucleado en la utilización del software libre Scilab, disponible en http://scilabsoft.inria.fr. Este software científico, desarrollado por el INRIA (Instituto Nacional de Investigaciones en Informática y Automática) en Francia, es utilizado por las universidades francesas y de otros países, como así también por institutos de investigación y laboratorios. Es un sistema totalmente interactivo que ofrece una gran comodidad para la visualización de las soluciones obtenidas, sean gráficas o alfanuméricas. Le permite al usuario definir nuevas funciones, crear nuevos tipos de variables y definir sus propias operaciones. Scilab es de distribución gratuita y se encuentra disponible para diversos sistemas operativos tal como Unix, Linux, Windows/98/NT, etc.

Los participantes

El taller está orientado a dos tipos de participantes:

a) los que ya conocen el software Scilab: aplican directamente su conocimiento a la elaboración de material didáctico correspondiente a una unidad curricular. Para ellos se proporcionan pautas didácticas para la integración de conceptos teóricos y propuestas de actividades y problemas. En esa situación el taller constituye un espacio de consulta sobre cualquier dificultad en el manejo del software.

b) los que lo hayan tenido muy olvidado o no lo conozcan para los que se proponen actividades de estudio y trabajo en computadora, con el apoyo del docente, sobre la base de las guías teórico prácticas contenidas en el libro “Laboratorio de Análisis Numérico Matricial. Módulo 1” (Anido, Medina, Rubio. 1993). Una vez adiestrados en el manejo del software y conocida su potencialidad seleccionan las herramientas informáticas que pueden ser útiles en su práctica docente, estando en las condiciones indicadas en el punto anterior.

EL DESARROLLO Y LOS PRIMEROS RESULTADOS

Se ha diseñado material didáctico a partir de la reflexión del propio docente en cuanto al rol que este material cumple en la gestión de situaciones de aprendizaje. Esto ha conducido a que docentes de cursos de formación básica en Matemática y en áreas de Física y distintas especialidades de la Ingeniería trabajasen en el análisis y propuestas de problemas propios de las distintas áreas de aplicación de la Matemática. Muchos docentes carecían de experiencia en el manejo de un software de las características del Scilab y la oportunidad de un trabajo colaborativo en el ámbito del taller, la facilidad de acceso a un software libre y la posibilidad que este hecho abre a todos sus alumnos, ha sido motor de un trabajo que ha excedido las expectativas iniciales. Se podría hablar de consecución de objetivos cognitivos, procedimentales y sobre todo actitudinales, llegándose a la producción conjunta entre docentes de distintos departamentos que incluso no se conocían previamente.

La idea y metodología puesta en juego en el diseño y seguimiento del taller, concebido en un comienzo como “taller integrado” para docentes, se ha extendido a través de los mismos participantes a algunos cursos de Análisis Matemático II de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario. Se propone a los alumnos la búsqueda y gestión de problemas de funciones de varias variables, con mínimas indicaciones en cuanto a la utilización del software Scilab. Los alumnos han logrado propuestas interesantes y creativas de problemas, entusiasmados sobre todo por sus funciones de graficación, y por la exploración de las posibilidades del software en cuanto a la aplicación de los conceptos teóricos desarrollados en clase. Incluso han recurrido (algo no usual) a la bibliografía vinculada a su especialidad de ingeniería donde aparecen problemas que en su resolución utilizan las herramientas matemáticas de la asignatura y en los que pueden trabajar con datos reales al ser encarados con los recursos del software. Se prevé realizar otros guías en los temas cálculo de integrales como suma de Riemann, extremos relativos, derivadas parciales, etc.

ALGUNOS TRABAJOS REALIZADOS POR LOS INTEGRANTES DEL TALLER

Adjuntamos a título de ejemplo algunos de los temas en producción

1) Material didáctico para los alumnos de la materia “Sistema de Posicionamiento Satelital”, correspondiente al cuarto año de la carrera Ingeniería en Agrimensura, de la FCEIA. Se desarrolla un ejemplo de aplicación del Sistema Scilab en la docencia dentro del área geodesia, constituyendo un trabajo práctico a desarrollar por los alumnos que conozcan los fundamentos del posicionamiento satelital utilizando el Sistema de Posicionamiento satelital (GPS). El GPS se encuentra operativo desde hace poco más de una década y constituye actualmente el método más preciso y eficiente utilizado para determinar la posición (coordenadas) de puntos respecto de un único sistema de referencia mundial. Está integrado por un conjunto de satélites que son monitoreados continuamente por estaciones terrestres que determinan una serie de parámetros propios de cada satélite (parámetros orbitales, estado y deriva de los osciladores atómicos, etc.).

Estos parámetros son transmitidos a cada satélite constituyendo el denominado mensaje de navegación. Cada satélite emite una señal en la cual es incluido el mencionado mensaje. Finalmente las señales llegan a los receptores ubicados sobre los puntos cuyas coordenadas se quieren determinar.

Los parámetros orbitales recibidos permiten determinar las coordenadas de los satélites para la época. Otros componentes de la señal recibidos por el receptor (observables), permiten determinar la distancia satélite receptor para la misma época t, al medir el desfasaje del observable recibido respecto de una réplica sincronizada generada en el receptor. En la señal hay varios observables disponibles y además es posible aplicar distintos métodos de observación. El método y el observable utilizado determinan la precisión con que se obtienen las coordenadas. Finalmente a partir de observaciones realizadas desde un punto y de la información provista por los satélites se deberá proceder a la resolución numérica del problema derivado. El planteo original del problema se modeliza con un sistema de ecuaciones no lineales con mayor número de ecuaciones que de incógnitas. La resolución numérica consiste en hallar en forma iterativa una solución del sistema rectangular linealizado a través del método de mínimos cuadrados que se implementa en el software Scilab. La solución del sistema representa las coordenadas del punto donde se efectúa la medición.

El desarrollo del trabajo práctico planteado resultaría sumamente dificultoso de realizar si no se contara con una herramienta con la potencia y versatilidad de Scilab.

2) Material didáctico para los alumnos de la materia "Física II, Ondas", correspondiente al ciclo de formación Básica de las carreras de Ingeniería de la FCEIA.

Se desarrolla una guía didáctica donde se analiza la propagación de pulsos denominados "Lorenzianos" (por su forma) que se trasladan, por ejemplo, por una cuerda de longitud infinita. La forma de onda queda representada en el caso de pulsos Lorenzianos por funciones del tipo

$$y(x,t) = \frac{A}{(bx+ct)^2+1}$$

La utilización de macros permite visualizar el significado de cada uno de los parámetros que aparecen en esa expresión, ya que los valores de los mismos pueden ser variados en forma sencilla y, como su representación gráfica es inmediata, pueden notarse los cambios que se producen. Puede también analizarse la superposición de más de un pulso de estas características. En cada caso se define el vector x.

3) Material didáctico para los alumnos de la materia "Análisis Matemático II", correspondiente al ciclo de formación Básica de las carreras de Ingeniería de la FCEIA.

Se desarrollaron guías didácticas en los temas: Curvas en coordenadas polares, graficación

Gráficas de funciones de dos variables Cálculo de integrales como suma de Riemann, integrales simples y dobles.

Se propuso realizar una guía didáctica de funciones trigonométricas, estudiando sus ampliaciones y corrimientos con el objetivo final de visualizar una función representada por un polinomio formado con los primeros términos de la serie de Fourier.

4) Material didáctico para los alumnos de la materia "Análisis Matemático I", correspondiente al ciclo de formación Básica de las carreras de Ingeniería de la FCEIA.

Una guía didáctica se está desarrollando en el tema estudio de funciones. Se explota las posibilidades gráficas del sistema para estudiar corrimientos, contracciones, dilaciones, superposiciones.

CONCLUSIONES

Se han producido materiales didácticos para una variedad de asignaturas, algunas del ciclo profesional, la mayoría del ciclo básico.
No obstante el mayor logro ha sido en el terreno de lo humano y social. Los trabajos realizados han permitido una valoración mutua entre docentes de distintas asignaturas o áreas y su integración a una investigación y producción colaborativa. También, los docentes, han logrado adquirir el conocimiento de un software libre, en un país donde una mayoría de alumnos de la Universidad y la misma institución no están en condiciones económicas para acceder a un software comercial actualizado. Esto constituye un avance hacia el desarrollo científico de la Universidad.

LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN
La riqueza y proyección de los temas en estudio permiten ubicar al taller como "generador" de una producción que, en el marco de distintas Ingenierías Didácticas (Artigue, 1995), deberá ser evaluada en ciclos de análisis previo, desarrollo y análisis a posteriori, en relación a cada curso.
Se abre así un abanico de investigaciones que pueden constituir aportes a la Educación Matemática, en el nivel universitario, en la concepción de Wittman (1995) que la considera "ciencia de diseño".

Bibliografía

Anido, M.; Medina, M.; Rubio Scola, H (1993) Análisis Numérico Matricial. Sistema BASILE. Módulo I. Libro publicado por la Facultad de Cs. Ex., Ing. y Agrim. UNR.

Anido, M.; Rubio Scola, H (1999) Un programa sobre el uso de herramientas C.A.S. en el aprendizaje de la matemática básica en las universidades nacionales de la provincia de Santa Fe. Revista Lecturas Matemáticas, No 1, Vol 21, 2000, pp. 67-77

Artigue, M. (1995) "La Enseñanza de los Principios del Cálculo: Problemas Epistemológicos, cognitivos y didácticos". En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. *Grupo Editorial Iberoamericano.* Bogotá, Colombia. 98-99; 128; pp.134-135.

Cook, T.D. y Reichard, Ch. S. (1995) "Métodos Cualitativos y Cuantitativos en Investigación Evaluativa". Ed. Morata: Madrid. 27-79; 131-145.

Parceriza Arán, A. (1996) Materiales curriculares, Ed. Graó: Barcelona.

Wittmann, E.Ch. (1995) "Mathematics Education as a Desing Science". Educational Studies in Mathematics, 29. Belgium Kluwer Academic Publishers. 355-274.

Peltier, M.L. (1993) Una Visión General de la Didáctica de la Matemática en Francia. Revista Educación Matemática. 5 (2). 4-9.

CONCEPCIONES DE LA GEOMETRÍA DE ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA Y PROFESORES BÁSICOS EN EJERCICIO

Acosta Balvede, Consigliere Lidia, Guzmán Ismenia, Kuzniak Alain, Rauscher J. Claude
Universidad de Valparaíso- Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile.
Universidad de Paris 7 Dénis Diderot. Laboratoire Didirem et IREM de Strasbourg
iguzmanr@ucv.cl, lconsigl@ucv.cl, balvede.acosta@uv.cl,
Campo de Investigación: Formación de Profesores. Nivel Educativo: Medio - Superior.

Resumen

Nuestro taller es parte del Proyecto ECOS que desarrollamos equipos de didactas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y del equipo DIDIREM de la Universidad de Paris VII. Este Proyecto se inscribe en la línea de investigación de comparación de sistemas educativos a través de la geometría considerando estudiantes de pedagogía para la Enseñanza Media o Liceo y Profesores de Escuela Básica sin formación en Matemáticas.

Hemos encuestado a estudiantes avanzados de Pedagogía en Matemáticas, y a profesores de enseñanza básica. El objetivo de la encuesta era obtener una visión del significado de enseñar y aprender geometría. Para ello se pidió nombrar tres adjetivos y tres verbos que la caracterizaran. El análisis de los resultados se apoya en el marco teórico propuesto por Alain Kuzniak y Catherine Houdement.

Este Taller se efectuó en la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 19). El taller se realizó en dos sesiones de 90 minutos cada una.

La primera sesión fue realizada en tres momentos. En el primero presentamos una visión general del proyecto señalando sus puntos claves : estudio de programas, análisis de textos y trabajo en terreno.
En el segundo momento con el objeto de recoger la visión de la geometría se pidió a los participantes contestar la misma encuesta.
En el tercer momento se presentaron los resultados obtenidos en ambos países.

El análisis de los resultados para adjetivos y verbos los organizamos en categorías distribuidas en campos semánticos.

I.- Concepción de la geometría a partir de los adjetivos

Entre las categorías de adjetivos según los profesores chilenos (30 encuestados) resaltan:

- la categoría de lo educativo con 17 nominaciones, destacándose los adjetivos: importante, dinámica, desafiante y necesaria.

- En Francia esta categoría no es considerada importante por los PE1 (30 encuestados, Estudiantes para profesores de Escuela de nivel 1) recibe sólo 3 nominaciones.

- La categoría empírica recibe nominaciones similares en ambos países (alrededor de 14), y la caracterizan los adjetivos: útil, práctica, real y aplicable.

- La categoría abstracta en Francia recibe 37 nominaciones y en Chile 13, y los adjetivos destacados son: exacto, preciso, demostrativa y teórica. En esta categoría se observa una gran diferencia entre Francia y Chile, los PE1 muestran una visión de la geometría con una fuerte tendencia a lo abstracto.

- La categoría de la accesibilidad en Chile muestra una ligera paridad, lo fácil recibe 10 nominaciones y los difícil 7, en cambio en Francia hay diferencias, lo fácil recibe 2 nominaciones y lo difícil 9. Tal vez esto explicaría la marcada tendencia a lo abstracto.

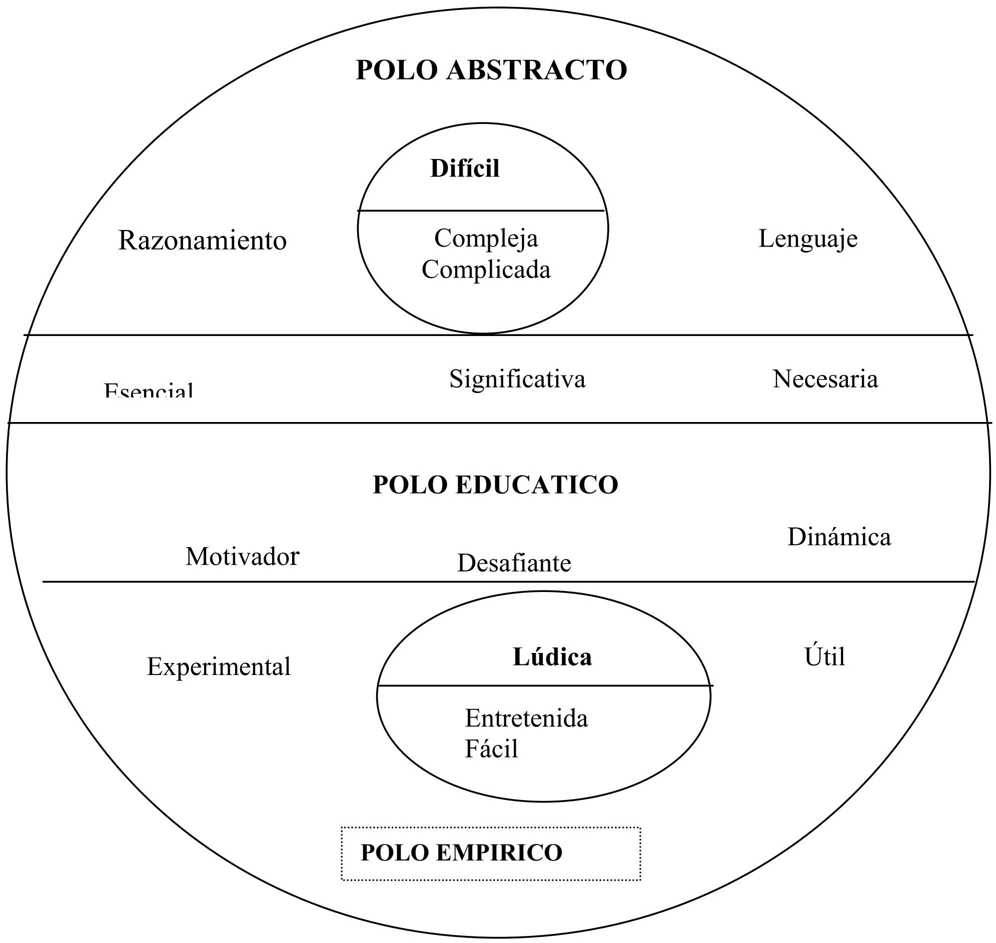
Los estudiantes de Pedagogía en Chile dan a la categoría de lo empírico una alta preferencia 28 nominaciones, dentro de la cual la utilidad recibe 19 nominaciones, lo concreto 7 y lo intuitivo perceptivo 2. En Francia los PLC1 (Estudiantes para profesores de colegio y liceo) dan 25 nominaciones a esta categoría con 2 nominaciones en la utilidad, 17 en lo concreto y 6 en lo intuitivo perceptivo. Destacándose en Chile el aspecto de utilidad y en Francia el aspecto concreto de la geometría.

La categoría de lo abstracto para los estudiantes chileno no es relevante, tiene solo 9 nominaciones, en cambio para los estudiantes franceses si lo es, tiene 24 nominaciones.

La accesibilidad en Chile resulta ligeramente pareja, lo difícil recibe 8 y lo fácil 11 nominaciones. En Francia hay una gran diferencia, lo difícil recibe 19 nominaciones y lo fácil 9.

Según los adjetivos la visión de la geometría contempla tres polos: el abstracto, el educativo y el empírico, destacándose fuertemente el polo educativo en Chile y el polo abstracto en Francia.

A continuación presentamos un grafo que ilustra las concepciones de la geometría en ambos países según los adjetivos.



II.- Concepción de la Geometría a partir de los verbos

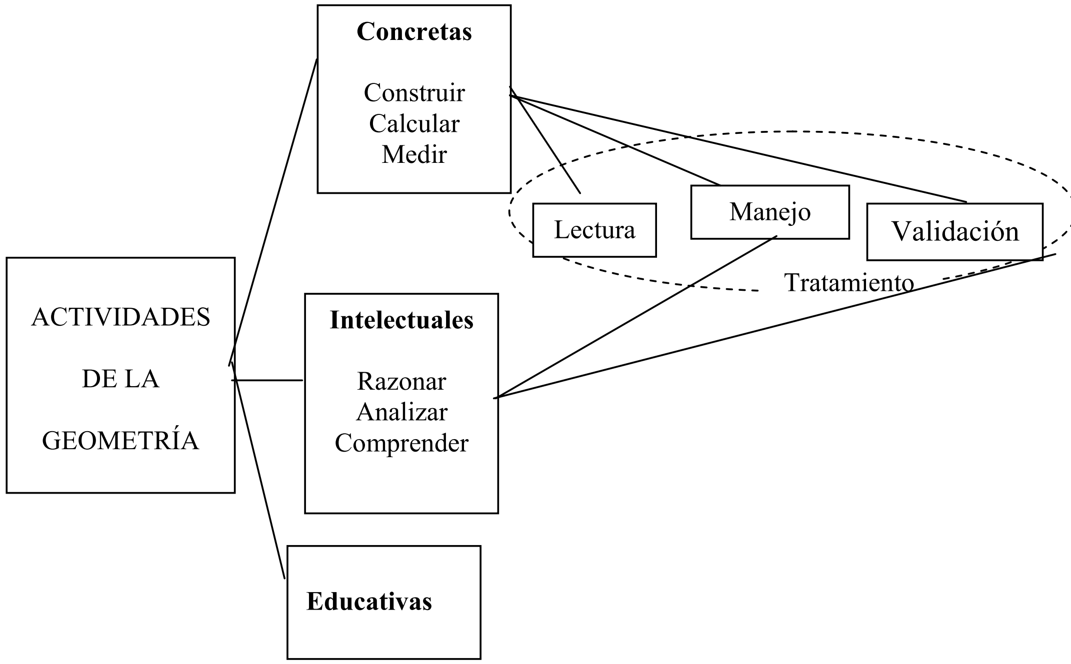
Según las acciones que describen, los verbos se distribuyen en tres categorías: de tratamiento, didácticas e intelectuales.

- Los profesores básicos mencionan verbos con tendencia marcada a las acciones concreta, reforzando lo que señalaron en los adjetivos. A continuación el Grafo de los profesores básicos chilenos.
- Los estudiantes, mencionan verbos que indican una ligera tendencia a acciones concretas (Construir, medir, dibujar, calcular).

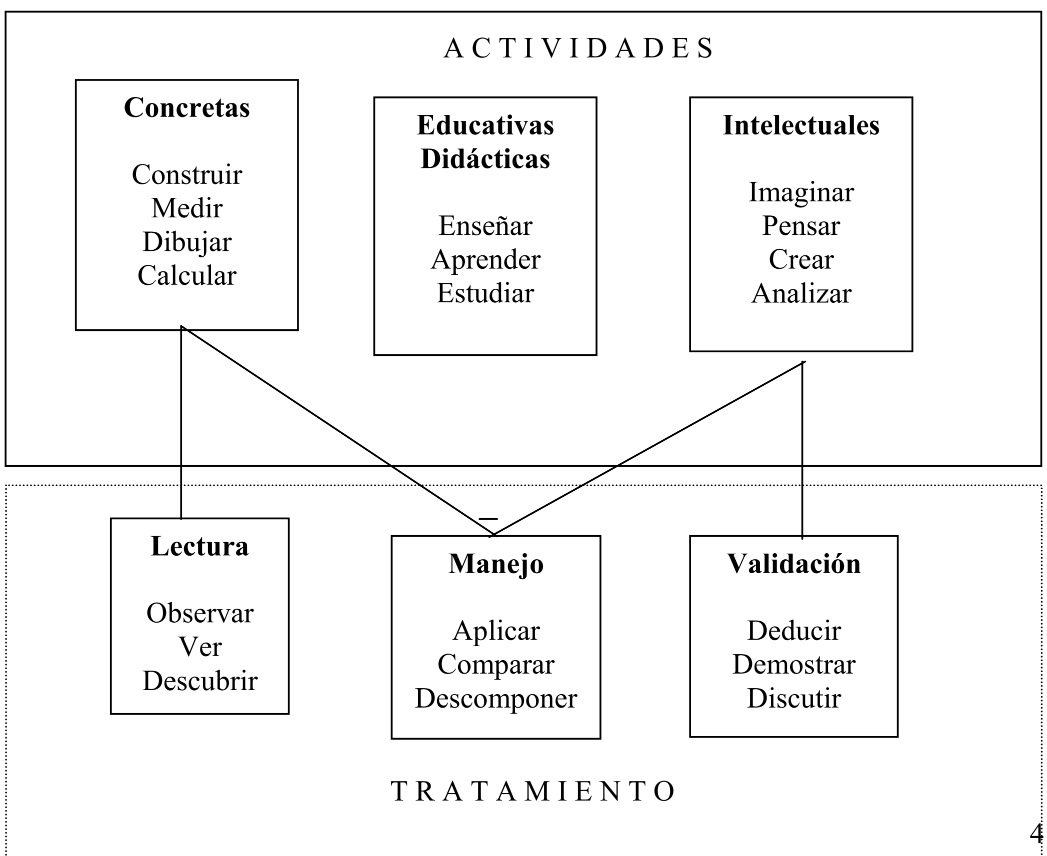
Otros verbos indican actividades intelectuales (imaginar, pensar, crear, analizar) y educativas (enseñar, aprender, estudiar).

A continuación grafos de las visiones en Chile.(los resultados y grafos del equipo francés están en procesos.)

Grafo de Visión de la Geometría Profesores básicos chilenos



Grafo de visión de la Geometría de los estudiantes de pedagogía



Por otra parte, tanto los profesores básicos como los estudiantes de Pedagogía para la enseñanza media conciben la geometría con características intelectuales y concretas a la vez.

Verbos mencionando acciones

Intelectuales, Concretas y Ambas

	Sólo Intelectua	Sólo Concretas	Ambas	
			Énfasis en lo Concreto	Énfasis en lo Intelectual
Profesores Básicos 2º ciclo 5º a 8º Básico	2	5	11	8

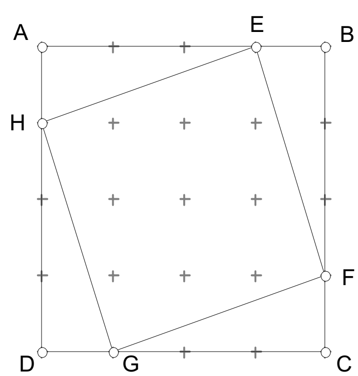
	Sólo Intelectua	Sólo Concretas	Ambas	
			Énfasis en lo Concreto	Énfasis en lo Intelectual
Estudiantes avanzados Pedagogía en Matemáticas	6	9	8	7

Los profesores participantes en el Taller de la RELME 19 que tenían diversas formaciones mostraron una visualización de la geometría, según los verbos, semejante a la encontrada en Chile.

Segunda Sesión del Taller

Esta sesión se dedicó al estudio del marco teórico propuesto por nuestros colegas Houdement-Kuzniak. El que comenzó con el planteo del siguiente problema

Problema: el punto de partida es la figura siguiente y la pregunta se refiere a la naturaleza del cuadrilátero



Nuestro objetivo al plantear este problema era recoger las estrategias con que los participantes lo abordarían, esperábamos que aparecieran en forma espontánea los paradigmas de la Geometría I y II.

Se dispuso de media hora para el trabajo individual. Después se realizó la puesta en común, en la que surgieron tres clases de respuestas : para unos ABCD es un cuadrado por visualización y el razonamiento lo hacían a partir de la figura. Otros, explicitaban las hipótesis (se trata de un geoplano y sus propiedades) y razonaban en consecuencia y, los menos, ven que se trata de un cuadrado, pero no llegan a dar razones.

A continuación se discutieron las hipótesis posibles de asociar a la figura dada:

Hipótesis 0: Asociada al geoplano.
Hipótesis 1: ABCD es un cuadrado; E, F, G, H son cuatro puntos situados en los cuatro lados del cuadrado, tomados en este orden AB, BC, CD y DA.
Hipótesis 2: la hipótesis 1 y los segmentos AE, BF, CG y DH tienen la misma medida.
Hipótesis 3: las hipótesis 2 y también AE = AB - EB.
Confrontando estas hipótesis con lo desarrollado por los participantes se argumentó que :

- Cuando la figura se considera como única hipótesis, el problema está dado en Geometría I.
- Una resolución estaría en Geometría II, si las hipótesis son explícitas.

Así la presencia o no de hipótesis escritas o la selección de hipótesis coloca implícitamente al problema en el paradigma geométrico de GI o de GII, que determinará la formas de validación.

La geometría I (natural) está asociada al espacio intuitivo, físico, medible; el dibujo se considera como un objeto concreto de estudio.
Las formas de validación son experimentales por manipulación, medición. La visualización y la percepción juegan un rol importante.

La geometría II (axiomática - natural) representa un modelo de la realidad, pues su espacio es el físico – geométrico. Está ligada a las figuras cuyas propiedades están dadas por definiciones y teoremas. Las figuras son un instrumento heurístico para buscar propiedades y conjeturas.
Las formas de validación son las demostraciones basadas en axiomas, definiciones y teoremas.

Referencias Bibliográficas:

Coxeter H. y Greitzer S. (1971) Redécouvrons la Géometrie. Traducido por Marchand R. Ed. Dunod Paris.

Douady R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques. Tesis . Universidad de Paris7.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1998) Géometrie et Paradigmes Geometriques. "Petit X" nº 51, pp.5 - 21. Paris

LA VARIACIÓN EN LAS EXPLICACIONES DE LOS PROFESORES EN SITUACIÓN ESCOLAR

Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas/Cinvestav-IPN, México
erbalderas@uat.edu.mx
Campo de investigación: Pensamiento Variacional; Nivel educativo: Superior, Metodología: Etnográfico
Palabras Clave: Variación, función, discurso, explicación.

RESUMEN

Esta investigación centró la atención en el papel del discurso en la clase de matemáticas cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la noción de *variación*. El discurso constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela, por lo tanto construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente. Nos ocuparemos de analizar el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas, primer semestre de ingeniería, cuando la noción de variación está siendo usada por los profesores y cuando los estudiantes intervienen a propósito de dicha noción. En particular nos centraremos en *función* y *derivada* que son vistos como modelos para el estudio de la variación. Los registros y las transcripciones de las clases, que se audiograbaron, fueron analizadas considerando un modelo de investigación cualitativa.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas generalmente se consideran como un cuerpo de conocimiento individual y socialmente construido y como lenguaje especializado para comunicar diversos aspectos de nuestro mundo (Pimm, 1991). Sin embargo, el nuevo conocimiento matemático (individual o compartido) se construye a través de interacciones y conversaciones entre profesores y sus alumnos. De ahí que el movimiento entre el sentido personal de un concepto y el significado matemático compartido es crucial para que el aprendizaje se lleve a cabo (Bartolini Bussi, 1998). El papel del profesor y los estudiantes en este movimiento ayuda a determinar que el aprendizaje ocurra. Esta consideración del proceso de enseñanza-aprendizaje enfatiza la importancia de las interacciones en el aula y el contenido matemático que se está discutiendo. De ahí, el estudio de esas interacciones y como el contenido matemático o el significado compartido de conceptos influye en el desarrollo de las discusiones.

Por otro lado, algunas investigaciones en el campo de la matemática educativa (García, 1998; Zubieta, 1996; Ávila, 1996; Hoyos, 1996; Cantoral, 1992; Artigue, 1991; Zubieta, 1996; (Pulido, 1998; o Artigue, 1991) reportan la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Con nuestro estudio no pretendemos "remediar" ese estado de cosas, ni mucho menos. Tampoco pretendemos decir como se debe enseñar la noción de variación, o si un profesor enseña bien en el aula. Nos proponemos algo aún mas modesto, mas particular. Lo que intentamos es la comprensión del complejo y rico entramado de pautas de interacción, que se dan para producir conocimiento entre docentes y alumnos, consideramos que es necesario como punto de partida para cualquier propuesta que pretenda mejorar la enseñanza del cálculo en su contexto real. Nos hemos propuesto estudiar la interacción discursiva en el aula desde la perspectiva del profesor; aunque se tiene como principal propósito la forma en la que participa el docente, es necesario aclarar que no es posible analizar la perspectiva del docente sin considerar a los alumnos, ya que ambos actúan como referentes de sus contribuciones y el significado de éstas dependen del contexto interactivo (Reséndiz, 2004). Pretendemos construir una respuesta, parcial, que centre su atención en algunos de los fenómenos de enseñanza específicamente involucrados con las dificultades del aprendizaje. Particularmente hemos centrado la atención en la noción de variación, que no siendo un objeto explícito de enseñanza está presente en muchas de las prácticas discursivas.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Nuestro objetivo es el de comprender las tramas de relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido curricular. Por ello, dado que hemos considerado al profesor como el portador del saber que habrá de escenificarse en el aula, emprendimos un amplio estudio sobre las formas en que los profesores desarrollan un conocimiento específico sobre la manera de enseñar su materia cuando se precisa tratar una idea matemática fundamental para el cálculo, una noción compleja conocida como variación.

El objetivo principal de la investigación es el siguiente: *se pretende en este estudio localizar y analizar las maneras en que se introduce y desarrolla la noción de variación en situación de enseñanza en el nivel superior.* Así, una forma de abordar el estudio sobre la enseñanza de la variación es por medio del discurso en el aula. Es en el aula en donde la palabra se utiliza la mayor parte del tiempo. La comunicación y, específicamente, la interacción entre el docente y el alumno y alumno-alumno, se considera en la actualidad la base de proceso de aprendizaje (Tusón & Unamuno, 1999). Una de las maneras de tener acceso a la información sobre cómo se introduce y se desarrolla la noción de variación, es estudiando el discurso del profesor, pero también el discurso en la interacción social que se realiza en el aula escolar. Por lo anterior, el problema de investigación se delimitó por medio de las siguientes preguntas: ¿Cuál es el papel que juega la variación en el discurso del profesor? ¿Qué sucede con la noción en la interacción? ¿Cuál es el papel de los alumnos en la interacción?

Para intentar responder a estas cuestiones es necesario desarrollar perspectivas teóricas que sea útiles para interpretar y analizar la complejidad de las clases de matemáticas.

PARTICIPANTES Y ESCENARIO

Los participantes en la investigación fueron tres profesores que impartían la asignatura de Matemáticas I, del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec. Los profesores fueron seleccionados aleatoriamente entre los que impartían la materia. Se platicó con cada uno de los profesores y se les dijo que deseábamos observar y registrar la manera como ellos enseñaban los conceptos de función y derivada y estuvieron de acuerdo.

Las observaciones se realizaron por un periodo largo, solamente en las clases donde se impartía los conceptos de función y derivada, ya que son vistos como modelo para el estudio de la variación. Ellos son profesores de las diferentes carreras de ingenierías.

La información se recabó por medio de las observaciones de sus actividades en el aula, en condiciones "normales". La información recopilada consistía de cintas auditivas de las discusiones que se realizaron en el aula durante el semestre, así como notas de campo (registro de la observación) para complementar las cintas de audio. Esto permitió contar con una fuente de datos que nos facilitó para obtener información que ilustró lo que sucede en condiciones "normales" en el salón de clase, lograr un acercamiento con los profesores y con el grupo, pero sin provocar modificaciones importantes en las formas cotidianas de trabajo y de relación. Esto nos permitió tener registros reales y obtener información de lo que sucede en la interacción social, esto es, en el proceso educativo donde participan los profesores y los alumnos.

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Para realizar las observaciones, nos apoyaremos en un punto de vista teórico: La transposición didáctica y las situaciones didácticas. Un fenómeno importante a observar, ligado al control de la transposición didáctica, es el "envejecimiento de las situaciones de enseñanza", en el cual, los patrones de interacción se refieren a las relaciones entre el profesor, los alumnos y las propias situaciones. Se ha podido dar cuenta, en este estudio, de este fenómeno didáctico, al interior del aula, ya que en la interacción se modifican las situaciones de enseñanza del profesor. Cuando hay interacciones cambian las relaciones de poder y las situaciones de enseñanza . En nuestro caso particular estamos estudiando un fenómeno didáctico en el campo de la matemática universitaria usando la aproximación sistémica que brinda la didáctica de la matemática como disciplina científica. Reflexionamos sobre lo educativo desde una perspectiva en la que la triada, saber, profesor, alumno, desempeña el papel de unidad de estudio. Sin embargo aunque podemos explicar las interacciones entre los polos, saber, profesor, alumno, con base en las nociones, contrato, situación o transposición, quisimos profundizar en el papel del discurso en el aula. Razón por la que incorporamos elementos de los estudios cualitativos de corte etnográfico. Los análisis y la discusión del trabajo, ha implicado interpretaciones y análisis en direcciones específicas. Este proceso concluye cuando se han formulado interpretaciones sólidamente fundamentadas en los datos.

Tomando al discurso como medio para estudiar las prácticas sociales, en esta investigación nos interesa analizar los elementos y características de una sesión de clase y los recursos discursivos, o elementos discursivas de los profesores para enseñar una noción compleja, como la noción de variación, sin dejar de lado la participación de los estudiantes. A continuación presentamos un ejemplo de la construcción de significados a través de la explicación y la variación.

LA CONSTRUCCIÓN DE EXPLICACIONES

Uno de los objetivos del docente es hacer comprender a los estudiantes los conocimientos matemáticos o los saberes que él enseña (Mopondi, 1995). Entre los esfuerzos que el profesor emprende figuran las *"explicaciones"*. Nos interesan las diversas formas que toman sus explicaciones al enseñar una noción como la variación y sus efectos sobre las producciones de los estudiantes. La construcción de significados, de explicaciones, como objeto de análisis, dado su carácter interactivo, demanda que las unidades mínimas de análisis sean secuencias de interacción y no frases o mensajes descontextualizados (Candela, 1999). Así el problema planteado condiciona las características de las unidades de análisis; siendo el objeto de estudio la construcción de los recursos discursivos y los significados sobre la variación. Una unidad de análisis natural es la clase completa en la que se delimita y trabaja el contenido de un tema curricular dentro de la jornada escolar. Las secuencias discursivas seleccionadas son aquellas donde se pueda identificar las actividades y las explicaciones de los profesores frente al contenido donde aparece la noción de variación. Los extractos forman parte de las clases o sesiones de un primer semestre de ingeniería. A continuación presentamos un ejemplo donde la explicación del profesor se centra en el desplazamiento del vértice.

Extracto 5. 15

P: Bueno ¿cuál es gráfica de la función?, si a esa función le sumamos por ejemplo 1, y queda $y=x^2+1$

Am: Se desplaza el origen en $y=1$.

P: ¿Verdad que estaríamos haciendo eso? Dijera que y va a ser lo que valga en x^2 y eso que estaríamos haciendo sumándole 1, ¿dónde está en x? En 0 pónganle 1, en 0 pongo 1 y en 1 cuando valga 1, ahora la y ¿cuánto va a valer?

As: ¡2!

P: Va a valer 2 [...] y entonces la fórmula seguiría siendo la misma. ¿Qué fue lo único que sucedió? Que la curva se desplazó una unidad hacia arriba y si la quisiera yo bajar ¿qué podríamos hacer?

As: ¡Restar!

P: Restarle 1 ¿Ahora cuál sería la gráfica de $y=x^2-1$? Le podemos poner esta $y=x^2$, y si regresamos 1 ¿qué va a suceder? Cuando abres al vértice el (0,-1) donde corta al eje x en 1,-1 y esta es la gráfica de $y=x^2-1$, de $y=x^2$. Si yo le resto, ¿qué sucede con la curva?

Am: La desplazamos.

P: ¿Cuántas unidades la desplazamos?

B (Gpo-1), pág. 99.

Inicia la explicación con la función cuadrática básica $y=x^2$ que, cuando se le suma una unidad ($y=x^2+1$), desplaza su origen en y=1. La afirmación *"se desplaza el vértice en y=1"* fue hecha por un alumno, aunque no se le solicitó. Al restarle una unidad a la función cuadrática básica ($y=x^2-1$) se desplaza el vértice una unidad hacia abajo y al sumarle una va hacia arriba. El docente utiliza el término "desplaza" que dijo el alumno cuando asevera: *"la curva se desplazó una unidad hacia arriba"*.

Cuando el profesor demanda que los alumnos expongan su opinión, a través de preguntas motiva intervenciones explicativas y resulta de sumo interés para los alumnos poder "mover" o "desplazar" el vértice de su posición inicial. El profesor intenta generalizar que, si a la función básica le suman una cantidad, la gráfica se desplaza hacia arriba, y si le restan, hacia abajo. En esta situación hay dos tipos de explicación donde interviene la noción de variación: el modelo del lenguaje natural y el modelo de la representación geométrica, que sirve para visualizar los movimientos.

Enseguida veremos cómo se desplaza el vértice de una función cuadrática básica ($y=x^2$) cuando se le suma una unidad y se eleva al cuadrado ($y=(x+1)^2$.

Extracto 5.16

P: Es una parábola $Y=(x+1)^2$. Inclusive hasta la podemos ver así, $y=x^2+2x+1$, ¿verdad? Luego, el -2 ¿cuánto es? El -2 es 1. Entonces la curva sería así –a ver si estamos de acuerdo–, mientras

que la forma básica sería hasta acá, que es $y=x^2$; la forma sigue siendo la misma. Debemos entender que es la misma curva y lo único que hace la línea es desplazarla ¿hacia dónde?
Am: A la izquierda.
P: Hacia la izquierda. Y si la quisiéramos mover más hacia la izquierda, ¿qué tendríamos que hacer? Que se sustituya en la forma básica ¿a quién? A x por $x+2$ ($y=(x+2)^2$). Si la quiero yo hacia la izquierda, hasta –10, entonces ¿en dónde se ubicaría F? Si la función original es $f(x)=x^2$ y yo me la quiero llevar hasta el vértice que está en –10, ¿qué hago?
Am: Sería: $y=(x+10)^2$

B (Gpo-1), pág. 101.

La explicación del profesor toma como referencia a la función básica. Es la misma forma de la curva, pero ahora se desplaza una unidad hacia la izquierda y, si se quiere mover más, se tendría que dar un número negativo cualquiera, como –10. Al término de las explicaciones sobre el movimiento o el desplazamiento del vértice, el docente resume el tema con la siguiente tabla.

FUNCIÓN	GRÁFICA
Y=f(x)+c, c>0	La gráfica Y=f(x)+c desplazada c unidades hacia arriba
Y=f(x)-c, c>0	La gráfica Y=f(x)-c desplazada c unidades hacia abajo
Y=f(x-c), c>0	La gráfica Y=f(x+c) desplazada c unidades hacia la derecha
Y=f(x+c), c>0	La gráfica Y=f(x+c) desplazada c unidades hacia la izquierda
Y=-f(x),	La reflexión de la gráfica de Y=f(x) sobre el eje x

Se aprecian dos tipos de explicación que implican a la noción de variación. Uno es el modelo del lenguaje natural (desplazamiento hacia arriba, hacia abajo, izquierda, derecha) y el otro el modelo de la representación geométrica, que permite visualizar el desplazamiento de la gráfica o parábola.

DISCUSIÓN

Se logró identificar una diversidad de perspectivas en las explicaciones de los profesores sobre la noción de función, así como sus ideas acerca de la variación, como la de parámetros –rota, traslada, la sube– o la asignación de un significado geométrico a las funciones (traslación, inclinación, rotación, desfasamiento, sube o baja, crece o decrece). Además, los docentes le atribuyeron nociones de movimiento a las gráficas y a puntos de referencia como el vértice, el origen o la asíntota (dieron las expresiones se desplaza, sube o baja, se recorre, se mueve o corrimiento).

Consideramos que la estrategia de mover un punto de referencia (el vértice, el origen o la asíntota) fue de gran importancia para que los profesores construyeran sus explicaciones en torno al movimiento de la gráfica y, de ahí, enfatizaran el papel de la noción de variación. Para elaborar sus explicaciones, se auxiliaron de una función básica, como $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$ y $f(x)=$ sen x, entre otras.
Durante las clases registramos cinco tipos de explicación en las que pudo apreciarse la noción de variación:

- El modelo numérico
- El modelo de la representación geométrica
- El modelo algebraico

- El modelo de la comparación a / b
- El modelo del lenguaje natural

Estas fueron las representaciones o modelos que utilizaron los docentes para explicar los contenidos.
Estas formas de explicar la noción de variación en aula, se crean bajo el discurso construido tanto por el maestro como por sus alumnos, atendiendo a la especificidad del saber en juego. Según se sostiene en la teoría de las situaciones didácticas, donde se destaca el hecho de que la situación de aprendizaje genere una serie de interacciones que hagan funcionales la comunicación y el intercambio de ideas. En tal sentido, los episodios que analizamos en el aula están estrechamente ligados con la búsqueda de una explicación satisfactoria para los actores de una interacción didáctica.

Se producen modificaciones de las explicaciones con base en la interacción, la cual es propiciada por una búsqueda de complementariedad entre las versiones de los alumnos y la del maestro. Las intervenciones del profesor con la doble función de solicitar explicaciones y tratar de orientarlas regulan el curso de la clase. La situación de enseñanza se modifica a través del empleo de explicaciones situadas.

Los múltiples ejemplos de las discusiones en las aulas durante el transcurso del semestre pueden ilustrar mejor el desarrollo de las discusiones. Con poco espacio en este documento, se presenta sólo un ejemplo.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1991). "Analisis". In D. Tall (De.). *Advanced Mathematical Thinking.* (Capítulo 11, pp.167-198). Mathematics Education Library. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bartolini Bussi, M.G. (1998). Verbal interaction in the mathematics classrom: A Vygotskian análisis. Ln H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A.- Sierpinska (Eds.), *Languaje and communication in the mathematics classromm* (pp. 65-84). Reston, VA: NCTM.

Brousseau, G. (1986a). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7/2,33-115.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Paidós Educador.

Cantoral, R. (1992). *Acerca de la intuición del rigor: Notas para una reflexión didáctica.* Publicaciones Centroamericanas 6(1): 24-29.

García, M. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría. CINVESTAV -IPN: Depto. De Matemática Educativa.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol.15/3, 7-52.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). Principles and standars for Teaching Mathematics. *National Council of Teachers of Mathematics.*

Pimm, D. (1991). *El lenguaje matemático en el aula.* Ministerio de educación y ciencia, Ediciones Morata, S. A., España.

Pulido, R. (1998*). Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar.* Tesis Doctoral, CINVESTAV-IPN: Depto. de Matemática Educativa.

Reséndiz, E. (2003). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Tesis de doctorado, CINVESTAV_IPN: Depto. de Matemática Educativa.

Tusón, A. & Unamuno, V., (1999). *¿De qué estamos hablando? El malentendido en el discurso escolar*. Revista Iberoamericana de Discurso y Sociedad. Editorial Gedisa, España, Vol.1, núm. 1.

“LA ARTICULACIÓN DE LA DISCIPLINA MATEMÁTICA CON OTRAS DISCIPLINAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. IMPLICANCIAS DE LA AUTOEVALUACIÓN”

Veliz, Margarita del Valle; Pérez, María Angélica y Ross, Sonia Patricia.
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán (U.N.T.). Argentina
mveliz@herrera.unt.edu.ar; cross@herrera.unt.edu.ar; mperez200@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas; Nivel educativo: superior

RESUMEN

Presentamos en este trabajo el análisis y resultados logrados en una investigación realizada en Cálculo Diferencial con alumnos de primer año universitario, en el segundo cuatrimestre de 2004, trabajándose con una muestra de 215 alumnos sobre un total de 966 inscriptos. Consistió en la implementación de las heurísticas propuestas por Polya y sus seguidores para la resolución de problemas matemáticos, también aplicables a la resolución de problemas en otros dominios, y se impulsó a los alumnos a su autoevaluación permanente, ofreciéndoles metodología y guías para llevarla a cabo.
Analizamos cómo pudo el alumno transferir su experiencia de resolver problemas a contextos diferentes, y qué papel juegan los contenidos en la transferencia, al igual que la autoevaluación.

DESARROLLO

Fundamentación Teórica

A principios del siglo XX la teoría de la “disciplina mental” dominaba el panorama educativo. Se creía que la mente estaba compuesta por ciertas “facultades” que como músculos se fortalecen con la ejercitación. Esta teoría comenzó su declive cuando Thorndike presentó los resultados de su investigación con tests de inteligencia comparando estudiantes de educación física, con otros que habían estudiado “disciplinas”: las puntuaciones obtenidas eran similares. Este resultado llevó a Thorndike a formular su teoría de “los elementos idénticos” para la transferencia del conocimiento. En términos generales la palabra transferencia para este autor se refiere a la influencia del aprendizaje en una situación o contexto sobre un subsiguiente aprendizaje en otra situación o contexto. Si se produce la transferencia, la nueva situación de aprendizaje contiene una mayoría de elementos que son idénticos a aquéllos que se encuentran en la situación original del aprendizaje
Esto justifica a aquellos que piensan que no se debiera dedicar tiempo a aprendizajes que son estériles, y que la educación debiera atender solamente a aquellos aprendizajes que son idénticos a los que realmente uno va a necesitar, es decir, a aquellos aprendizajes que son socialmente útiles.
Más adelante, surgieron las ideas de Gagné sobre la jerarquía de aprendizaje y el análisis de las tareas que conforman la secuencia de instrucción. Se trata de planificar las lecciones bajo el criterio de que, para enseñar un concepto completo o destreza es necesario delimitar las componentes que constituyen el conocimiento que se persigue y organizarlas jerárquicamente en lo que él llama la “secuencia de instrucción”. Es algo así como una cadena o conjunto ordenado de capacidades o destrezas intelectuales ligadas y subordinadas a la capacidad superior que se pretende alcanzar. Las capacidades inferiores recogen el conocimiento que se pretende fragmentado en pequeñas unidades, que se enseñarán y evaluarán de modo separado y que generarán la transferencia de aprendizajes previamente adquiridos a otros de orden superior.

El problema con este tipo de jerarquías es que no siempre es fácil diseccionar un tema en las componentes subordinadas necesarias para la instrucción: ¿Por dónde se empieza, en cuántas unidades, en qué orden o cómo saber si está completa?

Cuando emerge la hipótesis constructivista, que tiene su origen en los trabajos de Piaget, Bruner y Ausubel entre otros, cobra fuerza la idea de que la experiencia, no en el sentido empírico de repetición, sino de actividad y el conocimiento preexistente juegan un papel fundamental en el aprendizaje. Se cree que el conocimiento conceptual no puede transferirse como un producto elaborado de una persona a otra, sino que debe ser construido activamente desde la propia experiencia.

La actividad de resolución de problemas en esta línea, es entendida no en un sentido de aplicación sino como una relación entre los conocimientos que se tienen y la manera particular de resolver la situación. Pero el hecho de que hayamos resuelto un determinado problema, no asegura que haya transferencia de lo aprendido en la resolución de un problema a otro, porque cada uno tiene su particularidad, su contexto y su contenido propios. Pero haya o no transferencia, preguntar a los alumnos de qué otra manera pueden obtener la solución, tiene efectos beneficiosos según Polya (citado en Gómez Alfonso, B. 1991: 87-88).

En el proceso de resolver problemas, Polya identifica etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos juega un papel importante. De manera general estas etapas son: Entender el problema, Concebir un plan: buscar conexiones entre datos e incógnitas, analogías, dividirlo en submetas, Ejecutar el plan y Examinar la solución: ¿es correcta?, ¿hay otros medios para llegar a ella?

En la enseñanza de la Matemática, las ideas de Polya empezaron a implantarse significativamente alrededor de 1980. Las estrategias heurísticas como dibujar diagramas, buscar submetas, considerar casos particulares y resolver problemas más simples se consideraban como parte esencial en la instrucción matemática.

La relación entre heurísticas generales y el aprendizaje de un contenido específico ha sido asunto de discusión en varias disciplinas. "*El dilema se puede describir como: Si una idea aprendida es muy específica, entonces no se espera una transferencia de esta idea a otras situaciones; pero si ésta es presentada en forma muy general, entonces no parece claro cuándo esta idea o estrategia se ha aprendido*" (Santos Trigo, 1997: 17).

Las investigaciones en la línea de la transferencia sugieren que pensar efectivamente depende de un contexto específico, que las habilidades son acotadas contextualmente y que poseen poca aplicación en otros dominios. Por ejemplo Pressley, Zinder y Cariglia-Bull (1987) (citados en Santos Trigo, 1997: 19) "*reportaron que enseñar a los estudiantes el uso de estrategias generales independientes de un dominio específico no producía beneficios fuera del contexto en que eran enseñados*".

Schoenfeld, profesor de la Universidad de Berkeley, California, 1985, ha mostrado que las heurísticas de Polya pueden ser importantes en el aprendizaje de los estudiantes si se discuten a un nivel contextualizado. Además, que el uso de estrategias metacognitivas ayuda al estudiante a utilizar estrategias generales eficientemente. Algunas preguntas que Schoenfeld recomienda a los estudiantes para reflexionar al resolver problemas son: ¿Qué estoy haciendo ahora?, ¿Me está llevando esto a algún lugar?, ¿Qué otra cosa puedo hacer en lugar de continuar con esto? Es importante entonces destacar la componente de monitoreo o control constante por parte de los estudiantes al trabajar los problemas.

"Algunos estudios muestran que cuando se enseñan principios generales conjuntamente con prácticas de autoevaluación y aplicaciones potenciales en una variedad de contextos, se logra la transferencia. Así, la transferencia ocurre cuando:

i. Se le muestra al alumno cómo se relacionan los problemas entre sí.

ii. La atención de los estudiantes es dirigida a resaltar la estructura de problemas comparables.
iii. Los alumnos están familiarizados con los problemas del campo o dominio específico, es decir, matemática, física, química u otra disciplina.
iv. Los ejemplos se acompañan de reglas (formuladas por los mismos estudiantes).
v. *El aprendizaje se lleva a cabo en un contexto social donde las justificaciones, los principios y las explicaciones son socialmente promovidas, generadas y contrastadas"* (Brown y Kane, 1988, citados en Santos Trigo 1997: 22).

OBJETIVOS

Los objetivos de la presente investigación son: analizar los factores perceptivos de los alumnos en cuanto a la resolución de problemas y analizar las variables más significativas de la transferencia en la resolución de problemas de la disciplina Matemática al área de Economía, en alumnos de primer año de la Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.T.

METODOLOGÍA

Muestra: Los alumnos que participaron de la experiencia fueron 215 de un total de 966 inscriptos para cursar Cálculo Diferencial, seleccionados en forma aleatoria.
Instrumentos: Se efectuó la investigación en dos sentidos:
1.- La actuación práctica de los alumnos en la resolución de las situaciones problemáticas propuestas, para lo cual se controló la transferencia de los conceptos aprendidos, haciéndose un análisis de las pruebas parciales de la asignatura, lo que nos habla de la competencia lograda por ellos.
2.- Se requirió la opinión de los propios alumnos mediante la aplicación de una encuesta para analizar cuáles son los factores que influyen desde su percepción en la transferencia y cómo actuaron frente a las autoevaluaciones propuestas. Se utilizó una escala tipo Lickert para estas mediciones.
Se diseñó especialmente para esta investigación un instrumento compuesto de 18 ítems. En una primera fase, esta encuesta se aplicó a un grupo reducido de alumnos de la población, a fin de determinar si los ítems podían ser interpretados correctamente.
En una segunda fase, se sometió la encuesta al criterio de expertos para asegurar su validez, excluyendo finalmente 5 ítems considerados confusos quedando así la encuesta definitiva compuesta por 13 ítems.
Análisis de datos: En cuanto al estudio de las pruebas parciales, se analizó de qué manera resolvieron los problemas de aplicación a Economía. Se trabajó sobre las funciones de oferta, demanda, ingreso, costo y beneficio que en las clases prácticas habían estudiado, y en donde se les indicaron las heurísticas propuestas por Polya en el momento de la resolución de problemas.
Dentro del diseño de esta investigación estaba previsto que los problemas se confeccionaran con distinta complejidad, esto es, diferente número de elementos en la secuencia para el armado de las funciones y la interpretación de lo pedido. Se midió a través de variables que tienen que ver con los conocimientos matemáticos y su interpretación al transferirlos a problemas de Economía. La selección de los problemas se hizo en forma aleatoria.
En cuanto al análisis de las encuestas, se realizaron análisis descriptivos y correlacionados. Los datos fueron analizados por el paquete de programas estadísticos SPSS v.10, al igual que el cálculo del coeficiente Alpha de Cronbach para medir la fiabilidad del instrumento, y se trabajó con la Prueba de esfericidad de Barlett y el Coeficiente de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) para comprobar si la matriz de

correlaciones de las variables de la encuesta era apropiada para realizar un análisis factorial, obteniéndose resultados positivos.

RESULTADOS

a) Pruebas parciales

Cuadro Nº 1: Descripción de la variable **"*Arma la función*"**

Problema	Proporción de alumnos de la muestra que "*Arma la función*"
1	0.43
2	0.22
3	0.71
4	0.45

En este cuadro se observa que en problema 2 es el que produjo mayores dificultades a los alumnos para realizar la transferencia pues el armado de la función dependía de un resultado previo. En cambio el problema 3 era sencillo (es el que un gran porcentaje de los alumnos resolvió bien) y los otros dos problemas (1 y 4) con situaciones intermedias de resolución. En estos últimos los alumnos trabajaron en proporciones similares.

El análisis se realizó con la prueba χ^2 para muestras independientes, encontrándose $\chi^2_{(3)} = 17{,}435 \; (p\text{-value} = 0{,}0004)$ y para las comparaciones múltiples con el procedimiento de Marascuillo. (Berenson. 1996: 629).

Para analizar el comportamiento de la variable **"*Interpretación de lo pedido*"** en los cuatro problemas, se realizó la prueba χ^2 para muestras independientes, encontrándose diferencias significativas a un nivel $\chi^2_{(3)} = 16{,}517 \; (p\text{-value} = 0{,}001)$. Se realizó una Prueba de Comparaciones Múltiples, detectándose que existen diferencias significativas, cuando los alumnos interpretan lo pedido, entre los diferentes problemas.

Los resultados indican claramente el orden de complejidad en que fueron elaborados los problemas para observar que la transferencia se ve en muchos casos dificultada por problemas operacionales y algebraicos. De esto se desprende la siguiente reflexión: los alumnos en situaciones donde interpretar lo pedido requiere de procesos u operaciones secuenciales más complejas, tienen más dificultades en realizar la transferencia de los conocimientos.

Encuesta

Los indicadores de la adecuación de la muestra KMO = 0,78 y el Test de esfericidad de Barlett (p<0,00001) permitieron la realización de un análisis factorial a partir de la matriz de correlaciones.

El análisis factorial realizado (método de componentes principales con rotación varimax) dio lugar a 4 factores con eigenvalores mayores que 1. Para la interpretación de los factores, se asignó a cada ítem el factor considerando una saturación de 0,58 como apropiada para incluir un ítem en un factor. A cada uno de los factores se le ha asignado la denominación que mejor refleja el contenido del mismo. A continuación, analizamos los resultados del análisis factorial de la encuesta, en donde exponemos las tablas correspondientes a algunos de los factores, el nombre del factor, la varianza explicada, la descripción de los ítems, así como la saturación de cada ítem en el factor.

Cuadro N º2 - Factor "Cuestiones afectivas"

Ítem	Contenido	Saturación
3	Me **siento** bien cuando tengo que resolver en forma **independiente** ejercicios y problemas matemáticos.	0.768
7	**Siento** seguridad cuando debo trabajar con ejercicios y/o problemas en matemática.	0.726

6	Me **agrada** el desafío que presenta un problema matemático.	0.582
5	**Comprendo** todo lo referente a ejercicios y/o problemas en Matemática.	0.612
1	El cursado de esta asignatura mejoró mi **predisposición** hacia la Matemática.	0.607
Varianza explicada 26,4 %		

Este factor denominado "Cuestiones afectivas ", registra el mayor porcentaje de varianza explicada, el 26,4% y hace referencia a la **percepción** de los alumnos frente al proceso que realizan cuando resuelven ejercicios y /o problemas y cómo éste influye en su predisposición hacia la Matemática.

Cuadro N º3: Factor "Acciones para concebir y ejecutar un plan"

Ítem	Contenido	Saturación
9	Trato de **encontrar** similitudes en la resolución de ejercicios y/o problemas con algunos resueltos anteriormente.	0.685
12	Para resolver un ejercicio y/o problemas, **pienso** en todo el conocimiento que se relaciona con él, es decir. definiciones , propiedades, etc.	0.699
8	Al resolver una situación problemática, **verifico** si la solución encontrada tiene sentido respecto de las condiciones del problema.	0.633
13	**Reflexiono** sobre los métodos que utilizo para solucionar un ejercicio y/o problema después de resolverlo.	0.639
Varianza explicada 13.1%		

Los demás factores, tienen una varianza explicada menores a los anteriores, y están relacionados con algunos de los alcances y beneficios que tiene el aprender Matemática y que conducen a motivar a los alumnos en sus aprendizajes, más precisamente en el área de Economía, y con los primeros pasos a seguir cuando se tiene que resolver un problema. Según estudios anteriores efectuados por docentes de la cátedra, "*los alumnos no están acostumbrados a utilizar estrategias como "realizar esquemas, o gráficos, ó tablas" para llevar a cabo el planteo del problema y/o ejercicio, lo que les dificulta determinar qué es lo que deben encontrar como solución de los mismos*". Martín y Pérez (2003).

Práctica de autoevaluación

Considerando muy importante y necesaria la evaluación por parte de los propios estudiantes y como medio de introducirlos en esta práctica, se les ofrecieron Guías de autoevaluación y la Metodología para que pudieran autoevaluarse, una vez resueltos los Autoexámenes propuestos al final de cada unidad en las guías de estudio y en el libro de texto elaborados específicamente para atender al estudio y trabajo independiente.

En las respuestas de los alumnos sobre este tema, se puede observar que el 45,5% de ellos resolvieron todos o casi todos los autoexámenes. Luego el interés de la investigación fue conocer si estos alumnos habían realizado una autoevaluación, siguiendo la metodología propuesta para autoevaluarse, y si esta práctica les fue de utilidad a la hora de transferir sus conocimientos a otra disciplina.

Alrededor del 30% de los alumnos que resolvieron los autoexámenes tuvo el hábito de autoevaluarse, a pesar de que todo el grupo contaba con las herramientas necesarias para hacerlo: Guías de autoevaluación y Metodología para autoevaluarse. Evidentemente se resisten a estas prácticas, a las cuales no estuvieron acostumbrados ni en el nivel medio ni en cursos anteriores.

En cuanto a las calificaciones obtenidas (escala de o a 10 puntos), alrededor del 50% de los alumnos que manifestaron haberse autoevaluado siempre o casi siempre obtuvieron una calificación final de 7 (siete) puntos o más, y sólo el 7,4 % aplazos. Se piensa que

esta práctica de autoevaluación por parte de los alumnos debe incrementarse ya que es un modo de que autorregulen con eficacia su aprendizaje y puedan así lograr mejores resultados en este proceso. Se hace necesario por tanto, incentivarlos más en este sentido, de modo que vayan logrando el hábito de autocontrolar su propio aprendizaje.
Lo importante de todo esto es la continuación de este proceso de autoevaluación que viene acompañado de interesantes elementos para lograrla, como lo determinaron los investigadores en la línea de la transferencia, en la cual se diseñó este trabajo. Para llevar a cabo este adiestramiento los docentes debemos pensar esto desde: lo afectivo, lo indispensable para concebir un plan que conduzca a la meta, la utilidad o sentido práctico de lo que se enseña, y de las estrategias de aprendizaje que promueven resultados interesantes tanto en el campo de la matemática como en el ámbito social.

CONCLUSIONES

- Los resultados muestran que existen alumnos donde el proceso que requiere poder realizar una transferencia está en sus comienzos, pero hay otros que han llegado a realizar ese proceso de manera satisfactoria.
- En el análisis factorial efectuado, se ven explicadas algunas de las acciones que se deben llevar a cabo en el proceso de la resolución de problemas y/o ejercicios y las cuales conducen a la autoevalución de los aprendizajes. Estas acciones son componentes importantes que hacen a la transferencia de los conocimientos de un contexto a otro.
- Se observa que la transferencia se ve dificultada en situaciones donde los alumnos deben realizar secuencias operacionales que requieren un mayor razonamiento.
- La autoevaluación por parte de los alumnos, no es tenida en cuenta, es importante implementar actividades que conduzcan a su motivación pues en ella se ejercitan acciones que el alumno muestra resistencia a ponerlas en práctica.

BIBLIOGRAFÍA

Berenson, M.L. y Levine, D.M. (1996). *Estadística básica en Administración*, México: Prentice Hall.

Cabañas, M.G. (2000). *Los problemas. ¿Cómo Enseño a Resolverlos?* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica - S.A. de C.V.

Gómez, B. 1991. “Las Matemáticas y el Proceso Educativo”, en Gutiérrez Rodríguez (ed.) 1991, *Matemáticas: cultura y aprendizaje*, España: Editorial Síntesis.

Jorba, J. y Sanmartí, N. (1996). “*Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación continua*”, Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Cultura, Madrid.

Martín, L. y Pérez, M. (2003). “Ideas e Impulsos que necesita el alumno para resolver problemas: un estudio diagnóstico”. Memorias de las XVIII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines. Merlo, San Luis, Argentina.

Poggioli, L. (2002). “Estrategias de resolución de problemas”, Serie Enseñando a aprender, en www.fpolar.org.ve/poggioli/poggio05.htm.

Pozo, J.I. (1999). *La Solución de Problemas*, Argentina: Santillana.

Santos, L.M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas,* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Veliz, M. (2002). “Sistema de autorregulación y autoevaluación del aprendizaje del Cálculo Diferencial para estimular el trabajo independiente de los alumnos en las clases prácticas”. Tesis de Magíster. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

REPRESENTACIONES EPISTEMOLÓGICAS IMPLÍCITAS DE LOS DOCENTES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICA

María Basilisa García*; Mateos, Mar**
*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina.
**Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid. España.
bagarcia@mdp.edu.ar

Campo de investigación: Tecnología avanzada; Nivel: Superior

Resumen

Se presenta un trabajo que tuvo como objetivo describir las concepciones epistemológicas de docentes universitarios de matemática abordando el problema desde la perspectiva de las teorías implícitas. Se realizó un estudio descriptivo y con un análisis cuantitativo utilizando, para ello, un cuestionario de dilemas. Se pudo establecer que la mayoría de los docentes universitarios de matemática poseen concepciones epistemológicas que, fundamentalmente, oscilan entre el realismo crítico y el constructivismo. A su vez se determinó que aquellos docentes que adoptan concepciones más elaboradas como lo son el constructivismo o el realismo crítico resultaron ser más consistentes en sus respuestas que los docentes que poseen creencias asociadas con el realismo ingenuo.

Introducción

Se denominan “concepciones epistemológicas” a todas aquellas ideas y creencias que poseen las personas respecto del conocimiento, particularmente de cómo se conoce y en qué consiste el proceso de conocer.

En los últimos años se han desarrollado dos grandes líneas de investigación en éste campo. Por un lado, se destacan los trabajos llevados a cabo con el objetivo de aportar datos sobre el constructo, proponiendo modelos que expliquen los diferentes niveles de organización mental de las concepciones epistemológicas (Belenky et. al 1986; Baxter Magolda, 1992; Perry, 1970) y estableciendo las dimensiones desde las que pueden ser analizadas éstas concepciones (Schommer, 1990 y Hammer, 1994).

En la segunda línea, se encuentran trabajos que analizan las relaciones entre ciertas concepciones epistemológicas con cuestiones como el desarrollo cognitivo (Kardash & Howell, 2000), la motivación (Schoenfeld, 1992), la comprensión (Schommer, 1990), las estrategias de enseñanza (Hashweh, 1996), los esfuerzos de los profesores por adaptar el currículum (Benson, 1989), etc.

El trabajo que aquí se presenta pretende hacer un aporte nuevo en dos aspectos poco indagados:

- Describir y caracterizar las concepciones epistemológicas desde la perspectiva de las teorías implícitas (Marrero, 1993). El hecho de entender que las concepciones epistemológicas se pueden encontrar guardando distintos niveles de complejidad en la estructura cognitiva, implica una mirada diferente respecto de los trabajos previos. A partir de la revisión bibliográfica se pudo establecer que, en general, los trabajos que indagan concepciones de docentes, tanto los de carácter cuantitativo como cualitativo, lo hacen a partir de preguntas directas, estimulando la reflexión del docente y, por lo tanto, recogiendo información fundamentalmente de aquellas cosas que son capaces de explicitar. Sin embargo, se sabe que muchas veces, aquello que los sujetos explicitan no está completamente en línea con sus ideas implícitas, construidas a partir de su propia experiencia al interactuar tanto en el mundo natural como social. Son éstas concepciones las que se intentará rastrear ya que, análisis previos muestran que tienen una influencia decisiva en la implementación de las reformas curriculares en el aula (Gil Pérez y Pessoa de Carvalho 2000; Maor and Taylor, 1995 Medina y otros, 1999; Porlán, 1994; Schoenfeld, 1988).

- A su vez, se indagará el problema en un ámbito poco explorado como lo es el universitario, particularmente en el caso de los docentes de matemática.

Metodología

Objetivo de la investigación

- *Indagar las concepciones epistemológicas de profesores universitarios*

Estudio: Se realizó un estudio descriptivo.

Variable: *concepciones epistemológicas*

Dimensiones de la variable: La selección de variables se realizó teniendo en cuenta las recomendaciones de Hofer y Printich (1997).

- Certeza del conocimiento
- Fuente Del conocimiento
- Justificación del conocimiento

Categorías de la variable

Las categorías de las variables se establecieron a priori (Tabla I). Se tomó como base la propuesta que hacen Pozo y Gómez Crespo (1998) acerca de los "principios que subyacen a los diversos tipos de representaciones en el ámbito del conocimiento científico.

Categoría	Código
Realismo ingenuo	1
Realismo crítico	2
Constructivismo	3

Tabla I

Nivel de medición de las variables

Las variables seleccionadas son categóricas y su nivel de medición es nominal. Cada categoría será identificada con un número que no representa una cantidad.

Participantes

La población comprende a todos los docentes regulares o interinos, con un año como mínimo de permanencia en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, independientemente de su categoría y dedicación.

Muestra: Es de tipo no probabilístico, con sujetos tipo. Se encuestó a 30 docentes de matemática que trabajan el la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata con más de diez años de antigüedad, seleccionados al azar.

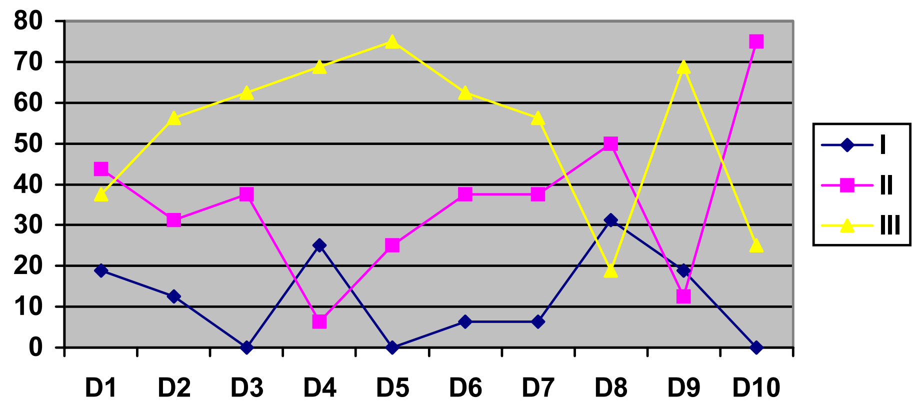
Instrumento

Una de las principales dificultades para acumular evidencias respecto de las concepciones, desde la perspectiva de las teorías implícitas, reside en seleccionar la metodología adecuada. Si bien los estudios cualitativos permiten obtener información más rica y se resuelven problemas como los del contexto, tienen dificultades relacionadas con el tamaño y representatividad de la muestra, que no presentan los estudios cuantitativos. Teniendo en cuenta esto, se optó por la utilización de un cuestionario de dilemas ya que éstos permiten consultar a un número importante de personas pero, a su vez, recogen información más profunda porque la persona que responde no lo hace directamente sino a través de una situación contextualizada en la que debe involucrarse.

El cuestionario consistió en diez dilemas, cada uno con tres opciones de respuesta- una para cada posición- cuya fiabilidad y validez fueron establecidas en un trabajo previo. (García, 2003) En el apéndice y, a modo de ejemplo, se presentan algunos dilemas.

Resultados

A continuación se muestra la distribución de frecuencias obtenida:



Del análisis del gráfico se destacan las siguientes cuestiones :

- En general, las posiciones que corresponden al constructivismo predominan sobre las concepciones pertenecientes al realismo crítico y, éstas a su vez lo hacen frente a las realistas ingenuas.

- Es interesante comparar el dilema "1" con el "6" ya que en ambos se pregunta sobre el mismo tema: los distintos modelos de la molécula de agua. La diferencia reside en que, mientras en el primer dilema se pide optar a partir de dibujos; en el dilema, "6", se presenta una discusión teórica que requiere, por parte del profesor, un mayor grado de reflexión. Todo parece indicar que, al acercarnos a representaciones más explícitas, el predominio de las posiciones constructivistas frente a las realistas se hace más importante.

- Una observación para destacar es lo que ocurre en el dilema "9", donde no se presenta una meta-reflexión sino que se pide opinión frente a lo que está mostrando un microscopio. Aunque predominan claramente las posiciones constructivas, en este caso, las posiciones realistas críticas se acercan a las ingénuas, quedando la pregunta abierta respecto de si, al acercarnos a representaciones mentales de carácter más implícito, el realismo crítico se traduce en ingénuo.

- Otro dilema en el que el porcentaje de frecuencias referidas a la posición realista ingenua resulta importante frente al realismo crítico es el “4”. En este dilema se hace referencia al método científico. Es evidente que todavía son muchos los que lo conciben como un algoritmo necesario suficiente para la justificación del conocimiento.

Consistencia en las respuestas

Los datos correspondientes a la consistencia interna se calcularon a través del coeficiente α de Cronbach:

	α de Cronbach
Teoría 1	0.231
Teoría 2	0.576
Teoria 3	0.712

Si se compara el coeficiente α general con el valor que corresponde a la estandarización del instrumento, 0, 7997, se puede establecer que las concepciones epistemológicas de los profesores de matemática , en general, son poco consistentes. Excepto aquellas que corresponden a los docentes que se encuentran en posciones constructivistas. Dado que el instrumento utilizado es el mismo que el estandarizado y, por lo tanto, el número de ítems no se modificó, la disminución en el valor del α en las posiciones realistas responde a un coeficiente promedio de pearson bajo, es decir que no existe correlación entre la opción que un sujeto elige en un determinado dilema y las que selecciona en el resto de los dilemas del cuestionario.

Conclusiones

Los resultados obtenidos permiten establecer que los docentes universitarios de matemática poseen concepciones epistemológicas que oscilan fundamentalmente entre el realismo crítico y el constructivismo.

A su vez se determinó que aquellos docentes que poseen concepciones más elaboradas como lo son el constructivismo o el realismo crítico resultaron ser más consistentes en sus respuestas que los docentes que poseen creencias asociadas con el realismo ingenuo. Si se analiza esta cuestión desde la perspectiva teórica de Karmiloff- Smith (1994), que postula que las representaciones mentales se encuentran guardando distintos niveles de complejidad en la estructura cognitiva y que, a medida que el grado de explicitación aumenta también devienen más estables, la mayor consistencia en posturas más elaboradas daría cuenta que estas concepciones han sido adoptadas conscientemente más que incorporadas como consecuencia de la propia experiencia con el mundo cultural y natural como ocurre con las teorías implícitas.

Por otro lado, la inconsistencia en las respuestas de los docentes con ideas cercanas al realismo ingenuo podría indicar que sus ideas estarían más cerca de ser modelos mentales que construyen en el momento de responder más que concepciones con consistencia de teorías.

Por último, dado que las concepciones epistemológicas suelen constituir los anteojos paradigmáticos desde los cuales un docente, consciente o incoscientemente, diseña la práctica, establecer el carácter de dichas concepciones constituye un punto de partida fundamental para todo cambio pedagógico de fondo que se pretenda realizar. Las carácteristicas de la sociedad actual y, con ella, las nuevas demandas educativas requieren entender el conocimiento desde perspectivas más, constructivistas donde si bien se pueda establecer la superioridad de una teoría frente a otra, también se tenga en cuenta aspectos como el contexto en el que se la utiliza. Esta renovación será posible si los docentes comienzan por adoptar concepciones epistemológicas actuales.

Referencias Bibliográficas

Baxter, M. (1992). Knowing and reasoning in college: Gender- relates patterns in students' intellectual development. San Francisco: Jossey Bass. In Hofer,

B. K., & Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. Review of Educational Research, 67(1), 88-140.

Benson, G. (1989). Epistemology and science curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 21, 329-344.

Belenky, M., Clinchy, B., Goldberger, N., & Tarule, J. (1986). Women's ways of knowing: The development of self, voice and mind. New. York: Basics Books. In Hofer, B. K., & Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. Review of Educational Research, 67(1), 88-140.

García, M. (2003) "Diseño de un instrumento para evaluar concepciones epistemológicas implícitas" Trabajo presentado en el examen DEA perteneciente al Doctorado en Educación Científica de la UAM.

Gil D. y Pessoa, A. (2000) Dificultades para la incorporación a la enseñanza de los hallazgos de la investigación e innovación en didáctica de las ciencias. *Educación Química*. 11(2) Abril, 244-251.

Hammer, D. (1994). Epistemological beliefs in introductory physics. *Cognition and Instruction*, 12(2), 151-183.

Hashweh, M. (1996) Effects of science teachers' epistemological beliefs in teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, 33, 47-63.

Hofer, B. & Pintrich, P. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. Review of Educational Research, 67(1), 88-140.

Kardash, C., & Howell, K. (2000). Effects of epistemological beliefs and topic-specific beliefs on undergraduates' cognitive and strategic processing of dual-positioned text. *Journal of Educational Psychology*, 92, 524-535.

Karmiloff-Smith, A. (1994) Mas allá de la Modularidad. Madrid: Alianza

León, O. y Montero, I (1997) *Diseño de investigaciones*. 2da. Edición. Madrid: McGraw-Hill.

Maor, D & Taylor, P. (1995) Teacher epistemology and science inquiry in computerized classroom environment. *Journal of research in Science Teaching*, 32, 839-854.

Marrero, J. (1993) Las teorías implícitas del profesorado: vínculo entre la cultura y la práctica de la enseñanza, en Rodrigo, M.J., Rodríguez, A y Marrero, J. *Las teorías implícitas: Una aproximación al conocimiento cotidiano*. Madrid: Visor.

Medina, A., Zimancas, K., y Garzón, C. (1999) El pensamiento de los profesores universitarios en torno a la enseñanza y demás procesos implícitos. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 2 (1).

Perry, W. (1970). *Forms of intellectual and ethical development in the college years: A scheme.* New York: Holt, Rinehart and Winston. In Hofer, B. K., &

Pintrich, P. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, 67(1), 88-140.

Porlán, R. (1994) Las concepciones epistemológicas de los profesores. El caso de los estudiantes de magisterio. *Investigación en la Escuela.*22, 67-84.

Pozo, J.I., Gómez Crespo, M.A. (1998) *Aprender y enseñar ciencias.* Ediciones Morata, S.L.

Schoenfeld, A (1988). When a good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics classes. *Educational Psychology*, 23, 145-166.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D.A. Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. 334-379. New York: MacMillan.

Schommer, M. (1990). Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 82, 498-504.

EL SABER MATEMÁTICO, SU ENSEÑANZA Y SU APRENDIZAJE: LA MIRADA DE ALUMNOS Y PROFESORES

CORICA, Ana Rosa; OTERO, María Rita; SUREDA, Diana Patricia*NIECYT. Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA.Argentina.*
acorica@exa.unicen.edu.ar; rotero@exa.unicen.edu.ar; dipasu2002@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Representaciones acerca de la Matemática de los estudiantes en nivel medio. Nivel educativo: Medio.

Resumen

Ésta investigación se sitúa en la problemática del fracaso escolar en Matemática en estudiantes de Nivel Medio (Corica, Otero, 2005; Gascón et. al., 2001). Nuestro objetivo fue estudiar las ideas de alumnos y profesores acerca del saber matemático, su enseñanza y aprendizaje, para poder explorar los posibles factores que intervienen en el fracaso en Matemática de los estudiantes. En esta investigación se abordan aspectos didácticos a partir de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1999), aspectos cognitivos a partir de la Teoría de Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1976) y aspectos epistemológicos vinculadas al saber matemático a partir de las ideas de Klimovsky (2000). En este trabajo se presentan resultados de dos estudios realizados con estudiantes de Nivel Medio y un tercer estudio vinculado con profesores del mismo nivel.

1. Introducción

Es ampliamente conocido que los aprendizajes escolares en el área de Matemática son insuficientes y que los estudiantes en general y los de la educación media en particular, no consiguen construir las representaciones mentales adecuadas para aprender conceptos matemáticos complejos y para utilizarlos en situaciones nuevas (Otero, 1998). Numerosas investigaciones confirman el elevado índice de fracaso escolar en Matemática (Bolea et. al., 2001; Corica, et. al, 2005; Gascón et. al., 2001; Otero, 1998;), expresado tanto en el conocimiento, las competencias y habilidades que efectivamente adquieren los alumnos, como en su valoración acerca de esta ciencia. Tanto en la cultura corriente como en algunos documentos curriculares, se considera con cierta ingenuidad que el profesor es el principal responsable a la hora de resolver el conjunto de problemas y cuestiones relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y el que, en última instancia, debe dar respuesta a los mismos (Gascón et. al., 2001). También es destacable la importancia que tanto estudiantes como profesores asignan al supuesto de que el profesor debe "explicar" los conocimientos al alumno de la forma mas exhaustiva y detallada posible, de lo cual a su vez se hace depender que el alumno "entienda" y luego "aprenda".
Esta investigación se sitúa en la temática del fracaso escolar en matemática considerando las dimensiones: alumnos, profesores, conocimiento e institución. Se abordan aspectos didácticos, para ello nuestro referencial teórico es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1999) y para abordar los aspectos cognitivos nuestro referencial teórico es la Teoría de Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1976; Moreira, 2000). Con respecto a las preguntas epistemológicas vinculadas al saber matemático se adoptan las ideas de Klimovsky (2000) quien asume que hay al menos cuatro grandes formas de concebir a la matemática como ciencia.

En este estudio se centra la atención en las ideas de los estudiantes y los profesores acerca del saber matemático, de su enseñanza- aprendizaje. Además, se estudian tanto las ideas de los estudiantes como de los profesores analizando si existe o no correspondencia entre ellas y si a su vez tales ideas se vinculan con lo que se da en llamar la cultura escolar dominante.

2. Metodología

Se realizaron tres estudios: dos de ellos vinculados con estudiantes de Nivel Medio y el tercero con profesores del mismo nivel. Con respecto a los estudios vinculados con estudiantes, el primero de ellos (Estudio I) consistió en la recolección de información de las vivencias de los estudiantes en las clases de Matemática a través de un Diario de clase (Transcripciones personales de los estudiantes sobre sus vivencias en las clases de Matemática.) La metodología que se adoptó para este estudio fue cualitativa puesto que se pretendió describir e interpretar las vivencias de los estudiantes. Los Diarios fueron realizados por estudiantes seleccionados al azar, de tres escuelas técnicas de la ciudad de Necochea, que pertenecían a 9º año de EGB, 1º, 2º y 3º año de Polimodal. La elección de estos años escolares tuvo como objetivo explorar posibles diferencias entre los estudiantes de un año escolar a otro o de un nivel escolar a otro. Se contó con una muestra de N= 24 estudiantes, conformada por la misma proporción de estudiantes de los años escolares seleccionados. A partir del estudio de los Diarios se generaron categorías para describir las ideas de los estudiantes. La formulación de dichas categorías se realizó mediante inducción analítica puesto que no se está interesado en la incidencia o frecuencia de ciertas cualidades, sino en la generación de conceptos y categorías teóricas que se ajusten a la realidad. (Branen, 1992).

Con el objeto de ampliar y precisar los resultados obtenidos en el Estudio I se realizó el Estudio II. En este estudio se empleó una metodología cuantitativa y consistió en la aplicación de una encuesta a estudiantes de Nivel Medio. El diseño de la encuesta dependió de los resultados obtenidos del estudio anteriormente detallado, por lo que las preguntas del cuestionario fueron cerradas ya que el propósito fue obtener respuesta de confirmación o desestimación ante una proposición. La encuesta se administró en forma personal a N=857 estudiantes pertenecientes 9º año de EGB , 1º, 2º y 3º año de Polimodal de seis instituciones. La selección de las escuelas y de los cursos fue realizada al azar. Se trata de un estudio cuantitativo en el cual se utilizaron técnicas provenientes del Análisis Multivariado de Datos (Lebart & Morineau, 1994; Lebart Morineau y Fenelón, 1985) que permite clasificar la población de estudiantes considerando un conjunto importante de variables. Para el análisis se utilizó el paquete SPAD 3.5. Las técnicas de reducción factorial proporcionan una simplificación y síntesis de la información que permite analizar las principales conjunciones-oposiciones entre las variables y la representación gráfica de las diferentes modalidades de las variables en planos factoriales, y proporciona una visión directa y global de los principales aspectos de la información a tener en cuenta (Benzécri, 1980; Crivisqui E. & Villamonte G., 1997). El análisis factorial es un requisito previo para el análisis de clúster que permite encontrar tipologías y detectar asociaciones de variables, o características relacionadas con los grupos de estudiantes y docentes.

Con respecto al estudio vinculado con profesores (Estudio III) se realizó una entrevista en profundidad semiestructurada a profesores de Matemática de enseñanza media para abordar aspectos relacionados con las concepciones epistemológicas, los mitos de la pedagogía popular acerca de la enseñanza - aprendizaje de la Matemática (Bosch et. al., 2003) y las

organizaciones matemáticas efectivamente enseñadas. El diseño de investigación por el que se optó fue el estudio de caso. Se consideró que este el adecuado para realizar un análisis intensivo y profundo de uno o pocos individuos.
La entrevista se desarrolló a partir de cuestiones que persiguieron reconstruir lo que para el entrevistado significa el objeto de estudio. La selección de los profesores fue intencional y predeterminada. Se seleccionaron 4 profesores de Matemática de los estudiantes que realizaron la encuesta con el objetivo de poder contrastar las concepciones de los estudiantes con las de sus profesores. Se seleccionaron docentes con distinto tipo de formación y antigüedad en la profesión.
A partir de la información recabada en las entrevistas se generaron categorías para describir las ideas de los cuatro profesores. La formulación de dichas categorías se realizó mediante inducción analítica (Branen, 1992).

3. Análisis de resultados

Los estudiantes
A partir del análisis de los Diarios se generaron categorías que hacen referencia a:

- Las causas por las que los estudiantes manifiestan agrado/desagrado de las explicaciones realizadas por el profesor, de los contenidos de la clase.
- Cómo aprenden los estudiantes Matemática (a partir de las explicaciones del profesor, con ayuda de sus compañeros)
- Causas por las que los estudiantes manifiestan agrado/desagrado de las clases de Matemática.
- Especulaciones de los estudiantes acerca de la aprobación/desaprobación de las evaluaciones realizadas.

Del Estudio I se concluye que:

- Los distintos tipos de manifestaciones recogidas, no son específicos de ningún año escolar. En general, los comentarios que se recogen se refieren a críticas de las prácticas llevadas a cabo por el profesor. Inferimos que, desde el punto de vista de los estudiantes, las actitudes del profesor resultan determinantes en su aprendizaje en Matemática.
- Percibimos a los estudiantes como dependientes de sus profesores: necesitan que el docente les explique todo lo que deben hacer. Inferimos que los estudiantes de Matemática tienen poca autonomía para el estudio y no se sienten responsables de su propio aprendizaje. Por lo tanto, no reúnen los requisitos para aprender significativamente en este campo de conocimiento. Su interés por aprender Matemática se encuentra ligado a la aprobación de la materia.
- En el Nivel Medio encontramos estudiantes poco resilientes o con baja tolerancia a la frustración, les agrada Matemática sólo mientras entienden y pueden realizar la tarea sin obstáculos. Parecería que los estudiantes no están habituados a lidiar con el error, ni a manejar emocionalmente la sensación de frustración que produce el fracaso.
- En cuanto al profesor, los estudiantes le asignan el papel protagónico en la clase. Su tarea es la de explicar los conceptos y no la de *"conversar"* con los estudiantes para compartir un lenguaje y elementos de una cultura, en este caso, Matemática.

- Con respecto al fracaso en Matemática, para los estudiantes se refiere a desaprobar la asignatura, no se sienten responsables de su propio fracaso; las causas las vinculan con las prácticas llevadas a cabo por sus profesores.

Los resultados obtenidos en este primer estudio mostraron cualitativamente la relevancia que tiene la actividad del profesor en la clase de Matemática. En el Estudio II abordamos mediante técnicas cuantitativas, las opiniones de los estudiantes acerca de este, y otros aspectos. Este segundo estudio consistió en la aplicación de una encuesta a 857 estudiantes de Nivel Medio. En la encuesta indagamos acerca de la concepción de los estudiantes sobre la dificultad para el aprendizaje de la Matemática; la importancia e interés otorgado a dicho aprendizaje; la relación que establecen con su profesor; sus actitudes frente a los errores cometidos y la adhesión a mitos sobre el saber matemático, su enseñanza y aprendizaje.
A los resultados obtenidos de la encuesta se realizó un análisis factorial de correspondencias múltiples y posteriormente se realizó una clasificación para encontrar una posible tipología de los sujetos encuestados. Como análisis complementario a los anteriores se emplearon técnicas de estadística descriptiva. Esto nos permitió concluir lo siguiente:

- El saber matemático se encuentra valorizado por los estudiantes de la Escuela Media, posiblemente, debido a que existe un reconocimiento social hacia dicho saber. Pero muy pocos manifiestan interés en aprender Matemática. Este resultado coincide con lo anticipado en el Estudio I: el interés de los estudiantes por aprender Matemática, se centra en aprobar la materia.
- En cuanto a la enseñanza - aprendizaje de la Matemática sólo una minoría de alumnos tendría alguna autonomía para aprender esta disciplina (27% de los sujetos encuestados). En todo el Nivel Medio encontramos un alto porcentaje de sujetos que sólo tratan de responder a las demandas del profesor y colocan fuera de ellos la responsabilidad de aprender, trasfiriéndosela al docente. Estos resultados dan sustento empírico a nuestro supuesto de que tanto alumnos como profesores, atribuyen como principal tarea del profesor la de "explicar" los conocimientos en la forma más exhaustiva y detallada posible, de lo cual a su vez, hacen depender que el estudiante "entienda" y luego "aprenda". Los estudiantes de Nivel Medio consideran, sostienen y demandan al profesor su papel de "explicador" quien debe centrar la mayor parte de su actividad en explicarles. La tarea del profesor es "iluminar" los conceptos, como si los objetos matemáticos estuviesen en un lugar oscuro y fuese necesario echar luz sobre ellos para "verlos". De esta forma, el topos del alumno en el proceso de estudio acaba siendo reducido, por los mismos alumnos.

Los resultados de los estudios I y II conducen directamente al análisis de la actividad del profesor. Para abordar el problema de la actividad del profesor y la consecuencia que ella parece tener en la formación de los alumnos se diseño el Estudio III.

Los profesores

El análisis de los protocolos de los profesores entrevistados condujeron a la formulación de categorías de análisis mediante inducción analítica. Las categorías formuladas abordan los siguientes aspectos:
- Las ideas de los profesores acerca del fracaso escolar en Matemática de los estudiantes,

- sus ideas acerca del saber matemático (es decir, cuál es el objeto de estudio de la Matemática y la forma en que los matemático producen conocimiento matemático),
- cómo se aprende Matemática, cómo se enseña y cómo evalúan a sus estudiantes.

A partir del estudio de los protocolos concluimos que:

- Los cuatro profesores entrevistados tendrían una concepción platónica acerca del saber matemático. Los objetos de los cuales se ocupa la Matemática parecen existir en un mundo de objetos formales o abstractos y mediante la intuición racional la mente captaría las entidades formales o abstractas y conocería cuáles son las leyes que les corresponden.
- Según estos profesores, para aprender Matemática primero se deben adquirir las estructuras fundamentales de la Matemática mediante definiciones claras y precisas. Luego de este aprendizaje, los alumnos, por sí solos pueden resolver las tareas que involucran los conceptos así definidos. Según esta visión, sólo cuando se cuenta con un buen fundamento matemático, se podría aplicar la Matemática.
- Los cuatro profesores parecerían identificarse con el modelo que hemos denominado profesor “explicador”, es decir ellos sienten que su principal actividad consiste en explicar los contenidos de la forma más detallada y exhaustiva posible. El hecho de que el profesor sea el actor principal en el proceso de estudio y termine anulando el topos del alumno, es viable a partir de la concepción platónica del saber matemático. Como los objetos matemáticos pertenecerían a un mundo abstracto y perfecto inalcanzable para los alumnos, la tarea del docente es “iluminar” los objetos matemáticos para que los estudiantes puedan aprehenderlos y verlos.
- Los resultados obtenidos en el Estudio III, dan sustento a las conclusiones de los estudios anteriores. Los Estudios I y II mostraron que en toda la escolaridad media encontramos un alto porcentaje de sujetos que sólo tratan de responder a las demandas del profesor y se caracterizan por colocar fuera de ellos la responsabilidad del aprendizaje, trasfiriéndosela al docente. Dichos estudiantes conciben a un buen docente como aquel que explica secuencial y detalladamente, tanto los contenidos como las tareas a realizar. Estos resultados son previsibles ya que el modelo dominante de profesor que ellos conocen y en consecuencia desean, sería el de profesor explicador.
- Los cuatro profesores coinciden en que la evaluación sería un acto terminal del proceso de aprendizaje, en lugar de considerarla una más entre varias instancias relevantes. Ellos consideran a la evaluación escrita e individual como un instrumento de fiable para decidir si un estudiante aprendió los contenidos del currículum.
- Con respecto al fracaso escolar en Matemática, los profesores entrevistados coinciden y reconocen que existe un elevado índice de estudiantes en toda la escolaridad media que fracasan. Los profesores no parecen sentirse responsables del fracaso de los alumnos: lo vinculan con factores que no se encuentran relacionados con su actividad docente.

4. Conclusiones

Los estudios realizados permiten afirmar que las concepciones de los profesores y alumnos acerca de la enseñanza – aprendizaje de la Matemática son coincidentes. La actividad principal del profesor quedaría identificada con lo que hemos denominado Metáfora del Profesor Explicador, mientras que la actividad del alumno se resume en la Metáfora del Estudiante Dependiente del Profesor. Una característica esencial de este estudiante es su necesidad de que el profesor le diga todo lo que debe hacer. Ambas metáforas parecen

alimentarse mutuamente. Sin embargo, la función del profesor tal como es vista por los alumnos obedece a que ellos han sido expuestos a este modelo que genera su dependencia por un tiempo muy prolongado.
Ambas metáforas se adaptan muy bien con la concepción platónica del saber matemático, tanto porque el profesor sería el iluminador para que los estudiantes puedan ver como porque los objetos existen con independencia de los sujetos y para aprehenderlos se requiere una capacidad de intuición y razonamiento que estaría lejos de las posibilidades que los profesores adjudican a los alumnos. Entonces, el saber requiere ser mostrado y recién entonces cuando han sido aprehendidos, los objetos pueden ser utilizados. Quizás por esto, los profesores enseñan Matemática de manera poco constructivista y escasamente contextual. Como consecuencia de esta situación, los estudiantes esperan comprender "de un solo golpe" ante una primera explicación recibida, y poseen baja resistencia a la frustración y poca disposición a realizar esfuerzos sostenidos en el tiempo.
El fracaso escolar en Matemática -detectado en toda la escolaridad media por diversas investigaciones y reconocido por los docentes que intervinieron en este trabajo- no consiste en que los alumnos desaprueben los exámenes, sino en la resignación y desvalorización de los profesores acerca del saber: los estudiantes aprueban contenidos que tienen poca relevancia. Esto revela que la conciencia didáctica de los profesores esta cerrada y que por lo tanto, ellos no consiguen ver que el fracaso de los estudiantes está relacionado con la forma en que se enseña, sino que lo atribuyen a factores exógenos.
Finalmente, es necesario aunque no suficiente, incidir sobre la formación de futuros profesores y la capacitación de los profesores en servicio, para dotarlos de herramientas teóricas que les permitan trascender las praxeologías espontáneas. Para superar las praxeologías espontáneas, se requiere continuar las investigaciones sobre las praxeologías efectivamente enseñadas por los profesores.

5. Bibliografía

Ausubel, D. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México, Editorial Trillas. Traducción al español de Roberto Helier D.

Benzécri, J. (1980) Practique de l'Anályse des Donneés T 1 y 2. Paris, Dunod.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001*): "La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad".* Recherches en Didactique des Mathématiques.21(3).

Bosch, M; Espinoza, L; y Gascón, J; (2003); *"El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas"*; Recherches en Didactique des Mathématiques, 23(1).

Brannen (1992); *"Combining Qualitative and Quantitative approaches: an overview"* en Brannen *Mixing Methods: Qualitative and Quantitative Research*, Aldershot, Avenbury.
chevallard, Y; (1999) "*El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*" Recherches en Didactique des Mathématiques; 19(2).

Corica, A. y Otero, M. (2005); *"El saber Matemático, su enseñanza y su aprendizaje: la mirada de los alumnos y los profesores".* Tesis de Licenciatura. (UNCPBA).

Crivisqui, E. & Villamonte, G. (1997) Presentación de los métodos de análisis factorial de correspondencias múltiples. PRESTA *Programme de recherche et d' enseignement en statistique apliqueé*, Bruxelles, Belgique.

Gascón, J., Bosch, M. y Bolea, P. (2001); *¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas?;* Educación Matemática. 13 (3). México.

Klimovsky (2000); *Las ciencias formales y el método axiomático*; Ed. AZ; Bs As.

Lebart, L. y Morineau A. (1994) *Systéme portable d'Anályse des Données Numeriques*, CISIA, Saint Mandé.

Lebart L., Morineau, A. y Fenelon, J. (1985) *Tratamiento estadístico de datos.* Editorial Marcombo. Barcelona.

Moreira, A; (2000); *"Aprendizaje significativo Crítico"*; Conferencia dictada en el III *Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo*, Lisboa (Peniche).

Otero, M. (1998): *"Buscando Modelos Mentales"*. Disertación de Maestría. Facultad de Ciencias Humanas. UNICEN-UNICAMP.

ACTITUD Y RENDIMIENTO EN ESTADÍSTICA EN PROFESORES PERUANOS

Ana Sofía Aparicio Pereda Jorge Luis Bazán Guzmán
Universidad de San Pablo. Brasil - Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú
anasofia@usp.br / bazan.jl@pucp.edu.pe

Campo de investigación: Factores afectivos-Formación de profesores; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

Se investiga la relación entre actitud y rendimiento en Estadística de 87 profesores de escuela peruanos evaluados mediante un diseño pre test y post test durante la etapa presencial de un curso de Estadística básica. El rendimiento es medido con la nota final del curso y las actitudes con las escalas de Cazorla, et al. (1999) y de Estrada et al. (2003) las que presentan alta confiabilidad (consistencia interna y estabilidad) y correlación significativa entre ellas indicando que miden el mismo constructo. Se encontró un cambio significativo y favorable en la actitud luego del curso y una relación significativa de la actitud final con el rendimiento en Estadística. Los resultados revelan la importancia de los aspectos afectivos en la enseñanza de la Estadística desde la perspectiva del profesor que puede tener impacto en el aprendizaje de sus estudiantes.

Introducción

Todos estamos concientes que la intervención del componente afectivo en el aprendizaje y rendimiento de los alumnos es de gran importancia, aspectos como son las actitudes son estudiadas por diferentes autores alrededor del mundo. Auzmendi (1992) por ejemplo, menciona que la dimensión afectiva en el aprendizaje resulta esencial para el logro de las competencias y propósitos educacionales que el sistema escolar se propone. Así, un aspecto afectivo de importancia en la explicación del rendimiento es sin duda la actitud del aprendiz al curso que aprende.

Por otro lado, no existe duda de la influencia de la Estadística en la educación y la concepción del mundo de los futuros ciudadanos es creciente como parte de las características del mundo contemporáneo. La estadística por el hecho de insertarse en diferentes áreas del saber con un carácter multidisciplinar y en la educación ya desde el nivel básico (Bazán, 2003; Estrada, 2001) sus contenidos en el currículo de todos los niveles educativos se incrementaron notablemente y se está propiciando un crecimiento del interés por los temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de ella y más concretamente de las actitudes con relación a la Estadística.

McLeod (1992) ha distinguido dentro del componente afectivo, las emociones, las actitudes y las creencias. En tanto, las emociones son respuestas inmediatas positivas o negativas producidas por ejemplo cuando se estudia Matemática o Estadística, las actitudes son sentimientos más intensos y estables, que se forman por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo, Gómez (2000) define la actitud como una predisposición evaluativa (positiva o negativa) que determina las intenciones personales e

influye en el comportamiento, Gal *et al*. (1997) consideran que las actitudes a la Estadística son una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la Estadística y Brito (1998) consideran que la actitud a la Estadística es una predisposición subyacente del sujeto a responder positiva o negativamente frente a un objeto determinando y en ocasiones tal predisposición pueda dificultar el aprendizaje de la Estadística, e influenciar negativamente en las personas.
La relevancia del estudio de las actitudes frente a la Estadística no solo origina de una mayor preocupación por el producto educativo considerado globalmente, sino también se justifica cuando se considera el estudio sobre el aprendizaje de los aprendices. Los estudios sobre las actitudes escolares confirman su impacto sobre los aprendizajes cognitivos de los alumnos, así como la escasa integración real de los objetivos en relación a las actitudes con los objetivos generales de la educación (Bazán *et al*., 2001).

Como Estrada *et al*. (2003) indican, actualmente asistimos a un interés creciente frente a la problemática de la formación de profesores de enseñanza básica con respecto al curso de matemática y en particular de Estadística. La Estadística es una disciplina frecuentemente olvidada por el profesor en la enseñanza obligatoria, a pesar de la utilidad reconocida, y de figurar en las directrices curriculares. Estas actitudes negativas pueden condicionar la enseñanza y repercutir en las futuras actitudes de sus alumnos.

Para evaluar actitudes, diversos instrumentos han sido desarrollados recientemente en la literatura. En USA: Cuestionario de Actitudes a la Estadística (SAS) (Roberts e Bilderback, 1980), Escala de Actitudes a la Estadística (ATS) (Wise, 1985). En España: Escala multidimensional de Auzmendi (1992) y Escala de Actitudes a la Estadística de Estrada *et al* (2003). En Brasil: Escala de Actitudes a la Estadística (EAE) (Cazorla *et al*, 1999). En general los instrumentos citados son tipo Lickert, la mayoría multidimensional, compuesta por un número determinado de proposiciones, habitualmente más de 20, con 5 o 7 alternativas de respuesta.

En el Perú, investigaciones sobre actitudes y matemática en estudiantes universitarios han sido desarrolladas por Aparicio y Bazán (1997) y Bazán y Sotero (2000). Por otro lado, Bazán et al. (2001) investigo la relación entre rendimiento y actitud en la matemática para el sistema escolar comprobando que en general las actitudes encontradas son negativas y están relacionadas con el bajo rendimiento. Investigaciones con profesores sobre actitudes y rendimiento en Estadística, solo encontramos el estudio reportado por Aparicio et al (2004).

En esta investigación nos propusimos investigar el cambio en las actitudes a la Estadística y su relación con el rendimiento en profesores que participan de un curso de Estadística dentro de un programa de complementación académica. Así como confirmar las propiedades Psicométricas de las escalas de Estrada et al (2003) y de Cazorla et al (1999), usadas en esta investigación, reportadas en Aparicio et al (2004), establecer las relaciones que se da entre actitud y rendimiento académico en Estadística e Introducir en el Perú escalas de medición de las actitudes a la Estadística adaptados y confiables que puedan ser trabajados muestras de profesores, universitarios y escolares.

Método

Muestra

Profesores de escuela que participan de un programa de complementación académica para obtener el título profesional de Licenciado en Educación y que cursan la asignatura de Estadística aplicada a la educación. Los profesores fueron originalmente formados por Institutos Superiores Pedagógicos durante cinco años y actualmente trabajan en alguna escuela. Son tanto de Lima como de diferentes provincias del Perú. La investigación fue ejecutada al inicio y una semana después de la etapa presencial del curso. La investigación se realizó durante los veranos 2004 y 2005. La muestra efectiva para el estudio fue de 87 profesores (7 de educación inicial, 28 de educación primaria, 41 de ciencias sociales y 11 de ciencias. 39 de ellos son de sexo masculino y 48 de sexo femenino.

Instrumentos

Fueron utilizadas: 1) La Escala de Actitudes a la Estadística de Estrada et al (2003) con 25 ítems (14 afirmativos y 11 negativos), de tipo Lickert con 5 valores que van de muy en desacuerdo a muy de acuerdo y una confiabilidad alpha de Cronbach de 0.774 en una muestra de 140 profesores, 66 profesores que trabajan y 74 en formación y 2) La Escala de Actitudes a la Estadística de Cazorla et al.(1999), es una adaptación de la escala de actitudes a la Matemática (Aiken, 1974) traducida y adaptada para el Brasil por Brito (1998). Es de tipo Lickert, compuesta de 20 items, (10 positivos y 10 negativos) y presenta una confiabilidad alpha de Cronbach de 0.964 en una muestra de 62 estudiantes universitarios de diferentes especialidades.

La nota final obtenida en el curso de Estadística fue considerada como una medida del rendimiento. La nota final está en una escala de 0 a 20 puntos.

Diseño

El diseño corresponde a un modelo correlacional y cuasi experimental con pre prueba y post prueba (Hernández et al, 1991).

Procedimiento

Al inicio de la primera sesión de la etapa presencial fueron aplicadas colectivamente las dos escalas de actitudes en un formato conjunto de 45 preposiciones. Los cuestionarios fueron aplicados anónimamente más su identificación fue posible considerando una codificación. Para el análisis de los datos fue utilizado el paquete y el nivel de significación fue establecido en 0,05.

Resultados y discusión

Las escalas presentaron una correlación significativa (r pre test=0.76, $p<0.01$; e r post test=0.73, $p<0.01$) indicando que miden el mismo constructo y por lo tanto pueden ser usadas indistintamente para evaluar la actitud general a la Estadística.

Dos tipos de confiabilidad fueron obtenidos: de consistencia interna dada por el índice alpha de Cronbach en el pre test y en el post test, y de estabilidad dado por la correlación de Pearson test-retest. En la escala de Cazorla et al. (1999) encontramos valores de 0.92 y 0.89

para el índice alpha de Cronbach que son considerados óptimos y en la escala de Estrada et al (2003) encontramos valores de 0.83 y 0.81 también óptimas.
También las correlaciones test-retest de las escalas (0.41 en ambas) fueron significativas ($p<0.001$) a pesar de que se haya intervenido entre el pre test y el post test considerando la disciplina dada. Este resultado indica que a pesar de que puedan haber mudanzas como consecuencia de la disciplina, estas mudanzas son proporcionales y por lo tanto estables.
Con estos resultados podemos indicar que las escalas presentan propiedades psicométricas óptimas para la muestra de profesores evaluados, confirmando los resultados encontrados en Aparicio et al (2004).

En la Tabla 1 es presentado el cambio en la actitud detectada entre el pre test y el post test:

Tabla 1
Cambio en los puntajes de las escalas de Actitudes a la Estadística (N=87)

	Pre test		Post test		t de muestras	gl	Sig.
Escalas	Media	D.E	Media	D.E	relacionadas		
Estrada et al. (2003)	83.49	11.74	89.60	10.88	4.62	86	0.000**
Cazorla et al. (1999)	63.22	14.41	71.54	11.03	5.51	86	0.000*

*: test T de muestras apareadas significativos al 5 %.

Los resultados indican que hay un cambio significativo y favorable al final de la disciplina. En el pre test las actitudes fueron positivas. Las medias de las escalas de Estrada et al. (2003) y Cazorla et al. (1999) corresponden respectivamente a un 66.8 % y 63.22 % del puntaje máximo (que es 125 y 100 en las escalas). En el post test, estos valores fueron significativamente mayores obteniéndose porcentajes de 71.6 % y 71.54% que corresponden a actitudes aún más positivas.

En resumen podemos indicar que el desarrollo del curso de Estadística contribuye en la presencia de actitudes más favorables a la Estadística. Estos cambios pueden ser mejor apreciados en la figura 1.

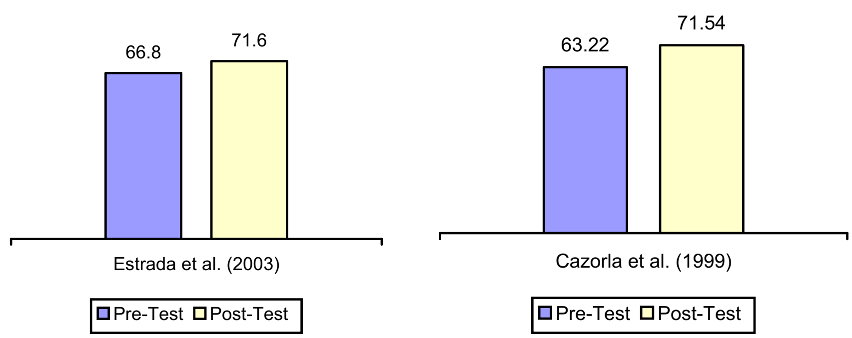


Figura 1. Cambio en los promedios de las escalas de Actitudes a la Estadística después de la etapa presencial de la disciplina (N=87) (Escala de 0 a 100)

Finalmente encontramos que no existe correlación entre el rendimiento y las actitudes al inicio del curso considerando las dos escalas (r=0.07 y r=0.09 respectivamente). Sin embargo, al final del curso, el rendimiento y las actitudes muestran correlación significativa (r=.22, p<0.02 y r=.25, p<0.02 respectivamente). Este resultado indica que el desarrollo del curso contribuyó para la presencia de relación entre el rendimiento y las actitudes a la Estadística, tal y como Cazorla et al. (1999) encontraron también entre estudiantes que cursaban una disciplina en Estadística. El resumen de todas las relaciones significativas encontradas es presentado en la figura 2.

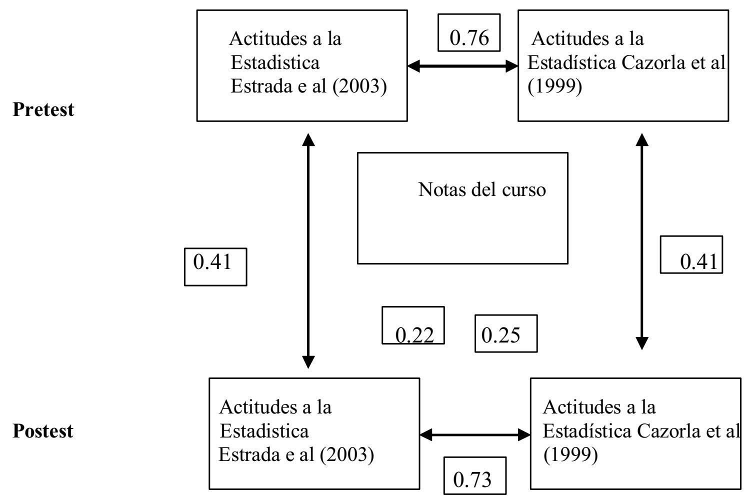


Figura 2. Relaciones encontradas antes y después de la etapa presencial de la disciplina entre las Actitudes en relación a la Estadística y las notas de la disciplina (N=87)

4. Comentarios finales

Nuestra investigación trata de resaltar tanto la parte del estudio psicométrico de las escalas como la importancia del aspecto afectivo en la generación de actitudes hacia el curso de Estadística en profesores en ejercicio. Así se introduce las escalas de actitudes hacia la Estadística en el contexto peruano como herramientas útiles que orienten el trabajo evaluativo de las actitudes en los profesores y se posibiliten nuevas investigaciones en la base del uso de estos instrumentos adaptados y confiables con profesores de aula y con muestras más grandes.

Por otro lado. nuestro estudio con profesores que ejercen en el salón de clase es semejante al trabajo reportado por Estrada et al (2003) y contribuye en el entendimiento de la formación de profesores acerca de nuevos contenidos propuestos en las nuevas estructuras curriculares como es el caso de la Estadística.

Así, nuestros resultados pese al tamaño limitado de la muestra sugieren la importancia en el dictado del curso de Estadística para obtener una actitud favorable a la Estadística en general y un mejor rendimiento específico en ella en particular el cual como generalmente es documentado con la Matemática tiene impacto directo en el aprendizaje de los estudiantes.

5. Referencias

Aiken, L. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 5, 67-71.

Aparicio, A. y Bazán J. (1997). Actitudes hacia las Matemáticas en ingresantes a la Universidad Nacional Agraria la Molina. *Más Luz, Revista de Psicología y Pedagogía* 3(2), 351-380.

Aparicio A.; Bazán J.; Abdounur, O. (2004). Atitude e desempenho em relação à estatística em professores de ensino fundamental no Peru: primeiros resultados. *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM)*. Universidade de São Paulo. Brasil. Disponible en www.sbempaulista/viiepem/anais

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la Matemática Estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero, Bilbao. España.

Bazán, J. (2003). *Estadística Educativa*. Facultad Pontificia y Civil de Lima: Perú

Bazán, J., Espinosa G. y Farro Ch. (2001). Rendimiento y actitudes hacia la Matemática en el sistema escolar peruano. En Documento de trabajo nro 13. Programa MECEP (Medición de la Calidad Educativa Peruana). Ministerio de Educación (pp 55-70). Lima-Perú.

Bazán J. & Sotero H. (2000). Una aplicación al estudio de actitudes hacia la Matemática en la UNALM. *Anales Cientificos de la Universidad Nacional Agraria La Molina* (pp 60-72). Lima-Perú.

Brito, Márcia (1998). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática. *Revista Zetetiké*, 6(9), 109 – 162.

Cazorla, I., Silva, C., Vendramini, C. & Brito, M. (1999a). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Estadística. En: *Anais da Conferência Internacional: Experiências e perspectivas do ensino de Estadística, desafios para o século XXI.* (pp.45-58). PRESTA. Florianópolis.

Estrada, A. (2001). Actitudes hacia la Estadística e instrumentos de evaluación. *Actas de las Jornadas Europeas de Estadística. La enseñanza y la difusión de la Estadística*. Islas Baleares. España.

Estrada, A.; Batanero, C.; y Fortuny, J. (2003). Actitudes y Estadística en profesores en formación y en ejercicio. *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operat*iva. Lleida, 8-11 de abril. España.

Gal, I y Garfield, J. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I.

Gal y J. B. Garfield, J. (Eds.), *The assessment challenge in statistics education*, (pp. 37-51). IOS Press, Voorburg

Gómez Chacón (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea, Madrid

Hernández, R., Fernández, C.; Baptista, P. (1991). Metodología de la Investigación. McGraw Hill Ed. 2da edición. México.

McLeod, D.B. (1992). *Research on affect in mathematics education: A reconceptualization*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan y N.C.T.M

Roberts, D. y Bilderback, E. (1980). Reliability and validity of statistics attitudes survey. *Educational and Psychological Measurement 40*, 235-238.

Schau, C. *et al* (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement* 55(5), 868-875.

Wise S.L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement 45*, 401-405.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SOFTWARE E REDE DE PROFESSORES: REPERCUSSÕES NO DISCURSO E NA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Dolurdes Voos
FAPA/IPA - Brasil
dvoos@cpovo.net
Campo de Investigación: Formação de professores

RESUMO

O presente trabalho relata pesquisa em Educação Matemática sobre o processo de mudança no discurso e na prática pedagógica de professores de Matemática no Ensino Médio que participaram de uma rede de professores, com o objetivo de construir sua capacitação para o uso de software, mediante trabalho colaborativo na organização e elaboração de atividades didático-pedagógicas.
Palavras chave: Educação matemática; rede de professores; trabalho colaborativo; software.

ABSTRACT

The present work reports on research on Mathematic Education about the process of change in the pedagogical discourse and practice of math teachers in secondary school. The teachers were members of a teachers' network aimed at training for the use of software. The training took place as collaborative work in organizing and planning didactic-pedagogic activities,
Key words: Mathematic Education; teachers' network; collaborative work; software.

Estamos mergulhados num tempo que se caracteriza pela rapidez com que ocorrem transformações em nosso cotidiano, resultantes da rápida disseminação do conhecimento em todas as áreas. A indústria editorial, a internet e as mídias em geral propagam e popularizam os avanços científicos e tecnológicos, de um modo e numa velocidade impensáveis há alguns anos.

A educação, nesse contexto, deve favorecer a construção de competências do indivíduo, de tal modo que seja possível, através de uma atitude reflexiva, obter conhecimento que lhe possibilite uma relação crítica com a tecnologia.

Estamos autorizados a crer que a educação, nestes tempos de avanços tecnológicos, deverá ser centrada na condição humana. Precisa preparar os indivíduos, não só para desfrutar da tecnologia e, a partir daí, refletir sobre a influência que esta exerce em sua formação, mas também para produzi-la. Deste modo, a educação tende, inclusive, a transformar a sociedade, podendo torná-la mais justa e igualitária.

O homem está, então, dentro de um novo paradigma:

> [...] modernidade na prática coincide com a necessidade de mudança social, que a dialética histórica apresenta na sucessão das fases, onde uma gera a outra. [...] 'Ser moderno' é ser capaz de dialogar com a realidade, inserindo-se nela como sujeito criativo. Faz parte da realidade, hoje, dose crescente de presença da tecnologia que precisa ser compreendida e comandada. Ignorar isto

> é antimoderno, não porque seja antitecnológico, mas porque é irreal. (DEMO, 2001, p. 21).

Em virtude disso, muito se tem questionado sobre qual o modelo ideal de educação. Parece consenso que a educação deva dedicar-se à busca da valorização do ser humano, para que o indivíduo se situe nesse contexto, buscando a compreensão do mundo em que vive.

Para isso, cada vez mais se afirma a necessidade da união de diferentes áreas, de integração dos saberes dos distintos campos, conciliando os conhecimentos emergentes no nosso tempo com uma filosofia de educação, para que se possa ir além de currículos preestabelecidos.

Assim, a educação interfere no presente e contribui para a construção do futuro. Ao educador, cabe o papel de buscar um novo referencial, a partir de um novo paradigma, que possibilite ao aluno apropriar-se da tecnologia, sem perder a sua individualidade. A educação constitui o ponto de equilíbrio entre a tecnologia e a formação do indivíduo.

A tecnologia que temos hoje é um conjunto de informações e descobertas que vêm se sucedendo através dos tempos. Está, portanto, associada a mudanças de valores no seio da sociedade.

Os valores compartilhados definirão a serviço de quem estará a ciência. É necessário que

> [...] embora os valores sejam amplamente compartilhados pelos cientistas e este compromisso seja ao mesmo tempo profundo e constitutivo da ciência, algumas vezes a aplicação dos valores é consideravelmente afetada pelos traços da personalidade individual e pela biografia que diferencia os membros do grupo. (KUHN, 1998, p. 230).

O estabelecimento de novos valores produz uma mudança de bens e nos serviços. Esta, por sua vez, segundo Valente (1999, p. 31), *[...] implicará, certamente, em mudanças no sistema educacional.* Ainda de acordo com Valente (1999, p. 30), a questão que se coloca é *[...] como as mudanças que estão acontecendo na sociedade deverão afetar a Educação e quais serão suas implicações pedagógicas?.*

Além disso, a escola, como instituição, freqüentemente confunde aparatos, como os laboratórios e os computadores, com educação de qualidade. Ocorre, então, que o professor, que deveria ser o sujeito propiciador do uso desse equipamento, raramente está preparado para isso. Esse contexto se evidencia, por exemplo, pelo fato de grande número de escolas ter laboratório de informática, embora este não seja usado pelos alunos, na construção do conhecimento. A causa disso é, muitas vezes, o professor não ter formação suficiente para usar os computadores como recurso, ou seja, *[...] parte integral dos programas de Matemática.* (CLAUDIO; CUNHA, 2001, p. 168).

A pesquisa que relatamos aqui, por essa razão, foi realizada junto a professores que demonstravam interesse pelo uso do computador como recurso nas aulas de Matemática, mas que não se sentiam seguros para a utilização de software, na Educação Matemática no Ensino Médio.

O professor sabe que a nova tecnologia existe, demonstra interesse e vontade de usá-la, mas, muitas vezes, não tem informação suficiente para fazê-lo. Então, c**omo uma rede de professores, trabalhando colaborativamente na organização e elaboração de atividades de Matemática para o Ensino Médio, com o uso de software, pode contribuir para a mudança no discurso e na prática dos mesmos?**

Inserimos a pesquisa na perspectiva da pesquisa-ação, buscando não só levantar e descrever a realidade empírica, mas também cumprir um percurso que permita deslocar o foco do "objeto de pesquisa" para os "sujeitos de pesquisa". Trata-se de

> [...] um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 1985, p. 14).

Justifica-se a opção pela pesquisa-ação, em função de possibilitar maior flexibilidade durante o processo investigativo, viabilizar uma interação qualificada entre a pesquisadora e os sujeitos de pesquisa, mas, sobretudo, pelo seu caráter formativo. Silva (2003, p. 41) afirma, ainda, que *essa metodologia caracteriza-se como uma dinâmica de grupo de caráter emancipatório, que leva à reflexão e à mudança de determinados contextos, através de uma permanente espiral de ação e reflexão.*

A proposta de formação do grupo de discussão surgiu no meu contato com os alunos no curso de extensão *Ensino de Matemática: teoria e prática,* promovido pela FAPA – Faculdades Porto Alegrense, durante a palestra que proferi sobre *Funções trigonométricas em ambiente informatizado*.

Formado o grupo inicial, por sugestão de alguns alunos daquele curso, ele foi ampliado pelo aporte de colegas desses, que com eles compartilhavam a insegurança em relação ao uso de software no desenvolvimento de alguns conteúdos de Matemática e também o desejo de manejar esse instrumento com habilidade.

A fim de definir quais participantes possuíam o perfil para participarem do grupo, aplicou-se aos candidatos um questionário que visava evidenciar o nível de conhecimento e as necessidades de informação em relação ao uso de software no ensino de Matemática.

Para integrar o grupo era fundamental que os participantes atendessem a duas condições: fossem docentes atuando no Ensino Médio na disciplina de Matemática; atuassem em escola que possuísse computadores disponíveis para o trabalho docente do professor.

Ocorreram dez encontros durante o primeiro semestre letivo de 2004 entre os professores desse grupo, durante os quais exercitaram o uso de diferentes software, criando atividades que eles desenvolveram em sala de aula, com seus alunos.

Após os dez encontros podemos afirmar que o discurso desses professores atestou o conflito que marcou o próprio processo de aprendizagem, em que estiveram imersos durante os encontros. Evidenciou também, porém, que o encontro com os colegas e a produção colaborativa de atividades contribuiu para que se dispusessem a crer mais em seu potencial e a ousar propor.

Foi possível perceber, nas respostas do grupo de professores, que o trabalho colaborativo dissolveu o consenso e instaurou a reflexão, colocando-os em franco processo de ressignificação dos seus saberes.

A prática dos software, a elaboração de atividades coletivamente e a discussão sobre o uso desses recursos produziu efeitos sobre os os professores. Eles mesmos afirmaram terem sido levados a modificar sua prática, mesmo que em parte: *"perdi o medo de lidar com os software e com a tecnologia, que até então era desconhecido para mim"*. Todos afirmaram que sua prática sofreu (ou sofrerá) alterações. Para alguns, as alterações foram pequenas; para outros, elas se mostraram significativas, na forma de ensinar.

Evidenciou-se que, embora não seja costume trabalhar colaborativamente nas escolas, seja por falta de tempo, seja por falta de interesse, a construção coletiva de atividades produz efeitos significativos na prática docente. Todos se mostraram abertos a novos métodos de trabalho: *"tanto que já não consigo trabalhar da mesma forma. Incorporei as aulas de informática (como os alunos as chamam) aos conteúdos a serem desenvolvidos no ano letivo"*. Ressaltaram o trabalho, de forma que a prática pedagógica seja mais interativa, atraindo os alunos e produzindo efeitos positivos para o aprendizado da Matemática: *"as alterações foram significativas, pois os encontros me abriram um leque de opções de trabalho com meus alunos"*.

A sucessão de encontros colocou os professores bastante à vontade, para fazer sua autocrítica e socializar suas dificuldades, de modo que, na avaliação dos encontros, houve elogios à integração entre os participantes do grupo. Esta integração foi notável, inclusive, porque a interatividade dos software trouxe discussões que provocaram testemunhos de SP sobre já os terem aplicado com seus alunos. Ainda mais marcante foi que todos os SP consideraram excelente a oportunidade para reflexão sobre a prática pedagógica, ou seja, avaliaram que é válido modificar a estrutura do ensino para o uso de software, com ganhos de interesse, qualidade e interatividade.

O discurso também evidenciou que os professores perceberam as mudanças na relação com computadores e com o aprendizado dos próprios conteúdos. Sentiram, também, necessidade de estudarem os software mais profundamente: *"considerei os encontros úteis não somente para o aprendizado do software ou do ensino com o uso dele, mas também porque pode atualizar os conhecimentos de professores e aumentar sua auto-estima (segurança) em sala de aula. Permitiu que tivéssemos mais certeza nas explicações matemáticas, pois temos mais pontos de vista acerca de um mesmo conteúdo"*.

Os comentários também se relacionaram à liberdade de expor as experiências de cada professor e de refletir sobre elas. Isto se traduz mesmo na construção de uma nova postura diante de sua prática pedagógica. Os professores demonstraram disposição para uma nova forma de trabalho, em que a colaboração dos membros do grupo torna-se fundamental.

O trabalho colaborativo durante os dez encontros, além de desenvolver habilidades em relação ao uso de software para a Educação Matemática no Ensino Médio, contribuiu para produzir mudanças na prática e no discurso dos professores, revelando que os interesses comuns de um grupo de profissionais pode ser o ponto de apoio para a construção da autonomia e da capacidade reflexiva de cada um de seus membros.

Integrar uma rede de professores que produza, colaborativamente, atividades para a Educação Matemática no Ensino Médio com o uso de software requer mais que disposição para cooperar. Pressupõe uma reação dialógica intensa, uma mudança de postura epistemológica, que advém de mudança de paradigma.

A idéia de que "o professor ensina" precisa ser comutada pela de que ele "educa". A primeira atesta o tipo de ensino que os mesmos receberam durante sua formação, o qual colocava o professor como figura mítica: o que não erra, detém todo o saber e mantém a autoridade calcada no discurso que não pode ser questionado. Derivada desse mito, existe a impressão de que o conhecimento está pronto, de que o professor é o sujeito que o disponibiliza para os alunos e que, não podendo ser produzido, o conhecimento é infinitamente reproduzível.

A segunda idéia é exatamente a que os professores constroem durante a produção colaborativa de atividades, ao custo de serem impactados, na cultura e nos interesses. Os encontros foram eficazes, para acabar com a insegurança na exploração dos software e facilitar o desenvolvimento de atividades envolvendo os conteúdos, bem como para a reflexão sobre como trabalhar com eles.

Os professores sentiram-se parte de um grupo, cujos membros produzem com o mesmo objetivo, apesar de limitados pelas mesmas condições adversas: falta de domínio da língua estrangeira, tempo exíguo para dedicarem-se ao estudo, etc. Isto foi algo que alavancou as condições de reação à situação. Durante os encontros, os professores identificaram as vantagens de compor um grupo afim e, no seio do grupo, descobriram que são capazes de redimensionar sua prática pedagógica.

A experiência revelou-se tão importante para os professores que, nas avaliações, o grupo de discussão foi considerado por todos como um enriquecedor espaço de reflexão sobre condições de trabalho e alternativas de superação de problemas, evidenciados na prática docente dos professores: *"saliento também a importância dos momentos em que refletíamos sobre nossas dificuldades, nossas angústias na nossa prática pedagógica. Sei que não tinha nada a ver com o propósito dos encontros, mas com o passar do tempo foi estabelecido um vínculo entre os colegas que se fazia necessário tal desabafo"*.

Essa mudança de postura manteve-se, após a finalização dos encontros, exemplificada pela prática de alguns professores, que continuaram o processo de reflexão em suas escolas.

Essa experiência tem afirmado que indiscutivelmente, essas novas tecnologias devem fazer parte do dia-a-dia da sala de aula, mas, para isso, os profissionais envolvidos devem se apropriar dos conhecimentos necessários e acompanhar os progressos da tecnologia, a fim de contribuírem para a democracia dessa nova era que se estabelece. Isso só é possível quando,

> [...] os docentes demonstram seu compromisso com o que ensinam empenhando-se em se manterem atualizados, participando de cursos, seminários, eventos científicos e realizando pesquisas de diferentes modalidades [...] validando o conhecimento com base em novos estudos e no conhecimento produzido por pesquisas, sem o que corre o risco de levar aos alunos um ensino desvitalizado. (GRILLO, 2001, p. 41).

Percebe-se que é crescente o interesse pelo uso do computador, como instrumento para o desenvolvimento de conteúdos de Matemática na escola. Muitas vezes, porém, o professor não está suficientemente bem preparado para implementar um plano de estudos conseqüente, por desconhecer os software mais adequados para cada finalidade. Isso, de acordo com Cláudio e Cunha (2001, p. 178), leva ao uso de *[...] programas que não se adaptam às necessidades do professor e, muito menos, às dos alunos*. Quem tem certa experiência no uso da informática como instrumento de ensino, segundo os autores (idem, p. 187), *[...] está consciente do grande número de horas necessárias para a elaboração de atividades, nas quais o computador contribua efetiva e significativamente para a construção do conhecimento, pelo aluno*.

O desenvolvimento profissional, então, é uma perspectiva possível somente unida a uma nova cultura profissional, dotada de reflexões críticas constantes e eficazes. Os professores devem ser críticos e comprometidos com um futuro de sucesso em suas instituições e na comunidade, colaborando à sua maneira para o crescimento próprio, profissional e para o aprendizado por parte de seus alunos.

> É no momento da ação educacional que se expressa a sabedoria do educador por meio da transformação de seu conhecimento em prática. Reafirmo que a

> capacidade de adaptar suas ações para a promoção de situações que propiciem a aprendizagem demostra as competências do professor. Por esse motivo, o desenvolvimento de competências no aluno permite que este se tome capaz de aprender a pensar por si, a criar suas próprias respostas para as questões apresentadas pelo professor, e não a produzi-las simplesmente. (ALLESSANDRINI, 2002, p. 170).

Apesar de o profissional do magistério estar acostumado às práticas individuais, a troca de experiências entre dois ou mais docentes é imprescindível para uma abertura à mudança, à sincronia com o mundo dinâmico. Sozinhos os professores têm apenas as próprias experiências, e não há quaisquer ganhos culturais – nem para si mesmos nem para a profissão.

> Existe um saber do professor que muitas vezes morre com ele, pois não há oportunidade para ser elaborado, partilhado. No espaço de reflexão coletiva sobre a prática, o professor tem a possibilidade de tomar consciência deste saber que possui, mas que comumente não se dá conta. (VASCONCELOS, 1998, p. 70).

O trabalho colaborativo entre os professores, somado à atualização constante, desenvolve a capacidade de fazer crítica sistemática a conteúdos e procedimentos metodológicos, reorientando a prática desses profissionais.

BIBLIOGRAFIA

Dias, C. (2002) *O desenvolvimento de competências e a participação pessoal na construção de um novo modelo educacional*. In: Perrenoud, Philippe; Thurler, Monica Gather. *As competências para ensinar no século XX*I. Porto Alegre: Artmed.

Moraes, C y Loureiro da, M. (2001) *As novas tecnologias na formação de professores de Matemática*. In: Cury, Helena Noronha (Org.). *Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada.* Porto Alegre: Edipucrs.

Demo, P. (2001). *Desafios modernos da educação*. 11 ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes.

Grillo, M. (2001) *Prática docente: referência para formação do educador*. In: Cury, Helena Noronha (Org.) *Formação de Professores de Matemática: uma visão multifacetada*. Porto Alegre: Edipucrs.

Kuhn, T. (1998) *A estrutura das revoluções científicas.* 5. ed. São Paulo: Perspectiva.

Thiollent, M. (1995) *Metodologia da pesquisa-ação*. São Paulo: Cortez.

Valente, J. (1999) *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas, São Paulo: Unicamp/Nied.

Dos Santos, C. (1998) *Para onde vai o professor?: Resgate do Professor como Sujeito de Transformação.* São Paulo: Libertad.

PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DE LAS COMPETENCIAS Y DE LAS RELACIONES TEORÍA- PRÁCTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Juan D. Godino
Universidad de Granada (España)
http://www.ugr.es/local/jgodino, jgodino@ugr.es
Campo de investigación: Formación de profesores; Nivel Educativo: superior

RESUMEN

La interpretación de la noción de competencia desde una perspectiva ontosemiótica permite conectarla con los problemas y los sistemas de prácticas puestos en juego para su solución. La interpretación de las prácticas y las competencias en términos operativos y discursivos aporta una solución al dilema teoría-práctica en la enseñanza universitaria.

1. DESARROLLO DE COMPETENCIAS EN LA EDUCACIÓN UNIVERSITARIA

Las nuevas orientaciones educativas promovidas en el marco del "Espacio Europeo de Educación Superior" proponen centrar los esfuerzos formativos en el logro de competencias profesionales. Se quiere priorizar la capacitación de los estudiantes universitarios de grado y postgrado para resolver problemas de su futura vida laboral.
Esto implica que los procesos de enseñanza y aprendizaje se orienten hacia la adquisición de competencias, tanto generales (transversales respecto a las diversas materias curriculares) como disciplinares (o específicas de cada área de conocimiento). Así mismo, se desea potenciar la dimensión práctica en la formación de los profesionales, atribuyendo más protagonismo y autonomía a los estudiantes en su propio aprendizaje. Este saber práctico se contrapone con frecuencia con el saber teórico hacia el que tradicionalmente se ha enfocado la enseñanza universitaria.
El nuevo marco de innovación curricular en la enseñanza universitaria plantea retos a los departamentos universitarios encargados de programar los contenidos y actividades curriculares. El problema no es sólo de carácter administrativo, de asignación de créditos a las distintas materias, bloques de contenido, de asignación de espacios y recursos. Citamos algunas cuestiones particularizadas para el caso de la educación matemática dirigida a la formación de profesores:

- ¿Qué es conocimiento teórico y qué es conocimiento práctico en el caso de las matemáticas?
- ¿Qué es conocimiento teórico y qué es conocimiento práctico en el caso de la didáctica de las matemáticas?
- Qué relaciones deberían establecerse entre tales conocimientos teórico-prácticos en los procesos de formación de profesores?
- ¿Qué tipo de actividades prácticas interesa seleccionar para que los futuros profesores de matemáticas sean competentes en el desarrollo de sus tareas profesionales?

Para responder a estas cuestiones es necesario adoptar un marco teórico de referencia sobre las competencias, sus tipos, relaciones con los problemas, las prácticas y los conocimientos disciplinares que proporcionan la cultura matemática y didáctica.

En el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, en prensa) vienen desarrollando desde más de una década un enfoque de la cognición e instrucción matemática que desde presupuestos antropológicos, ontológicos y semióticos puede servir como marco teórico desde el cual afrontar las cuestiones mencionadas. En la sección 2 describimos brevemente los principales elementos del enfoque teórico mencionado; en la sección 3 mostramos las posibilidades que ofrece este modelo para articular el complejo formado por las nociones de competencia – problemas – prácticas – conocimientos – comprensión, y la solución que se aporta al dilema teoría-práctica al postular una simbiosis compleja entre las mismas.

2. UN ENFOQUE PRAGMÁTICO DEL SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En este apartado vamos a sintetizar las principales características de un marco teórico que denominamos "enfoque ontosemiótico de los conocimientos matemáticos" en el que las nociones de situación-problema y de práctica matemática son elementos esenciales. Así mismo, el conocimiento y la comprensión se interpretan en términos de competencia, esto es, el juicio de comprensión supone que el sujeto sea capaz de realizar las prácticas sociales que resuelven los tipos de problemas pretendidos. Aunque el modelo ha sido elaborado como una teoría interna para la Didáctica de la Matemática nos parece que puede ser útil para otras áreas disciplinares.

2.1. Los sistemas de prácticas como respuesta a la cuestión del significado

En los trabajos sobre "significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Godino y Batanero (1994) han introducido las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal (o mental) como las herramientas útiles para el estudio de cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución I, y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas se proponen como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. De estas nociones se derivan las de "significado de un objeto personal" y "significado de un objeto institucional", que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente.

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar "los sistemas de prácticas puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas"; en consecuencia, llevan implícita una aptitud organizacional, una finalidad y, por tanto, una competencia.

Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Puesto que se comparte la misma problemática, las prácticas sociales son compartidas, y suelen tener rasgos particulares, generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. Las instituciones se pueden concebir como "comunidades de prácticas", e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales.

En este marco teórico se propone el "sistema de prácticas" –operativas, regulativas y discursivas- como el contenido que se debe asignar a la expresión que designa el objeto, por ejemplo, "media aritmética". Como respuesta a la cuestión, ¿qué es un objeto matemático?, se construye otro objeto, "el sistema de prácticas" y se establece, por tanto, una correspondencia semiótica en la que el sistema de prácticas viene a ser el significado de la expresión 'media aritmética' para la persona o la institución correspondiente.

De acuerdo con el componente pragmático-antropológico de base del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, saber, conocer, comprender se interpretan en términos de *competencia* para resolver problemas y acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales.

2.2. Tipos de objetos y procesos matemáticos

En las prácticas matemáticas intervienen objetos lingüísticos (símbolos, gráficos, etc.) y no lingüísticos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas (mediante procesos matemáticos, entendidos como secuencias de prácticas) y dan cuenta de su organización y estructura: tipos de *problemas*, *acciones/técnicas*, *conceptos*, *propiedades*, *argumentos*. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "*configuraciones*", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

2.3. Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos

El modelo teórico sobre la cognición matemática que hemos descrito puede ser aplicado de manera más general a otros campos del saber, en particular a los saberes didácticos. En este caso los problemas tendrán una naturaleza distinta:

- ¿Qué contenido enseñar en cada contexto y circunstancia?
- ¿Cómo distribuir en el tiempo los distintos componentes y facetas del contenido a enseñar?
- ¿Qué modelo de proceso de estudio implementar en cada circunstancia?
- ¿Cómo planificar, controlar y evaluar el proceso de estudio y aprendizaje?
- ¿Qué factores condicionan el estudio y el aprendizaje?, etc.

En este caso, las acciones (prácticas didácticas) que se pongan en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

En la Teoría de las Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras y Font, en prensa), sobre la que venimos trabajando, modelizamos la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la *configuración didáctica*, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Una configuración didáctica lleva asociada una *configuración epistémica*, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una *configuración instruccional* constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las *configuraciones cognitivas*, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.

Estas nociones pueden ayudar a definir y clasificar las competencias específicas del profesor referidas a la gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3. ALGUNAS IMPLICACIONES DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

3.1. Relaciones teoría-práctica

En nuestro enfoque la resolución de problemas está en el origen y fundamento del conocimiento matemático, como también los procesos de comunicación, validación, regulación y generalización en el seno de comunidades de prácticas (o contextos institucionales). La práctica es entendida en términos generales, tanto en el sentido operatorio (de acción sobre una realidad), como discursivo (comunicación, argumentación) y regulativo (fijación de reglas compartidas que permiten generalizar las acciones y justificaciones a tipos de problemas).

Según esto, la relación entre los distintos tipos de prácticas es compleja, ya que lo que habitualmente se concibe como "teoría" (las reglas de carácter más o menos general, sus justificaciones y relaciones estructurales) proviene de la actividad previa de solución de problemas "prácticos"; estos son su "razón de ser", de modo que los procesos de estudio de las matemáticas deben partir en todo caso de dichas situaciones problemáticas. La generación del conocimiento disciplinar, en el seno de las instituciones profesionales, y también en las educativas, parte de situaciones-problemas que pertenecen al mundo de experiencias de los sujetos implicados; se trata de conocimientos personalizados y contextualizados, los cuales son progresivamente despersonalizados mediante la comunicación y negociación interpersonal, y descontextualizados, o sea, generalizados a tipos de problemas progresivamente más generales.

La perspectiva ontosemiótica del conocimiento lleva a interpretar el complejo competencia/ conocimiento/ comprensión en términos de capacidad de realizar los sistemas de prácticas operativas, regulativas y discursivas que permiten resolver determinados tipos de problemas. En consecuencia, la teoría (el discurso regulativo y argumentativo) tiene que procurar conectar y generalizar las prácticas operatorias, esto es, las exploraciones y acciones técnicas realizadas ante situaciones-problemas. Esto tiene consecuencias para los procesos de enseñanza y aprendizaje: el logro de las competencias requiere tener en cuenta los distintos tipos de prácticas, procesos y configuraciones de objetos emergentes de las mismas.

Si se prescinde de los "momentos teóricos" se corre el riesgo de que la colección de "actividades" permanezcan en un estado precario de desarrollo e interconexión. En consecuencia, la selección de las "actividades prácticas" debe ir acompañada de la

identificación de la teoría correspondiente que permita organizar y generalizar esa práctica.
El desarrollo de competencias integrales requiere iniciar los procesos de estudio matemático (y didáctico) a partir de "situaciones contextualizadoras" que permitan la exploración y reflexión personal del estudiante. Pero estas fases o momentos tienen que complementarse con otros en los cuales exista la posibilidad de formular, comunicar, argumentar los conocimientos personales elaborados. Así mismo el aprendizaje y desarrollo de competencias integrales tiene que contemplar la apropiación de los conocimientos fijados por la cultura matemática, la ejercitación y aplicación competente de los mismos y su evaluación. En resumen, se trata de implementar en los procesos formativos lo que podemos denominar un "ciclo praxeológico", en sintonía con el modelo que propone la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1997) y la Teoría de los Momentos Didácticos (Chevallard, 1999).
Ahora bien, los distintos momentos del ciclo praxeológico en un proceso de instrucción pueden ser "presenciales", o "no presenciales", dirigidos por el docente, o autodirigidos por el propio estudiante. El logro de la competencia transversal "aprendizaje autónomo" requiere que el propio estudiante asuma la responsabilidad de los distintos momentos del estudio. Idealmente el proyecto educativo debe aspirar a que la figura del docente desaparezca; el propio estudiante debe ser capaz de plantearse nuevos problemas, buscar y seleccionar la información pertinente, interactuar con los otros estudiantes y decidir cuando necesita consultar a una persona más experta.

3.2. Implicaciones curriculares e instruccionales

Una consecuencia de nuestro modelo teórico sobre las competencias, el conocimiento y la comprensión es el desplazamiento del centro de atención del diseño curricular hacia la búsqueda y selección de "buenas situaciones-problema/ tareas". Los problemas no pueden ser excesivamente puntuales/ aislados, sino que deben permitir la articulación de las distintas competencias profesionales, y por tanto, tener un carácter globalizador. En el caso de la formación matemática y didáctica de maestros es necesario seleccionar problemas cuya solución ponga en juego competencias de distintos bloques de contenido disciplinar (aritmética, geometría, medida, estocástica, razonamiento algebraico), otras áreas curriculares (conocimiento del medio y la sociedad), y de manera especial que permitan la articulación entre las competencias de tipo matemático y didáctico.
Pero no es suficiente con disponer de "situaciones ricas". El siguiente paso que hay que dar es hacia la organización de configuraciones y trayectorias didácticas (Godino, Contreras y Font, en prensa) idóneas desde el punto de vista epistémico, cognitivo e instruccional. Para ello hay que tener en cuenta los roles potenciales del profesor, de los estudiantes, los recursos (en particular la gestión del tiempo didáctico), y los patrones de interacción entre estos componentes de los sistemas didácticos. Gran parte de las competencias transversales tienen que ver con la manera en que se organiza y desarrollan los procesos de estudio, en particular los que se refieren a la esfera interpersonal.
En síntesis, el centro de atención de la renovación curricular universitaria debe progresar desde las competencias hacia la búsqueda de "situaciones ricas" (lo que implica apertura hacia la articulación interdisciplinar) y hacia el diseño e implementación de "buenas trayectorias de estudio", lo que supone apertura hacia la articulación transdisciplinar.

En cuanto al "tiempo didáctico", consideramos necesario tener en cuenta que el "ciclo praxeológico" – implementación de los distintos momentos del estudio – no tiene la duración de una sesión de clase, ya que ello implica que los problemas sean puntuales y el aprendizaje atomizado e inconexo. Los problemas profesionales son complejos, tienen un carácter global, implicando frecuentemente distintas áreas disciplinares. Además, el grado de responsabilidad del estudiante sobre los distintos componentes y fases del proceso de estudio tiene que ser abierto y negociado según las circunstancias y conocimientos previos de los estudiantes.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco de los Proyectos de Investigación BS2002-02452, y MCYT SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Ambos proyectos son cofinanciados con Fondos FEDER (UE).

REFERENCIAS:

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2): 221-266.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237-284.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14 (3): 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1): 3-36.

Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématique* (aceptado).

DIFICULTADES EN LOS CONOCIMIENTOS DE CÁLCULO: UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES DE BACHILLERATO DEL ESTADO DE YUCATÁN

Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán, México
alanda@tunku.uady.mx
Campo de investigación: Formación de profesores; Nivel educativo: Medio

Resumen
En este escrito se reportan algunos resultados obtenidos en la aplicación de un diagnóstico de habilidades y conocimientos matemáticos básicos, a una muestra de 76 profesores de Bachillerato que al momento se encontraban impartiendo clases de matemáticas. De igual manera, se discute sobre el problema que tienen algunos profesores para explicar la funcionalidad y uso de algunos temas del cálculo diferencial, concretamente, se discurre sobre la regla de L, Hôpital a partir de la experiencia sostenida en un curso de capacitación docente. Las conclusiones aluden la necesidad de considerar los avances de la investigación en Matemática Educativa al momento de diseñar y desarrollar programas de formación del profesorado, sobre todo, en profesores Normalistas o de Educación Media.

Introducción
Los Bachilleratos en general, tienen una doble función, a saber: desarrollar entre los educandos un conjunto de habilidades y actitudes básicas para la realización de una actividad productiva socialmente útil y, la de proporcionar los conocimientos, lenguajes y métodos necesarios para el ingreso a estudios superiores. En el caso de matemáticas, esta doble función presenta fallas en el cometido de preparar a los jóvenes para la realización de estudios superiores. Una mirada diagnóstica sobre los conocimientos y habilidades que poseen algunos profesores del estado de Yucatán en las áreas de Álgebra, Geometría plana, Trigonometría, Geometría Analítica, Precálculo, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral ha permitido tener una proximidad sobre la dimensión de este problema.

En el cuadro 1, se ilustran los resultados del diagnóstico aplicado a una muestra de 76 profesores del nivel medio superior con respecto a sus conocimientos matemáticos básicos.

Cuadro 1. Porcentaje de Eficiencia General y por Área temática

Área Temática	**% de eficiencia**
Álgebra	68.2
Geometría Plana	62.8
Trigonometría	46.9
Geometría Analítica	64.7
Precálculo	48.7
Cálculo Diferencial	34.2
Cálculo Integral	37.6

Es evidente que los profesores diagnosticados poseen serias deficiencias en el manejo de los contenidos de cálculo, así como en las áreas de trigonometría y precálculo. Se está entonces, ante el problema de que pese a la gran cantidad de escritos dedicados a los temas de formación del profesorado en matemáticas (D' Amore, Martini, 1997b, 2000) y a los avances de la investigación en matemática educativa, existe baja incidencia en los programas de formación y actualización docente. Por ejemplo, quienes a nivel institución o dependencia son los responsables directos de la actualización, capacitación y formación del personal docente, por lo general, no tienen un programa bien definido que atienda las verdaderas necesidades del profesorado y por ende, las del alumnado. De esta manera, no solo los aportes de la investigación en matemática educativa no son considerados, sino que se minimiza el problema al mirarlo como un derivado de la endeble formación académica de los profesores del sistema educativo medio superior, maestros que en su gran mayoría son normalistas o licenciados en educación media, para el caso que nos ocupa.

En este sentido, la gran mayoría de los programas de formación para profesores de matemáticas en los bachilleratos del estado, se han enfocado más por el dominio de los conceptos (o contenidos) matemáticos que en la didáctica de los mismos. El supuesto para esto, deviene de la creencia de que los profesores normalistas o de educación media, poseen conocimientos y recursos del llamado cómo <<enseñar>> y por ende, sólo hay que proporcionarles el dominio del qué <<enseñar>> y esperar a que sean ellos mismos quienes posteriormente integrarán el qué con el cómo. Regularmente, los cursos de formación no son evaluados en tanto su aprovechamiento por parte de los participantes. A lo más, estos mismos mediante un breve cuestionario emiten un juicio sobre el desempeño del instructor y la satisfacción del curso, empero, no hay una medición real del impacto que dichos cursos tienen en la formación del profesor y consecuentemente, en su quehacer docente cotidiano.

Luego entonces, los programas de formación, actualización o capacitación docente, deben tomar para si, el reto de "homogeneizar" profesiones, es decir, buscar que dentro de la diversidad de formación profesional de los profesores de matemáticas: ingenieros, normalistas, arquitectos, contadores, economistas y en el mejor de los casos, matemáticos; se forme a dicho profesorado para el ejercicio de la educación matemática. De otra manera, se podría decir, poco se estaría contribuyendo a la solución de los problemas reales que aquejan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de bachillerato.

Las recientes políticas de cambio y reformas al currículo matemático escolar, han intentado pernear cambios en las prácticas educativas, insistiendo en la incorporación de tecnologías en los aprendizajes y en los aprendizajes centrado en los estudiantes. Al respecto, no hay duda de que el desarrollo de software <<educativo>> y el empleo de calculadoras con capacidades gráficas, posibilitan a que el esfuerzo de la enseñanza y la generación de aprendizajes en matemáticas, se oriente más a una comprensión significativa y aplicación práctica de los conceptos matemáticos implicados que a la simple adquisición de técnicas y algoritmos complicados de cálculo. Empero, ¿el profesor se encuentra preparado para desarrollar y orientar su práctica educativa con énfasis en los significados de los conceptos matemáticos? A juzgar por nuestra experiencia en este trabajo, no basta con incorporar tecnologías en las aulas y "modificar" el currículo matemático escolar. Habría que considerarse como indica Azcarate (1997), un análisis detallado de la formación disciplinar del profesor de matemáticas. Es decir, mirar de una manera sistémica su formación matemática y su formación en *didáctica de las matemáticas.*

Este trabajo centró la atención en los aspectos asociados al profesor: sus conocimientos matemáticos, su nivel de entendimiento de los conceptos y sus habilidades en la resolución de ejercicios a fin de contribuir en la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes.

El diagnóstico

En este apartado se presenta el extracto que corresponde a los ítems de cálculo diferencial que formó parte del diagnóstico aplicado a los 76 profesores examinados sobre sus conocimientos matemáticos básicos y cuyo porcentaje de aciertos se ilustró en el cuadro 1:

( ) 31. El límite cuando x tiende a 2 de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ es:

A) 0 B) ∞

C) 4 D) 2

( ) 32. ¿Para qué valores del dominio la gráfica de $f(x)=x^2(4-x)$ tiene rectas tangentes horizontales?

A) 0 y 4 B) 0 y -4

C) 0 y 8/3 D) 0 y –8/3

( ) 33. Si $f'(x)>0$ sobre un intervalo, entonces se dice que:

A) f' es creciente en ese intervalo B) f tiene un valor extremo en ese intervalo

C) f es creciente en ese intervalo D) f es cóncava hacia abajo en ese intervalo

( ) 34. La segunda derivada de la función $y=\ln x^3$ evaluada en $x=1$ es:

A) 1 B) 3

C) -1 D) -3

( ) 35. Una ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ en el punto (-1, ½) es:

A) $y=-x+\dfrac{1}{2}$ B) $y=x-\dfrac{1}{2}$

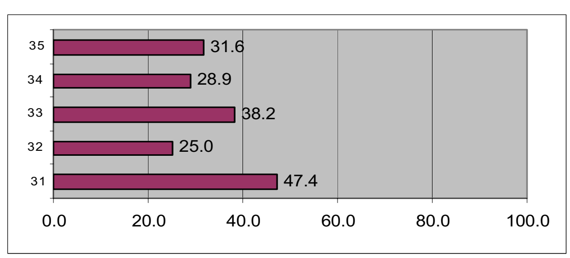
C) $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ D) $y=\dfrac{1}{2}x+1$

En los cuadros 2 y 3, se muestran los respectivos resultados estadísticos obtenidos en esta aplicación.

Cuadro 2

Pregunta	Aciertos	%
31	36	47.4
32	19	25.0
33	29	38.2
34	22	28.9
35	24	31.6
	130	34.2

Cuadro 3



La experiencia

Si bien es cierto que no se define o clasifica el tipo de dificultades que tuvieron los profesores al respecto, también es cierto que no se puede ignorar la ausencia de un dominio matemático y la falta de habilidad para resolver ejercicios. Fue considerando los bajos resultados presentados en los cuadros 2 y 3 que se imparte un curso de capacitación docente en el área de cálculo diferencial a algunos profesores participantes en la prueba. Dicho curso fue desarrollado buscando ir más allá de un curso de capacitación matemática "tradicional" (regularmente enmarcado en el dominio matemático) en donde se contemplara la didáctica de la matemática. Por razones de espacio y a fin de ilustrar lo dicho, daré a modo de ejemplo, el diseño y tratamiento de un tema específico del curso, la regla de L Hôpital.

En una de las sesiones del curso correspondientes al tratamiento de la regla de L Hôpital, se trabajó con una serie de actividades entorno a dicha regla. Esto, con la intención de identificar el grado de conocimiento de los profesores sobre la regla, sus habilidades y sus entendimientos.

Una actividad exploratoria aplicada al inicio de la sesión a 20 profesores participantes, permitió dar cuenta de sus conocimientos, habilidades y entendimientos sobre la regla. Por ejemplo, se hicieron preguntas como las a continuación presentadas:

1.- Enuncie con la mayor precisión posible, la Regla de L' Hospital.

2.- Determine el valor de los límites indicados para cada una de las funciones dadas:

A) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; B) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x}$; C) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right)$; D) $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x}$

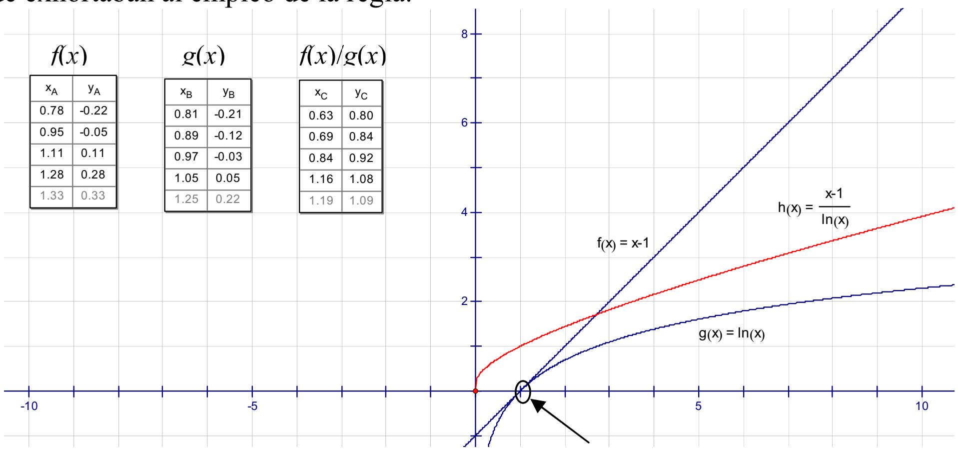
3.- Dé una argumentación visual del porqué la Regla de L' Hospital resulta intuitivamente verdadera.

Para la pregunta 1, se encontró que el 80% de los profesores no pudo enunciar con precisión la regla. En la pregunta 2, el 100% realizó satisfactoriamente los incisos A) y B); El 70% manifestó problemas con el inciso C) y el 90% tuvo problemas con el inciso D). El 100% de los participantes, no ofreció respuesta alguna al reactivo 3.

Mirando que los profesores tenían problemas desde el recordatorio de la misma definición, se decidió iniciar por enunciar la regla y a partir de su definición, intentar generar un argumento geométrico basado en ideas infinitesimales que diera cuenta sobre la funcionalidad y deducción de la regla (véase, Cantoral, Farfán, 2004).

Se trabajó en un escenario gráfico apoyado en el uso del software Skechpad, 4.0 (programa de geometría dinámica) que permitiera mirar a las curvas localmente como rectas. Esto se logró mediante el uso de la herramienta *Zoom* que tiene el software y que resultó ser importante en el entendimiento de la regla. Así, el escenario contemplaba la presentación de la regla en términos simbólicos-verbales, el uso y comparación de gráficas, el análisis de comportamientos en tablas y el planteamiento y resolución de problemas. Mostraré de manera simple, mediante fases, una aproximación al tratamiento seguido:

Fase 1. En el escenario gráfico, se desarrollaron ejemplos concretos de cálculos de límites que exhortaban al empleo de la regla.



x_A	y_A
0.78	-0.22
0.95	-0.05
1.11	0.11
1.28	0.28
1.33	0.33

x_B	y_B
0.81	-0.21
0.89	-0.12
0.97	-0.03
1.05	0.05
1.25	0.22

x_C	y_C
0.63	0.80
0.69	0.84
0.84	0.92
1.16	1.08
1.19	1.09

Fase 2. Se trabajó sobre las ideas infinitesimales para dar paso a la argumentación de la funcionalidad de la regla. Así, se trabajaron casos como el siguiente:

En la figura 1, las funciones f y g cumplen las hipótesis de la regla de L' Hospital. Considerando el hecho de que $h(a+\Delta x)\approx h(a)$ cuando $\Delta x \to 0$. Establézcase un procedimiento algorítmico que haga plausible la regla de L'Hospital.

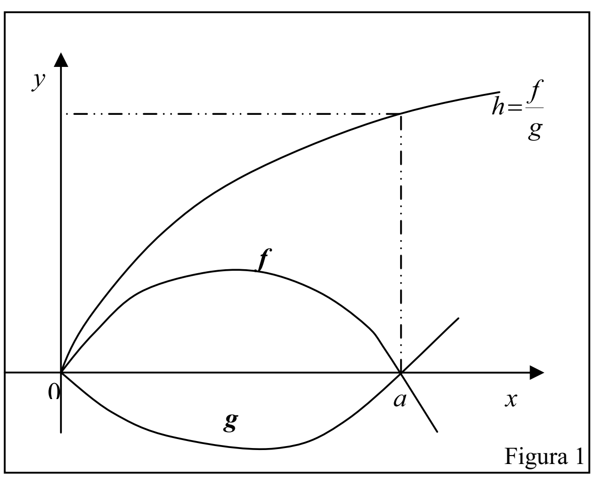


Figura 1

Algoritmo desarrollo por algunos profesores:

A. $$\frac{f(a+\Delta x)}{g(a+\Delta x)} \cong \frac{f(a)}{g(a)}$$

B. $$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{g(a+\Delta x)-g(a)} \cong \frac{f(a)}{g(a)}$$

C. $$\frac{\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}{\dfrac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}} \cong \frac{f(a)}{g(a)}$$

D. $$\frac{f'(a)}{g'(a)} \cong \frac{f(a)}{g(a)} = h(a)$$

Los profesores para este momento, tenían cierta claridad sobre la funcionalidad y deducción de la regla, pues se había hecho el análisis geométrico con carácter infinitesimal. Por tanto, restaba buscar la forma de vincular "formalmente", el cociente de derivadas con el cociente de funciones. Al respecto mencionaré, que más de un profesor se cuestionó sobre la manera en que habría de escribir su resultado, claro está, en notación de límites. Es decir, en la forma: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, g'(x) \neq 0$.

Conclusiones

La experiencia que derivó de un diagnóstico sobre los conocimientos y habilidades matemáticas en algunos profesores de bachillerato del estado de Yucatán, así como, de la implementación de un curso de capacitación docente en matemáticas y que se guió bajo una orientación histórica y epistemológica de los conceptos matemáticos, permite señalar que no es suficiente la intención y el deseo de mantener actualizado y capacitado al profesorado de este nivel educativo, a fin de hacer frente a los actuales desafíos de desarrollo de competencias entre los jóvenes para "garantizar" buenos aprendizajes y exitosa inserción al ámbito laboral sino, se hace también necesario, caracterizar a dichos profesores dentro de su heterogeneidad de formación profesional, precisando el tipo de formación con que cuentan, conocer su grado de dominio matemático, sus habilidades e incluso, sus inclinaciones y disposición por una formación didáctica que incluya el uso de las nuevas herramientas computacionales en matemáticas y su enseñanza.

En síntesis, para los programas de formación matemática en el nivel medio, concretamente, para profesores de bachilleres en Yucatán, se sugiere reflexionar sobre el planteamiento de una didáctica de la matemática en la formación del profesorado en donde se busque atender no sólo la diversidad de los docentes y alumnos, sino que genere diversidad por la propia vía de la enseñanza de la matemática (Andonegui, 2005). En ello, los resultados de las investigaciones en Matemática Educativa y la adecuada atención de la profesionalización del profesor (Villa, 2000), constituyen piezas importantes para el logro del objetivo social del bachillerato.

Bibliografía

Andonegui, M. (2005). Pensamiento complejo y educación matemática crítica. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, *18* (pp. 245-251). México: Clame.

Azcarate, P. (1997). La investigación matemática. Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa 3*(2), recuperado en http://www.uv.es/RELIEVE/v3n2/RELIEVEv3n2_0.htm

Cantoral, R., Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México, D.F., México.: Thomson.

D' Amore, B., Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(1), 33-45

L'Hôpital, M. de (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. Colección MATHEMA. México: UNAM.

Villa, L. (2000). La educación media. *Revista Mexicana de investigación Educativa 5*(10), 201-204. Obtenido en Mayo 23, 2003, de http://www.comie.org.mx/revista/Pdfs/Carpeta12/12invest1.pdf .

EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR COMO USUARIO INTELIGENTE Y CRÍTICO DE LOS MATERIALES DE APOYO DIDÁCTICO

Santiago Ramiro Velázquez
Universidad Autónoma de Guerrero, Centro de Investigación y Desarrollo Educativo. México.
sramiro@prodigy.net.mx
Campo de Investigación: Formación de profesores; Nivel: Medio superior; Metodología: Cualitativa

Resumen

En este artículo se expone parte de los productos de una investigación en proceso[1] sobre formación de profesores de matemáticas del nivel medio superior (NMS). De manera que se describe un taller realizado en Relme 19 con profesores de matemáticas. Derivado de la realización de un Diplomado de Matemática Educativa con docentes de este nivel, en el que se constata que por lo general en los subsistemas en los que laboran en el estado de Guerrero, impera un diseño de programas centrado en los contenidos temáticos. En el mismo sentido se hace una descripción de la escolarización del saber geométrico que se da por esta estructura de programa, que impide visualizar conceptos y procesos matemáticos.
Palabras clave: currículum, readecuación, objetivos, contextos auténticos.

Introducción

Una tendencia en desarrollo curricular consiste en considerar en los programas de estudio la formulación de objetivos sobre conceptos, procedimientos, actitudes, valores y normas y sobre habilidades y procesos relevantes. Por su parte los contenidos, orientaciones didácticas y proceso de evaluación se corresponden con los objetivos propuestos, (Alsina, Fortuny & Pérez, 1997). Postulamos que esta estructura de programa es válida para el nivel medio superior y el profesor puede contribuir a la readecuación continua del currículum, siempre que participe en programas de formación continua y desarrollo profesional de alta calidad. Cuando hablamos de currículum de matemáticas nos referimos a todos los aspectos relevantes en la formación matemática de los alumnos, incluyendo una fuente constante de tareas y problemas matemáticos en contextos auténticos (Slisko, 2003).

La utilización de manera analítica y critica de los materiales de apoyo didáctico[2] remite a la búsqueda de estrategias que aseguren aprendizajes matemáticos significativos, que conformen sociedades cultas y educadas en las que se integren comunidades de aprendizaje con altos niveles de conocimientos y capacidades para desarrollarlos. Esta es una necesidad fundamentada en diversos estudios, particularmente, existe una medición realizada por el Centro Nacional de Evaluación (CENEVAL, 2005), que expresa cuál es el nivel de conocimiento de la población mexicana y su capacidad para aprenderlo, reporta para el estado de Guerrero un valor de 0.482 en una escala del 0 a 1. Correspondiente al penúltimo lugar, solo por arriba de Chiapas que tiene un nivel de 0.413. Este estudio presenta patrones regionales que dividen al país en tres zonas, de

---

[1] El proyecto de investigación se denomina "Programa de capacitación y actualización para profesores de matemáticas de nivel medio superior en Guerrero", GUE-2002-C01-4725.

[2] Como materiales de apoyo están considerados el plan y programas de estudio, el fichero de actividades didácticas, el libro para el maestro, el libro del alumno, otros.

acuerdo al nivel de su población para adquirir conocimiento: ALTO de 1 a 0.773, MEDIO de 0.769 a 0. 656 y BAJO de 0.650 a 0.413. El D.F. tiene un índice de 1, los estados del centro y norte están en el nivel alto o medio y los del sur-sureste en el nivel bajo.
El CENEVAL formula dos recomendaciones en el campo que nos ocupa, estas son: reconsiderar el modelo educativo tradicional y dar énfasis a la pertinencia del conocimiento. El enfoque del referido estudio consiste en que el conocimiento colectivo descansa en lo que cada persona sabe y puede hacer y en lo que saben y pueden hacer las personas con quienes se comparten los espacios escolares, laborales, sociales y familiares. De este modo las personas forman conceptos, procedimientos, habilidades y actitudes en la interacción permanente con sus semejantes.
En este artículo se expresan los objetivos y contenidos del taller, la modalidad de trabajo, la descripción del desarrollo de la experiencia y reflexiones finales.

Objetivos del taller: 1. Caracterizar las problemáticas que viven estudiantes y profesores en el aprendizaje de la geometría[3], derivadas de trabajar sobre la base de un programa centrado en los contenidos. 2. Identificar un procedimiento para que el profesor participe en el desarrollo curricular, mediante el análisis de algunas experiencias.

Contenidos del taller: 1. Problemáticas que viven estudiantes y profesores en el aprendizaje de la geometría en el NMS. 2. Experiencias de participación de profesores en el desarrollo curricular.

Modalidad de trabajo: como su nombre lo indica la modalidad de trabajo es el taller donde los participantes apoyados en diversas fuentes analizan experiencias, las confrontan con sus compañeros, las validan e institucionalizan para conformar productos que dan cuenta de la evolución de sus saberes.

Desarrollo de la experiencia

A). Algunos problemas del aprendizaje de la geometría en el NMS.
Uno de los problemas constatados durante la realización del diplomado de Matemática Educativa y compartido con los participantes en el taller de Relme 19, consiste en que por lo general en los subsistemas de este nivel educativo, impera un diseño de programas centrado en los contenidos temáticos, de modo que la lista de temas sigue siendo para el profesor la guía principal en su trabajo cotidiano, si bien en el caso de las escuelas preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) se expresa que el alumno aprenda a ser, aprenda a hacer y aprenda a aprender la estructura del programa no se corresponde con esta visión y no existe la explicación mínima para que los docentes encaminen su labor en este sentido.
En el caso particular del curso de geometría, esta problemática promueve la escolarización del saber geométrico que impide visualizar conceptos y procesos matemáticos. Al vencer este impedimento los perímetros, áreas, superficies y volúmenes se verían en el ámbito de cálculos y medidas, como prácticas de los alumnos. Análogamente se abordarían problemas comerciales sobre envasado, empaquetado, tallas, patrones, etc.
De modo similar, en lo general se acepta que no se comparte el logro de objetivos sobre la formación de conceptos, desarrollo de procedimientos y actitudes que den cuenta de

[3] En la estructuración de este taller consideramos los contenidos del curso de geometría del nivel medio superior, desde luego se puede hacer sobre cualquier contenido programático.

la relación entre los objetos reales y sus diversas representaciones y conceptualizaciones. De manera que se promueva el interés y la apreciación por las matemáticas en general y en particular por la geometría. Como el interés y el gusto por la explicación verbal precisa de formas y características geométricas (Alsina, Fortuny & Pérez, 1997). En el mismo sentido se requiere promover maneras de organizar y trabajar las actividades en este ámbito, como ser perseverante en la búsqueda de vías de solución de problemas geométricos y el perfeccionamiento de las vías ya encontradas.

Sostenemos que las ideas anteriores coinciden con las tendencias sobre un desarrollo curricular centrado en el aprendizaje y en el alumno en donde este alumno se caracteriza como un activo buscador de conocimiento, constructivo y comprometido con el desarrollo científico, tecnológico y humanístico. Al profesor en el mismo sentido, como diseñador de situaciones de aprendizaje en las que es guía y mediador.

Estas tendencias reflejan una concepción de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría inmersa en el denominado proceso de estudiar matemáticas como un trabajo organizado y sostenido que es fuente constante de tareas y problemas matemáticos. Estas tareas y problemas matemáticos deben ser significativos para los alumnos, lo cual se asegura al situarlos en los contextos auténticos y escenarios donde se desempeñan "…El conocimiento desde esta perspectiva es siempre contextual y nunca separado del alumno, en el proceso de conocer el alumno va asignando al objeto una serie de significados cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto…", (Moreno & Waldegg, 1992).

Estas ideas también coinciden con las concepciones que subyacen en el plan de la escuela secundaria obligatoria en España cuyos programas se estructuran en términos de objetivos sobre conceptos, de procedimientos, de actitudes, valores y normas y sobre habilidades y procesos relevantes. Por su parte los contenidos, orientaciones didácticas y proceso de evaluación se corresponden con los objetivos propuestos. Postulamos que esta manera de concebir y estructurar un programa de estudio es válida para el nivel medio superior.

El proceso de estudiar matemáticas ya referido en líneas anteriores incluye una planeación, gestión y evaluación integral del aprendizaje de la geometría. A esta manera de trabajar le denominamos proyecto integral que comprende la elaboración del perfil de aprendizaje de partida, del perfil de aprendizaje deseable, la secuencia de situaciones de aprendizaje y actividades de seguimiento y observación sistemática, y finalmente del perfil de aprendizaje logrado.

El perfil de aprendizaje de partida consiste en una recapitulación de los saberes previos del alumno en lo referente a conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes. Se realiza sobre la base de un diagnóstico considerando los propósitos a lograr y los contenidos respectivos. Si se trata de abordar la unidad sobre semejanza del programa de estudio del curso de geometría de este nivel educativo, se requiere de inicio que el alumno domine el concepto de razón, proporción y congruencia. De igual modo las propiedades de las proporciones, las representaciones a escala, la media y la cuarta proporcional. En lo referente a procedimientos, habilidades y estrategias explicar y argumentar sobre los ángulos formados por dos paralelas cortadas por una transversal, sobre las rectas y ángulos en el círculo, sobre el teorema de Pitágoras. Identificar diversos enunciados matemáticos como la definición de rectas paralelas, el teorema de Pitágoras y su recíproco. Habilidad para construir o buscar ideas de demostración de teoremas ya conocidos como el de la suma de los ángulos interiores de un triángulo o el de la unicidad de una perpendicular por un punto de una recta. Sobre actitudes

reconocer y valorar la importancia de los planos, mapas y en general dibujos a escala en las prácticas de la sociedad, flexibilidad para la utilización de diversas representaciones y distintos puntos de vista de los objetos matemáticos referidos en este apartado.
De manera análoga se estructura el perfil de aprendizaje deseable, en tanto que el perfil de aprendizaje logrado se va construyendo en el proceso de observación sistemática y seguimiento de las situaciones de aprendizaje.

B). El profesor como usuario inteligente y crítico de los materiales de apoyo didáctico.
Postulamos que el profesor de matemáticas del NMS puede hacer una interpretación adecuada del plan y programas a partir de una evolución de sus concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general y en particular de la geometría. De manera que sobre la base de estos documentos planee, gestione y evalúe su labor considerando las posiciones que en este trabajo se vienen sustentando. Una manera de que los profesores participen en el desarrollo curricular consiste en hacer propuestas en este campo, analizarlas en la academia respectiva, arribar a consensos y hacerlas llegar a las instancias correspondientes para su institucionalización. Para que lo anterior sea posible es necesario que el profesor esté en constante capacitación y actualización. La investigación en la que se enmarca esta experiencia, se sustenta en el denominado experimento de desarrollo profesoral (Simon, 2000) donde el desarrollo didáctico de los profesores[4] se da en un ciclo continuo de reflexión entre profesores, asesores e investigadores.
Sostenemos que el desarrollo curricular en el nivel medio superior consiste en la actualización continua de los objetivos, contenidos y orientaciones didácticas que aseguren a su vez un currículum actualizado. En esta concepción de desarrollo curricular los profesores son o pueden ser actores fundamentales para que en forma colegiada con asesores e investigadores analicen las condiciones del plan y programas de estudio, y de manera organizada y sostenida realicen la actualización referida.
Existen experiencias exitosas en este campo en el nivel superior[5], entre ellas la denominada readecuación continua de los contenidos programáticos en la licenciatura en geología de la Escuela Regional de Ciencias de la Tierra (Angulo, 2004) y en la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas, ambas instituciones de la Universidad Autónoma de Guerrero. Que mantienen actualizado el currículum aplicando una metodología de modificación continua de contenidos, en la que el trabajo académico investigativo del desarrollo curricular lo realizan los profesores del programa académico respectivo. De modo que el futuro profesionista desarrolla las competencias que requiere para el desempeño de su labor.

[4] La experiencia de capacitación a través del Diplomado de Matemática Educativa constata, que el desarrollo didáctico de los profesores inicia cuando toman conciencia de sus concepciones acerca de su formación matemática y didáctica, del uso de diversos dispositivos de apoyo al proceso de estudiar matemáticas, y de los requerimientos para que desempeñen con éxito su labor. A partir de este reconocimiento se disponen a participar en actividades de capacitación y actualización permanentes que aseguren la evolución de sus saberes y sean usuarios inteligentes y críticos de los materiales de apoyo didáctico. A los usuarios de este tipo Polya (1974) los denomina lectores inteligentes, cuando tienen claro el objetivo que se proponen al analizar una fuente de conocimiento y determinan la veracidad de lo que consultan. Campistrous & Rizo (1995) estructuran una técnica de lectura analítica con acciones bien definidas como un recurso útil en la solución de problemas, por sus potencialidades para la comprensión del texto o formato en que esté el problema que se quiere resolver.
[5] El programa académico de la licenciatura en geología de la Escuela Regional de Ciencias de la Tierra y la licenciatura en matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, están en el nivel uno de acuerdo con la evaluación realizada en el año 2005 por El Comité Interinstitucional de Evaluación de la Educación Superior, (CIEES). Este nivel uno corresponde a programas académicos de calidad nacional y están en proceso de superación para su posible acreditación por parte de la Comisión Para La Evaluación De La Educación Superior (COPAES).

Sobre la base de estas ideas de desarrollo curricular se está estructurando un procedimiento que oriente el accionar de los profesores de matemáticas del NMS en la actualización del currículum. Se parte de la premisa de que para posibilitar la participación del profesor en esta actualización necesita estar inmerso en un programa de capacitación y actualización continua, que le asegure la formación de una actitud de reconocimiento y valoración de la relevancia de su participación en la actualización del plan y los programas de estudio. Compartiendo con sus colegas un proyecto de trabajo encaminado al logro por los estudiantes de aprendizajes significativos en el ámbito de las matemáticas[6]. En su versión preliminar este procedimiento se describe brevemente en los siguientes puntos.

i) Proyecto de trabajo compartido. Estructuración del proyecto de trabajo por los profesores que comparten estos compromisos que considere la reformulación de objetivos, la reestructuración de contenidos y los diseños de situaciones de aprendizaje para abordarlos.

ii) Observación participativa y registro sistemático de los cambios. Contiene el diseño de formatos para el registro de cambios donde se consideran las acciones de reformular, reordenar, incorporar y eliminar en el ámbito de los objetivos, contenidos y orientaciones didácticas. Además en este punto se analiza cómo la calidad del aprendizaje depende en gran medida de estas categorías didácticas.

iii) Confrontación con sus pares de los cambios propuestos. En el proyecto de trabajo se planea un seminario permanente donde los profesores, asesores e investigadores confronten sus producciones, para su transformación y evolución. Como parte del seminario se considera la participación en diversas actividades académico investigativas en las que se expongan los trabajos y se personalicen experiencias. En este mismo sentido se propone la apertura de una página electrónica donde se presenten las referidas producciones para recibir críticas, sugerencias, acuerdos y desacuerdos.

iv) Validación de los cambios. Al término del semestre se hace una recapitulación de los cambios propuestos con su correspondiente fundamentación teórica y empírica, que cuente con el consenso de la academia de profesores.

v) Estructuración de la propuesta de transformación y envío a las instancias correspondientes. La recapitulación realizada en el punto anterior se convierte en una propuesta que se analiza y evalúa para definir si procede su envío a las instancias académicas correspondientes o es necesario continuar trabajándola en próximos semestres. La propuesta consta de dos partes, una sobre los cambios realizados a los objetivos, contenidos y orientaciones didácticas ampliamente fundamentados que se envía a las instancias para su aprobación e institucionalización en su caso. La otra parte consta de los diseños de situaciones de aprendizaje como parte del proyecto de trabajo compartido, de las experiencias registradas y de los diversos productos obtenidos. Esta parte es un compendio de materiales de apoyo didáctico realizado por y para los profesores.

[6] Esta manera de participación de los profesores de matemáticas en la actualización permanente del currículum revela que muchas veces la relación didáctica (trabajo de profesores y alumnos) no produce saberes matemáticos, porque prevalece una relación de autoridad, de conveniencia o de otro tipo. Esta revelación orienta hacia la transformación del alumno en un estudiante que comparte responsabilidades con quienes interactúa en la construcción de saberes matemáticos, ubicados en los contextos donde son relevantes.

Reflexiones finales

En el diplomado de Matemática Educativa participaron 30 profesores del nivel medio superior quienes describen los problemas que viven con sus estudiantes en el aprendizaje de la geometría, entre ellos los que se derivan de la forma en que están estructurados los programas de estudio, su comprensión y aplicación como se refiere en el desarrollo de esta experiencia. Estos problemas se confrontan con aquellos estudiados por algunos investigadores en este ámbito, se acuerda la necesidad de participar en su solución y se buscan alternativas pertinentes. En el proceso de esta búsqueda se estructura el procedimiento para participar en la actualización del currículum, descrito en líneas anteriores.

Con estos procesos y resultados se diseña un taller realizado con 15 participantes en la XIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, con quienes se comparten estas experiencias. Los asistentes comparten estos problemas, identifican el referido procedimiento y sostienen que es pertinente para la actualización del currículum de matemáticas, dado que el profesor es pieza clave en el aprendizaje, pero que es necesario mejorarlo y validarlo.

Bibliografía

Alsina, C. Fortuny, J. & Pérez, R. (1997). Unas reflexiones sobre geometría y educación. En C. Alsina, J. Fortuny & R. Pérez (Autores), *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO* (pp. 11-36). Madrid, España: Síntesis.

Angulo, R. (2004). Una alternativa para la flexibilidad curricular. La adecuación continua de contenidos. En Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Guerrero, *IX Foro de estudios sobre Guerrero*. México.

Campistrous, L. & Rizo, C. (1995). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Moreno, L. & Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación Matemática* 4, 7-15.

CENEVAL (2005). La inteligencia colectiva de México. Una estimación de los niveles de conocimiento de su población. [En línea] disponible en: http://portal.ceneval.edu.mx/portalceneval/index.php.

Polya, G. (1974). *Cómo plantear y resolver problemas*. D.F, México: Trillas.

Simon, M. (2000). Research on mathematics teachers development: The teacher development experiment, en R. Lesh and A.E. Kelly (eds.), *Handbook of research design in mathematics and sciences education* (pp. 335-359). Lawrence Eribraum Associates.

Slisko, J. (2003). Los conocimientos y destrezas para la vida según el proyecto PISA: ¿Cuáles son sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias naturales? Manuscrito. Acapulco, México: Facultad de Matemáticas de la UAG.

Velázquez, S. Cabañas, G. Marmolejo, E. Nolasco, H. García, G. Flores, C. Díaz, M., García, V. *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior. Una experiencia de capacitación de profesores*. D.F, México: Santillana.

CONOCIMIENTOS DE MAESTROS DE PRIMARIA SOBRE LA PROPORCIONALIDAD.

David Block
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
dblock@cinvestav.mx
Campo de investigación: Números racionales y proporcionalidad; Nivel educativo: Superior

Resumen: Se presentan algunos resultados de un estudio sobre conocimientos de maestros de primaria acerca de proporcionalidad. Se indagaron, por una parte, conocimientos explícitos sobre algunas características de una relación de proporcionalidad. Por otra parte, se exploró el grado en que los maestros prevén el efecto de algunas variables didácticas de problemas típicos de proporcionalidad, en la dificultad que éstos tienen para alumnos de primaria y en los procedimientos de resolución.

A mediados del siglo pasado, en México como en otros países, el viejo capítulo sobre Razones y Proporciones desapareció de los programas escolares de primaria y de secundaria, como consecuencia de las reformas conocidas como "de las matemáticas modernas". A partir de entonces los contenidos curriculares del tema de la proporcionalidad han quedado desdibujados y sin una relación clara con los otros contenidos del currículum, pese a que la enseñanza del tema ha sido claramente revalorada (Bosch 1994, Block 2001; Comin 2000). Un efecto de este "desdibujamiento" puede mirarse en los conocimientos imprecisos sobre este tema que parecen tener hoy en día las personas en general y los maestros del nivel básico en particular. El trabajo que aquí se presenta, realizado en el marco de un proyecto amplio sobre la enseñanza de la proporcionalidad, informa sobre esta situación.

Características metodológicas de la exploración

El cuestionario. Con la primera parte del cuestionario se exploraron conocimientos explícitos de los maestros sobre las principales propiedades de una relación proporcional entre cantidades (conservación de las razones internas, existencia de un factor constante de proporcionalidad, propiedad aditiva). Mediante la segunda y tercera partes se exploró el grado en que los maestros prevén el efecto de ciertas variables didácticas en la dificultad de los problemas y en los procedimientos que se utilizan para resolverlos. En esta ponencia se reporta lo relativo a una de las variables estudiadas: el carácter entero o no entero de las razones interna entera y externa[1].

La mayoría de los problemas de la segunda y tercera partes del cuestionario que se sometieron a análisis de los maestros, fueron aplicados con anterioridad a un grupo de 13 alumnos de 4°, 5° y 6° grados de primaria, en el marco de una investigación más amplia en la que se inscribe el presente estudio (Block 2001 y 2003).

El grupo de maestros. El grupo estuvo conformado por 65 maestros de primaria del Estado de México, de los cuales 44 impartían clases, los demás ejercían otra función en

[1] Los términos de "razón interna" y "razón externa" son tomados de Freudenthal (1983) y refieren, la primera, a una razón al interior cantidades de un mismo conjunto y, la segunda, a una razón entre cantidades de dos conjuntos; Vergnaud (1988), al analizar la relación de "isomorfismo de medidas", nombra a las razones internas y externas respectivamente como "relaciones escalares" y "relación funcional". Noelting (1980) usa otra nomenclatura en sus problema de comparación de razones: "razón "intra" e "inter" respectivamente.

el sistema educativo[2].La mayoría contaba con al menos 10 años de experiencia docente[3]. Aproximadamente la mitad del grupo había impartido clases en los tres ciclos de la primaria, los demás habían tendido a atender al primer ciclo o al tercero.

Condiciones de la aplicación. Se explicó a los maestros el doble propósito del cuestionario: por una parte, éste proporcionaría información para un trabajo de investigación (se explicaron a grandes rasgos los objetivos) y, por otra parte, sería la base a partir de la cual se organizaría una discusión en equipos y una actividad[4]. Los maestros se sentaron en grupos de entre 6 y 10. Antes de iniciar escribieron los datos relativos a su experiencia docente y a su formación. Se aclaró que no debían poner su nombre en el cuestionario.

El cuestionario se aplicó en dos fases. Durante la primera se pidió a los maestros que constaran individualmente las tres partes, aunque no pudo evitarse que comentaran entre ellos con cierta frecuencia. En la segunda fase, se les pidió que comentaran en sus equipos las respuestas a determinadas preguntas. Los maestros requirieron de entre dos y tres horas para contestar, algunos no terminaron. Las discusiones de cuatro equipos fueron registradas.[5]

Primera parte: ¿Qué caracteriza a una relación de proporcionalidad?

Se presentaron a los maestros varias propiedades para que indicaran, en cada caso, si la propiedad les parecía *suficiente* para que la relación fuera de proporcionalidad, *no suficiente*, o *falsa*. También podían anotar "no sé" o "no estoy seguro". Algunas de las propiedades venían acompañadas de un ejemplo, como en la siguiente:

Una relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad si ocurre que: cuando el valor de una magnitud aumenta en cierta cantidad, el valor correspondiente de la otra aumenta en la misma cantidad. Por ejemplo, en una escala:

	Fig. A		Fig. B	
	5 cm	----------	*9 cm*	
+2 cm				*+2 cm*
	7 cm	----------	*11 cm*	

Algunos resultados que cabe destacar son los siguientes:

- Fueron más numerosos los maestros que identificaron la propiedad de la conservación de las razones internas como una condición suficiente para que hubiera proporcionalidad (63%), que aquellos que identificaron como tal a la condición de cocientes constantes (15%) o, con otra formulación, a la existencia de una constante de proporcionalidad (20%). Este hecho contrasta con la escasa mención del procedimiento de conservación de las razones internas en las otras partes del cuestionario, como se verá más adelante. Al parecer, aunque reconocen esta propiedad como una condición para que haya proporcionalidad, tienden a no esperar que sus alumnos recurran a ella al resolver problemas.
- Únicamente tres maestros distinguieron con certeza la función afín (por ejemplo, la relación entre el número de kilómetros y el costo de un viaje en taxi que cobra una cuota inicial fija además de una tarifa por kilómetro) de la relación proporcional.
- Únicamente 21 maestros, 32% del grupo, saben con certeza que la conservación de las diferencias no corresponde a una relación de proporcionalidad. Los demás

[2] Los maestros están inscritos en un curso de actualización no escolarizado, sobre enseñanza de las matemáticas. La coordinadora del Centro de Maestros en el que se les brinda asesoría me invitó a organizar un taller, y en esa ocasión apliqué el cuestionario.

[3] Seis maestros tenían entre 1 y 5 años de experiencia docente en primaria; cinco entre 6 y 10 años, 34 entre 11 y 20 años, 16 entre 21 y 40 años, y cuatro no especificaron.

[4] Ésta última se organizó como una forma de retribuir a los maestros su participación en el cuestionario.

[5] El análisis de las discusiones de los maestros no se presenta aquí, será objeto de otro texto.

consideran que sí corresponde (25%) o dudan (43%). En las otras partes del cuestionario varios maestros resolvieron erróneamente algunos de los problemas de proporcionalidad al conservar las diferencias. Lo anterior es coherente con otro dato: Para el 71 % del grupo, el hecho de que "cuando una cantidad aumenta la otra también aumenta", fue una condición suficiente para considerar que la relación es de proporcionalidad.

- Finalmente, 37 maestros, poco más del 50%, consideran correcta la afirmación "Dos números son proporcionales si uno es múltiplo del otro, por ejemplo, 12 y 4", es decir, no rechazan la confusión entre el término "proporcional" con el de "múltiplo"[6].

Segunda parte: ¿Cómo lo resolverían los niños?

Se entregaron a los maestros doce problemas con la siguiente consigna:

1) *"Anote el ciclo[7] escolar para el que lo considera adecuado".*
2) *"Explique cómo lo podría resolver un alumno de ese ciclo (...)."*

Los maestros tendieron a contestar la segunda pregunta en términos normativos, es decir, explicaron más cómo *deberían* resolver los alumnos los problemas que cómo los podrían resolver. También fue notorio que las resoluciones propuestas tendieron a ser las que ellos usan. Se presentan a continuación algunos ejemplos representativos.

2.1 Comparación entre dos problemas de escala.

Problema 1: *"Se va a hacer una copia A' del triángulo A, con la misma forma pero más grande; el lado que en A mide 5cm, en la copia deberá medir 30cm. ¿Cuánto medirá en la copia el lado que en A mide 7cm?" (en la hoja aparece el triángulo rectángulo "A" con las medidas de sus catetos anotadas).*

Problema 1

A	A'
5cm	30cm
7cm	¿?

Problema 2

B	B'
5cm	7cm
10cm	¿?

Problema 2: se repite el mismo problema con los triángulos B y B' como se muestra en la tabla.

La mayoría de los maestros tendieron a asignar el segundo ciclo al problema 1 y tercero al dos por lo que puede suponerse que consideraron al problema 2 como más difícil que el problema 1. Al analizar los procedimientos propuestos se explica esa diferencia: en el problema 1 el 56% de los maestros utilizó el operador entero "por 6", coincidiendo con uno de los procedimientos probables en los niños. En cambio, en el problema 2:

- Fueron relativamente pocos (17%) quienes utilizaron la conservación de las razones internas, alejándose en este caso de un procedimiento probable por parte de los niños;
- El 14% presentó el mismo procedimiento que para el problema anterior, la determinación del operador (x7/5 o x 1.4). Puede decirse que, para estos maestros, el carácter entero o no entero de las razones externa e interna no es percibido en este problema como una variable que afecte al tipo de procedimiento.
- El 14 % propuso la utilización de la regla de tres. Dado que en problema 1 únicamente el 3% lo hizo, puede inferirse que para algunos maestros el cambio de procedimiento a favor de la regla de tres constituye un efecto de la variable "razón externa entera o no entera".

[6] Esta última pregunta fue planteada a raíz de un suceso comentado por G. Brousseau (Citado por Comin, 2000): en un manual francés sobre una calculadora que puede realizar divisiones con residuo, se plantea a los maestros que la calculadora permite determinar "si dos números son proporcionales", para lo cual basta con dividir uno entre el otro y observar si hay o no residuo.

[7] El primer ciclo corresponde a primero y segundo grados, el segundo ciclo a tercero y cuarto grados, el tercer ciclo a quinto y sexto grados y el cuarto ciclo a la secundaria (grados 7, 8 y 9)

- Finalmente, un 17% de los maestros mostró un procedimiento aditivo. Por la forma en que redactaron la respuesta (no expresaron que se tratara de un error *de* los alumnos), y por la respuesta que dieron a una pregunta explícita al respecto en la primera parte del cuestionario, consideramos que se trata de un error de los maestros: como sucede a los alumnos, cuando en la escala la razón externa no es entera, se recurre a las diferencias constantes.

2.2 Problemas de comparación de razones.

Problema 1. *Luis organizó una fiesta. Se prepararon varios pasteles, todos del mismo tamaño y se acomodaron en las mesas. Como las mesas son de distinto tamaño, en algunas pusieron más pasteles que en otras. Los niños de cada mesa se van a repartir los pasteles en partes iguales. Vamos a ver qué niños tendrán más suerte y les tocará un pedazo más grande de pastel, o si les tocará lo mismo. En la mesa A, hay 3 pasteles para 4 niños; En la mesa B, hay 4 pasteles para 3 niños. ¿En cuál de las dos mesas le va a tocar más pastel a cada niño?*

Un poco más de la mitad de los alumnos de primaria a quienes se planteó este problema concluyeron que los niños de la mesa B tendrían más pastel que los de la mesa A mediante uno de los dos razonamientos siguientes: porque en B a cada uno le toca más de un pastel y en A menos de uno, o bien, porque en B hay más pasteles que en A y menos niños. Los demás alumnos intentaron resolver determinando el valor unitario, ya fuera numéricamente o mediante una representación gráfica.

Con respecto a las resoluciones de los maestros, el 12% hizo referencia a razonamientos como los anteriores. El 60% propuso el cálculo del valor unitario fraccionario y los demás no propusieron un procedimiento preciso.

Problema 2*:* Mismo problema con los siguientes datos *En la mesa C, hay 2 pasteles para 7 niños; En la mesa D, hay 1 pastel para 3 niños….* Nuevamente se manifiesta cierto distanciamiento entre los procedimientos de los alumnos y los de los maestros: mientras que un poco más de la mitad de los niños entrevistados utilizó el razonamiento "un pastel entre 3 es igual a 2 pasteles entre 6, y por lo tanto toca más que en 2 pasteles entre 7" sólo el 6% de los maestros previó o hizo algo similar, y 77% determinó los valores unitarios fraccionarios (U).

Tercera parte: ¿Qué problema es más difícil?

La consigna fue la siguiente:

> *Ordene los siguientes problemas desde el punto de vista de su grado de dificultad para alumnos de primaria. <u>Justifique su decisión</u>, incluso en el caso en que considere que dos de ellos o los tres presentan el mismo grado de dificultad.*
>
> *"Marcela y José tienen varias ranas. Las dejaron dar algunos saltos y después con una vara midieron la distancia total que lograron recorrer.*
>
> *Problema **A.** La Rana Verde dio 3 saltos y logró avanzar en total 12 varas. Si da 5 saltos en vez de 3, ¿cuántas varas crees que avance?;*
>
> *Problema **B** La rana café dio 4 saltos y logró avanzar 6 varas en total. Si da 6 saltos en vez de 4, ¿cuántas varas crees que avance?*
>
> *Problema **C** La Rana pinta dio 3 saltos y logró avanzar en total 5 varas. Si da 12 saltos en vez de 3, ¿cuántas varas crees que avance?*

Las tres variantes fueron tomadas del cuestionario que se aplicó a alumnos de primaria. En el problema **A**, la razón externa es entera (por lo tanto el valor unitario también), pero la interna no es entera. El procedimiento más utilizado por los niños fue la obtención del valor unitario. En el problema **B**, ninguna razón es entera, varios niños intentaron (sin éxito) obtener el valor unitario, con decimales, o con fracciones a nivel gráfico. Otros, pocos, lograron identificar la razón "por cada 2 saltos, 3 varas" y con ella pudieron resolver. En el problema **C**, la razón externa no es entera pero la interna sí lo es. Varios niños lograron utilizar la conservación de las razones internas (12 saltos es 4 veces 3 saltos, por lo tanto la rana avanza 4 veces 5 varas), mientras que otros intentaron, sin éxito, obtener el valor unitario.

Solamente cuatro maestros (6%) consideraron que el nivel de dificultad de los tres problemas era el mismo, por lo que puede decirse que la gran mayoría atribuyó a la variable en juego algún efecto sobre el grado dificultad.

Un poco más de la mitad de los maestros consideraron el siguiente orden de dificultad: el más difícil es el problema C, el intermedio el problema B y el más fácil, el problema A. Diez maestros explicaron que el criterio utilizado fue la dificultad de la división que permite calcular el valor unitario: cociente entero en A (12:4 = 3), cociente con una sola cifra después del punto en B (6:4= 1.5) y cociente decimal periódico en C (5:3 = 1.66). Es probable que otros maestros hayan aplicado también ese criterio pues el procedimiento de reducción a la unidad fue el más utilizado en los tres problemas, sobre todo en A y B. Por lo tanto, el efecto de los cambios en los datos numéricos previsto por al menos la mitad del grupo de maestros fue un aumento de dificultad en la ejecución de una operación implicada, dentro de un procedimiento determinado.

Menos maestros parecen haber considerado que los cambios de valores numéricos podían tener un efecto sobre el procedimiento mismo de resolución:

- la frecuencia de utilización de la regla de tres pasa de 6 ocurrencias en el problema A, a 10 en el B y a 13 en el C, es decir, aparece como una alternativa para los casos "no fáciles", cuando la razón externa deja de ser entera. Dos maestros lo dicen explícitamente.
- la frecuencia del procedimiento basado en la conservación de las razones internas, si bien nunca fue alta, también aumentó del problema A (2 maestros), al B (8 maestros) y al C (16 maestros), lo cual corresponde bien con las condiciones que favorecen a este procedimiento: en A la razón interna no es entera y es difícil (3→5), en B no es entera pero es menos difícil (4→6), además de que es relativamente fácil de descomponer (4→2→6), y finalmente en C es entera y es muy fácil de identificar (4→12). De los 16 maestros que usaron este procedimiento en el problema C, cinco consideraron que dicho problema era por ello el más fácil, seis

más consideraron que era intermedio y los otros cinco que, pese a todo, era el más difícil.

Conclusiones

Los datos obtenidos sugieren que los conocimientos de los maestros de primaria acerca de las características de una relación de proporcionalidad son precarios. El hecho de que solamente el 32% de los participantes supiera con certeza que una constante aditiva no caracteriza a este tipo de relación sugiere la importancia del problema. Se vislumbra también cierta dificultad por parte de los maestros para anticipar el efecto que puede tener la manipulación de determinadas variables didácticas de los problemas sobre la dificultad que éstos pueden tener para los alumnos, así como sobre los procedimientos de resolución. En particular, los procedimientos basados en la conservación de las razones internas, y, sobre todo, los razonamientos cualitativos, parecen muy poco visibles.

Estos resultados interpelan de manera clara a los programas de actualización y de formación de maestros. No obstante, es probable que las carencias y dificultades observadas estén relacionadas con un fenómeno de "desdibujamiento" de la noción de proporcionalidad en los programas de todos los niveles, de la primaria a la formación profesional. En particular, debe considerarse, como lo sugiere G Brousseau, que es en los niveles de secundaria y de preparatoria en los que los futuros maestros de primaria adquieren prácticamente toda su formación matemática, por lo que debe asegurarse que en esos niveles se estudien los conocimientos de matemáticas que se necesitan para enseñar en la primaria. Es el caso de la proporcionalidad.

Bibliografía

Block, D (2003) "De la expresión "2 de cada 4" a la expresión "1/2 de". La noción de razón, precursora de la noción de fracción". En *Memoria electrónica del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Guadalajara, Jalisco

Block, D. (2001) *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. Tesis doctoral. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Memoria para optar por el grado de Doctor. Departent de Matemàtiques. Facultat de Ciències. Univeristat Autònoma de Barcelona.

Comin, E. (2000) *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes, et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse doctorale. École Doctorale de Mathématiques-Informatique. Université de Bordeaux, France.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Reidel, Dordrecht Noelting, G. (1980). "The development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part I. Differentiation of Stages". *Educational Studies in Mathematics* (217-253). Holland: Reidel Publishing, Dordrecht

Vergnaud, G, (1988). "Multiplicative Structures" en *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Vol 2. En. J.Hiebert , y M. Behr (Eds). Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.

LA VARIACIÓN EN LAS EXPLICACIONES DE LOS PROFESORES EN SITUACIÓN ESCOLAR

Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas/Cinvestav-IPN, México
erbalderas@uat.edu.mx
Campo de Investigación: Pensamiento Variacional, Nivel Educativo: Superior, Metodología: Etnográfico
Palabras Clave: Variación, función, discurso, explicación.

RESUMEN

Esta investigación centró la atención en el papel del discurso en la clase de matemáticas cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la noción de *variación*. El discurso constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela, por lo tanto construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente. Nos ocuparemos de analizar el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas, primer semestre de ingeniería, cuando la noción de variación está siendo usada por los profesores y cuando los estudiantes intervienen a propósito de dicha noción. En particular nos centraremos en *función* y *derivada* que son vistos como modelos para el estudio de la variación. Los registros y las transcripciones de las clases, que se audiograbaron, fueron analizadas considerando un modelo de investigación cualitativa.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas generalmente se consideran como un cuerpo de conocimiento individual y socialmente construido y como lenguaje especializado para comunicar diversos aspectos de nuestro mundo (Pimm, 1991). Sin embargo, el nuevo conocimiento matemático (individual o compartido) se construye a través de interacciones y conversaciones entre profesores y sus alumnos. De ahí que el movimiento entre el sentido personal de un concepto y el significado matemático compartido es crucial para que el aprendizaje se lleve a cabo (Bartolini Bussi, 1998). El papel del profesor y los estudiantes en este movimiento ayuda a determinar que el aprendizaje ocurra. Esta consideración del proceso de enseñanza-aprendizaje enfatiza la importancia de las interacciones en el aula y el contenido matemático que se está discutiendo. De ahí, el estudio de esas interacciones y como el contenido matemático o el significado compartido de conceptos influye en el desarrollo de las discusiones.

Por otro lado, algunas investigaciones en el campo de la matemática educativa (García, 1998; Zubieta, 1996; Ávila, 1996; Hoyos, 1996; Cantoral, 1992; (Pulido, 1998; o Artigue, 1991) reportan la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Con nuestro estudio no pretendemos "remediar" ese estado de cosas, ni mucho menos. Tampoco pretendemos decir como se debe enseñar la noción de variación, o si un profesor enseña bien en el aula. Nos proponemos algo aún mas modesto, mas particular. Lo que intentamos es la comprensión del complejo y rico entramado de pautas de interacción, que se dan para producir conocimiento entre docentes y alumnos, consideramos que es necesario como punto de partida para cualquier propuesta que pretenda mejorar la enseñanza del cálculo en su contexto real. Nos hemos propuesto estudiar la interacción discursiva en el aula desde la perspectiva del profesor; aunque se tiene como principal propósito la forma en la que participa el docente, es necesario aclarar que no es posible analizar la perspectiva del docente sin considerar a los alumnos, ya que ambos actúan como referentes de sus contribuciones y el significado de éstas dependen del contexto interactivo (Reséndiz, 2004). Pretendemos construir una respuesta, parcial, que centre su atención en algunos de los fenómenos de enseñanza específicamente involucrados con las dificultades del aprendizaje. Particularmente hemos centrado la atención en la noción de variación, que no siendo un objeto explícito de enseñanza está presente en muchas de las prácticas discursivas.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Nuestro objetivo es el de comprender las tramas de relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido curricular. Por ello, dado que hemos considerado al profesor como el portador del saber que habrá de escenificarse en el aula, emprendimos un amplio estudio sobre las formas en que los profesores desarrollan un conocimiento específico sobre la manera de enseñar su materia cuando se precisa tratar una idea matemática fundamental para el cálculo, una noción compleja conocida como variación.

El objetivo principal de la investigación es el siguiente: *se pretende en este estudio localizar y analizar las maneras en que se introduce y desarrolla la noción de variación en situación de enseñanza en el nivel superior.* Así, una forma de abordar el estudio sobre la enseñanza de la variación es por medio del discurso en el aula. Es en el aula en donde la palabra se utiliza la mayor parte del tiempo. La comunicación y, específicamente, la interacción entre el docente y el alumno y alumno-alumno, se considera en la actualidad la base de proceso de aprendizaje (Tusón & Unamuno, 1999). Una de las maneras de tener acceso a la información sobre cómo se introduce y se desarrolla la noción de variación, es estudiando el discurso del profesor, pero también el discurso en la interacción social que se realiza en el aula escolar. Por lo anterior, el problema de investigación se delimitó por medio de las siguientes preguntas: ¿Cuál es el papel que juega la variación en el discurso del profesor? ¿Qué sucede con la noción en la interacción? ¿Cuál es el papel de los alumnos en la interacción?
Para intentar responder a estas cuestiones es necesario desarrollar perspectivas teóricas útiles para interpretar y analizar la complejidad de las clases de matemáticas.

PARTICIPANTES Y ESCENARIO

Los participantes en la investigación fueron tres profesores que impartían la asignatura de Matemáticas I, del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec. Los profesores fueron seleccionados aleatoriamente entre los que impartían la materia. Se platicó con cada uno de los profesores y se les dijo que deseábamos observar y registrar la manera como ellos enseñaban los conceptos de función y derivada y estuvieron de acuerdo.
Las observaciones se realizaron por un periodo largo, solamente en las clases donde se impartía los conceptos de función y derivada, ya que son vistos como modelo para el estudio de la variación. Ellos son profesores de las diferentes carreras de ingenierías.

La información se recabó por medio de las observaciones de sus actividades en el aula, en condiciones "normales". La información recopilada consistía de cintas auditivas de las discusiones que se realizaron en el aula durante el semestre, así como notas de campo (registro de la observación) para complementar las cintas de audio. Esto permitió contar con una fuente de datos que nos facilitó para obtener información que ilustró lo que sucede en condiciones "normales" en el salón de clase, lograr un acercamiento con los profesores y con el grupo, pero sin provocar modificaciones importantes en las formas cotidianas de trabajo y de relación. Esto nos permitió tener registros reales y obtener información de lo que sucede en la interacción social, esto es, en el proceso educativo donde participan los profesores y los alumnos.

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Para realizar las observaciones, nos apoyaremos en un punto de vista teórico: La transposición didáctica y las situaciones didácticas. Un fenómeno importante a observar, ligado al control de la transposición didáctica, es el "envejecimiento de las situaciones de enseñanza", en el cual, los patrones de interacción se refieren a las relaciones entre el profesor, los alumnos y las propias situaciones. Se ha podido dar cuenta, en este estudio, de este fenómeno didáctico, al interior del aula, ya que en la interacción se modifican las situaciones de enseñanza del profesor. Cuando hay interacciones cambian las relaciones de poder y las situaciones de enseñanza . En nuestro caso particular estamos estudiando un fenómeno didáctico en el campo de la matemática universitaria usando la aproximación sistémica que brinda la didáctica de la matemática como disciplina científica. Reflexionamos sobre lo educativo desde una perspectiva en la que la triada, saber, profesor, alumno, desempeña el papel de unidad de estudio. Sin embargo aunque podemos explicar las interacciones entre los polos, saber, profesor, alumno, con base en las nociones, contrato, situación o transposición, quisimos profundizar en el papel del discurso en el aula. Razón por la que incorporamos elementos de los estudios cualitativos de corte etnográfico. Los análisis y la discusión del trabajo, ha implicado interpretaciones y análisis en direcciones específicas. Este proceso concluye cuando se han formulado interpretaciones sólidamente fundamentadas en los datos.

Tomando al discurso como medio para estudiar las prácticas sociales, en esta investigación nos interesa analizar los elementos y características de una sesión de clase y los recursos discursivos, o elementos discursivas de los profesores para enseñar una noción compleja, como la noción de variación, sin dejar de lado la participación de los estudiantes. A continuación presentamos un ejemplo de la construcción de significados a través de la explicación y la variación.

LA CONSTRUCCIÓN DE EXPLICACIONES

Uno de los objetivos del docente es hacer comprender a los estudiantes los conocimientos matemáticos o los saberes que él enseña (Mopondi, 1995). Entre los esfuerzos que el profesor emprende figuran las *"explicaciones"*. Nos interesan las diversas formas que toman sus explicaciones al enseñar una noción como la variación y sus efectos sobre las producciones de los estudiantes. La construcción de significados, de explicaciones, como objeto de análisis, dado su carácter interactivo, demanda que las unidades mínimas de análisis sean secuencias de interacción y no frases o mensajes descontextualizados (Candela, 1999). Así el problema planteado condiciona las características de las unidades de análisis; siendo el objeto de estudio la construcción de los recursos discursivos y los significados sobre la variación. Una unidad de análisis natural es la clase completa en la que se delimita y trabaja el contenido de un tema curricular dentro de la jornada escolar. Las secuencias discursivas seleccionadas son aquellas donde se pueda identificar las actividades y las explicaciones de los profesores frente al contenido donde aparece la noción de variación. Los extractos forman parte de las clases o sesiones de un primer semestre de ingeniería. A continuación presentamos un ejemplo donde la explicación del profesor se centra en el desplazamiento del vértice.

> Extracto 5. 15
> **P:** Bueno ¿cuál es gráfica de la función?, si a esa función le sumamos por ejemplo 1, y queda $y=x^2+1$
> **Am:** Se desplaza el origen en $y=1$.
> **P:** ¿Verdad que estaríamos haciendo eso? Dijera que y va a ser lo que valga en x^2 y eso que estaríamos haciendo sumándole 1, ¿dónde está en x? En 0 pónganle 1, en 0 pongo 1 y en 1 cuando valga 1, ahora la y ¿cuánto va a valer?
> **As:** ¡2!
> **P:** Va a valer 2 [...] y entonces la fórmula seguiría siendo la misma. ¿Qué fue lo único que sucedió? Que la curva se desplazó una unidad hacia arriba y si la quisiera yo bajar ¿qué podríamos hacer?
> **As:** ¡Restar!
> **P:** Restarle 1 ¿Ahora cuál sería la gráfica de $y=x^2-1$? Le podemos poner esta $y=x^2$, y si regresamos 1 ¿qué va a suceder? Cuando abres al vértice el (0,-1) donde corta al eje x en 1,-1 y esta es la gráfica de $y=x^2$-1, de $y=x^2$. Si yo le resto, ¿qué sucede con la curva?
> **Am:** La desplazamos.
> **P:** ¿Cuántas unidades la desplazamos?
>
> B (Gpo-1), pág. 99.

Inicia la explicación con la función cuadrática básica $y=x^2$ que, cuando se le suma una unidad ($y=x^2+1$), desplaza su origen en y=1. La afirmación *"se desplaza el vértice en y=1"* fue hecha por un alumno, aunque no se le solicitó. Al restarle una unidad a la función cuadrática básica ($y=x^2-1$) se desplaza el vértice una unidad hacia abajo y al sumarle una va hacia arriba. El docente utiliza el término "desplaza" que dijo el alumno cuando asevera: *"la curva se desplazó una unidad hacia arriba"*.

Cuando el profesor demanda que los alumnos expongan su opinión, a través de preguntas motiva intervenciones explicativas y resulta de sumo interés para los alumnos poder "mover" o "desplazar" el vértice de su posición inicial. El profesor intenta generalizar que, si a la función básica le suman una cantidad, la gráfica se desplaza hacia arriba, y si le restan, hacia abajo. En esta situación hay dos tipos de explicación donde interviene la noción de variación: el modelo del lenguaje natural y el modelo de la representación geométrica, que sirve para visualizar los movimientos.

Enseguida veremos cómo se desplaza el vértice de una función cuadrática básica ($y=x^2$) cuando se le suma una unidad y se eleva al cuadrado ($y=(x+1)^2$.

> Extracto 5.16
> **P:** Es una parábola $Y=(x+1)^2$. Inclusive hasta la podemos ver así, $y=x^2+2x+1$, ¿verdad? Luego, el -2 ¿cuánto es? El -2 es 1. Entonces la curva sería así –a ver si estamos de acuerdo–, mientras

que la forma básica sería hasta acá, que es $y=x^2$; la forma sigue siendo la misma. Debemos entender que es la misma curva y lo único que hace la línea es desplazarla ¿hacia dónde?
Am: A la izquierda.
P: Hacia la izquierda. Y si la quisiéramos mover más hacia la izquierda, ¿qué tendríamos que hacer? Que se sustituya en la forma básica ¿a quién? A x por $x+2$ ($y=(x+2)^2$). Si la quiero yo hacia la izquierda, hasta –10, entonces ¿en dónde se ubicaría F? Si la función original es $f(x)=x^2$ y yo me la quiero llevar hasta el vértice que está en –10, ¿qué hago?
Am: Sería**:** $y=(x+10)^2$

B (Gpo-1), pág. 101.

La explicación del profesor toma como referencia a la función básica. Es la misma forma de la curva, pero ahora se desplaza una unidad hacia la izquierda y, si se quiere mover más, se tendría que dar un número negativo cualquiera, como –10. Al término de las explicaciones sobre el movimiento o el desplazamiento del vértice, el docente resume el tema con la siguiente tabla.

FUNCIÓN	GRÁFICA
Y=f(x)+c, c>0	La gráfica Y=f(x)+c desplazada c unidades hacia arriba
Y=f(x)-c, c>0	La gráfica Y=f(x)-c desplazada c unidades hacia abajo
Y=f(x-c), c>0	La gráfica Y=f(x+c) desplazada c unidades hacia la derecha
Y=f(x+c), c>0	La gráfica Y=f(x+c) desplazada c unidades hacia la izquierda
Y=-f(x),	La reflexión de la gráfica de Y=f(x) sobre el eje x

Se aprecian dos tipos de explicación que implican a la noción de variación. Uno es el modelo del lenguaje natural (desplazamiento hacia arriba, hacia abajo, izquierda, derecha) y el otro el modelo de la representación geométrica, que permite visualizar el desplazamiento de la gráfica o parábola.

DISCUSIÓN

Se logró identificar una diversidad de perspectivas en las explicaciones de los profesores sobre la noción de función, así como sus ideas acerca de la variación, como la de parámetros –rota, traslada, la sube– o la asignación de un significado geométrico a las funciones (traslación, inclinación, rotación, desfasamiento, sube o baja, crece o decrece). Además, los docentes le atribuyeron nociones de movimiento a las gráficas y a puntos de referencia como el vértice, el origen o la asíntota (dieron las expresiones se desplaza, sube o baja, se recorre, se mueve o corrimiento).

Consideramos que la estrategia de mover un punto de referencia (el vértice, el origen o la asíntota) fue de gran importancia para que los profesores construyeran sus explicaciones en torno al movimiento de la gráfica y, de ahí, enfatizaran el papel de la noción de variación. Para elaborar sus explicaciones, se auxiliaron de una función básica, como $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$ y $f(x)=$ sen x, entre otras.
Durante las clases registramos cinco tipos de explicación en las que pudo apreciarse la noción de variación:

- El modelo numérico
- El modelo de la representación geométrica
- El modelo algebraico

- El modelo de la comparación a / b
- El modelo del lenguaje natural

Estas fueron las representaciones o modelos que utilizaron los docentes para explicar los contenidos.
Estas formas de explicar la noción de variación en aula, se crean bajo el discurso construido tanto por el maestro como por sus alumnos, atendiendo a la especificidad del saber en juego. Según se sostiene en la teoría de las situaciones didácticas, donde se destaca el hecho de que la situación de aprendizaje genere una serie de interacciones que hagan funcionales la comunicación y el intercambio de ideas. En tal sentido, los episodios que analizamos en el aula están estrechamente ligados con la búsqueda de una explicación satisfactoria para los actores de una interacción didáctica.

Se producen modificaciones de las explicaciones con base en la interacción, la cual es propiciada por una búsqueda de complementariedad entre las versiones de los alumnos y la del maestro. Las intervenciones del profesor con la doble función de solicitar explicaciones y tratar de orientarlas regulan el curso de la clase. La situación de enseñanza se modifica a través del empleo de explicaciones situadas.

Los múltiples ejemplos de las discusiones en las aulas durante el transcurso del semestre pueden ilustrar mejor el desarrollo de las discusiones. Con poco espacio en este documento, se presenta sólo un ejemplo.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1991). "Analisis". In D. Tall (De.). *Advanced Mathematical Thinking.* (Capítulo 11, pp.167-198). Mathematics Education Library. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ávila, R. (1996). Detección de algunos obstáculos que dificultan la asimilación y manejo de los conceptos presentes en el análisis y comprensión de los problemas sobre variación. *Publicaciones Centroamericanas* 10(1): 121-126.

Bartolini Bussi, M.G. (1998). Verbal interaction in the mathematics classrom: A Vygotskian análisis. Ln H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A.- Sierpinska (Eds.), *Languaje and communication in the mathematics classromm* (pp. 65-84). Reston, VA: NCTM.

Brousseau, G. (1986a). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7/2,33-115.
Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Paidós Educador.

Cantoral, R. (1992). *Acerca de la intuición del rigor: Notas para una reflexión didáctica.* Publicaciones Centroamericanas 6(1): 24-29.

García, M. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría. CINVESTAV -IPN: Depto. De Matemática Educativa.

Hoyos, V. (1996). *La transición del pensamiento algebraico procedimental básico al pensamiento algebraico analítico.* Tesis Doctoral. Cinvestav, IPN.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol.15/3, 7-52.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). Principles and standars for Teaching Mathematics. *National Council of Teachers of Mathematics.*

Pimm, D. (1991). *El lenguaje matemático en el aula.* Ministerio de educación y ciencia, Ediciones Morata, S. A., España.

Pulido, R. (1998*). Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar.* Tesis Doctoral, CINVESTAV-IPN: Depto. de Matemática Educativa.

Reséndiz, E. (2004). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Tesis de doctorado, CINVESTAV_IPN: Depto. de Matemática Educativa.

Tusón, A. & Unamuno, V., (1999). *¿De qué estamos hablando? El malentendido en el discurso escolar*. Revista Iberoamericana de Discurso y Sociedad. Editorial Gedisa, España, Vol.1, núm. 1.

PROBLEMAS: OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE PARA ALUMNOS Y PROFESORES

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Campo de investigación: Resolución de problemas; Nivel educativo: medio y superior

Resumen

En el presente artículo se desea enfatizar la importancia de los problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al tener sesiones de resolución de problemas con métodos activos y colaborativos, con el docente en una actitud completamente abierta a las inquietudes e iniciativas de los estudiantes, aprenderán no sólo los estudiantes, sino también el profesor. El aprendizaje del profesor se dará desde la fase de preparación de la sesión y puede ser no sólo en aspectos pedagógicos, sino también en aspectos matemáticos. Es fundamental la concepción que se tenga de la matemática y de lo que significa resolver problemas, para que las sesiones con los estudiantes realmente estimulen la formación del pensamiento matemático, la investigación y el "hacer matemática".

Introducción

Las experiencias desarrolladas en mis clases de pre y de post grado, así como en talleres de capacitación de docentes de diversos niveles educativos, me llevan al convencimiento de que es muy enriquecedor para el profesor y para los alumnos tener sesiones de resolución de problemas en las que se parte de una situación descrita y se plantean problemas de dificultad creciente para irlos resolviendo inicialmente en trabajos individuales y luego en grupo. La tarea final es proponer problemas inspirados en la situación dada y en los problemas previamente resueltos o examinados. Mostraré la experiencia tenida con un problema de geometría del espacio

Algunos aspectos fundamentales

Concepción de la matemática.

La forma de aprender y de enseñar la matemática depende en gran medida de la concepción que se tenga de la matemática, en la mayoría de los casos de manera inconsciente, como consecuencia de las experiencias tenidas como estudiante, como profesional y como parte de una sociedad en la que predomina la idea de la matemática como una ciencia acabada, difícil, llena de fórmulas, algoritmos y teoremas a los que sólo tienen acceso algunos privilegiados. Es importante cambiar estos estereotipos y llegar al convencimiento de que la matemática es una construcción social dinámica, en permanente desarrollo, tanto con nuevos resultados como con nuevos métodos, que van surgiendo precisamente al resolver problemas que provienen de la realidad, de otros campos de la ciencia o de la matemática misma, impulsados por la búsqueda de la verdad y de la belleza y por el afán de aportar a explicar, predecir y dominar la naturaleza. Bien decía Jean Dieudonné, famoso matemático francés del grupo Bourbaki:

> *"La historia de la matemática muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico"*

¿Qué entendemos por problema?

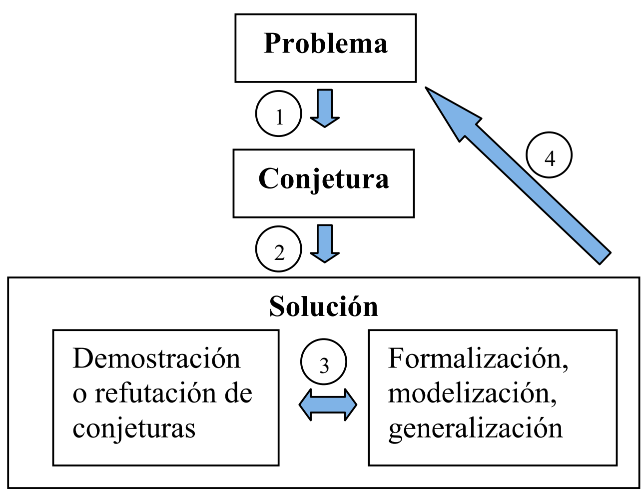
En las sesiones de trabajo hemos asumido que problema es, siguiendo a Schoenfeld, una tarea que es difícil para quien está tratando de hacerla. Difícil en el sentido de constituir un impasse intelectual y no solo a nivel operacional o de cálculo. En palabras de Campistrous y Rizo "*la vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida, deja de ser un problema*".

Es resolviendo problemas que avanza la matemática y es resolviendo problemas como deberíamos avanzar en el desarrollo de nuestros cursos, presentándolos adecuada y oportunamente para introducir conceptos y procedimientos nuevos.

¿Qué entendemos por resolver problemas?

Las sesiones de resolución de problemas podrían entenderse como ocasiones en las que se entrega a los alumnos una lista de problemas seleccionados de algún libro o de una página de Internet y se les pide que los resuelvan; es de imaginarse que si los alumnos no pueden resolverlos, el profesor expondrá cómo deben resolverse o repartirá una hoja con las soluciones. Sin embargo, la propuesta es mucho más ambiciosa, teniendo como marco la idea que resolver problemas es "hacer matemática"; es decir, vivir en pequeño la experiencia del ciclo dinámico del desarrollo de la matemática, considerando cuatro fases:

1. Identificada la dificultad, conjeturar una solución o una manera de llegar a ella;
2. Pasar de la conjetura a la búsqueda de una solución formal.
3. Proponer una solución, lo cual significa tratar de demostrar o de refutar la o las conjeturas, simultáneamente con la formalización adecuada, la modelización y el refinamiento de lo hecho, incluyendo la generalización si fuera el caso.
4. Plantearse nuevos problemas. El problema no se considera "acabado" al haber encontrado una solución, pues todavía puede explotarse más sus potencialidades al proponer nuevos problemas planteándose nuevas preguntas a partir del problema dado; buscando otras formas de solución; haciéndole modificaciones y conjeturando soluciones o resolviendo las nuevas cuestiones; buscando conexiones con la realidad y con otros campos de la matemática o de la ciencia, etc.



Con este enfoque, las sesiones de resolución de problemas no son para que el profesor exponga cómo "se deben" resolver los problemas, sino para desarrollar la capacidad de pensar matemáticamente. Y no sólo los alumnos, sino también el profesor, pues debe orientar adecuadamente las iniciativas e ideas de los alumnos – tanto para resolver el problema como para plantearse los nuevos - que pueden estar muy alejadas de las ideas del profesor. Estimular la creación de problemas, es un aspecto sumamente importante en la formación matemática de profesores y estudiantes, poco enfatizado en las propuestas de formación matemática. Proponer un problema supone identificar o crear una dificultad, considerar la información suficiente para resolverlo y redactar un texto adecuado; lo cual es muy diferente a lo que habitualmente se hace en las aulas, pues generalmente se parte de enunciados dados, que tienen ya la dificultad escogida y la información seleccionada. En las experiencias tenidas, se llega a esta fase luego de haber propuesto una situación problemática y dedicado tiempos al trabajo individual de uno o dos problemas sencillos en torno a la situación y luego al trabajo en grupos, con dificultades mayores y graduadas. Es pertinente recordar la reflexión de David Hilbert en su famosa conferencia en el segundo Congreso Internacional de Matemática, en París, en Agosto de 1900: "*Quizás, en la mayoría de los casos, la causa de no haber podido resolver un problema reside en no haber tratado primero de resolver los problemas más sencillos y fáciles. Todo depende entonces de hallar estos problemas más sencillos y tratar de resolverlos por medio de los procedimientos más rigurosos con que contemos y de aquellos conceptos susceptibles de generalización*"

Ciertamente, desarrollar este tipo de sesiones de resolución de problemas requiere que el profesor tenga una sólida formación matemática y una actitud muy amplia y amigable para crear una ambiente de confianza que posibilite la expresión libre de las ideas de los estudiantes, sin que esté presente el temor a equivocarse y a ser criticado por ello.

El papel del profesor es fundamental, no sólo porque debe orientar el trabajo hacia el desarrollo del pensamiento matemático, sino también porque debe inculcar y estimular el desarrollo de valores, actitudes y capacidades.

¿Qué deberíamos hacer al resolver un problema?

Como fruto de las experiencias tenidas, a continuación damos un conjunto de recomendaciones más concretas, que se tendrían que ir desarrollando en las diversas fases consideradas, no necesariamente en el orden en que están enunciadas.

- Comprender el problema, identificar la dificultad.
- Conjeturar una solución o un camino para llegar a la solución.
- Organizar la información.
- Experimentar, buscar regularidades
- Establecer relaciones lógicas.
- Aplicar conocimientos matemáticos.
- Justificar las conclusiones intermedias y finales.
- Encontrar sentido a lo que se desarrolle, en el contexto del problema.
- Verificar la solución encontrada.
- Examinar otros caminos de solución.
- Modificar el problema para examinar otros casos (¿qué pasaría si ….?) Modificar datos, cambiar la dificultad, considerar casos particulares, pensar en generalizaciones, etc.

¿Qué actitudes y capacidades se pueden estimular resolviendo problemas?

En el cuadro se da una lista de algunas de las actitudes y capacidades más importantes que se pueden estimular (preferentemente y no excluyentemente) en las cuatro fases consideradas en la resolución de problemas, en sesiones de trabajo con situaciones problemáticas y dificultades graduadas, a ser resueltas inicialmente de manera individual y luego grupal.

	Pasar de la dificultad a la conjetura	Pasar de la conjetura a la búsqueda de la solución formal	Proponer una solución	Plantear nuevos problemas
Actitudes				
Científica		▪	▪	▪
Crítica		▪		
De investigación	▪		▪	▪
Creativa	▪		▪	▪
De búsqueda de rigor		▪	▪	
De perseverancia	▪	▪		
De tolerancia	▪	▪		
De confianza y seguridad en sí mismo		▪		
De búsqueda de la belleza			▪	▪
De reconocimiento y corrección de errores		▪	▪	
Capacidades				
Entender y establecer relaciones en situaciones complejas	▪			▪
Relacionar lógicamente información y conceptos	▪	▪		▪
Encontrar regularidades	▪			
Estimar	▪			
Predecir	▪			
Intuir	▪			
Organizar información		▪		
Identificar problemas		▪		▪
Comunicarse mediante las matemáticas		▪	▪	▪
Demostrar		▪	▪	
Usar tecnología		▪		
Saber hacer		▪		
Aplicar		▪		

conocimientos				
Resolver problemas		▪	▪	
Trabajar en grupo		▪	▪	▪
Abstraer			▪	▪
Generalizar			▪	▪
Modelizar			▪	
Entender y manejar símbolos		▪	▪	▪
Proponer problemas				▪
Relacionar la matemática con la realidad y otros campos del conocimiento				▪

¿Qué oportunidades de aprendizaje nos brindan los problemas?
A continuación damos una lista de las diversas oportunidades de aprendizaje que nos brindan los problemas, a los alumnos y a los profesores. El saber aprovecharlas depende mucho de la actitud del profesor al preparar los problemas y al orientar las sesiones de resolución de los mismos, de modo que despierte en sus alumnos el deseo de resolverlos y estimule adecuadamente su creatividad.

a) Aplicar las matemáticas.
b) Comprender la realidad (física, social, económica)
c) Establecer conexiones:
   - entre conceptos matemáticos
   - con otros campos del conocimiento
   - con situaciones de la vida real.
d) Organizar la información.
e) Usar recursos tecnológicos.
f) Sistematizar razonamientos, adoptar notaciones y símbolos
g) Profundizar conceptos matemáticos.
h) Agudizar la intuición científica, la creatividad, la observación, la búsqueda de regularidades, la capacidad de generalizar.
i) Ser rigurosos, hacer demostraciones.
j) Conocer las potencialidades y las limitaciones de las herramientas matemáticas.
k) Disfrutar de la belleza de las matemáticas.
l) Proponer soluciones, establecer criterios objetivos.
m) Identificar y proponer problemas.
n) Dar pasos iniciales en la investigación científica.
o) Practicar el aprendizaje colaborativo
p) Reflexionar sobre la matemática misma
q) Reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas
r) Valorar la verdad y la belleza
s) Estimular el desarrollo de determinadas actitudes y capacidades

Experiencias con geometría

En una clase con estudiantes universitarios de segundo y tercer ciclo, propuse la siguiente situación, haciendo ligeras modificaciones a uno que se propuso en la Olimpiada de Mayo del 2003.

Se tiene un cubo cuyas aristas miden 8 cm. En una arista, a 2 cm de uno de sus extremos, se encuentra una hormiga que debe realizar un recorrido por la superficie del cubo y regresar al punto de partida. Su camino debe contener puntos interiores de las seis caras del cubo y debe visitar sólo una vez cada cara del cubo.

Una de las actividades a desarrollar fue describir el camino que se consideraba el más corto que puede recorrer la hormiga; y otra, la de proponer algún problema inspirado en esta situación. Uno de los grupos de trabajo propuso el problema "*encontrar la longitud del camino más corto sobre la superficie de un tetraedro regular, que una los puntos ubicados en los centros de dos de sus caras*".

En el siguiente ciclo, con otros estudiantes, propuse la siguiente situación:

Una hormiga se encuentra en el centro de una de las caras de un tetraedro regular, cuyas aristas miden 12 cm, y avanza sobre la superficie del tetraedro hasta alcanzar una gota de miel que se encuentra en el centro de otra de las caras del tetraedro

Una de las actividades fue describir el camino de longitud más corta que podría seguir la hormiga; y otra, la de proponer un problema similar, considerando otro cuerpo geométrico. Casi todos los grupos propusieron problemas sobre un cubo. En todos los casos fue sumamente ilustrativo resolver los problemas usando desarrollos planos tanto del tetraedro como del cubo. En particular para mí, como profesor, fue una oportunidad para descubrir, haciendo un estudio de posibilidades con una notación propia, que sólo existen 11 desarrollos planos de un cubo, diferentes entre sí, salvo isometrías. En el problema del tetraedro, con los puntos centrales de dos caras laterales de un tetraedro regular, quedó demostrado que el camino más corto no es paralelo al plano de la base – como lo imaginaron varios - sino "subiendo" por el segmento perpendicular a la arista común y luego "bajando" en línea recta hasta el otro punto central. Este hecho me motivó a preparar la siguiente situación problemática:

Una hormiga se encuentra en el punto A de una bola esférica, y una gota de miel en el punto B. La bola tiene 6 cm de radio, el ángulo ACB que forman los puntos A y B con el centro C de la esfera mide 60° y ambos puntos están en el paralelo del "hemisferio norte" cuyo centro P se encuentra a 3 cm de C.

Una de las actividades fue determinar, aproximadamente, la longitud de un arco AB que se considere el arco de longitud mínima que recorrería la hormiga para llegar a la gota de miel. Al trabajar con los estudiantes quedó claro que en este caso era imposible recurrir a un desarrollo plano, y la solución del problema del tetraedro ayudó a intuir que el camino más corto no es el arco de un paralelo sino "subiendo" por el arco de una circunferencia máxima. El problema brindó una excelente oportunidad para ejercitar la visión espacial y para la aplicación de teoremas de la geometría plana, y motivó la conversación con los estudiantes sobre las geometrías no euclídeas, la geometría de la esfera, las geodésicas, la optimización restringida y el cálculo de variaciones. Se comentó también sobre la vinculación de este problema con la realidad, al considerar las rutas aéreas más cortas entre dos ciudades; en particular entre Nueva York y Madrid, que se encuentran en el mismo paralelo.

En el curso trabajé con los participantes otras experiencias didácticas desarrolladas con estudiantes universitarios y con profesores, proponiendo situaciones problemáticas de geometría analítica, de optimización y de búsqueda de criterios para tomar decisiones, con sus correspondientes actividades individuales y grupales, de dificultad creciente.

Bibliografía

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996) *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La habana, Cuba. Editorial pueblo y educación.

Malaspina, U. (2002) Optimización matemática. En *Acta Latinoamericana de matemática Educativa* (Volumen 15, Tomo 1, pp 43 – 48) México: CLAME.

Malaspina, U. (2003) Elements for teaching Game Theory. En *PRO MATHEMATICA* (Volumen XVII, No. 33, pp 87 – 100) Lima, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. (2004). Motivation and development of mathematical thinking, using optimization problems. En Gagatsis, A. et al (Ed.) *Proceedings of the 4th Mediterranean conference on mathematics education* (Volume II, pp 491 – 500) Palermo, Italia.

Malaspina, U. (2005). El rincón de los problemas. En Revista Iberoamericana de Educación Matemática: http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, USA. Academic Press.

DISEÑO METODOLÓGICO PARA LA INVESTIGACIÓN DE LA PRAXIS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN UNA COMUNIDAD DE DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Martín Andonegui Zabala
Universidad Pedagógica, Instituto Pedagógico de Barquisimeto, Venezuela
m_andonegui@hotmail.com
Campo de investigación: Estudios socioculturales; Nivel educativo: Superior

Resumen

Se presenta parte del diseño metodológico que se está aplicando para investigar la praxis de la educación matemática en una comunidad de docentes de una escuela de Educación Básica en Barquisimeto, Venezuela. El soporte teórico para este diseño está constituido por la teoría de la actividad (Vygotsky, 1995, 1997; Engeström, 1987), entendida la actividad como un sistema compuesto por los siguientes elementos interrelacionados: sujeto(s), objeto, artefactos mediadores, reglas, comunidad de referencia, y división del trabajo. Se considera, además, el ciclo expansivo de creación de conocimiento y de redefinición del propio sistema de actividad. El trabajo de campo se desarrolla en referencia a estos cuatro puntos: análisis histórico local de la actividad; análisis empírico del sistema de actividad; cuestionamiento del sistema actual de la actividad; y modelización de una nueva solución.

La praxis humana

Considerar la praxis educativa como objeto de estudio nos remite, en primera instancia, al análisis que acerca de la praxis humana realiza Aristóteles (2003) en su Ética a Nicómaco. Tomando en cuenta sus fines y sus modos peculiares de pensamiento, Aristóteles distingue tres tipos de acción: *theoria*, *poesis* y *praxis*. La primera está orientada al descubrimiento de la verdad inmutable y regida por la *sophia*, modo de sabiduría teórica. La poesis indica una acción orientada a la confección de artefactos que, en rigor, ya se conoce antes de su fabricación. Se rige por la *techné*, un cuerpo de conocimientos instrumentales cuya aplicación adecuada garantiza la producción del artefacto.

Por su parte, la praxis se identifica con toda acción encaminada a instituir una forma de vida moralmente buena. Está regida por la *phronesis* o sabiduría práctica, un tipo de pensamiento deliberativo y reflexivo que produce conocimientos prácticos acerca de lo que debe hacerse para lograr un bien ético en cada situación particular, es decir, que produce una reflexión crítica acerca de las consecuencias éticas que pueden derivarse del curso de acción seleccionado en cada situación.

Resulta importante distinguir la phronesis de la techné, es decir, el saber práctico y reflexivo, del saber técnico e instrumental. El primero no consiste en un cuerpo de conocimientos previamente establecidos acerca de cómo actuar de forma provechosa en cualquier situación, sino en saber cómo aplicar principios éticos de carácter general a cada situación concreta; situación concreta que obliga a transformar y adaptar el saber práctico. De este modo, la praxis necesita revisarse y reinterpretarse constantemente, en un proceso permanente de reconstrucción dialéctica de pensamiento y acción, orientado hacia el bien.

Por su parte, González (1997) considera la praxeología o estudio de la praxis como la filosofía primera o punto de partida radical para toda investigación filosófica, que intenta “enfrentar el problema de la orientación de la praxis humana en el mundo” (*o. c.*, p.187). A partir del análisis de los actos y de sus posibles configuraciones funcionales, el autor establece la existencia de *tres modos fundamentales de la praxis: la acción, la actuación y la actividad.*

La *acción* es la primera de esas configuraciones funcionales y se considera como un sistema abierto, integrado por los tres tipos de actos: sensaciones, afecciones y voliciones. La acción humana transcurre en una alteridad radical respecto a las cosas y presenta dos dimensiones, la personal y la social, que comparten una raíz radicalmente común. El carácter personal de las acciones consiste en su distensión o apertura, determinada por la alteridad radical que hay en sus actos. El carácter social se instituye en cuanto los otros se insertan en el transcurso de la propia acción, moldeándola. Y debido a su carácter social, las acciones tienen una dimensión comunicativa, previa, incluso, al compartir del lenguaje.

La *actuación* se caracteriza por la presencia de esquemas intencionales que organizan, orientan y dan sentido a todos los elementos que integran una situación dada. Algunas dimensiones fundamentales de la praxis humana, tales como los signos, el lenguaje, el sistema social o la moral concreta, se inscriben en la configuración funcional de las actuaciones. Además, éstas se determinan mediante esquemas conceptuales que, en buena medida, han sido preestablecidas por otros o que responden a experiencias del pasado personal propio.

La actividad humana

Para González (1997) la *actividad* representa la estructuración más compleja de los actos. En ella se integran –superándolas- las acciones y las actuaciones. De hecho, "la actividad consiste en la apropiación de una determinada posibilidad de actuación" (*o. c.*, p.148), selección atribuible a los "actos racionales", actos intelectivos que son característicos de la actividad. Esta asume, además, un carácter creativo, marcado por sus dimensiones prospectivas, innovadoras, experienciales y transformadoras. Por otro lado, así como nuestra actividad construye nuestra biografía, al mismo tiempo se reviste de historicidad, por cuanto en la actividad "nos encontramos con un dinamismo de apropiación social de posibilidades" (*o. c.*, p.159).

Pero la actividad humana no es sólo tema de estudio en el ámbito de una filosofía primera. También lo es en el de la psicología, particularmente de la psicología sociohistórica o cultural (Cole, 1999). En este terreno reviste especial significación la denominada *teoría de la actividad*, desarrollada inicialmente por los psicólogos rusos a partir de los planteamientos de Vygotsky (1995, 1997) y Leontiev (1978).

Para los autores de esta escuela rusa, la estructura y el desarrollo de los procesos psicológicos humanos surgen mediante la actividad práctica mediada culturalmente y desarrollada a lo largo de la historia. En otras palabras, los fenómenos psicológicos son los procesos subjetivos de la actividad cultural históricamente concreta, mientras que la actividad cultural representa la vertiente práctica y objetivada de tales fenómenos (Wertsch, 1988; Daniels, 2003). Así, pues, el centro de estudio de la teoría son las actividades, en cuanto que llevan a interiorizar las acciones humanas externas, en forma de procesos mentales internos.

Convertida la actividad en centro de estudio, conviene destacar con Davydov (1999) que el vocablo ruso *deyatelnost* al que alude la teoría, se refiere a la noción de actividad social práctica, es decir, a la actividad de larga duración y de carácter evolutivo y transformador.

Engeström (1999*a*) destaca la existencia de tres generaciones en el desarrollo de la teoría de la actividad. En la primera se resalta el concepto de mediación propuesto por

Vygotsky: entre el sujeto y el objeto de la actividad (relacionado con el motivo que dirige la actividad) se encuentran los instrumentos mediadores que posibilitan la actividad. La segunda generación se caracteriza por la presentación de la estructura de la actividad humana como un sistema más complejo, tal como se muestra en la figura 1:

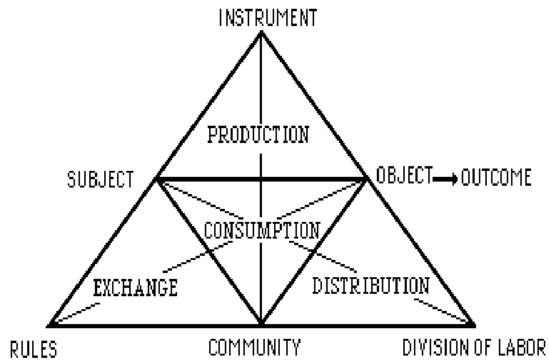


Figura 1: Estructura de la actividad humana (Engeström, 1987)

Los seis elementos se encuentran todos interrelacionados y constituyen cuatro subsistemas: producción, cambio, distribución y consumo de la actividad. La tercera generación de la teoría de la actividad contempla la interacción entre dos o más sistemas de actividad, consideración necesaria para incluir los elementos de historicidad, evolución y diálogo al interior de cada actividad.

Como resultado de su revisión evolutiva, Engeström (1999*b*) destaca los siguientes principios de la teoría de la actividad:

1. Como unidad de análisis se adopta un sistema de actividad colectivo, mediado por artefactos y orientado hacia objetos, considerado en el contexto de sus relaciones de red con otros sistemas de actividad.
2. Multivocalidad de los sistemas de actividad, entendidos como comunidades de múltiples puntos de vista, tradiciones e intereses.
3. Historicidad. Los sistemas de actividad se conforman y se transforman durante largos períodos de tiempo. Sus problemas y su potencial sólo se pueden entender en relación con su propia historia.
4. Papel fundamental de las contradicciones –tensiones estructurales acumuladas históricamente dentro y entre sistemas de actividad- como fuentes de cambio y de desarrollo.
5. Posibilidad de transformaciones expansivas en los sistemas de actividad, que pasan por ciclos relativamente largos de transformaciones cualitativas.

El referente teórico de la actividad se complementa con lo que Engeström (1999*b*, 2000) denomina el ciclo expansivo de creación de conocimiento y de redefinición del propio sistema de actividad, cuyas tres primeras etapas se refieren al Cuestionamiento, al Análisis histórico y empírico actual, y a la Modelación del nuevo sistema de actividad.

El método para la investigación de la praxis de la educación matemática en una comunidad de docentes

De las consideraciones anteriores inferimos que la teoría de la actividad representa un marco básico adecuado para estudiar la praxis de la educación matemática en el seno de una comunidad de docentes. Siguiendo los lineamientos de Davydov (1999), para el estudio de esa actividad necesitamos:

1. Identificar el objeto de la actividad.
2. Definir la estructura (componentes, interrelaciones), métodos de intercambio, transformaciones, condiciones de emergencia de la actividad individual.
3. Estudiar la emergencia del plano ideal de la actividad (motivos, necesidades, metas, nociones que preceden al logro de los resultados).
4. Estudiar la concienciación de las personas implicadas en la actividad, por la vía del análisis del sistema de significados lingüísticos compartidos.

Con el fin de satisfacer estos requerimientos, el trabajo de campo se desarrolla en referencia a los cuatro puntos de análisis indicados anteriormente: análisis histórico local de la actividad, análisis empírico del sistema de actividad, cuestionamiento del sistema actual de la actividad, y modelización (y análisis) de una nueva sistematización. En detalle, estos son los requerimientos:

- <u>Análisis histórico local</u> (en la escuela) de la actividad, de sus componentes (sujetos, objeto, artefactos mediadores, etc.) e interrelaciones.

- <u>Análisis empírico del sistema de actividad</u>:

1. *Sujetos*: Analizar la presencia de los rasgos de una *comunidad de práctica* (CP) (Lave, Wenger, 1991; Wenger, 2001): identidad, sentido de pertenencia, procesos de incorporación (internalización) y de participación, desarrollo de lo emocional, procesos de aprendizaje situado, creatividad (externalización)...
2. *Objeto*: La educación matemática (EM) de los alumnos. Cómo construyen este objeto, los motivos... Revisar la concepción que poseen y la práctica (planificación, ejecución en el aula, evaluación...) que desarrollan referente a la EM de los alumnos. Contrastar todo esto con los lineamientos de la EM crítica (Mellin-Olsen, 1987; Skovsmose, 1999). Insistir en el carácter reflexivo, formador de ciudadanos, de la EM.
3. *Artefactos mediadores*: De los tipos "qué" (denominativos y descriptivos: gestos, palabras, discursos, analogías...), "cómo" (procesales, formas de metalenguaje), "por qué" (diagnosticadores y explicativos: principios, normas, ideas, experiencias...), y "adónde" (especulativos o potenciadores: herramientas gráficas, de registro de información...) (Engeström, 1999*b*; Daniels, 2003).
4. *Reglas* que afectan al desarrollo de la actividad en la CP (incluyendo convenciones, hábitos, rutinas, costumbres...).
5. *Comunidad de referencia*: Directivos y otro personal de la escuela, representantes, los propios alumnos, Fe y Alegría como organización base a la que pertenece la escuela; sólo en lo concerniente al desarrollo de la actividad.
6. *División del trabajo* que establece las relaciones entre los Sujetos y la Comunidad de referencia, en lo concerniente al desarrollo de la actividad.
7. *Resultados* que produce el sistema: Fundamentalmente, la construcción del conocimiento matemático (conceptos, destrezas, estrategias de aprendizaje...) en los alumnos.

8. *Interrelaciones* entre los componentes anteriores.
9. También se analiza la *relación entre el sistema de actividad EM y* otro sistema interrelacionado con él, como lo es *el sistema pedagógico general de Fe y Alegría*. Es decir, qué tiene de peculiar la EM que construye la CP de los docentes, frente a la formación que se intenta en general en la escuela. Esta relación puede ser importante, ya que se trata de dos sistemas que, aunque con objetos diferentes, comparten algunos elementos (sujetos, comunidad de referencia, reglas, división de trabajo...), y esta interrelación puede resultar de interés (Engeström, 2001).

❖ <u>Cuestionamiento del sistema actual de la actividad</u>: Averiguar y analizar las contradicciones y tensiones al interior del sistema (si existen...) y la conciencia que de ellos tienen los propios sujetos, como posibles motores del cambio (Engeström, 2001).

❖ <u>Modelización (y análisis) de una nueva solución</u>: Aproximación a la construcción de una Zona de Desarrollo Próximo (viable...), con la intervención del investigador. De este modo se pretende no sólo describir la praxis de la EM en esta CP, sino construir también una apertura hacia una futura salida, en la que debe comprometerse el investigador.

Las *técnicas* que se utilizan en la investigación son las siguientes:

1. *Observación no participante* del trabajo de aula en todos los grados de la escuela, y de las reuniones de los docentes.
2. *Entrevistas en profundidad* (docentes, directivos, comunidad de representantes), individuales y grupales (sólo con docentes).
3. *Análisis de documentos sobre políticas educativas* (oficiales, y particulares de Fe y Alegría) que orientan la actividad escolar en lo referente a la EM de los alumnos.
4. *Análisis de artefactos*: documentos de planificación de los docentes, cuadernos de los niños, materiales de aula, producciones de los alumnos (pruebas, informes de proyectos, carteleras, actividades...).
5. *Análisis de instrumentos de evaluación* de los conocimientos matemáticos de los niños.

Los *instrumentos* (guías de observación, de entrevistas, de análisis de documentos y artefactos...) se elaboran oportunamente a la luz de referencias pertinentes (Alonso, 1994; Anguera, 1999; Gutiérrez, Delgado, 1994; Postic, De Ketele, 1992; Sierra, 1998; Woods, 1998).

Referencias bibliográficas

Alonso, L. E. (1994). Sujeto y discurso: El lugar de la entrevista abierta en las prácticas de la sociología cualitativa. En: J. M. Delgado, J. Gutiérrez (Eds.), *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*, pp. 226-240. Madrid: Síntesis.

Anguera, M.T. (Coord.) (1999). *Observación en la escuela: Aplicaciones*. Barcelona: Edicions de la Universitat de Barcelona.

Aristóteles (2003). *Ética*. Buenos Aires: Andrómeda.

Cole, M. (1999). *Psicología cultural. Una disciplina del pasado y del futuro*. Madrid: Morata.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky y la pedagogía*. México: Paidós.

Davydov, V. (1999). The content and unsolved problems of activity theory. En: Y. Engeström, R. Miettinen, R. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory*, pp. 39-52. New York: Cambridge University Press.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding*. [Documento en línea] Disponible: http://communication.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm [Consulta: 07-05-2004].

Engeström, Y. (1999*a*). Activity theory and individual and social transformation. En: Y. Engeström, R. Miettinen, R. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory*, pp. 19-38. New York: Cambridge University Press.

Engeström, Y. (1999*b*). Innovative learning in work teams: Analyzing cycles of knowledge creation in practice. En: Y. Engeström, R. Miettinen, R. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory*, pp. 377-404. New York: Cambridge University Press.

Engestrom, Y. (2000). Activity theory as a framework for analyzing and redesigning work. *Ergonomics*, 43, 7, 960-974.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education & Work*, 14, 1, 133-156.

González, A. (1997). *Estructuras de la praxis. Ensayo de una filosofía primera*. Madrid: Trotta.

Gutiérrez, J., Delgado, J. M. (1994). Teoría de la observación. En: J. M. Delgado, J. Gutiérrez (Eds.), *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*, pp. 141-173. Madrid: Síntesis.

Lave, J., Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. New York: Cambridge University Press.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. [Documento en línea] Disponible: http://www.marxists.org/archive/leontev/works/1978/index.htm [Consulta: 07-05-2004].

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.

Postic, M., De Ketele, J-M. (1992). *Observar las situaciones educativas*. Madrid: Narcea.

Sierra, F. (1998). Función y sentido de la entrevista cualitativa en investigación social. En: L. J. Galindo (Coord.), *Técnicas de investigación en sociedad, cultura y comunicación*. México: Addison Wesley Longman.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Trad. por Paola Valero. Bogotá: una empresa docente.

Vygotsky, L. S. (1995). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. En: A. M. Matiushkin (Ed.), *Obras escogidas, III* (pp. 11-340). Madrid: Visor.

Vygotsky, L. S. (1997). La conciencia como problema de la psicología del comportamiento. En: A. M. Matiushkin (Ed.), *Obras escogidas, I* (pp. 39-60). Madrid: Visor.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Paidós.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.

Woods, P. (1998). *Investigar el arte de la enseñanza. El uso de la etnografía en la educación*. Barcelona: Paidós.

LA FORMACIÓN DOCENTE DESDE LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA

Rosa Becerra de Moya
Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela.
rosabecerra3@yahoo.com
Campo de Investigación: Formación de profesores; Nivel educativo: Superior;
Metodología: Cualitativa.

Resumen

Con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento que tenemos sobre la formación de los docentes, se realizó esta investigación documental a partir del análisis crítico de las teorías existentes y de la información empírica. Se analizan por una parte, las concepciones teóricas más relevantes en materia de formación docente y por la otra, algunas de las políticas educativas vigentes en esta materia, tanto en el ámbito Iberoamericano, dadas las características sociopolíticas que unen a Venezuela con estos pueblos, como las desarrolladas en el país. Se considera un marco referencial para la comprensión de la complejidad de la Educación Matemática, la manera en que se han venido generando las actividades que conforman el campo y las concepciones que manejan diferentes autores. Por lo tanto, se revisará la discusión que se ha venido realizando desde la década de los ochenta sobre las características de la educación matemática, sus objetos de estudio, metodologías y alcances; ya que esa discusión ha abierto una nueva visión a la incorporación de perspectivas interdisciplinarias, lo que permitiría desentrañar la complejidad de la tríada Educación-Matemática-Sociedad que presenta múltiples aristas. Por lo tanto, una tarea insoslayable ha sido analizar la función de la matemática en sociedades en desarrollo como la nuestra, y revisar el rol que la educación matemática, desde la perspectiva de la Teoría Social Crítica, tiene en la creación y reproducción de las estructuras de estas sociedades.

La problemática de la formación de maestros ha sido analizada por diversos autores, en Latinoamérica Daniel Suárez (s.f.), investigador de la Universidad de Buenos Aires, señala dos modelos diferenciados en materia de formación docente, los denominados “normalismo” y “profesionalismo”.

Modelos de Formación Docente

<table>
<tr>
<td>Suárez, D. (1994)
➢ Normalista:
• “vocacionismo apostólico”
• misión civilizatoria.
➢ Profesionalista:
• “Tecnificación de la conducción y del proceso de enseñanza”
• Educación como inversión.</td>
<td>Gascón, J. (2001)
➢ Modelos docentes clásicos:
• Teoricismo
• Tecnicismo
➢ Modelos docentes modernos:
• Modernismo.</td>
<td>(Porlán, R., Martín del P., R., Martín, J., Rivero, A., 2001)
➢ Saber disciplinar:
• “saber verdadero, superior al saber vinculado a la experiencia docente y libre de influencias éticas e ideológicas”
➢ Enfoque espontaneísta:
• Intuitivo y activistas signado por el “...a enseñar se aprende enseñando”</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Modelo docente emergente:
• Que promueva “agentes activos, críticos e idóneos frente a las exigencias de las cambiantes situaciones pedagógicas”. (Suárez, 1994)
• Basados en “el constructivismo psicológico y constructivismo matemático” (Gascón, 2001)
• Sustentado en la “construcción del conocimiento y formación del docente bajo una visión investigativa y crítica” (Porlán, et al, 2001)</td>
</tr>
</table>

En el primero de estos modelos establece Suárez una relación entre la reglamentación de la escuela primaria Argentina, como la Ley 1420 de fecha 1884 (p. 2), y el modelo de formación docente denominado por el autor "normalismo". La escuela pública delineada en esta Ley tenía, "una misión claramente *civilizadora*" (p.2); por lo tanto, la nueva escuela que debía erguirse como ese agente civilizador, necesitaba contar con sujetos que llevaran adelante dicha tarea. El objetivo de formar ciudadanos debía asumirse de manera desinteresada y con gran vocación de servicio. Surge así el maestro como un ejemplo digno de imitar, con una cierta carga de dispositivos didácticos y a quien se le imprime en su formación pautas metodológicas signadas por el disciplinamiento, que como plantea Suárez (op. cit.) "comprometen un determinado ordenamiento psíquico y corporal de los alumnos y una precisa disposición de las tareas del maestro" (p.2). Quedó, de esta manera, el trabajo del maestro relegado a la función de transmisor de valores y de pautas de conducta que limitaban la capacidad de los alumnos, al mantenerlos en posiciones pasivas de receptores de comportamientos y conocimientos.

En el enfoque "profesionalista", el docente es visto como un técnico de la educación. Las nuevas corrientes del accionar pedagógico enfatizaron el trabajo eminentemente profesional del docente, dotándolo de técnicas y conocimientos instrumentales que le permitieran desarrollar una labor educativa más eficaz. Se descalificó la modelación del maestro-apóstol como ejemplo digno a imitar que caracterizó al enfoque antes descrito, y se acentuó la formación tecnológica que permitiera alcanzar objetivos estrictamente preestablecidos. Suárez vincula la cristalización del modelo profesional a dos procesos simultáneos, uno de índole teórico-ideológico con sesgo neo-positivista que está relacionado con la explicación, planificación y evaluación de los sistemas educativos. El otro proceso, de carácter político, estuvo vinculado a la implementación de líneas pragmáticas impulsadas por organismos internacionales tales como la UNESCO y la OEA, y por países desarrollados, con base en la reestructuración de los mercados mundiales. Todo ello, bajo el lema de "Educación para el Desarrollo". Esta corriente se basó en la concepción de la educación como variable independiente del crecimiento económico, denominada por Suárez "Teoría del Capital Humano" (op. cit., p. 5), lo cual significó cambios en la administración y control de la educación, al aplicar innovaciones tecnológicas e introducir conceptos relativos a la rentabilidad y la eficiencia. Este cambio alcanzó a la situación en el aula, afectada por este modelo desarrollista, tecnificando el proceso educativo y extendiéndose a la formación de docentes. Se convirtió así al maestro en un "profesional de la docencia", quien para desarrollar este rol requería de un nuevo y más profundo entrenamiento técnico-metodológico que las escuelas normales ya no podían ofrecer, por lo tanto su formación inicial se realizaría en universidades e Institutos de Educación Superior.

Por otra parte, al revisar las formas de interpretar el "saber Matemático" a la luz de los modelos docentes que se han desarrollado, Joseph Gascón (2001) hace corresponder estos "modelos docentes" (p. 5) con modelos epistemológicos generales que han existido en el desarrollo del conocimiento matemático. Surgen así según el autor, los modelos epistemológicos euclidianos, identificados por su pretendida "trivialización del conocimiento matemático". El autor los denomina *modelos docentes clásicos*, dirigidos estrictamente por el docente de matemática y con fuerte arraigo en la cultura de éste, tanto en nuestro medio como en el resto del mundo. Estos se conocen como los modelos docentes teoricistas (teoricismo) y los modelos docentes tecnicistas (tecnicismo). Incorpora el autor los *modelos docentes modernistas* (modernismo), en donde el acto de aprender matemática se realiza mediante la exploración libre y creativa. Por último, se refiere el autor a los modelos que responden a las teorías constructivistas, a las que denomina *modelos docentes del constructivismo psicológico y del constructivismo matemático*. El modelo *teoricista* es aquel donde el proceso didáctico es conducido y ejecutado por el docente, y comienza y termina con la actuación de éste en clase. El énfasis es colocado en las teorías, en nuestro caso, matemáticas, relegando a un segundo plano las actividades. El uso de este modelo en los niveles básicos del sistema educativo ha traído consecuencias alarmantes en los centros escolares. Tal es el caso, como afirma Gascón, de la década de los años sesenta, marcados fuertemente por el modelo teoricista de la "Matemática Moderna". Ese último planteamiento es confirmado por Miguel de Guzmán (sf) al destacar entre las características más resaltantes de ese movimiento matemático el que se "pretendió profundizar en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésa a los aspectos operativos y manipulativos" y el "vaciamiento de problemas interesantes,... y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología". Después de épocas signadas por el modelo teoricista, surge el denominado modelo tecnicista como respuesta social al fracaso escolar a consecuencia del uso excesivo de ese modelo. El grito alarmante en muchos países de "!volver a lo básico!" (op. cit., p. 7), y en Venezuela de aprender las cuatro operaciones básicas de la Aritmética, han signado el modelo tecnicista. Así, este modelo docente relaciona e identifica el aprender matemática con aprender algoritmos, y su característica más resaltante será el entrenamiento en ciertas técnicas. La resolución de problemas es trivializada como en el modelo teoricista y su entrenamiento se basa en "ejercicios tipo" y los problemas a resolver son rutinarios. Si el teoricismo, según Gascón (op. cit.), concibe al estudiante como una "caja vacía", el tecnicismo lo considera un "autómata".

Bajo el planteamiento de la necesidad de rescatar la resolución de problemas, profundamente trivializada en los modelos docentes clásicos ya descritos, surgen los modelos docentes modernistas. Estos modelos ubican la resolución de problemas como eje y propósito fundamental del aprendizaje matemático. El autor explicita la clara dependencia de este modelo docente con el modelo epistemológico cuasi-empírico de la matemática. En resumen, Gascón (op. cit.) señala que tanto los modelos clásicos, como los modernos descritos anteriormente se basan en la algoritmización y en el desarrollo de modelos cuasi-empíricos que responden evidentemente al desarrollo del conocimiento matemático conocido como modelo Euclídeo.

Por último, la evolución de la epistemología constructivista y su incidencia en los modelos docentes imperantes en la Enseñanza de la Matemática traen consigo los modelos que Gascón denomina de constructivismo psicológico y constructivismo matemático. Así, "enseñar matemática" se traduce en "construir conocimientos matemáticos" y Gascón (op. cit.) asume "aprender matemáticas" como el proceso de construcción del conocimiento matemático mediante la "modelización" es decir, utilizando modelos matemáticos. Afirma el autor, que en esa modelización la "descontextualización de los problemas desaparece hasta el punto de llegar a identificarse el objetivo de la resolución de problemas, con la obtención de conocimientos sobre el sistema modelizado" (p. 18).

Por otra parte, Porlán y otros investigadores, (Porlán, R., Martín del P., R., Martín, J., Rivero, A., 2001), nos muestran dos enfoques de formación de docentes particularmente antagónicas. En el primero, el saber disciplinar es presentado como "un saber verdadero, superior al saber vinculado a la experiencia docente y libre de influencias éticas e ideológicas" (op cit, p.14). En este tipo de enfoque se promueve la acumulación de información, poco determinante en el cambio y desarrollo escolar. En el segundo, se presentan enfoques intuitivos, espontáneos y activistas signados por el "...a enseñar se aprende enseñando" (p.14). Estos enfoques "espontaneístas" se identifican frecuentemente con rutina, experiencia cotidiana cargada de ideología subyacente y, como plantea Porlán "...despreciando el rigor y la racionalidad del saber disciplinar"(p.14). En este sentido, Porlán nos habla de "concepciones socialmente hegemónicas"(p.14), que no son fruto de consensos reflexivos ni críticos, sino de imposiciones y percepciones, en donde las personas identifican una manera de pensar con "la forma natural" de pensar y una visión personal con la única visión. Por último, Porlán aboga por "una perspectiva compleja, crítica y constructivista de la formación del profesorado..." la cual "...implica, como meta estratégica, una concepción investigativa del trabajo docente" (op cit, p.15).

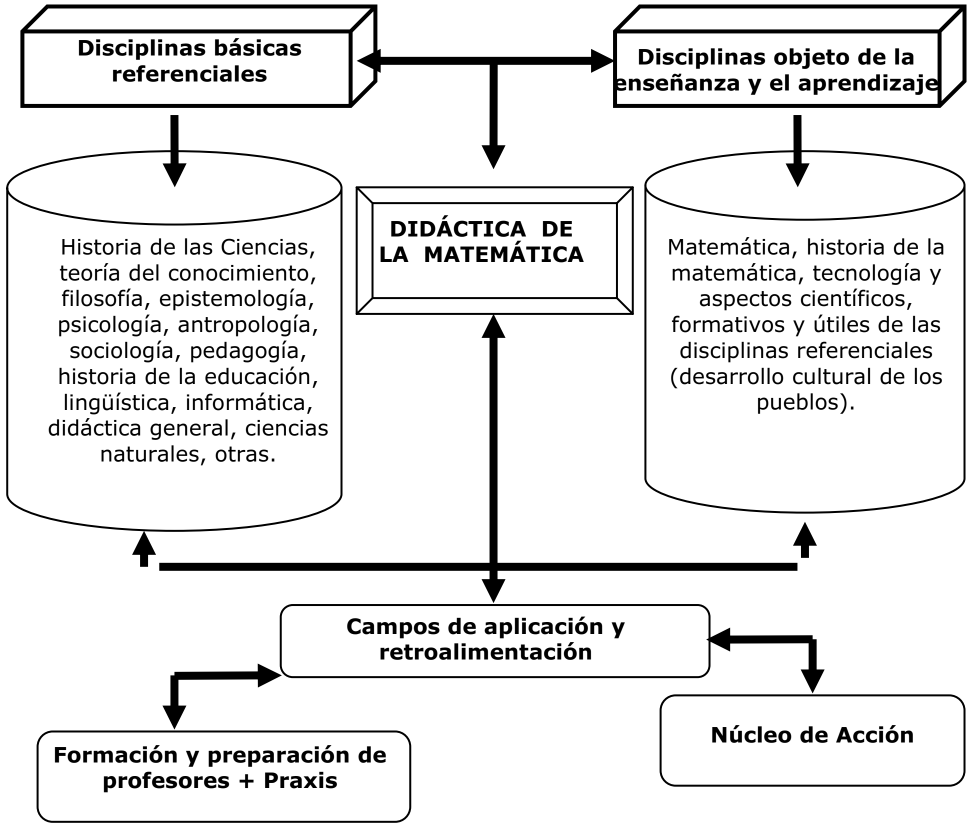
De los modelos presentados hasta el momento, se evidencian dos posiciones sólidamente establecidas y un tercer enfoque emergente. Ese enfoque emergente, el cual asumimos, aboga por la construcción del conocimiento, en esta categoría se encuentran los modelos basados en el constructivismo psicológico y constructivismo matemático señalados por Gascón. En este ámbito "enseñar matemática" se traduce en "construir conocimientos matemáticos". Así, Gascón (op. cit.), interpreta "aprender matemáticas" con el proceso de construcción del conocimiento matemático mediante la "modelización" es decir, utilizando un modelo matemático. De igual forma, Porlán (Porlán, et al, 2001) ubica en los modelos docentes emergentes aquellos que además de favorecer la construcción del conocimiento, asumen la formación del docente bajo una visión investigativa y crítica. Nos identificarnos así con una visión critica de la educación y por consiguiente de la formación de maestros y profesores. Asumimos las nociones de la Teoría Social Critica, sustentada por Habermas (1982), Carr y Kemmis (1988) y específicamente en la formación docente por Porlán (Porlán, et al, 2001) cuando nos aseguran que "El conocimiento no es neutral, si no que responde a intereses y cosmovisiones determinadas, y que se genera dentro de las estructuras de poder que lo limitan y condicionan" (p.14).

En adición a lo anterior, Graciela Messina (1999), quien investiga sobre el estado del arte de la formación docente en nuestros países para la década de los noventa, establece como rasgo sobresaliente la definición de dos corrientes perfectamente bien definidas en esta materia. En primer lugar, la determinación casi general de la práctica de formación docente en modelos tradicionales de enseñanza aprendizaje y el hecho predominante que los "centros de formación continúan reproduciendo la cultura escolar tradicional, mientras los estudiantes para docentes llegan con trayectorias escolares igualmente tradicionales", y en segundo lugar, menos extendida, una corriente incipiente "asociado con la pedagogía crítica y con la investigación desde la práctica, que valora la capacidad de los profesores de producir conocimiento y que postula la investigación reflexiva la enseñanza reflexiva como una propuesta múltiple de enseñanza, de aprendizaje y de investigación"(p. 5).

Uno de hallazgos más importantes del trabajo de Messina es que América Latina sigue bajo la égida de la transmisión de conocimientos como paradigma en la formación docente. Sin embargo, a pesar del predominante modelo tradicional con énfasis en el paradigma positivista, se están produciendo cambios de relevante importancia en la formación docente, que impulsan a la autora de esta investigación, a concluir con la propuesta de crear los espacios y las condiciones para que los docentes "agrupados en sus espacios de trabajo y acompañados por profesionales que suscriben una visión crítica y ampliada de la ciencia, la investigación y la formación docente, se hagan cargo de sus discursos, miren sus prácticas y muestren sus opiniones" (op. Cit, p.12).
En adición a los resultados de la investigación de Messina, tenemos que Jorge Cardelli y Miguel Duhalde (sf), en su diagnóstico sobre formación docente señalan algunos aspectos críticos de la misma. Entre ellos, la existencia de una administración escolar que no permite "…la creación del colectivo docente, ya que se impulsa el trabajo aislado, fragmentario y en soledad, impidiendo todo proceso de reflexión….con relación a la propia práctica" (p.2). Los autores encuentran también "...contradicciones entre los discursos innovadores y progresistas acerca de los modos de enseñanza y la realidad de los programas e instituciones de formación docente que siguen empleando métodos verbalistas y expositivos" (op. cit. p.3).

Una educación matemática que responda a esta concepción de la formación docente basada en la teoría de la teoría social crítica, ha venido evolucionando desde la década de los ochenta. Desde esos tiempos se ha incrementado la preocupación de la comunidad de educadores matemáticos en el plano internacional, en cuanto a la incidencia de la matemática en la sociedad y su desarrollo. Desde el Congreso Internacional de Matemática Educativa que se realizó en Australia en 1984 (ICME 5), se privilegió el por qué y para qué enseñar Matemática; dando importancia a la relación Matemática, Educación y Sociedad y discutiendo sobre la necesidad de un nuevo papel social para la Educación Matemática en un mundo en el que la tecnología desempeña un papel dominante.

En esta búsqueda de modelos como los de Higginson (1980) y Steiner (1990), que intentaron explicar la complejidad de la educación matemática y su incidencia en el desarrollo social de los pueblos, encontramos en los inicios del siglo XXI el creado por el investigador venezolano David Mora (2002), quien coloca un bloque de *disciplinas básicas referenciales,* en donde muestra coincidencias con el modelo tetraédrico de Higginson y con el sistémico de Steiner, y *disciplinas objeto de la enseñanza y el aprendizaje* en donde sitúa a la Matemática y a la Historia de la Matemática, entre otras.



Núcleo y Campo de Acción de la Didáctica de la Matemática (Mora, 2002)

Coincide nuevamente el autor con Steiner (1990) al abordar la *formación de los docentes y su praxis*; sin embargo, lo verdaderamente innovador de esta propuesta, sin restarle méritos a las especificidades antes descritas, es la visión integral de la Didáctica de la Matemática desarrollada por Mora, un encuentro entre el hombre y la matemática. Reivindica el autor el papel de los docentes de Matemática en todos los niveles de enseñanza, y las construcciones que estos realizan junto con sus alumnos día a día, recordándonos los planteamientos de Freire, al advertirnos sobre el peligro de haber convertido al ser humano en "...una simple máquina manipuladora y consumidora de conocimientos, en nuestro caso matemáticos, sin reflexionar sobre sus consecuencias, importancia social y política" (p. 34).

En conclusión, una propuesta de formación docente que esté guiada por la perspectiva de la teoría social crítica y que responda a la concepción de educación matemática ligada al desarrollo de nuestras sociedades, debe plantear un cambio radical en la educación. Así, si se espera que esta última y en especial la escuela puedan contribuir decisivamente con la transformación social de nuestras sociedades, entonces el docente que alcanza esta comprensión entiende el modo en que sus opiniones, sus creencias, el concepto que tenga de sí mismo y de sus pares, o sus perspectivas educativas están permeadas por la cultura dominante. Entiende igualmente que la ética individualista desdibuja los intereses comunes del profesorado, opacando la necesidad de la acción común en la lucha por el cambio educativo. Así, el aprender a ser docente deja de ser un hecho individual, el docente debe comprender la relación entre su situación individual y la de sus compañeros. La cognición así construida abre una perspectiva a la formación de docentes, buscando situaciones en donde individuos que trabajaban aislados, encuentran coincidencias para el trabajo en común.

Referencias Bibliográficas.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

De Guzmán, M. (sf). *Matemáticas y Sociedad. Acortando distancias.* Documento en Línea: www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/cipra.htm

Frankenstein, M. (1994). *Understanding the politics of mathematical knowledge as an integral part of becoming critically numerate.* Documento en línea: www.radstats.org.uk/no056/frankenstein.htm.

Gil, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones.* IBERCIMA. Madrid: Popular S.A.

Hannaford, C. (sf). Mathematics Teaching is Democratic Education. Documento en línea: www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm986a3.pdf.

Kincheloe, J. (2001). *Hacia una Revisión Crítica del Pensamiento Docente*. Barcelona: Octaedro.

Messina, G. (1999). *Investigación en o acerca de la Formación Docente: un estado del arte en los noventa.* (Documento en línea). Disponible: www.campus-oei.org/oeivirt/rie19a04.htm (Consulta: 2003, Septiembre 20).

Mora, D. (2002). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: Ed. de la Biblioteca-EBUC.
Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica.* (2da. Ed.). (P. Valero, Trad.). Bogotá: Una Empresa Docente.

USO DE LA EVALUACIÓN DE PROGRAMAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

José Ortiz Buitrago y Martha Iglesias Inojosa
Universidad de Carabobo y Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
ortizjo@cantv.net y mmiglesias@cantv.net
Campo de Investigación: Formación de Profesores. Nivel Educativo: Superior

Resumen

Se considera que la evaluación de programas educativos persigue entre sus objetivos la búsqueda de la calidad de la educación. En este caso la calidad de la educación matemática enfocada, entre otros aspectos, hacia la formación inicial de profesores de matemáticas. En ese sentido, se apoya una propuesta de evaluación de programas que aporte insumos para mejorar la calidad del proceso de planificación de la enseñanza, teniendo como propósito final la mayor comprensión y aplicación de las matemáticas escolares. La finalidad de evaluación que se propone en este trabajo está referida a describir, analizar e interpretar el diseño, desarrollo y resultados del programa, incluyendo los cambios de actitudes de los participantes. El contenido de la evaluación incluye la entrada, el proceso de implementación del programa y el producto.

Palabras clave: Evaluación de programas, formación de profesores de matemáticas, nuevas tecnologías, organizadores del currículo.

Introducción

La propuesta de evaluación de programas se estructura a partir de la noción de evaluación, entendida como el proceso sistemático de recogida de información para tomar decisiones, mediante la revisión analítica y crítica permanente del diseño, del desarrollo y los resultados de la aplicación de un programa (Fernández-Ballesteros,1996; Colás,1997; Pérez, 2000, Bedoya, 2002). Es decir, se entiende como un proceso de carácter sistemático y crítico de recogida de información para tomar decisiones en búsqueda de la calidad. A partir de esa conceptualización se presenta una propuesta de esquema operativo de evaluación de programas cuyas componentes actúan para valorar el programa de manera sistemática, analítica, continua, crítica y autoreflexiva (Ortiz, 2000,2002).

Con la evaluación del programa se pretende dar respuesta a las cuestiones planteadas en la investigación. Esto significa que las expectativas del programa se orientan al desarrollo del conocimiento didáctico y hacia las actitudes de los profesores de matemáticas en formación. A continuación se presenta una propuesta de evaluación en un caso concreto de aplicación de un programa de formación de profesores que tiene entre sus componentes la modelización matemática y la calculadora gráfica (CG) en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.

Consideraciones sobre la evaluación del programa

El esquema seguido para la evaluación del programa contempla tres momentos significativos, es decir, la evaluación del diseño del programa, la evaluación del desarrollo y la evaluación de los resultados del programa. A continuación se presenta cada uno de los momentos a evaluar.

Evaluación del diseño del programa

Para la evaluación del diseño del programa se toma en cuenta las dimensiones de calidad del diseño del programa y la viabilidad del mismo. Los aspectos que se evalúan en la dimensión calidad del diseño son: el contenido del programa, la calidad técnica y la evaluabilidad del mismo. Más detalles pueden verse en Ortiz (2002, 2004).

Evaluación del desarrollo del programa

En la evaluación de proceso, realizada durante el desarrollo del programa, se consideraron dos dimensiones de análisis: una *cognitiva* y otra *operativa* (ver tabla 1). La primera relacionada con los niveles de aprovechamiento de los contenidos, es decir, el efecto del curso-taller sobre el conocimiento didáctico de los profesores en formación que participaron en el mismo. La segunda dimensión, es decir la operativa, estuvo referida a la puesta en práctica del programa.

La evaluación de la dimensión cognitiva considera indicadores objetivos y subjetivos. En estos últimos se tienen en cuenta los aspectos afectivos y opináticos. Se establecen unos indicadores para operativizar la evaluación del programa implementado.

Los indicadores objetivos son los siguientes: 1) generación de actividades de motivación, 2) incorporación de la modelización, para aplicación de conceptos y destrezas, en el planteamiento de situaciones problema del entorno del alumno, 3) empleo de la Calculadora Gráfica (CG) en las actividades didácticas de contenido algebraico, 4) integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas, 5) resolución sistemática y secuenciada de los procedimientos algebraicos expuestos, y 6) propuesta de actividades de evaluación no convencionales.

El indicador subjetivo para evaluar la dimensión cognitiva considera la percepción de los aprendizajes logrados por los participantes, en relación con los componentes del programa implementado.

Dentro de la dimensión operativa se trata de evaluar las actividades, las secuencias y la temporalización. Para las *actividades* consideramos como indicador la adecuación la metodología utilizada para el desarrollo del programa. En las *secuencias* el indicador fue el seguimiento de la secuencia de las actividades programadas. La temporalización se evaluó tomando en cuenta los indicadores siguientes: 1) el cumplimiento del cronograma establecido, 2) respeto a la planificación (espacio, tiempo, apoyos y recursos), 3) rigidez o flexibilidad en la aplicación del programa y 4) ajuste entre los planes institucionales y el desarrollo del programa.

Tabla 1. *Evaluación del desarrollo del programa*

<table>
<tr><th>Dimen-
siones</th><th>Propuesta a evaluar</th><th>Indicadores</th><th>Instrumentos y procedimien-
tos
Sesiones 1, 4 y 10</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Cognitiva
(Niveles de “aprovechamiento” de los contenidos. Efecto en el conocimiento didáctico)</td><td>Objetiva</td><td>▸ Generación de actividades de motivación
▸ Incorporación de la modelización para aplicación de conceptos y destrezas, planteando situaciones del entorno del alumno
▸ Empleo de la CG en las actividades didácticas
▸ Integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas
▸ Resolución sistemática y secuenciada de los procedimientos algebraicos expuestos.
▸ Proposición de actividades de evaluación no convencionales</td><td>▸ Cuadernos de notas
▸ Tarea fuera del aula
▸ Vídeo
▸ Hoja de observació n</td></tr>
<tr><td>Subjetiva/
Afectiva
(Opinática)</td><td>▸ Percepción de aprendizajes logrados, por los participantes, en relación con los componentes del programa.</td><td>▸ Hoja de notas diarias</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Operativa o de puesta en práctica</td><td>Actividades</td><td>▸ Adecuación de la metodología utilizada para el desarrollo del programa.</td><td>▸ Hoja de evaluación</td></tr>
<tr><td>Secuencias</td><td>▸ Seguimiento de la secuencia de las actividades programadas</td><td>▸ Hoja de evaluación</td></tr>
<tr><td>Temporali-
zación</td><td>▸ Cumplimiento de la temporalización
▸ Respeto a la planificación (espacio tiempo, apoyos y recursos)
▸ Rigidez o flexibilidad en la aplicación del programa.
▸ Coherencia entre la institución y el desarrollo del programa propuesto.</td><td>▸ Hoja de evaluación
▸ Vídeo</td></tr>
</table>

Evaluación de los resultados del programa

Esta evaluación tiene como propósito ayudar a valorar el programa en cuanto a su impacto. La evaluación de los resultados, junto a la del diseño y la del proceso, conformaron la evaluación del programa en cuestión. Las dimensiones consideradas para esta evaluación son: 1) logros cognitivos-didácticos (objetivos), 2) logros cognitivos-didácticos (subjetivos), 3) variaciones afectivas y actitudinales, 4) rasgos estructurales del programa, 5) funcionamiento operativo y logístico.

Los logros del programa se revelan en la comprobación y contraste de sus resultados de la aplicación del mismo. En la dimensión objetiva de los *logros cognitivos y didácticos* se evalúa el cumplimiento de los objetivos del programa relacionados directamente con el aspecto cognitivo. En la dimensión subjetiva de los logros cognitivos-didácticos se evalúan los aspectos siguientes: 1) percepción del aprovechamiento de los contenidos del programa propuesto y 2) percepción de la aplicabilidad de los contenidos del programa en el ejercicio profesional.

El aspecto a evaluar en la dimensión afectiva/actitudinal fue la actitud inicial y final hacia las componentes del programa implementado. El instrumento utilizado fue la escala de actitudes (Ortiz, 2000, 2002; Ortiz, Rico y Castro, 2001).

En la dimensión de rasgos estructurales del programa los aspectos a evaluar son: 1) adecuación de lo pautado con lo ejecutado, 2) coherencia interna y 3) Adecuación tiempo/contenidos. Junto a estos aspectos a evaluar se tienen los indicadores siguientes: 1) cumplimiento de actividades en cada sesión, 2) riqueza de los contenidos en congruencia con los objetivos, 3) dinámica participativa y dialógica ajustada a la estrategia metodológica (curso-taller) y 4) realización de las actividades en el tiempo previsto. Los instrumentos para esta dimensión fueron la hoja de evaluación final y el guión de observación.

En la dimensión del funcionamiento operativo/logístico los aspectos a evaluar son el manejo y disponibilidad de recursos por una parte y la toma de decisiones por la otra. Los indicadores considerados en esta dimensión son: 1) la disposición de medios y recursos requeridos para desarrollar el programa, 2) las condiciones físico-ambientales del aula donde se desarrolló el programa, 3) apoyo y participación de colaboradores, y 4) plan de seguimiento en el tiempo (impacto del programa). Los instrumentos en esta dimensión fueron la hoja de evaluación final y la entrevista aplicada a participantes en la implementación del programa un año después de su realización y que estuvieran en ejercicio docente.

La valoración atendió a criterios y a referencias; considerando su especificación y su aplicación. Los *criterios* fueron: eficacia, eficiencia, efectividad, satisfacción e impacto. La eficacia referida al grado de logro de los objetivos propuestos en el programa. La eficiencia relacionada con los medios disponibles y las circunstancias en que el programa se aplicó. La efectividad se refiere a los efectos beneficiosos no previstos. La satisfacción está referida a los usuarios. El impacto del programa se relaciona con el contexto donde se aplica. Las *referencias* se corresponden con la visualización personalizada del progreso de los participantes en el diseño de actividades didácticas.

La continuidad del programa se relacionó con las decisiones, la incorporación de mejoras y el plan de seguimiento. Las *decisiones* atendieron el grado de participación y colaboración entre los responsables del programa en lo relativo a duración y estructura del programa. La *incorporación de mejoras* evaluó la existencia de un proceso institucionalizado de evaluación, de forma que los resultados obtenidos dieran paso a posibles nuevas programaciones en beneficio de la aplicación del programa. El *plan de seguimiento* corroboró la existencia de alguna forma de identificación de posibles efectos del programa objeto de evaluación.

Además de las dimensiones de análisis, que se consideraron, se incluyeron las características de los profesores en formación que participaron en el programa, los objetivos que guían la evaluación del programa, las variables características de la instrucción (organización, contenido, metodología), los sistemas taxonómicos de conductas

educativas susceptibles de ser evaluados (actitudes y percepción, conocimiento didáctico) y las sesiones de trabajo como intervalos donde se realiza la evaluación. Todo esto a la luz de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas, el proceso de modelización matemática en la enseñanza del álgebra lineal, el álgebra lineal en la resolución de problemas del mundo real y el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.
Los aspectos evaluados en los profesores en formación fueron las actitudes y dominio cognitivo. Es decir, la disposición al uso de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza del álgebra lineal, el manejo instrumental de la calculadora gráfica y la articulación de la calculadora gráfica y la modelización como organizadores del currículo. Así como el conocimiento didáctico, es decir, el empleo de estos recursos para planificar tareas de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Conclusiones

La calidad del diseño del programa fue satisfactoria, según se manifiesta en la coherencia de su estructura, pertinencia de contenidos y viabilidad. Sin embargo, es importante destacar que en el diseño de las actividades está incluida una situación problema cuyas características de apertura no son del todo propicias para lo que se perseguía lograr con la actividad, es decir, para llevar a cabo el proceso de modelización con apoyo de la CG. Esta limitación podría superarse indicando a los participantes la condición orientativa y no limitativa de las preguntas formuladas en cada situación. Esto posiblemente motivaría la búsqueda de nuevas cuestiones al aplicar el proceso de modelización.
Se ha puesto de manifiesto al concluir el curso que las situaciones planteadas por los participantes conectan con conceptos y procedimientos algebraicos contemplados en los programas de secundaria y resultan adecuadas para los alumnos de esos niveles. Ha resultado evidente un dominio en el manejo técnico y didáctico de la CG, y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el profesor como para el alumno. La postura ante la enseñanza de las matemáticas coloca al alumno en un papel activo, donde puede experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el profesor. Los profesores en formación recurren a diferentes sistemas de representación y a sus interconexiones, lo cual revela la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploran formas de explicar el álgebra a los alumnos como mecanismos para favorecer la comprensión de la situación problema. Ponen en evidencia la aplicación del proceso de modelización, integrando a la CG en todas sus fases para el diseño de la actividad didáctica de contenido algebraico solicitada, remarcándose el énfasis que mantienen en el uso de preguntas abiertas.
Tomando en cuenta lo anteriormente expuesto podríamos afirmar que, en términos generales, el programa contribuyó al desarrollo de competencias didácticas en los profesores en formación, recurriendo al empleo de los organizadores del currículo, la modelización y la calculadora gráfica, en el contexto del álgebra lineal para el diseño de actividades didácticas.
A partir de lo antes señalado, el estudio aporta elementos que pueden orientar intervenciones en la formación inicial de profesores de matemáticas, dirigidas hacia la consolidación de competencias didácticas, relacionadas con la integración de la modelización y la calculadora gráfica. Asimismo, seria recomendable la utilización de esta propuesta de evaluación de programas para evaluar otros programas en educación matemática, específicamente en la formación inicial de profesores de matemáticas. En ese

sentido, Iglesias (2004) adelanta un estudio sustentado en una metodología de evaluación de programas y orientado a: (1) evaluar un programa de formación basado en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y que integre el uso de un software de Geometría Dinámica (SGD), el enfoque de resolución de problemas y las demostraciones en Geometría, y (2) analizar las actitudes y destrezas de los futuros docentes hacia el uso didáctico de la demostración matemática y de los SGD en el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Referencias

Bedoya, E. (2002). *Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Gráficas* (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada.

Colás, M. P. (1997a). Concepto, funciones y etapas en la evaluación de programas. En M. P. Colás & M. A. Rebollo (Eds.), *Evaluación de programas. Una guía práctica* (Capítulo I, pp.17-32). Sevilla: Kronos.

Fernández-Ballesteros, R. (1996). Cuestiones Conceptuales Básicas en Evaluación de Programas. En R. Fernández-Ballesteros (Ed.), *Evaluación de Programas. Una guía práctica en ámbitos sociales, educativos y de salud* (pp. 21-47). Madrid: Síntesis

Iglesias, M. (2004). *Formación Inicial de los Docentes de Matemática : La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio Evaluativo*. Caracas: Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela.

Ortiz, J. (2000). *Modelización y Calculadora Gráfica en Formación Inicial de Profesores de Matemáticas.* Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada

Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación* (Tesis Doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2001). Attitudes of preservice mathematics teachers towards modeling and the graphic calculator. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the PME*. (vol. 1). Utrecht, NL: Freudenthal Institute/ Utrecht University.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2003). Actitudes hacia la incorporación de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza de las matemáticas. *Paradigma, 24*(2).

Pérez, R. (2000). La evaluación de programas educativos: conceptos básicos, planteamientos generales y problemática. *Revista de Investigación Educativa, 18* (2), 261-287.

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO. CASO DEL CONJUNTO Z

Hugo Parra S.
Universidad del Zulia – Venezuela
parraortiz@cantv.net
Campo de investigación:Formación de Profesores; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

Presentamos un proyecto de investigación cuyo objetivo es estudiar el proceso de construcción del conocimiento didáctico matemático relativo al conjunto de los números enteros, por parte de estudiantes de la Licenciatura de Educación mención Matemática y Física. Entendemos como conocimiento didáctico matemático, aquel saber que todo sujeto que vaya a ejercer la docencia debe poseer, a objeto de planificar, desarrollar y evaluar el saber matemático formal en situaciones de aprendizaje escolar. Para el estudio se asume un enfoque metodológico enmarcado en la etnografía educativa. Se espera recopilar información necesaria a través de entrevistas individuales, observaciones de campo, registros anecdóticos y revisión de las producciones escritas de los estudiantes.

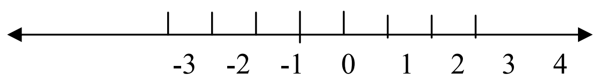
La investigación que presentamos se propone el estudio de los procesos de construcción del conocimiento didáctico matemático en estudiantes que cursarán las dos últimas Prácticas Profesionales de la Licenciatura en Educación mención Matemática y Física. Con el fin de hacer factible dicho estudio, vamos a centrar la atención en el conjunto de los números enteros (Z); esta selección del conjunto de los enteros obedece a que los mismos son un tópico clave en el marco de la Educación Matemática, como lo explicaremos más adelante. En consecuencia, vamos a considerar dos grandes aspectos en la presente investigación: el conocimiento didáctico matemático y la didáctica de los números enteros. El primero, referido a lo que se denomina conocimiento de los profesores y el segundo, relativo a la enseñanza y el aprendizaje; ambos en el contexto de la Educación Matemática.

Las investigaciones sobre el conocimiento del profesor han pasado por tres grandes fases (Cooney, 1994). La primera, denominada como la de la "enseñanza eficiente"; la misma se centraba en estudiar los profesores – que desde la perspectiva de los alumnos y colegas – se consideraban exitosos; sin embargo, este tipo de estudio centrado en la personalidad de los docentes considerados exitosos pasó a una segunda fase cuando se compararon con los resultados académicos de sus alumnos y éstos no necesariamente coincidían con los esperados (Gómez & Carulla, 2001). Actualmente – en lo que se denomina una tercera fase – se ha comenzado a considerar que la actuación de los docentes depende de lo que saben y de lo que piensan y, más recientemente, se ha incorporado además el contexto donde este profesional se desenvuelve; esta última fase es la que se denomina del *pensamiento del profesor* (Gómez & Carulla, 2001; Parra, 2002).

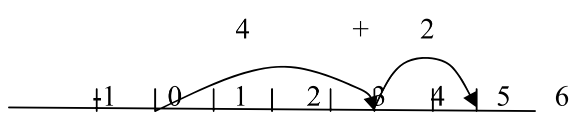
Es, entonces, en el marco de lo se denomina pensamiento de profesor que esta investigación se ubicará; esto implica considerar que el conocimiento didáctico matemático constituye un conocimiento de características complejas y que incluyen diversos tipos de conocimiento, además de los valores y creencias vinculadas a la Educación Matemática; nos referimos al conocimiento metadisciplinario, el disciplinario y el fenomenológico (Porlán y Rivero,

1998; Parra, 2002). El conocimiento metadisciplinario es aquel que contempla el aspecto epistemológico, - esto es, el cómo se construye el conocimiento - y lo referido a los procesos de aprendizaje en general. El segundo tipo de conocimiento - denominado disciplinario - contempla tanto el conocimiento matemático como la historia de las matemáticas y su didáctica. Por último, tenemos el conocimiento de tipo fenomenológico; el mismo está constituido por aquel saber referido a los sucesos naturales, sociales y matemáticos relativos en este caso en particular a los números enteros, su enseñanza y aprendizaje. Este tipo de conocimiento antes descrito, junto con los valores y creencias constituiría lo que denominaremos en esta investigación como *conocimiento didáctico matemático* (Parra, 2004).
En el marco del conocimiento didáctico matemático, esta investigación contempla lo relativo al conjunto de los números enteros, su enseñanza y aprendizaje, como caso particular de este conocimiento. Al respecto, los estudios acerca de la enseñanza de los números enteros han sido poco frecuentes. Sin embargo, tal como lo reseñan las investigaciones y nuestra propia experiencia como profesores y formadores de docentes de matemáticas, los números enteros representan una dificultad evidente en la mayoría de nuestros alumnos. Gallardo (1996) señalaba la década pasada que las investigaciones respecto al conjunto Z se habían dirigido – fundamentalmente - en tres direcciones; una de ellas, como investigaciones desde una perspectiva teórica, entre las cuales destacaron los trabajos de Piaget (1960); otro tipo de investigaciones presentaban estudios de carácter experimental, entre los cuales se destacaron los trabajos de Vergnaud (1989) y, un tercer tipo, los referidos a la enseñanza, como, por ejemplo, los trabajos de Bruno & Martinón (1996) y Ribeiro (1996). Creemos que esta tendencia se mantiene aun. Sin embargo, los trabajos dirigidos a estudiar el papel de los docentes en formación o en ejercicio de la profesión son escasos. Dentro de este último tipo de investigaciones - las referidas a los docentes - nos parece importante destacar los trabajos de Bruno & García (2004). Al respecto, estos autores analizan – al igual de lo que en esta investigación pretendemos - una población de estudiantes próximos a trabajar en el campo de la docencia en matemática; sin embargo, ellos centran su atención en analizar la clasificación que éstos hacían respecto a los problemas aditivos con números enteros según las estructuras de los enunciados. Los autores estudiaron en los futuros profesores, las clasificaciones de los problemas aditivos con números negativos que éstos realizaban y los criterios para justificar la clasificación de dichos problemas. Las conclusiones del trabajo se pueden sintetizar en dos: la redacción de los enunciados son relevantes al momento de la clasificación de los problemas y, los criterios que utilizaron consideraron mayoritariamente las tres situaciones numéricas implicadas en los problemas aditivos; estos son, *los estados* "que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto en un instante (debo 2))" (Bruno & García, 2004: 27), *las variaciones* que en un enunciado expresan el cambio de un estado en un lapso de tiempo (perdí…) y, por último, que manifiestan las diferencias entre dos estados (tengo "n" más que tu…). Esta investigación, relevante, no sólo por la clasificación de los enunciados que expresa, sino también por la población que estudia, nos parece pertinente considerarlo; ya que en el estudio del conocimiento didáctico matemático, este tipo de tareas son parte del mismo. Pero en el estudio del conocimiento didáctico matemático de los pasantes es importante considerar cómo ellos planean el desarrollo de situaciones de aprendizaje; por ello es igualmente relevante que estudiemos también lo que se denomina como los organizadores del currículo (Segovia & Rico, 2001). Estos investigadores del área de la educación matemática manifiestan que al momento de

concretar en una planificación lo que pretende el profesor realizar con los estudiantes, se hace necesario considerar varios aspecto, que implican diferentes significados que desde la matemática escolar deberían plantearse a los alumnos. Estos aspectos son lo que él denomina *organizadores del currículo* y que no son más que "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (Segovia & Rico, 2001: 88). Los organizadores del currículo son siete. El primero de ellos - la fenomenología – es el conjunto de fenómenos a los cuales un concepto matemático está relacionado. En nuestro caso, son todos aquellos fenómenos vinculados a los números enteros; por ejemplo: Al salir de mi casa tenía en mi haber tres lápices y al llegar por la tarde sólo me quedaba uno, es lo que Rudinitsky, A.; Etheredge, S.; Freeman, J.M. & Gilbert, T. (1995) denominan historia o situaciones aditivas simples y que nosotros denominamos situación – problema.
Otro organizador lo constituyen los sistemas de representación, que no son más que los símbolos y gráficos a través de los cuales se expresan los diferentes conceptos y procedimientos matemáticos; ejemplos de ellos en los números enteros lo representa un número *n* cualquiera (-1, 0, 76,…) o la recta numérica



Un tercer organizador son los modelos; ellos muestran la relación que existe entre los fenómenos y los conceptos. En nuestro caso, podría ser – por ejemplo – la adición en Z – veamos:



Un cuarto organizador lo constituyen los materiales, medios o recursos. De alguna manera estos elementos son los que considera un docente como herramientas que le permitan facilitar el logro de los propósitos que se aspiran obtener, desde una perspectiva donde el alumno juega un rol participativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
Junto a estos organizadores, hallamos también uno generalmente olvidado, como lo son los posibles errores y dificultades que podrían generarse en el transcurso de una clase.
El quinto organizador es la historia de las matemáticas como elemento orientador del proceso de enseñanza, que a la vez permite una visión del conocimiento matemático como producto cultural de la humanidad.
Por último – y no por ello menos importante – está la resolución de problemas, el cual siendo una de las principales estrategias de la educación matemática, debería estar presente en toda planificación de cualquier situación de aprendizaje que se desee plantear a los alumnos.
Los organizadores del currículo - en definitiva - vienen siendo la concreción operativa del conocimiento didáctico matemático, que en nuestro caso se centrará en el conjunto de los números enteros. Con ello se busca por una parte, abordar el conocimiento del profesor de matemática - representado en esta investigación por los pasantes y, por otra parte, su concreción en los números enteros. Tanto el conocimiento del profesor centrado en los pasantes, como el estudio de los procesos de enseñanza de los números enteros han sido

trabajados de forma minoritaria en comparación con los profesores y otros conjuntos numéricos, como el caso de los Naturales (Parra, 2004, Raymond, 1996). De ahí la importancia de esta investigación.

Objetivo general

Analizar la aplicación del conocimiento didáctico matemático relativo a los números enteros en estudiantes de las Prácticas Profesionales para la Docencia de la mención Matemática y Física

Objetivos específicos

- Describir los proceso de construcción de conocimiento didáctico en el conjunto de los enteros por parte de los pasantes
- Identificar los aspectos contextuales que intervienen en el proceso de construcción de dicho conocimiento didáctico
- Obtener una tipología del proceso de construcción de dicho conocimiento didáctico
- Caracterizar el proceso de aplicación del conocimiento didáctico matemático
- Obtener una tipología del proceso de aplicación de dicho conocimiento didáctico

Metodología

El enfoque que se asumirá será el cualitativo etnográfico, porque el mismo permite reconstruir el contexto, en el cual se encuentran presentes las actividades, creencias, valores y normas de los actores del proceso (Goetz & LeCompte, 1988). Para ello asumiremos el Estudio de Caso como el método más idóneo porque con él se estudian los actores en profundidad, permitiendo reconstruir la realidad desde la óptica de las teorías asumidas, indagando cualitativamente el escenario en su complejidad, tal y como se desarrolla (López, 2000). Las técnicas que asumiremos serán de carácter interactivo y no interactivo; entre las primeras se desarrollarán entrevistas estandarizadas no secuenciales y la observación participativa. Entre las segundas – técnicas no interactivas – aplicaremos la observación no participante y la revisión documental de las producciones escritas de los actores. Para el análisis de la información trabajaremos con el Método Comparativo Constante propuesto por Glasser y Strauss (1967) ayudándonos de la herramienta informática del Atlas. Ti; un software que facilita el análisis de la data cualitativa.

Viabilidad de la investigación

La investigación que se propone es totalmente viable. En primer lugar, nuestros sujetos de estudio son los estudiantes de las Prácticas Profesionales para la Docencia, cátedra que coordina el investigador responsable; esto permite tener un acceso directo a las fuentes de información. En segundo lugar, como la investigación propuesta se desarrollará en los Centros Educativos que por más de cinco años han prestado sus instalaciones para el desarrollo de las Prácticas Profesionales, se garantiza el acceso directo a la información que se busca. Es de hacer notar que este acceso directo a la información requiere de dos condiciones básicas : confiabilidad y naturalidad en el actuar de los sujetos objeto de estudio (López, 2000); ambas condiciones están garantizadas ya que contamos con la confianza del personal docente que labora en estos Centros Educativos, porque por varios años hemos estado acompañándolos en un proyecto de extensión que busca mejorar la calidad de la educación matemática, lo que ha permitido que al equipo de investigación se le vea como un grupo serio, cuyos fines son totalmente académicos.

Resultados esperados

Al finalizar la investigación se espera contar con información suficiente en relación a los procesos que viven los estudiantes de las Prácticas Profesionales para la Docencia al momento de pensar, diseñar y aplicar situaciones didácticas relativas al conjunto de los números enteros. En razón de ello la investigación permitirá, en primer lugar, mejorar cualitativamente el desarrollo de las Práctica Profesionales para la Docencia en el área de matemáticas. En segundo lugar, los resultados permitirían proponer cambios curriculares en materias de carácter teórico – práctico relacionados con la enseñanza de las matemáticas, tales como las Tecnologías Didácticas y la Didáctica Especial contemplados en el plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática y Física En tercer lugar, por estar vinculado este proyecto a actividades de extensión, permitirá aportar soluciones a los problemas planteados en la enseñanza de las matemáticas en la tercera etapa en los Centros Educativos donde se desarrollan las Prácticas Profesionales para la Docencia, especialmente en lo relativo al conjunto de los números enteros, aspecto altamente problemático en nuestros centros educativos que poseen tercera etapa de la Educación Básica. Finalmente se espera difundir los resultados a dos niveles; el primero en la comunidad académica regional, nacional y/o internacional, mediante ponencias y artículos en revistas arbitradas. El segundo, a través de talleres, seminarios o encuentros, con docentes de la tercera etapa de la Educación Básica de nuestra región.

Bibliografía

Bruno, A. & Martinón, A. (1996) “Números negativos: sumar = restar”. *Uno*. 10 (1), 123 – 133

Bruno, A. & García, J. A. (2004) “Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos”. *Relime*, 7 (1), 25 – 46

Cooney, Thomas (1994). “Research and Teacher Education: In Search of Common Ground”. *Journal for Research in Mathematics Education.* 25 (6), 608 – 636

Glaser, Barney & Strauss, Anselm (1967) *The Discovery of Grounded Theory.* Aldine Publishing Company. Chicago.

Goetz, J.P. y LeCompte, M.D. (1988*). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Editorial Morata. España.

Gómez, P. & Carulla, C. (2001) “Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática”. *Educación Matemática*, 13, (2), 31 – 54.

López, J.I. (2000) “Abriendo puertas. Los Estudios de Casos desde un enfoque innovador y formativo”. *Investigación en la escuela,* 41, 103 – 111.

Parra S., H. (2002) *Cultura escolar matemática y transformación de la práctica pedagógica.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad del Zulia. Facultad de Humanidades y Educación. División de Estudios para Graduados. Doctorado en Ciencias Humanas. Maracaibo. Venezuela.

Piaget, J. (1960*) Introducción a la epistemología genética*. Paidos. Argentina
Porlán, R. y Rivero, A. (1998) *El conocimiento de los profesores.* Díada Editores. Sevilla. España.

Raymond, A. (1997). "Inconsistency Between a Beginning Elementary School Teacher's Mathematics Beliefs and Teaching Practice". *Journal for Research in Mathematics Education*. 28, (5), 550 – 576.

Rudinitsky, A.; Etheredge, S. ; Freeman, J.M. & Gilbert, T. (1995) "Learning to Solve Adition and Substraction Problems". *Journal for Research in Mathematics Education*. 26, (5), 467 – 486.

Segovia, I. & Rico, L. (2001) "Unidades didácticas. Organizadores" en Castro, Enrique (Editor) *Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria.* (pp. 83 – 104). Síntesis. España

Vergnaud, G. (1989) "L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre" en Bednarz, A. et Garnier, C. (Eds.) *Construction des savoirs*. (pp.76 – 83). Canadá. Cirade.

REPRESENTACIONES QUE POSEEN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS, LOS ASPIRANTES A DOCENTES, EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA.

Ángel Vilchez.
Universidad del Zulia. Venezuela
aavilchezb@cantv.net

Campo de Investigación: Pensamiento Geométrico; Nivel educativo: Superior.
Palabras claves: Representaciones mentales, cuerpos geométricos, conocimiento declarativo, proposiciones.

Resumen

El objetivo de esta investigación fue buscar donde se generan las dificultades que presentan los alumnos que ingresan en la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física de la Universidad del Zulia al cursar las asignaturas de Geometría. En los años 1999 y 2002 se aplicó un instrumento para recoger el conocimiento declarativo que podían expresar los alumnos sobre cinco cuerpos geométricos. Las respuestas se compararon con los conceptos presentados en varios textos. Posteriormente, se analizaron los conceptos emitidos por los alumnos desde la perspectiva teórica que plantea Gagné (1991). El resultado de la comparación mostró un amplio desacuerdo entre los conceptos tomados como referentes y los conceptos emitidos por los alumnos, sin embargo, las proposiciones muestran que en algunos términos, un porcentaje considerable de alumnos, mostró tener una representación mental del conocimiento solicitado, en cada caso, aunque la declaración presentada sea deficiente o presente incoherencias. Finalmente se presentan, a partir de los resultados y de las teorías de Alsina, Burgués y Fortuny (1997) y Chevallard (2000), propuestas didácticas alternativas que persiguen mejorar el rendimiento académico de los cursantes de geometría.

Situación.

Los alumnos que ingresan a la Universidad del Zulia (LUZ) de Venezuela, a optar para Licenciados en Educación, Mención Matemática y Física, deben cursar en los semestres segundo y tercero de la carrera, las asignaturas Geometría I (euclidiana) y Geometría II (analítica). Estas asignaturas tienen el objetivo de formar a los futuros docentes en todos los contenidos correspondientes a geometría que debe desarrollar, cada docente, cuando dicta las asignaturas de matemática que conforman los programas oficiales del sistema educativo venezolano (diseño curricular, Facultad de Humanidades y Educación, LUZ, 1995). Este diseño parte del supuesto que los alumnos que eligen la licenciatura en educación, en las áreas de matemática y física, deben de haber adquirido en los estudios previos a los universitarios ciertas habilidades y destrezas en el campo de la geometría. Sin embargo, un número significativo de los alumnos, de la licenciatura, que curan geometría la reprueban; el número de reprobados es siempre mayor en geometría I que en la geometría II (estadística del Departamento de Matemática y Física de la Escuela de Educación de LUZ).
Paralelo a la situación anterior se tiene que el estudio de la geometría es considerado como una herramienta fundamental para promover el razonamiento. A este respecto, Duval, (1998) afirma que no es posible pretender que el estudiante acceda al proceso

formal de razonamiento sin que haya experimentado situaciones que motiven su interés por validar afirmaciones geométricas deductivamente.

Acciones

Tomando como referencia estas dos situaciones se dio a esta investigación con el objetivo de estudiar las condiciones académicas de los estudiantes en el área de geometría, en este caso particular en el conocimiento que tenían de los cuerpos geométricos para desarrollar líneas de acción que permitieran mejor la situación de los estudiantes.

Para lograr este objetivo se diseño y aplicó un instrumento que contenía cinco preguntas sobre cuerpos geométricos, los cuales se seleccionaron tomando en cuenta los siguientes criterios: todos los cuerpos geométricos deben estudiarse durante la tercera etapa de educación básica (según el Manual del Docente, del Ministerio de Educación de Venezuela, 1987, y el cual esta vigente); esta etapa incluye los cursos de séptimo, octavo y noveno año; estos cuerpos se pueden definir de manera sencilla unos y otros haciendo uso de conceptos que se han debido estudiar varias veces durante la escolaridad; al lado de cada término por definir o describir se dejo espacio para que el alumno escribiera o dibujara lo que el consideraba que era ese cuerpo indicado.

Casos

Estos instrumentos se aplicaron en los años 1999 y 2002 en la Universidad del Zulia, a los alumnos que iniciaban el segundo semestre de la licenciatura en educación, en las áreas de matemática y física, en el momento cuando ellos tenían contacto por primera vez con un profesor de geometría (formador de formadores), la aplicación siempre se realizo en la segunda clase de geometría y debido a la experiencia de la primera aplicación, en la segunda se le pidió a los alumnos que en lo posible no dejaran preguntas sin contestar; en cada caso se tomaron los resultados de cincuenta alumnos.

Los cuerpos sobre los que los alumnos deberían emitir una opinión o realizar un dibujo se organizaron en el orden siguiente: a.- **Cubo** (se decidió este nombre por ser más común que hexaedro regular); b.- **paralelepípedo**; c.- **Cono**; d.- **Pirámide**; e.- **Prisma**. Este orden arbitrario y no responde a niveles de complejidad ni a características particulares, únicamente se consideró que son los cinco mas comúnmente citados y que se pueden describir o comparar. Se reconoce que intencionalmente se descartó la esfera.

Metodología

Para valorar las opiniones de los alumnos, en cuanto a conocimiento institucionalizado, se utilizaron varios textos como referencia, tomando en consideración que los mismos pudieran haber sido parte de la formación de los formadores que tuvieron estos alumnos en sus estudios de preuniversitarios o en última instancia fueran referentes en la formación del investigador; por tanto se hizo uso de los siguientes textos de geometría: Baldor, 1997; Geltner y Peterson, 1998; Guillén Gregoria, 1997; Hemmerling, 1994.

Los conceptos emitidos por los alumnos se compararon con las definiciones que presentan estos textos, y según la relación que guardara con alguna de las definiciones presentes en los textos se clasificaba y se incluían dentro de un grupo. Los grupos de categorías de clasificación que se aplicaron fueron las siguientes: si el concepto presentado por el alumno coincidía o era muy parecido a, al menos, uno de los conceptos publicados por los autores tomados como referencia, se lo consideraba como respuesta correcta y se le asignó las siglas (CD), las cuales significan que "Conoce la Definición". Si el concepto emitido por el alumno guardaba cierta relación con alguno de los conceptos tomados como referencia, entonces de acuerdo con la relación se clasificó la respuesta con las siglas (IA), las cuales significan que el alumno tiene una "idea aproximada" a los conceptos institucionalmente aceptados; y si la relación era escasa, la respuesta se clasificó con las siglas (PI), las cuales significan que el alumno tiene una "pequeña idea". En los casos donde los alumnos emitieron respuesta que no guardaban relación con las definiciones tomados como referencia, las respuestas se clasificaron con las siglas (TE), las cuales significan que el alumno emitió una respuesta "totalmente equivocada"; y finalmente, cuando el alumno no respondió se clasificó con las siglas (NC), las cuales significan que el alumno "No Contestó".

Esta clasificación se realizó para hacer un análisis cuantitativo de la situación; no obstante, se realizó un análisis cualitativo de la situación del tipo descriptivo-interpretativo, porque en este estudio se analiza la estructura cognitiva del alumno, dado que estudia las ideas de los alumnos e intenta interpretarlas desde la coherencia interna de su pensamiento (Sandín M, 2003). Para ello se decidió estudiar las representaciones mentales de los alumnos, dado que a través de este estudio se puede determinar lo que cada persona es capaz de expresar sobre un tema de estudio. El estudio de las representaciones puede hacerse a diferentes niveles de complejidad, ya que el conocimiento se representa mentalmente en una variedad de formas, estas incluyen las proposiciones, las producciones y las imágenes (Gagné, 1991). En este caso, se decidió estudiar las representaciones a través del conocimiento declarativo, que es el nivel elemental y por tanto menos complejo, porque el conocimiento declarativo, representado mediante las proposiciones, es el conocimiento de saber qué es algo (Gagné, 1991), que en suma es lo que se desea saber de los alumnos.

Resultados

Cuantitativamente se obtuvo los siguientes resultados:

Para el cubo; en el instrumento de 1999, todos contestaron y de todas las respuestas emitidas el 70% se ubicó en TE, el 24% en PI, el 2% en IA y el 4% en CD. Para el instrumento de 2002 se obtuvo que el 38% no contestó, el 30% se ubicó en TE, el 20% en PI, el 12% IA y ninguno en CD.

Para el paralelepípedo; en el instrumento de 1999, el 16% no contestó, el 74% se ubicó en TE, el 10% en PI y ninguno en IA y en CD. Para el instrumento de 2002 se obtuvo que el 62% no contestó, el 22% se ubicó en TE, el 14% en PI, el 2% IA y ninguno en CD.

Para el cono; en el instrumento de 1999, el 14% no contestó, el 64% se ubicó en TE, el 22% en PI y ninguno en IA y en CD. Para el instrumento de 2002 se obtuvo que el 62% no contestó, el 18% se ubicó en TE, el 18% en PI, ninguno en IA y el 2% CD.

Para la pirámide; en el instrumento de 1999, el 4% no contestó, el 82% se ubicó en TE, el 14% en PI y ninguno en IA y en CD. Para el instrumento de 2002 se obtuvo que el 52% no contestó, el 26% se ubicó en TE, el 20% en PI, ninguno en IA y el 2% CD.

Para el prisma; en el instrumento de 1999, el 44% no contestó, el 54% se ubicó en TE, ninguno en PI, el 2% IA y en ninguno en CD. Para el instrumento de 2002 se obtuvo que el 80% no contestó, el 18% se ubicó en TE, ninguno en PI, ninguno en IA y el 2% CD.

Dentro de los concepto emitidos por los alumnos se puede observar los siguientes aspecto:

En relación con el cubo se presentaron diversas situaciones; en muchos de los casos se

observó que los alumnos confundieron el cubo con el cuadrado, en otros casos decían que era el cuadrado en tres dimensiones y otros alumnos lo presentaron como la figura tridimensional de seis lados, entre otras. Estos conceptos emitidos por los alumnos sobre el cubo, lo muestran como alguien que posee la idea de lo que es un cubo o que en todo caso tiene una representación mental de lo que es un cubo, sin embargo, como puede verse en la ubicación de las respuestas, ninguno de ellos fue capaz de emitir una respuesta que se pudiera aceptar como una definición consolidada en el alumno.
Respecto del paralelepípedo se pudo notar que les costó más esfuerzo emitir una opinión que en el caso del cubo, aun cuando podían comparar o hacer referencia a objetos de la cotidianidad que se parecieran a los mismos, muchos prefirieron no contestar; y sobre estos piensan no se puede decir nada; no obstante en las respuestas emitidas se observa mucha confusión y los que más aportan hablan lados diferentes o que es una figura tridimensional. Sólo un alumno pudo emitir un concepto aceptable.
En el caso del cono un alumno pudo plantear una buena idea, donde comparó al cono con un objeto y destacó sus características, sin embargo un porcentaje alto mostró que no poseen las herramientas para emitir un concepto sobre lo que es cono, esto no implica que no sepan a lo que se refería el instrumento.
En el caso de la pirámide también un alumno hizo una buena definición de lo que es pirámide, sin embargo en este caso, como en el del cono, unos pocos fueron capaces de hablar de un triángulo con base circular o base cuadrada.
En cuanto al prima la situación se presentó muy mal, un número muy alto no contestó o simplemente dijeron, no se que es o no tengo idea. Parece ser que el prisma como tal no se estudiase en los estudios preuniversitarios.
Por lo observado es posible afirmar que los alumnos, al menos en los cuatro primeros casos, si tienen, en un número significativo, una imagen de lo que son el cubo, el paralelepípedo, el cono y la pirámide. Por tanto, que se puede hacer para que esta situación pueda ir mejorando gradualmente.

Propuesta

A partir de los resultados obtenidos se sometió a consideración, dentro de la evaluación curricular, unas líneas de acción que puedan contribuir a mejorar la condición académica de estos docentes en ejercicio.
En primer término se pidió cambiar el enfoque de la asignatura geometría, pasando de una estructura racional, donde se supone que cada alumno conoce todos los conceptos básicos de geometría, a una estructura práctica, donde el alumno pueda observar cada cuerpo geométrico, extraer sus características, pueda construirlo con materiales, hasta que sea capaz de identificarlo a partir de sus características fundamentales.
Otra sugerencia que se realizó fue la de iniciar el trabajo en geometría a partir de los cuerpo geométricos, en el espacio, y posteriormente ir descomponiendo los cuerpos geométricos de tal manera que se puedan ver como construcciones conformadas por polígonos, y a partir de los polígonos concebir la existencia del plano. Esta es presentada por Alsina, Burgués y Fortuny (1997), donde además sostienen que posterior al establecimiento de las diferencias entre figuras y cuerpos, y a la concepción de las nociones de punto, recta y plano se proceda al desarrollo lógico matemático de teoría geométrica.
Bajo este enfoque la geometría no se puede desarrollar un salón de clases común, si no que se trasladaría a un laboratorio o debe trasformarse el salón en un laboratorio donde cada alumno tenga la oportunidad de construirse sus imágenes, de hacerse sus representaciones y con propiedad podrá hacer sus proposiciones (Alsina, Fortuny y

Pérez, 1997) A partir de las proposiciones se puede evaluar su conocimiento declarativo, que podrá contrastarlo con los conocimientos de sus compañeros y con los conocimientos del profesor y así acceder a nuevos conceptos. Esta sala también debe brindarle la oportunidad al profesor de aplicar las estrategias didácticas que le permitan ir del saber sabio al saber por enseñar (Chevallard, 2000), persiguiendo que los alumnos puedan construir los conceptos de geometría en forma acertada a partir de sus conocimientos y la contrastación de estos con las experiencias vividas en el laboratorio.

Bibliografía:

Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. (4ta. reimpresión). Madrid, España: Editorial Síntesis.

Alsina, C.; Fortuny, J; Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría?* Madrid, España. Editorial Síntesis.

Baldor, J. (1997). *Geometría y Trigonometría*. (14ta. Reimpresión) México. Publicaciones Cultural.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición Didáctica*. (3ra. Edición). Buenos Aires, Argentina. Aique.

Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view.* En Mammana, C. y Villani, V. (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Facultad de Humanidades y Educación (1995). Diseño Curricular. Universidad del Zulia. Venezuela.

Gagné, E. (1991). *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar.* Madrid, España. Visor Distribuciones, S.A.

Geltner, P.; Peterson, D. (1998). *Geometría*.(3ra edición).México, Thomson.

Guillen, G. (1997). *Poliedros*. En Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. España. Síntesis.

Hemmerling, E. (1994). *Geometría Elemental.* (14ta. Reimpresión). México. Limusa.
Ministerio de Educación (1987). *Programa de estudio y Manual del Docente*. Venezuela.

Sandín M. (2003). Investigación cualitativa en educación. España. McGRAW-HILL.

CATEGORÍA 3:

CONSIDERACIÓN DE ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

LA CONSERVACIÓN EN EL ESTUDIO DEL ÁREA

Ma. Guadalupe Cabañas Sánchez-Ricardo Cantoral
DME- Cinvestav-IPN. México
gcabanas@cinvestav.mx; rcantor@cinvestav.mx

Campo de investigación: Socioepistemología; Nivel educativo:Medio y Superior

Resumen

Este escrito resume las actividades desarrolladas durante el curso "La conservación en el estudio del área", en el que mostramos la existencia de una particular relación entre el área y su medición; de la medición con la comparación, y de todas estas con la conservación. Las actividades comprendieron construcciones vinculadas con regiones planas (presentadas como regiones geométricas o analíticas), involucrando a la conservación –como principio, noción, concepto, actividad y/o práctica – en el estudio del área, y de su relación con la integral definida. Actividades que ubicamos en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa.

Palabras clave: Aproximación socioepistemológica, conservación, comparación, medición, área e integral definida.

Introducción

En el curso "La conservación en el estudio del área", mostramos una forma particular de estudiar a la integral definida (a partir de la noción de área), en el marco de la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. Estuvo constituido por cinco actividades que comprendieron construcciones vinculadas al tratamiento de regiones planas (geométricas y analíticas), con el fin de que se percibiera cómo es que el área puede conservarse al realizar transformaciones o bien al determinar relaciones en dichas construcciones. En el diseño de estas actividades se consideró a la conservación como eje rector - como concepto, principio, noción, práctica y actividad – y conceptos asociados como la comparación, medición y cuantificación.

El área en particular es una noción arraigada a la cultura de las sociedades, a la ciencia y a la tecnología, así como a las vicisitudes de la vida diaria de las personas (Cabañas y Cantoral, 2005b, 2005c). El concepto de área se vincula al de cuantificación de una superficie a la que se asocia una unidad de medida y que se expresa como unidad cuadrada. El concepto de medida de área consta del concepto de unidad, el concepto de iteración de unidad, la cantidad de unidades y el cálculo de fórmulas (Piaget, et al., 1970; Kordaki y Potari,2002). Una particularidad relativa a la medición del área, es que las unidades convencionales (metro cuadrado, centímetro cuadrado, etc.) a diferencia de otras unidades no existen como instrumentos de medición en las tiendas, así como podemos encontrar reglas, cintas graduadas, escuadras en unidades de longitud; pesas para la masa, entre otras. Por lo que el cálculo del área se determina indirectamente, a partir de medidas de longitud y con instrumentos correspondientes a esta magnitud (Cabañas y Cantoral, 2005b).

Por conservación comprendemos a aquella modificación que no produce cambios en un área. Significa que el valor de un área permanece sin cambios mientras su figura puede ser transformada a otra cualitativamente nueva. Puede darse a partir del cambio de posición de una figura sin modificar su forma, al realizar movimientos como la rotación, traslación y reflexión (véase *Figura 1*). También, al modificar una figura partiéndola y reacomodando sus partes, y; mediante transformaciones en representaciones analíticas o geométricas en regiones planas o no planas.

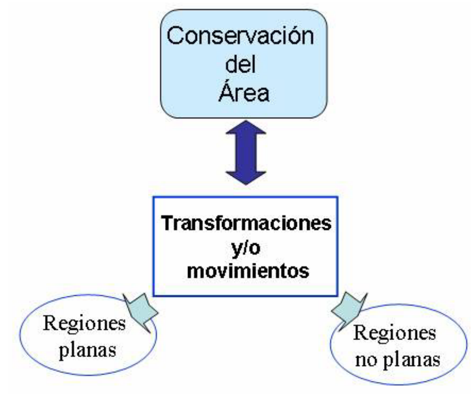


Figura 1. Conservación del área en construcciones ligadas a regiones planas y no planas a partir de transformaciones y/o movimientos

El estudio formal del área se da en el contexto escolar y se vincula a representaciones geométricas y analíticas principalmente. En el sistema educativo mexicano inicia en la enseñanza básica (primaria), mediante actividades que involucran a la medición, comparación, cuantificación y conservación. Previo al proceso de medición, se sitúa a los niños a realizar actividades que les permita percibir el área por recubrimiento; a percibir atributos medibles, y; a realizar transformaciones sin que el área se altere, a través de la manipulación de materiales no estructurados. Actividades que se desarrollan a lo largo de la escuela primaria. Las relativas a la medición, se refieren a figuras geométricas y se apoyan en el uso de fórmulas. En los niveles de enseñanza medio y superior las actividades cambian; a los estudiantes se les sitúa a trabajar básicamente sobre objetos formales. El estudio del área se vincula con el de integral definida, concepto que suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la medición del área de regiones planas acotadas, a través de la expresión "área bajo la curva". El procedimiento de medición consiste en dividir la región en regiones más pequeñas, cuyas áreas tengan fórmulas de cálculo conocidas. Se suele dividir al intervalo de integración en subintervalos de igual longitud, sobre los cuales se construyen rectángulos con los que busca cubrir la región ya sea por defecto o por exceso. El valor aproximado del área se obtiene a partir de la suma de las áreas de los rectángulos así construidos. El cálculo del área de estos rectángulos utiliza la fórmula de "base por altura", por lo que basta contar con los valores de las bases y de las alturas para conocer el valor de las áreas de los rectángulos. Si bien el procedimiento utilizado pudiera parecer simple, el recurso de subdividir la región en rectángulos es introducido artificialmente tanto en los textos escolares como en las explicaciones del profesor, además de que la particular forma de toma al límite plantea dificultades cognitivas. Esto suele hacerse con el propósito de justificar la presentación de la integral definida a través de la noción de área de donde se pasará al tratamiento algorítmico típico de la enseñanza de las integrales (Cabañas y Cantoral, 2005b).

Nuestra tesis es que aunque estemos en el nivel superior y trabajemos con objetos formales, se requiere introducir a esos objetos con actividades previas que tomen en cuenta principios esenciales como la conservación. Aceptamos que la dimensión empírica juega un papel importante en la dimensión conceptual de la enseñanza superior, la comparación y la medición son antecedentes. Sin embargo, nos preguntamos ¿Cómo recuperar estas prácticas en la enseñanza superior sin regresar a la escuela básica? Consideramos que previo a la presentación didáctica de la integral, se requiere movilizar prácticas como la conservación y conceptos asociados (Cabañas y Cantoral, 2005b, 2005c). Esta tesis se ha venido llevando adelante a través del proyecto de investigación doctoral "La reproducibilidad de situaciones didácticas. La noción de conservación del área en la explicación escolar de la integral", basados en la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa (Cabañas, 2004). Enfoque en el que se apoya el diseño de las actividades desarrolladas en el curso.

Estudio del área desde la aproximación socioepistemológica

La socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La sociopistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral y Farfán, 2003).

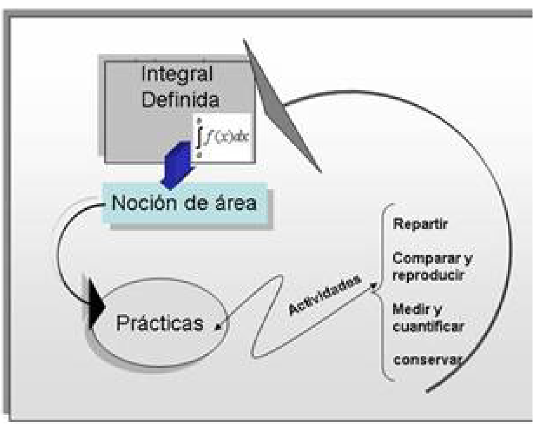


Figura 2. Aproximación socioepistemológica al estudio del área

La aproximación socioepistemológica considera en el análisis del estudio de los fenómenos didácticos en la enseñanza de la matemática la dimensión "social", buscando afectar el sistema educativo en el rediseñando el discurso matemático, al abordar las prácticas, previo a la construcción de conceptos. En este curso se plantearon actividades desde esta aproximación teórica, con el propósito de presentar una visión alternativa a partir del tratamiento de la noción de área al nivel de las actividades asociadas, y que son detectadas en las filiaciones entre enseñanza básica y superior cuando tratan con la integral definida mediante actividades como: repartir, medir y cuantificar, comparar y reproducir, y conservar, que caracterizamos a continuación (véase *Figura 2*):

a) *Repartir*. Esta actividad se vincula a situaciones de la vida cotidiana en la que dado un objeto hay que repartirlo equitativamente, ya sea aprovechando regularidades, por estimación o por medición.

b) C*omparar* y *reproducir*. Las situaciones tienen que ver con la comparación de dos superficies con el fin de determinar cómo es una respecto de la otra. En otras, se busca obtener una reproducción con forma diferente a la dada inicialmente. Estas actividades pueden realizarse mediante: inclusión, transformaciones, estimación, por medición, o estudiando funciones.

c) *Medir* y *cuantificar*. El área suele aparecer en situaciones de medida ya sea para repartir, conservar, comparar o valorar. Este proceso puede realizarse mediante exhausción, acotación, transformaciones, o relaciones geométricas generales.

d) *Conservar.* Esta actividad se presenta después de realizar transformaciones, o movimientos en construcciones vinculadas a regiones planas o no planas. En este proceso, los objetos pueden cambiar o mantener su forma sin que el área se altere.

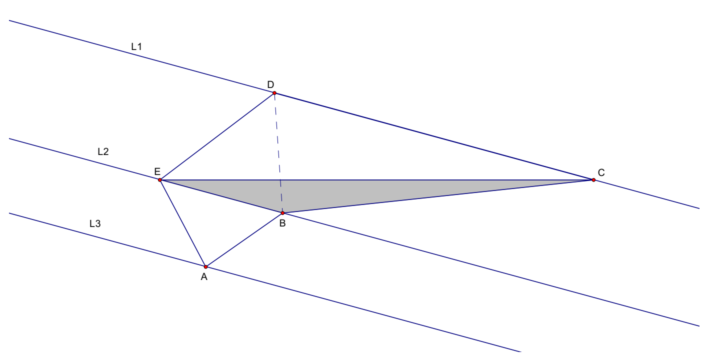
Presentamos a continuación las actividades que fueron realizadas durante el desarrollo del curso.

Las actividades

En las actividades uno y dos se sitúo a trabajar con polígonos convexos y no convexos, y en las actividades tres, cuatro y cinco con funciones lineales y no lineales. El propósito es que se percibiera que el área puede conservarse en representaciones analíticas o gráficas ya sea realizando transformaciones o bien al determinar relaciones entre figuras geométricas. Enseguida se describen las actividades:

Actividad 1

En la siguiente figura las rectas L1, L2 y L3 son paralelas.



a) Determina la relación que existe entre las áreas de los triángulos BDE y BCE. Justifica tu respuesta.

b) Determina la relación que existe entre las áreas de los cuadriláteros ABDE y ABCE. Justifica tu respuesta.

En esta actividad se pidió determinar las relaciones entre áreas de triángulos con misma base y misma altura.

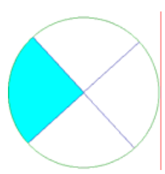
Actividad 2

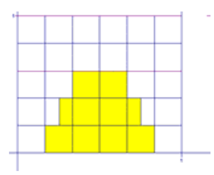
Construye tres polígonos diferentes. Realiza las transformaciones convenientes sobre las figuras construidas , de tal forma que el área de las figuras resultantes sea igual a las construidas inicialmente. Explica los procedimientos que realizaste en las transformaciones.

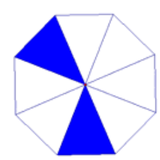
En esta actividad se pidió construir polígonos diferentes y comprendieron: la determinación de relaciones entre áreas de triángulos con misma base y misma altura; la transformación de polígonos convexos y no convexos conservando áreas,

Actividad 3

Bosqueja la gráfica de una función no lineal cuya “área bajo la curva” sea igual al área de la región sombreada de cada una las siguientes figuras:

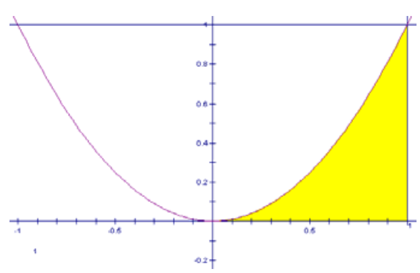






Actividad 4

Determina tres funciones diferentes, cuya área bajo las gráficas correspondientes sea igual a la de la región sombreada en la gráfica dada, considerando el mismo dominio de definición.



Actividad 5

Considera las siguientes expresiones $f(x)=4$, $g(x)=ax$, $h(x)=bx^2$. Encuentra los valores de a y b de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo [0, 4] tenga la misma área. Bosqueja geométricamente.

Bibliografía

Cabañas, G. (2004). *Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral*. proyecto doctoral.

Cabañas, G. (2005). La noción de conservación en el estudio del área. En Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, G. (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18*, 457-462. México: Clame.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005a). Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Uruguay: Clame, p. 60.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005b). La integral definida. Un enfoque socioepistemológico. En Dolores, C., Martínez, G. (Eds). *La socioepistemología en el aula*. Universidad Autónoma de Guerrero. Fomix del Conacyt – Guerrero (aceptado para su publicación).

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005c). La conservación en el estudio del área. En Cantoral, R., Covián, O., Lezama, J. y Romo, A. (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: Reverté Ediciones-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C. (en prensa).

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics,* 53 (3), 255 – 270.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(1) 65 - 100.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1970). *The child´s conception of geometry.* New York; U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.

EL DISCURSO ESCOLAR. ASPECTOS DE SU FORMACIÓN

Apolo Castañeda Alonso
Cicata-IPN
apcastane@gmail.com

Campo de investigación: Socioepistemología; Nivel educativo: Superior

Resumen

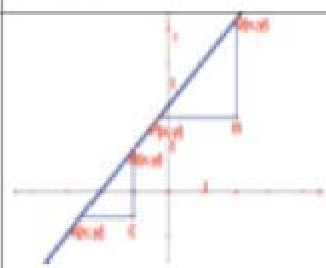
En este escrito se analizan los aspectos que configuran el discurso matemático escolar a fin de conocer su naturaleza, eminentemente social, y contribuir a los propósitos específicos de la investigación socioepistemológica que se busca, entre otras acciones, las reconstrucción del discurso matemático escolar. Este análisis se apoya de los resultados de la investigación de Castañeda, (2004) relativo al análisis de obras de texto de antaño, a su tratamiento didáctico y al fenómeno de difusión del saber en relación al idea de *máximo* de una función.

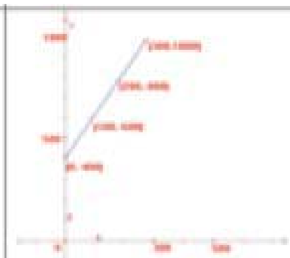
Antecedentes

Por discurso matemático escolar, Marcolini y Perales (2005) explican que se refiere a aquel discurso que se preocupa por la formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento, características, incluidos aspectos de organización temática y profundidad expositiva.

En la investigación de corte socioepistemológica de Buendía (2004), se distinguen dos elementos que definen al discurso matemático escolar, por una parte los libros de texto en los que se apoya la enseñanza y por otra, el tipo de explicaciones que brinda un docente en los sistemas didácticos donde se suele basarse en experiencias cercanas del individuo para explicar un fenómeno.

Las obras escolares son un apartado del discurso matemático escolar, por lo que también están sujetos a las restricciones de la noosfera y moldean su contenido de acuerdo con las exigencias de la sociedad (Chevallard, 1991). En este tipo de obras se puede distinguir notablemente la formas tan variadas en que se abordan las ideas matemáticas; las frases, palabras, explicaciones, metáforas. Aún tratándose de un mismo saber, se perciben las diferencias entre un autor y otro. En Martínez, (2005) se presenta un análisis didáctico de la *pendiente* donde analiza el tratamiento de en dos libros de texto.

Libro de texto	Gráfica	Contexto de la gráfica
Geometría Elemental Hemmerling (2002)		En este libro se interpreta la pendiente como número invariante en el plano cartesiano mediante la geometría analítica. Tomando en cuenta la razón de la distancia entre dos puntos cualesquiera.

Álgebra Leithold (2003)		En este libro se interpreta la pendiente de la recta como la razón de cambio constante a partir de un ejemplo de costos. Afirmando que la pendiente es una constante de la recta.

Suele creerse que el discurso escolar se elabora de un fuente matemática que es inmutable al tiempo, al espacio; el saber escolar adquiere un matiz de permanencia y tiende a creerse que los esfuerzos didácticos deben orientarse a la modificación de este discurso. No obstante trabajos socioepistemológicos como en Castañeda, (2004), Buendía (2004) se refuerza la hipótesis de que ciertas prácticas son fuente de la reorganización de la obra matemática y por ende del rediseño del discurso matemático escolar.

El trabajo de Cantoral, (2001) nos ilustra con un resultado de carácter epistemológico, la formación de un discurso escolar a partir de la reinterpretación de los significados en torno al concepto de integral. Explica que la *integral* puede entenderse de diferentes maneras según se trate del programa teórico desde donde se está definiendo, la integral Cauchy-Riemann, la integral de Newton-Leibniz y la integral de Wallis …*las tres presentaciones… … no sólo difieren por la época en la que fueron desarrolladas, sino también respecto de las explicaciones de las que echan mano…* Actualmente estas visiones no coexisten dentro del discurso escolar, pues ha ocurrido una especie de *consenso* y la representación de Cauchy-Riemann es la que todos los profesores usamos en las clases. La pregunta que surgen de lo anterior es ¿Cuál de las tres formulaciones de la integral favorece el aprendizaje de los alumnos?, ¿Cómo ocurrió este elección?

La epistemología se convierte en un fuente de información para conocer la naturaleza de las ideas y permite reconocer el hecho de que la matemática ha sido construida ajena a los sistemas de enseñanza, cumpliendo con intereses y expectativas específicas, por lo que su introducción a los sistemas de enseñanza obliga a un conjunto de *transformaciones adaptativas* (Chevallard, 1991) . En este proceso ocurre un fenómeno al que Chevallard llama de *despesonalización*, en el que un saber se le desasocia de las problemáticas originales y situaciones que le daban sentido y razón (o quizá, necesidad) de ser. El resultado de este proceso es un saber transpuesto no muestra su genesis epistemológica y la naturaleza de éste queda reducida a definiciones y teoremas que sólo presentan un saber finamente construido, sin permitir recrear los conflictos, conjeturas e interpretaciones originales que le dieron los primeros significados. No obstante, la tesis socioepistemológica que se desarrolla en Castañeda, A. (2004) muestra que no se produce una *despersonalización* absoluta ya que en una transposición didáctica permanecen ciertas practicas de referencia.

Una forma de despersonalización es lo que Chevallard llama la *textualización* del saber, en el que identificamos una ruta que conduce a la formación un discurso matemático escolar, pues los saberes se organizan, sistematizan y en el caso de las obras con carácter escolar se le incorpora una *génesis ficticia* con el propósito de facilitar su estudio.

Pero fortalecer el discurso matemático escolar no se reduce a una tarea de ampliación de los conceptos o a reproducir en clase situaciones semejantes a las que vivió la humanidad en el proceso de construcción del saber. Nos debe llevar a reflexionar sobre la reorganización de la obra matemática y a cuestionar el discurso matemático escolar en busca de la reconstrucción de significados de conceptos matemáticos como productos de la actividad humana.

El trabajo de Castañeda, (2004) muestra el intrincado proceso en la construcción de un discurso escolar, en este caso el del cálculo, en en dos obras de difusión[1], el *Analice des infiniment petits* de L'Hospital y *Analitiche Institutioni* de María de Agnesi. En ellos, el saber que se dispuso para la difusión no sólo resultó de la selección (arbitraria o no) por parte de los autores sino que la sociedad académica participó legitimando ese saber, a través de una especie de *consenso*. Aparecen también diversas justificaciones, desde el ámbito sociocultural, que se vierten para definir y configurar ese saber. Nos referimos a a prácticas sociales, profesionales o domésticas. Arsac, G. (1992). Justo este fenómeno de *consenso* nos muestra la existencia de acuerdos, criterios unificados, es decir, un primer rasgo de *institucionalización*. El discurso institucionalizado tiende a reproducirse por una especie de acción hegemónica que organiza, sistematiza el saber matemático. La obra de L'Hospital es un claro ejemplo de la sistematización del saber bajo un esquema de *obra de difusión* y más aún, legitimado por la institución científica más importante de aquella época; la Academia de Ciencias.

En un ambiente de difusión encabezado por Fontenelle[2], se hizo propicia la *publicación* como medio para la *comunicación* de las ideas. La formulación del discurso escolar del cálculo no sólo proviene de la transposición didáctica del saber erudito sino que se involucran otros factores, ajenos a la noosfera, para la selección y conformación de un saber a enseñar; entre ellas las prácticas socialmente compartidas que se toman en cuenta para adaptar un saber a su versión "didáctica" permitiendo que un mayor número de personas lo puedan estudiar. L'Hospital asume la estructuración de un nuevo discurso del cálculo; intentado ser claro en la exposición de las ideas, a través de un lenguaje accesible a la población no especializada. Esto produjo la primera Transposición Didáctica del cálculo en el que las ideas aparecieron adaptadas a una circunstancia específica (de difusión) y se organizaron en una secuenciación lógica (atendiendo a la evolución y profundidad de las ideas). No se entendió el ejercicio de *difusión* como la reimpresión y publicación a gran escala de los originales de Leibniz; L'Hospital no redujo la tarea a una trascripción fiel de Leibniz ni compiló sus escritos.

El caso de la idea de *máximo* de una función

[1] Les llamamos de difusión por el propósito para el que fueron escritos, se distinguen de obras eruditas por el tratamiento ordenado, dosificado, que dan a las ideas matemáticas.

[2] Secretario de la Academia de Ciencias de París en aquella época y promotor de las publicaciones de divulgación científica.

La epistemología en general, se propone revisar la ciencia para definir su origen, determinar sus criterios de validez, revisar su consistencia lógica, predecir sucesos, entre otras acciones. Sin embargo es posible llevar esta práctica hasta niveles más específicos que las disciplinas científicas exigen, y al menos, para los matemáticos educativos, esta disciplina puede proveer de explicaciones detalladas de los procesos por los que se desarrolla una idea matemática observando en ello las condiciones y contextos pasados, los estancamientos, los momentos en los que se agregan significados ampliándose campos de estudio o los puntos en la historia en los que se descartan ideas asociadas a los conceptos en cuestión.

Situándonos históricamente nos aproximamos al origen de las ideas, sin embargo este primer acercamiento no nos permite interpretaciones más finas de aquellas situaciones, explicaciones, conjeturas que validaron y reorientaron las ideas. Siendo aún más detallados en las circunstancias que posibilitaron el origen de un saber, se reconocen nuevos elementos que intervienen como variables en las investigaciones epistemológicas; nos referimos, a los aspectos sociales y culturales que intervienen en la construcción del conocimiento. Para los socioepistemólogos, la búsqueda de evidencias no termina con ubicar la serie de sucesos que culminaron con una idea, sino hasta determinar aquellas prácticas asociadas al conocimiento que hicieron que fuera validado socialmente.

Derivado del estudio de Castañeda, (2004), abordamos el caso del *máximo* de una función. Analizamos diferentes escenario de significación de las ideas, los argumentos que se usan para definir los conceptos y el tipo de ejemplo que se aportan. Nos centramos en determinar las formas de legitimadoras dentro del discurso y los consensos logrados en torno a las ideas.

En Leibniz, G. (1683), se hace una amplia descripción del comportamiento infinitesimal en el que caracteriza al máximo por un mismo argumento *geométrico* usando dos diferentes criterios: primero a través de la *comparación de estados*, donde precisa que el máximo queda determinado por la línea GF, (ubica la mayor de las ordenadas de todas las posibles, obsérvese que en la imagen aparecen otras dos ordenadas la CD y LN). La segunda a través de una *condición geométrica*, explica que la tangente sobre la curva en el punto máximo es paralela al eje de las abscisas.

Más adelante se aborda una caracterización a través del método (algebraico) de las diferencias (no explica su técnica) lo que le permite determinar la magnitud de la subtangente (en la figura corresponde al segmento AB)

La obra de L'Hospital, A. (1696). y la obra de Agnesi, M. (1748) ampliamente abordados en Castañeda, (2004) presentan el cálculo *para su difusión,* distinguiéndose del expuesto por Leibniz; dada la intencionalidad con la que fueron escritos. El *discurso* de L'Hospital y Agnesi integra, además de las reglas del método del cálculo, amplias explicaciones sobre el comportamiento variacional de las curvas, por ejemplo, las representaciones gráficas de la naturaleza poligonal de las curvas, la magnitud de las diferencias de orden superior, explicaciones verbales del comportamiento de la curva en vecindades infinitesimales, por citar algunas

El discurso no se limita a la enunciación de definiciones. Los autores generaron un estilo en la presentación de las ideas matemáticas basado en el ordenamiento y la secuenciación lógica en la exposición de los contenidos3, así se puede leer explícitamente en la introducción de la obra de Agnesi, donde dice que su intención es abordar las ideas de forma clara y accesible*... que los beneficios con ese orden natural que proporciona, quizás el de mejor instrucción y agrandar más la luz.* La visión didáctica del cálculo en estas obras se identifica al encontrar múltiples explicaciones a una misma idea desde diferentes acercamientos para dar una noción más elaborada. Este tratamiento se mantiene a lo largo de la obra, incluyendo la sección de problemas en donde se observa un planteamiento diversificado de problemas más representativos4. L'Hospital aclara en su introducción ... *hago solamente algunos ejemplos seleccionados* … dando evidencia del ejercicio de selección que implicó organizar el contenido de su libro.

En relación al estudio del *máximo* en estas obras, hemos organizado el tratamiento que hacen del *máximo* tres secciones, la *caracterización del saber*, *cálculo en operaciones* y *problemas de optimización.*

Lo referido a la caracterización, se expresan 7 formulaciones diferentes a la idea de máximo; la *noción de tamaño* (argumento geométrico) que se retoma de Leibniz, la *naturaleza dinámica de las curvas* (argumento geométrico con referente analítico) se parte de reconocer al máximo desde una incursión geométrica pero se acompaña de un planteamiento variacional. La *subtangente de magnitud infinita* (geométrico - analítico) se define el comportamiento de la subtangente a partir de la variación de las abscisas. El *signo de las diferencias infinitesimales* (argumento analítico) en el que se destaca que muy cerca del máximo las diferencias pasan de un signo a otro. La *propiedad infinitesimal* (analítico) donde se explica que cerca del máximo ocurren las variaciones más pequeñas. La *propiedad analítica* en la que se explica una regla en la que en el máximos se determinan diferencias nulas o infinitas.

La parte del cálculo de las operaciones expone un procedimiento para la manejo algebraico y la determinación del máximo por este medio. Finalmente en los problemas se agrega un planteamiento para determinar la magnitud menor de un constructo geométrico.[5]

Comentarios finales

Los planteamientos y explicaciones que se hicieron necesarios en este escenario de difusión del conocimiento configuraron un discurso del cálculo que se heredó a los libros de texto que se publicaron en lo sucesivo, evidentemente que al fundamentarse las nacientes ideas del cálculo, el discurso se tuvo que adaptar a las nuevas circunstancias, pero muchas ideas se han mantenido vigentes pues hoy es posible encontrar algunas de estas argumentaciones en libros contemporáneos.

---

[3] Desde su propia perspectiva

[4] existió un interés generalizado en el ambiente académico de aquella época por la resolución de problemas de geometría, relativos a máximos y mínimo, problemas de tangentes, subtangetes.. [ordenar]

[5] en Castañeda, (2004) se detalla este tratamiento.

Referencias

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana ...* Tomo I, Publicac. In Milano : nella Regia Ducal Corte, 1748

Arsac, G. (1992). L'evolution d'une théorie en didactique:l'exemple de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des mathematiques.* 12(1), 7-32.

Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de las prácticas sociales.* Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, AES-Cinvetav-IPN.México.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.*14(1),64 – 75.

Castañeda, A. (2004). *Una aproximación a la construcción social del conocimiento. Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de Doctorado. Matemática Educativa, CICATA-IPN. México.

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 5(2), 27-44

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Leibniz, G. (1683). Nova methodus determinandi maxima & minima. *Acta Eruditorum,*
L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes* (primera reimpresión ,1988). Paris, France, ACL-Editions.

Marcolini y Perales, (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 8 (1), 25-68

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamerica de Matemática Educativa.* 8 (2), 195-218

Martínez, R. (2005). *La pendiente y su variación: un estudio didáctico y cognitivo.* Tesis de Maestría. Cimate-Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL: UNA APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LA DERIVADA

Mario Sánchez Aguilar y Juan Gabriel Molina Zavaleta
CICATA del IPN, México
mosanchez@ipn.mx
Campo de investigación: Pensamiento Variacional; Nivel educativo: Superior

Resumen

El presente escrito muestra una descripción del taller denominado 'pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada' que se desarrolló en la ciudad de Montevideo, Uruguay, en el marco de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Además de presentar esta descripción, el escrito contiene algunas reflexiones relacionadas con los contenidos matemáticos abordados en este taller.

Introducción

Guiado por la estructura del taller, el presente escrito se encuentra dividido en dos secciones, la primera aborda aspectos numéricos asociados a los contenidos matemáticos tratados; mientras que la segunda hace referencia a algunos aspectos gráficos.

Sobre los aspectos numéricos

Como ya es conocido, el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el sistema social que le da cabida (Cantoral et al., 2000, p. 185). En este escrito se toman algunas ideas matemáticas que han sido utilizadas (y algunas de ellas generadas) dentro de esta línea de investigación y se muestra su aplicación en el estudio del concepto matemático derivada.

El término 'variacional' se encuentra estrechamente ligado al concepto de *variación*, el cual es entendido como una cuantificación del cambio (ver Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). Dentro del PyLV, el concepto de variación tiene una importancia fundamental, ya que el estudio de la variación de diferentes situaciones (en particular aquellas ligadas a cuerpos en movimiento) generó las ideas fundamentales que dieron origen al cálculo diferencial. Un concepto matemático que fungió como herramienta para determinar la variación entre dos estados consecutivos E_1 y E_2 de un sistema dado, es el de *diferencia*; esto es, el residuo de la sustracción $E_2 - E_1$; por esta razón se buscó provocar la emergencia de este concepto en la primer parte del taller, para posteriormente mostrar su utilidad en el estudio del concepto de derivada en un contexto numérico.

Para lograr el objetivo anterior, hicimos uso de una actividad matemática contenida en el trabajo Cantoral et al. (2005), cuyo propósito es favorecer la emergencia de estrategias de solución y argumentos de naturaleza numérica que utilicen la idea de diferencia. La actividad es la siguiente:

Actividad 1. A continuación se presentan tres tablas numéricas.

a) Determina cuál de estas tablas corresponde a una función lineal, cuál a una función cuadrática y cuál a una función cúbica.
b) Una vez que hayas determinado a qué tipo de función corresponde cada una de las tablas numéricas, encuentra la expresión algebraica de cada una de estas funciones.

x	y
-3	-78
-2	-57.75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

x	y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Tal como se comenta en Cantoral et al. (2005), la actividad anterior está diseñada para obstaculizar la estrategia de solución gráfica que se presenta con gran frecuencia entre los profesores que intentan resolverla; esto con el propósito de favorecer la emergencia de argumentos de tipo numérico que involucren la idea de diferencia.

Cuando la idea de diferencia aparece en los argumentos de los profesores, ésta se retoma y se utiliza como herramienta para dar respuesta al primero de los cuestionamientos de la actividad, mostrando por ejemplo que para la primera de las tablas numéricas, el cálculo de las segundas diferencias nos conducen a un número constante, lo cual nos indica que esta tabla corresponde a una función de segundo orden (para más detalles consultar Cantoral et al. (2005)):

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
-3	-78		
-2	-57.75	20.25	
-1	-40.5	17.25	-3
0	-26.25	14.25	-3
1	-15	11.25	-3
2	-6.75	8.25	-3
3	-1.5	5.25	-3

Figura 1. *Aplicación de las segundas diferencias a la primera tabla de la actividad*

Este número constante $k=-3$, además de indicar que la primera de las tablas corresponde a una función de la forma $y=Ax^2+Bx+C$, también señala que el valor de A en esta expresión algebraica es $A=\frac{k}{2}=\frac{-3}{2}$. Esta propiedad ($2A=k$) generada a partir de la aplicación de la segunda diferencia, a los valores de las ordenadas, en la representación numérica de una función de segundo grado, se encuentra estrechamente relacionada con el valor constante k' producido al obtener la segunda derivada de una función cuadrática de la forma $f(x)=Ax^2+Bx+C$:

$$f\left(x\right)=Ax^2+Bx+C$$
$$f'(x)=2Ax+B$$
$$f''\left(x\right)=k'=2A$$

De esta manera se argumenta que el concepto de diferencia, además de subyacer al concepto matemático de derivada, puede ser de utilidad para estudiar desde un contexto numérico algunas ideas propias del cálculo diferencial.
Estos aspectos numéricos del taller concluyen explicando que el concepto de diferencia como herramienta de análisis de la variación aparece en el trabajo astronómico de Newton (1687) y se formaliza en el *Methodus Differentialis* publicado en Newton (1711).

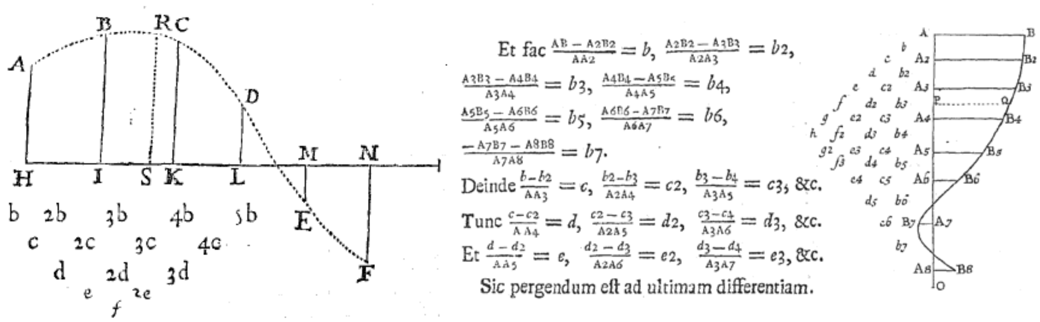


Figura 2. *Imágenes tomadas de la obra de Newton que ilustran el uso de la diferencia como herramienta de análisis de la variación.*

Acerca de las formas gráficas
La noción de velocidad fue por algunos años una idea huidiza, situación que posiblemente afectó en el desarrollo de la matemática. Según Gandt (1999) durante el siglo XVII los precursores del análisis matemático iniciaron su utilización en forma intuitiva, "Los hombres del siglo XVII manipularon movimientos acelerados y velocidades instantáneas durante bastante tiempo antes de poder precisar qué entendían por ello…" (De Gandt, 1999, p. 41). Los estudiosos del movimiento idearon medios para apreciar la velocidad, por ejemplo, para que fuese aceptada la tesis de Galileo que expresa: un móvil pasa por todos los grados de velocidad. Él utilizó la siguiente analogía:

> Si se considera que una maza actúa con tanta mayor fuerza sobre una estaca cuanto mayor es la velocidad de la maza, hay que admitir que la misma maza puede tener un efecto y, en consecuencia, una velocidad tan pequeña como se quiera, a condición de dejarla caer desde una altura muy pequeña. La lentitud de su movimiento se comprobará por el hundimiento casi nulo de la estaca. De esta manera, Galileo hace concebible la idea de una velocidad muy débil,…En este caso, la velocidad se mide por el efecto producido: "Podremos conjeturar sin error cuánta es la velocidad de un grave que cae, por la cualidad y la cantidad del golpe" (De Gandt, 1999, p. 44)

Otro ejemplo de estos medios de representación es el siguiente, "Newton en sus primeros trabajos imagina dos desplazamientos sobre dos líneas horizontales paralelas y trata de expresar la relación entre las velocidades, a partir del conocimiento de los desplazamientos realizados en un tiempo igual…" (De Gandt, 1999, p. 59). Estos modelos evolucionaron, hasta que permitieron la manipulación de la velocidad y aceleración, situación que ha sobrevivido hasta los libros de texto actuales, en ellos se pueden encontrar representaciones auxiliares para explicar estas nociones, sin embargo parece haber un corte en estos dispositivos, es poco común encontrar representaciones intuitivas para darle sentido a nociones como tercera derivada o derivadas de orden mayor. Con este trabajo se comparte la siguiente idea, estudiar un medio de representación para extender el estudio de las derivadas de orden superior, en concreto, analizar las *formas* que se reflejan sobre la gráfica de una función en la región que su derivada de orden *n* es mayor o menor que cero y determinar sus propiedades.

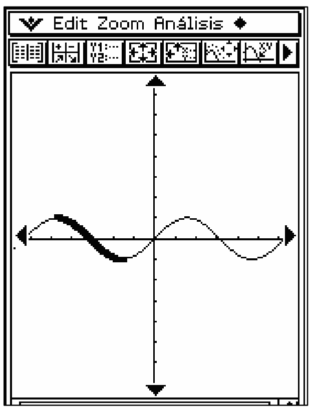


Figura 3. *Se considera la función* $f(x)=sen(x)$*, la región subrayada corresponde con un intervalo en el cual la tercera derivada* f *es mayor que cero.*

En este trabajo se comparte la idea de De Gandt: "Las bases intuitivas que hicieron posible construir el análisis se han vuelto superfluas lógicamente, pero siguen siendo un auxilio precioso y quizás indispensable. La enseñanza y la práctica de las matemáticas deberían permitir que se refinara y educara la intuición cinemática y geométrica, en lugar de rechazarla…" (De Gandt, 1999, p. 65).

En la actualidad hay diversas investigaciones de corte cognitivo que discuten la factibilidad de planteamientos en ese sentido, por ejemplo Fischebein (1987), discute acerca del papel de la intuición en los aprendizajes, y mucha de su reflexión se centra entorno a los conocimientos matemáticos:

> La intuición no es la principal fuente de conocimientos evidentes y verdaderos, pero parece serlo, porque éste es exactamente su papel: crear aparición de certeza, conferir a distintas interpretaciones o representaciones un carácter de certeza intrínseca e incuestionable (Fischbein, 1987, p. 12, nuestra traducción)
>
> […] Nosotros pensamos mejor con lo perceptible, con lo prácticamente manipulable, con lo familiar, con lo que se le puede controlar su comportamiento, con la validez implícita, que con lo abstracto, lo que no se puede representar, lo incierto, lo infinito (Fischbein, 1987, p. 122, nuestra traducción).

Este estudio implicará diversas investigaciones, en principio el esclarecimiento de las relaciones matemáticas entorno a las *formas gráficas*, las cuales se discuten más adelante en este documento (y que fueron discutidas en el taller), y posteriormente las concernientes a la Matemática Educativa, que se tienen contempladas para investigaciones futuras. Esta es una investigación en proceso, para acotar el estudio se decidió limitar la investigación a la función seno y extenderla hasta los polinomios, la discusión del taller giró entorno a los primeros resultados, las propiedades encontradas entre la función $sen(x)$ y sus respectivas derivadas. El motivo de elegir a la función seno para el inicio del estudio es porque es una función de variación acotada, situación que facilita el estudio a través de representaciones gráficas.

Explorando la función $f(x) = sen(x)$

El método seguido en este trabajo y en el taller fue la exploración gráfica y la reflexión algebraica, la primera se hacía con ayuda de un graficador en el que se trazaba la gráfica de la función $f(x)$ y su derivada del orden en estudio.

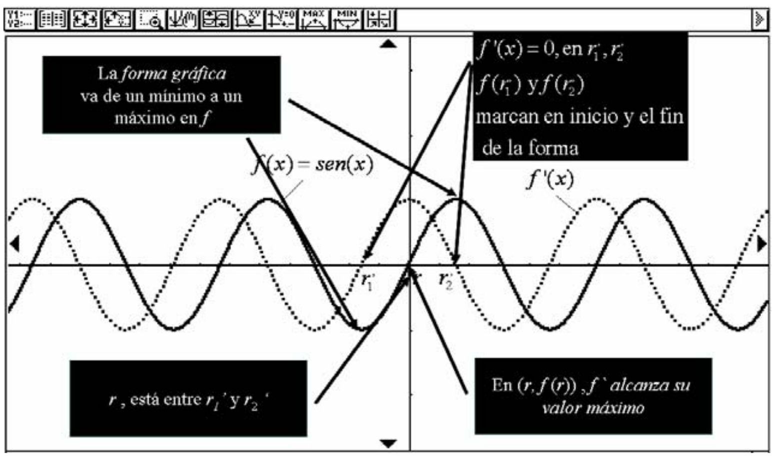
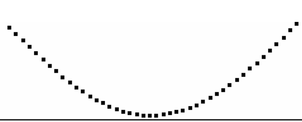
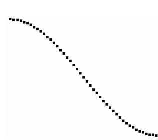
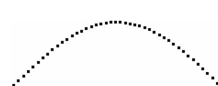


Figura 4. *En ella se muestra a la función f, a su primera derivada (f'), una de las regiones en la cual se cumple que* $f'(x) > 0$ *y se resaltan las propiedades entorno al comportamiento gráfico de f en tal región.*

En la siguiente tabla se concentran algunas de las propiedades encontradas al estudiar la segunda, tercera y cuarta derivada:

<table>
<tr><td colspan="3">Propiedad común en las formas gráficas para la 2ª, 3ª y 4ª derivada</td></tr>
<tr><td colspan="3">Un punto sobre f, entre más cerca esté de el punto mínimo de la forma gráfica o de su punto de inflexión (según sea el caso) tendrá mayor segunda derivada.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Formas gráficas para la 2ª, 3ª y 4ª derivada</td></tr>
<tr><td>Segunda derivada
</td><td>Tercera derivada
</td><td>Cuarta Derivada
</td></tr>
</table>

La *forma gráfica* va de un punto de inflexión a otro, donde f es cóncava hacia arriba.	La *forma gráfica* va de un punto máximo a un mínimo consecutivo.	La *forma gráfica* va de un punto de inflexión a otro, donde f es cóncava hacia abajo.

Una discusión detallada entorno a estas propiedades y su extensión a polinomios de raíces simples se está desarrollando actualmente.

Comentarios finales

Con base en el rastreo histórico de las ideas que dieron origen al concepto de derivada, se puede argumentar que un primer acercamiento al estudio del cálculo diferencial debería incluir un análisis de la variación del movimiento y quizá de otros fenómenos. Este análisis podría desarrollarse en un contexto numérico, porque la historia muestra que es la forma natural en que se desarrolló; y además el manejo de objetos aritméticos puede ser una base intuitiva que fomente el entendimiento de estos conceptos en los estudiantes.

Con respecto a las formas gráficas y sus propiedades, actualmente se estudia la posibilidad de incorporarlas como un medio para apreciar la derivada de orden superior y brindar nuevos significados a este concepto.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, J.G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 18, pp. 463-468). CLAME: México.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Holanda: Reidel.

De Gandt, F. (1999). Matemáticas y realidad física en el siglo XVII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton). (C. Bidón-Chanal, Trad.). En F. Guénard y G. Lelièvre (Eds.), *Pensar la Matemática* (pp. 41-68). Barcelona, España: Tusquets Editores.

Newton, I. (1687). *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Soc; Regiæ ac Typis J. Strater, Londini.

Newton, I. (1711). *Analysis per quantitum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis*. Ex officina Pærsoniana, Londini.

LOS PROCESOS DE CONVENCIÓN MATEMÁTICA CONSTITUYENTES EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA MATEMÁTICA DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO: EL CASO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES[•]

Gustavo Martínez Sierra
Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero, México
gmartinez@cimateuagro.org & gamartinezsierra@gmail.com
Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel educativo: Superior

Resumen

En investigaciones anteriores (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez-Sierra, 2002; Martínez-Sierra, 2003, 2005) se han presentado caracterizaciones de un proceso particular de construcción de conocimiento al que hemos llamado "convención matemática". Aquí presentamos nuestros avances más recientes que trabajan con la hipótesis de que tal proceso es parte constitutiva de la construcción social de la matemática de la variación y el cambio. El caso particular que aquí presentamos se refiere a los aspectos convencionales presentes en la construcción de las funciones elementales.

1. Introducción

De manera general, la presente investigación encuentra su marco de referencia en dos líneas de investigación: Aquella denominada desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998) y aquella que estudia los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento (Martínez-Sierra, 2005). La primera línea busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio y ha prestado parte de su atención al estudio de la construcción de la noción de función (Farfán, 1997; Farfán et al., 2000). Algunas de estas investigaciones elaboran explicaciones que dotan de particularidades a las funciones trascendentes, como lo son las funciones logarítmicas (Ferrari, 2001), exponenciales (Lezama, 2003; Martínez-Sierra, 2003) y trigonométricas (Buendía y Cordero, 2005; Montiel, 2005). La segunda línea de investigación tiene por objetivo estudiar un proceso particular de construcción de conocimiento: la convención matemática. En particular en este trabajo se busca identificar y caracterizar los procesos de convención matemática en la construcción de la matemática de la variación y el cambio (Martínez-Sierra, 2003, 2005) tomando especial atención en el concepto de función.

2. Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

Dentro de la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes circunstancias condicionan/determinan la construcción del conocimiento matemático en las personas: las cognitivas, las didácticas, las sociales y las epistemológicas. Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las

[•] Este trabajo es financiado por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero, Clave: GUE-2002-C0-7626 y por el Fondo Sectorial de Investigación para la educación SEP-CONACYT, Clave: SEP-2004-C01-46917.

epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales. Nuestro interés es el estudio sistémico de todas las circunstancias. La consideración anterior plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. La solución clásica a este problema es a través del establecimiento de *unidades de análisis*, cada una de las cuales retiene en forma simple las propiedades significativas de todo el sistema[1]. A nuestro parecer algunas nociones acuñadas en la perspectiva socioepistemológica tienen la característica de ser unidades de análisis para explorar el origen social del conocimiento. De entre ellas retomamos tres que aparecen fundamentales: *resignificación, práctica social y discurso matemático escolar*.

La noción de *resignificación* busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia[2] de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. En este marco explicativo es posible plantearse, por ejemplo, resignificar la derivada a través de la linealidad de los polinomios[3] (Rosado, 2004). La noción de *práctica social*, junto con la de *discurso matemático escolar*, son quizá la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. La construcción del conocimiento es producto de la actividad humana en su intento por transformar su realidad social o material y a su vez la actividad humana está *normada* por diferentes prácticas sociales y por el discurso matemático escolar. El concepto de "norma" lo utilizaremos según las aproximaciones sociológicas en la línea de (Durkheim, 1988; Gallino, 2001), en donde se entiende por norma [social] a una proposición – o también idea, representación colectiva que de todas maneras puede expresarse en una proposición- que prescribe a un individuo o a una colectividad el comportamiento más apropiado a que atenerse en una determinada situación. El aspecto normativo de las prácticas sociales es categóricamente preeminente sobre a los aspectos intencional y utilitario. En (Cantoral & Farfán, 2004, 141-142) la noción de práctica social mencionada es utilizada cuando se afirma: "Los juicios de valor, la búsqueda de convicciones y de consensos caracterizan todo proceso de construcción de conocimiento: en este sentido es que nosotros hablaremos de construcción social del conocimiento".

3. La noción de convención matemática cómo practica social de integración sistémica de conocimientos

En el plano de la construcción del conocimiento matemático, utilizamos la acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las

[1] Hemos tomado ésta caracterización de unidad de análisis de Vigotsky (1996), cuando establece, para su explicación de las relaciones entre pensamiento y lenguaje, como tal a la "significación de la palabra".
[2] En si misma esta es idea a-social, debido a que se considera al conocimiento como independiente del ser humano.
[3] En el contexto gráfico-analítico se tiene que la parte lineal de un polinomio $P(x)$ es la recta tangente a su grafica en el punto $(0, P(0))$.

matemáticas (evitar contradicciones o dar unidad, por ejemplo). Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo del concepto de exponente no natural muestra la presencia de una manera común de generar significados, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar (Martínez-Sierra, 2003) a lo largo de la historia de las ideas entre los siglos XIV y XVIII. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos)*.

En el sentido anterior entonces, un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la *práctica de integración sistémica de los conocimientos*; es decir existe una *normativa de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes.

Esencialmente, la búsqueda de integración puede resolverse optando por alguna de las siguientes vertientes: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Así vista la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

Tomemos por ejemplo el caso de los exponentes para aclarar a que nos referimos con “convenir matemáticamente”. Partamos del supuesto que queremos darle un significado al símbolo $2^{1/2}$. La multiplicación reiterada no puede ser utilizada para ello, por lo que buscamos otro camino. ¿Qué significado tomar? Si retomamos la operatividad de las potencias de la misma base podemos postular que sería conveniente que $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ por lo que tenemos que “convenir” que $2^{1/2}=\sqrt{2}$. Lo anterior también muestra que la igualdad $2^{1/2}=\sqrt{2}$ *no se puede demostrar sino se debe convenir.*

4. Procesos de convención matemática en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio

En términos generales nuestra línea de investigación descansa en dos hipótesis:

- **H1**: La naturaleza y significados de algunos contenidos matemáticos, presentes en diversos corpus de conocimiento pueden ser explicados a través del proceso de convención matemática.
- **H2**: El manejo escolar de tales contenidos provoca la existencia de fenómenos didácticos explicables, precisamente, en términos del proceso de convención matemática.

Los ejemplos que siguen muestran algunos de los aspectos convencionales presentes en la construcción del concepto de función.

4.1. Aspectos convencionales presentes en el orden y operatividad de los números

Orden: ¿Por qué -3>-4?

- 4>3
- Se desea que la relación de orden de los números se cumpla cuando se resta en cada miembro de la relación.
- 4-7>3-7
- Entonces se debe convenir que -3>-4

Operatividad: ¿Por qué -3(-2)=6?

- $y = 15\text{-}2(x)$
- Evaluando construimos una tabla para tomando $x = 1,2,3,4,5$

x	1	2	3	4	5
y	13	11	9	7	5

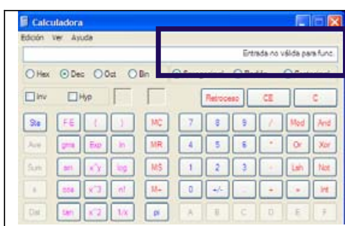
- Notando que Δx=1 y Δy=2, es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	19	17	15	13	11

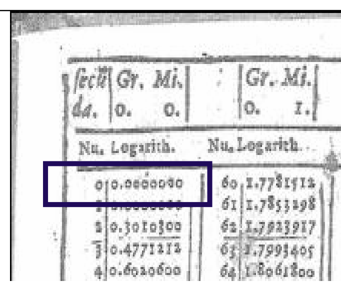
- Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos: 19 = 15 -2(-3) $\Rightarrow$ -3(-2)=6.
- Para que la variación se conserve es necesario convenir que -3(-2)=6.

4.2. Aspectos convencionales presentes en la función exponencial y logaritmo

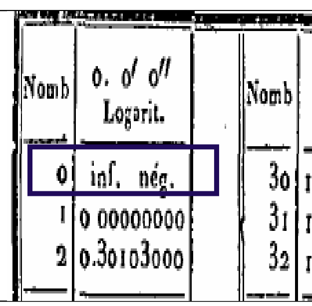
En términos modernos no está definido $\log(0)$; pero el aspecto convencional de su indeterminación puede ser observado en la siguiente tabla; que muestra como en un sistema de conocimientos fue posible afirmar que $\log(0) = 0$ y en otro $\log(0) = \text{inf. neg.}$



Una calculadora moderna



Tabula logarítmica (Zaragoza, 1672)



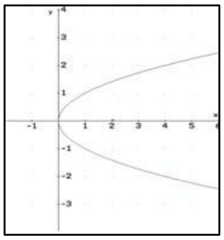
Tables de logarithmes (La Lande, 1841)

En cuanto a la función exponencial en otros escritos (Martínez-Sierra, 2002, 2003, 2005) hemos argumentado que el significado de los exponentes no naturales son construidos a través del proceso de construcción de conocimiento.

4.3. Aspectos convencionales presentes en la función raíz *n*-ésima.

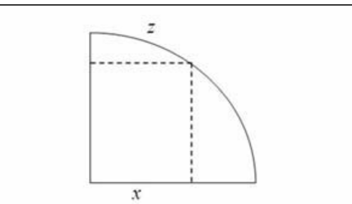
Tomamos la función raíz cuadrada como prototipo de la función raíz *n*-ésima. De acuerdo a las tradiciones escolares respecto a la raíz cuadrada (Colín, 2006) es común afirmar que la raíz cuadrada es bi-valuada en el contexto numérico y algebraico. Sin embargo la convención escolar presente en la función raíz cuadrada es considerar que el operador raíz cuadrada produce un "valor principal" positivo; es decir que el operador es univaluado, de está manera la expresión $\sqrt{x}$ puede interpretarse como función.

Un estudio realizado recientemente (Colín, 2006) se han dado evidencias sobre las disfunciones del discurso matemático escolar referente al aspecto bi-valuado de la raíz cuadrada y sus diferentes significados en los contextos aritmético, algebraico y funcional. La huella de tales disfunciones se presenta en algunas de las concepciones de estudiantes que establecen que la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ es:



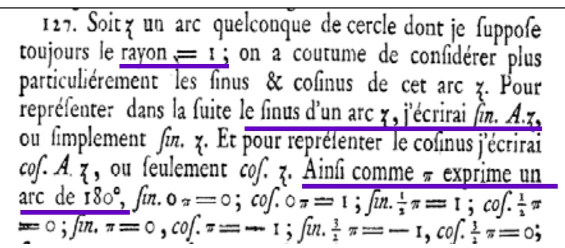
4.4. Aspectos convencionales presentes en las funciones trigonométricas

En el discurso matemático escolar moderno el argumento de las funciones trigonométricas son ángulos. En particular las funciones trigonométricas de varible real son justificadas a través del uso de medida angular del "radián". El aspecto convencional de la toma del radian como unidad de medida se muestra en el hecho de que antaño el argumento de las funciones trigonométricas eran las longitudes de los arcos; tal y como se muestra en lo siguiente.



$$x = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} - \frac{z^{10}}{3628800}$$

(Newton, 1669)



127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je suppose toujours le rayon = 1; on a coutume de considérer plus particuliérement les sinus & cosinus de cet arc z. Pour représenter dans la suite le sinus d'un arc z, j'écrirai *sin. A.z*, ou simplement *sin. z*. Et pour représenter le cosinus j'écrirai *cos. A. z*, ou seulement *cos. z*. Ainsi comme π exprime un arc de 180°, $sin. 0\pi = 0$; $cos. 0\pi = 1$; $sin. \frac{1}{2}\pi = 1$; $cos. \frac{1}{2}\pi = 0$; $sin. \pi = 0$, $cos. \pi = -1$; $sin. \frac{3}{2}\pi = -1$, $cos. \frac{3}{2}\pi = 0$;

Euler (1845/1738)

Conclusión

En este escrito se ha proporcionado una articulación de la noción de convención matemática, en tanto proceso de construcción de conocimiento, con la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Se ha explicado el origen de este proceso a través de la práctica social de integración sistémica de conocimientos. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir y explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. En particular se han presentado ejemplos que dan evidencias del funcionamiento del proceso como constituyente en la construcción de las funciones elementales.

Bibliografía

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics,* 59(2).

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction : logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2.3), 137 - 168.

Colín, M. P. (2005). *De la aritmética al Cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada*. Tesis de Maestría. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Durkheim, E. (1988). *Las reglas del método sociológico y otros escritos sobre filosofía de las ciencias sociales"* [1895 y 1896-1917]. Madrid: Alianza Editorial.

Euler, L. (1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Farfán, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M.; Martínez, G. & Ferrari, M. (2000). Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades (Cap. 7, pp. 89-145). En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, et al. (2000) *Desarrollo de Pensamiento Matemático*. ITESM- Universidad Virtual. México: Editorial Trillas.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14*. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I*. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Gallino, L. (2001). *Diccionario de sociología*. México: Siglo XXI Editores.

La Lande, J. (1841). *Tables de logarithmes*. Paris: Bachelier.

Lezama, J. (2003). *Estudio de la reproducibilidad*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)* (pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(2).

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidaddel polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Zaragoza, J. (1672). *Tabula logarítmica*. Matriti : Apud Bernardum a Villa Diego.

APRENDIZAJE DE HABILIDADES SOCIALES DESDE LA MATEMATICA

Lilian Cadoche ; Sonia Pastorelli
Universidad Nacional del Litoral. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
lcadoche@fcv.unl.edu.ar; spastorelli@frsf.utn.edu.ar

Campo de Investigación: Aprendizaje cooperativo. Nivel educativo: Superior

Resumen

Procurar la formación de recursos humanos capaces de promover el bienestar general y asegurar el desarrollo social es un imperativo de la educación del nuevo milenio. Un grupo de investigadores en Educación Matemática trabajamos en una propuesta de Aprendizaje Cooperativo que apuesta por esta concepción integral de la educación. La información obtenida nos lleva a postular que la estructura del aprendizaje cooperativo resulta valiosa para el logro de mejoras tanto en lo intelectual como en lo social y/o afectivo.

Introducción

En carreras universitarias de perfil social, no matemático, ¿qué ocurre con las actitudes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática?: el problema es serio, los alumnos resisten la materia por varios motivos pero que se sustentan en la creencia generalizada que no la necesitarán para su futuro profesional.

Las actitudes que se perciben son de desinterés, apatía, poca o nula participación en clase, desagrado, ansiedad, poco compromiso con las tareas a desarrollar, etc.

Esta mala predisposición para el aprendizaje, resulta en un bajo rendimiento y un alto número de fracasos. Más aún, los aprendizajes resultan frágiles, poco perdurables, y a la hora de dar cuenta de los conocimientos adquiridos, la resistencia ofrecida, se manifiesta en la imposibilidad de aplicar estos conocimientos en las disciplinas que lo demandan.

Frente a esta actitud negativa ¿qué pueden hacer los docentes para estimular el aprendizaje y motivar el estudio?. ¿Es posible que un propuesta didáctica diferente, rompa con los preconceptos, y posibilite el cambio de actitud?. ¿Puede la metodología empleada para el desarrollo de la clase influir en el compromiso del alumno con la propuesta, estimulando su interés, participación y agrado por la tarea emprendida?.

Desarrollo de la propuesta

La investigación que presentamos se propuso como objetivo estudiar los efectos que produce en las actitudes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, el planteamiento de una forma diferente de intervención en el aula. En particular se realizó un estudio sobre alumnos de primer año de Ciencias Veterinarias de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina).

En primer lugar se analizaron las distintas conceptualizaciones del término ACTITUD para hallar la que mejor se adapte al ámbito de la educación matemática. Seguidamente se planteó la experiencia, la metodología a utilizar y los instrumentos necesarios para analizar los resultados.

Concepto de actitud

De las numerosas definiciones halladas, se convino en aceptar que entenderemos que la **actitud** ***es una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina***

las intenciones personales e influye en el comportamiento (Hernández, y Gomez Chacón, 1997).
Las actitudes constan, por tanto, de un componente cognitivo, que se manifiesta en las creencias subyacentes; otro afectivo, que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo; y un componente intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento.

Objetivo

La finalidad del estudio es investigar los efectos que se producen en las actitudes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, el desarrollo de un módulo de aprendizaje en el que se propone fomentar la resolución de problemas de forma cooperativa, reforzando la reflexión en el propio proceso de pensamiento.

Planteamiento de la intervención

Marco de referencia: Las investigaciones llevadas a cabo ponen de manifiesto que las actitudes de los alumnos hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática están muy influenciadas por tres factores: la naturaleza misma de la disciplina Matemática; las características individuales: motivación, confianza, agrado, intereses, ansiedad, etc. y el método del profesor (Mohd Yusof ,1994)
Esta propuesta para trabajo en el aula, se planteó a través de clases de resolución de problemas, cuyo enfoque, diseño y desarrollo de las actividades trató de incidir sobre algunos de los factores configuradores de las actitudes de los alumnos.
En la propuesta de trabajo cooperativo, se intenta que los alumnos perciban que forman parte de un equipo y que tienen una meta común, procurando que los miembros del grupo se den cuenta que sus éxitos o fracasos serán compartidos por todos.

Metodología

La mayoría de los investigadores coinciden en considerar cinco elementos básicos necesarios para llevar a la práctica el aprendizaje cooperativo. Son los siguientes: *interdependencia positiva, interacción cara a cara, responsabilidad individual y de grupo, aprendizaje de habilidades sociales y revisión del proceso del grupo.*
El dominio de la práctica del aprendizaje cooperativo se logra aprendiendo cómo estructurar estos cinco componentes dentro del aula (Johnson y Johnson, 1994 y 1999).
Comentamos brevemente a continuación como estructuramos la tarea, en la experiencia realizada, para el alcance de estos componentes:
La interdependencia positiva constituye el núcleo del aprendizaje cooperativo. La misma está asegurada cuando todos los miembros del grupo son conscientes de que no pueden alcanzar el éxito a menos que también lo alcancen sus compañeros. Enfatizamos que el trabajo individual afectaría el éxito o fracaso de todo el grupo, provocando esa doble responsabilidad: individual y grupal (Escamez, J. y Ortega, P, 1986)
La interdependencia positiva juega un papel importante en los conflictos cognitivos. Cuanto mayor sea, con más seguridad se producirá el conflicto intelectual, es por ello que tratamos de que los grupos se involucren en discusiones en las que cada uno vertiera sus puntos de vista, sus diferentes posturas, sus opiniones, procesos de pensamiento, etc.
La experiencia mostró que cuando el conflicto se resuelve constructivamente, desemboca en un cuestionamiento de las posturas de cada persona, en una búsqueda activa de información, en una reconceptualización del conocimiento y, en consecuencia,

aumenta el dominio y la retención de la materia discutida y se observa un nivel mayor de estrategias de razonamiento.
Para poder trabajar cooperativamente es necesario ***la interacción cara a cara*** con las demás personas del grupo, a fin de completar las tareas y contribuir con el esfuerzo propio al esfuerzo de los demás. Esta interacción se caracteriza por el empeño que pone cada persona para que las demás alcancen la meta prevista.
Los docentes estimularon a los grupos de trabajo para que se expliquen unos a otros sus mecanismos de razonamiento, sus deducciones, etc. , haciendo hincapié en la idea de que todos eran necesarios y valiosos para la consecución de sus metas.
Para el alcance de la ***responsabilidad individual y de grupo***, remarcamos que trabajar en grupo no puede significar que los integrantes diluyan la responsabilidad de su propio aprendizaje en el grupo. El grupo debe ser una plataforma que les facilite la construcción de su aprendizaje, del que son los únicos responsables. Se insistió en afirmar que la idea era "aprender juntos para poder actuar después individualmente".
Para facilitar esta doble responsabilidad, se organizaron 9 grupos de 4 alumnos cada uno, y cada grupo tuvo un tutor (docente) que observó la participación individual y grupal de cada estudiante, llevando un registro de esta actividad mediante una planilla elaborada para este objetivo. Los resultados mostraron que en todos los grupos los alumnos fueron solidarios, algunos alumnos resultaron más persuasivos a la hora de imponer sus opiniones que otros pero en los informes finales todos los jóvenes participantes de la experiencia demostraron cualidades valorables de generosidad, consideración y voluntad de apoyo y superación.

El aprendizaje cooperativo es intrínsecamente más complejo que el aprendizaje competitivo o individual porque los estudiantes tienen que comprometerse simultáneamente con la tarea asignada (aprender la materia) y con el trabajo en equipo (funcionando eficazmente como integrante de un grupo). Para esto fue preciso estimular el *desarrollo de habilidades sociales* que garanticen un trabajo cooperativo eficaz.
En la experiencia desarrollada, se alcanzó a observar en los alumnos evolución en la capacidad de decisión, autoestima, habilidad para la resolución de conflictos, autoconfianza etc., preparando el camino para que pueda aprender no solo Matemática sino cualquier disciplina .
El quinto elemento básico del aprendizaje cooperativo es la *revisión del proceso* del grupo. En esta etapa los alumnos identificaron por sí mismos sus debilidades y fortalezas, descubriendo qué acciones resultaron útiles y cuáles había que cambiar para ser más eficaces.
La revisión de la tarea realizada permitió en esta ocasión analizar permanentemente el proceso de aprendizaje, observándose una progresiva mejora tanto en las capacidades cognitivas y de retención de conceptos y métodos como en las afectivas y actitudinales.

Trabajo realizado

Para el logro de la interdependencia positiva y estimular la interacción, se ofreció a los alumnos un material de trabajo autosuficiente, con consignas claras, generador de actividad, motivante y riguroso.
Se insistió para que los alumnos lean detenidamente cada ítem, busquen en el material la información que necesitaban, discutiendo y reflexionando en grupo.
El tema elegido fue: FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA , tema muy importante en una carrera de perfil biológico que, a pesar de su sencillez, presenta serias dificultades para su comprensión y valoración por parte de los alumnos.

Esquemáticamente, se evaluaron inicialmente las actitudes del grupo antes del desarrollo del módulo de aprendizaje programado. Luego se desarrolló el trabajo cooperativo, para posteriormente realizar una nueva evaluación de las actitudes a posteriori de esta experiencia.

Actitudes a priori

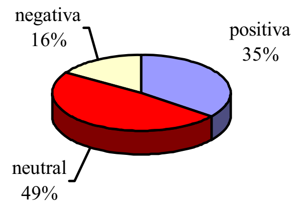
Para la medición de las actitudes se confeccionaron escalas, de tipo Likert (1932), de puntuaciones sumadas. Para la escala de actitudes a priori, se realizaron entrevistas al grupo de alumnos con el objeto de conocer la forma y lenguaje con la que se comunican, sus percepciones respecto de la Matemática, etc. Contrastando esta información con datos obtenidos de distintos autores que han elaborado escalas, redactamos la nuestra, valorando su confiabilidad y validez.
La confiabilidad se analizó aplicando la escala en distintos grupos de alumnos (de Ciencias Veterinarias, Ciencias. Agrarias de la UNL y Licenciatura en Administración Rural de la UTN). Estas replicaciones permitieron calcular un coeficiente de Cronbach de valor $\alpha = 0.92$, que indica una alta consistencia interna y confiabilidad.
La validez del instrumento se verificó contrastando reportes bibliográficos, entrevistas informales a los encuestados, registros observacionales, etc. que permitieron verificar que los datos arrojados por la escala son similares a los obtenidos.

Escala de actitudes hacia la enseñanza y aprendizaje de matemática (A priori)

Esta escala pretende conocer tus actitudes hacia la matemática. No persigue otro objetivo que el de mejorar nuestro trabajo. Te rogamos contestes con confianza, señalando con una cruz tu opinión. Las opciones posibles son: 1: totalmente en desacuerdo;2:en desacuerdo;3:neutral;4:de acuerdo;5:totalmente de acuerdo.

1. Considero que la matemática es una materia necesaria en mi carrera
2. La matemática no me gusta porque los profesores la enseñan mal
3. No me asusta pensar que tendré que estudiar Matemática
4. Estudiar matemática me resulta entretenido
5. La matemática es poco práctica para que pueda servirme de algo
6. Me gustaría tener más horas de Matemática
7. Siempre me intimido ante un problema de Matemática
8. Tengo confianza en que aprenderé bien Matemática
9. La matemática puede ser útil para otras carreras pero no para la mía
10. Creo que no aprenderé matemática por más que lo intente
11. Si tuviera la oportunidad estudiaría más Matemática
12. Aprender matemática puede ayudarme para otras materias de mi carrera
13. Espero no tener que usar mucha matemática en mi carrera
14. Yo no estudiaría matemática si no estuviera obligado a hacerlo
15. Sería muy bueno que en otras materias se necesite de la Matemática
16. Me gusta estudiar matemática
17. Considero que saber matemática incrementará mis posibilidades laborales
18. Me siento incómodo y nervioso en las clases de matemática
19. Me siento tranquilo porque siempre entendí matemática
20. Estudiar matemática es aburrido

Distribución porcentual de las Actitudes Previas



Trabajo Cooperativo

Se desarrollaron las clases especiales, basadas en un enfoque de trabajo cooperativo.
El esquema de trabajo consistió, en la presentación por parte del docente de las tareas a realizar en una breve introducción.
A continuación los alumnos se reunieron en grupos para tratar de resolver los problemas, buscando juntos estrategias, formulando conjeturas, comprobando, etc.
A cada grupo se le entregó el material de trabajo dividido en secciones para que cada integrante del equipo tuviera una parte que compartir con los otros.

Aplicaciones de las funciones exponenciales

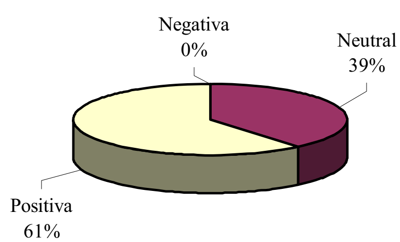
Las funciones exponenciales tienen importantes aplicaciones en el estudio de los *procesos de crecimiento* y en los *procesos de deterioro o decaimiento*. Entre los ejemplos de procesos del primer tipo podemos señalar: crecimiento poblacionales, valuación de activos, inflación, crecimiento de la tasa de uso de determinados recursos (energía, por ejemplo), crecimiento del producto bruto nacional, etc. Como ejemplo de los procesos de decaimiento podemos mencionar: decrecimiento del valor de ciertos activos (como maquinarias), disminución de la incidencia de ciertas enfermedades a medida que se perfeccionan la tecnología y la investigación en medicina, la disminución del poder adquisitivo de los consumidores, el deterioro de la eficiencia de una máquina conforme envejece, los procesos de declinación o decaimiento de sustancias radiactivas con el paso del tiempo, etc.
Cuando un proceso de crecimiento (decrecimiento) se caracteriza por un incremento (disminución) porcentual constante se le da el nombre de ***proceso de crecimiento (decrecimiento) exponencial***.
En la última fase de la experiencia, cada grupo expuso sus dificultades, logros, tareas asignadas, y presentó el resultado de su trabajo.
Los alumnos trabajaron con entusiasmo y dedicación, alentándose mutuamente, en un clima de distensión que favoreció el intercambio de ideas y la participación de todos.
Para la medición de las actitudes a posteriori, se confeccionó una escala con ítems similares a los de la escala previa pero orientados hacia el tema objeto del trabajo.

Escala de actitudes hacia el tema: *funciones exponenciales y logarítmicas*

1. Considero muy útil este tema
2. Trabajar en este tema no me gusta en lo absoluto
3. El tema no se dio bien
4. Este tema me pareció entretenido
5. No me asusta pensar que tendré que trabajar en este tema
6. El tema me pareció demasiado teórico como para que pueda servirme de algo

7. Quiero tener más información sobre este tema
8. Este tema me intimida más que otros
9. Tengo confianza en que podré resolver bien los problemas de este tema
10. Este tema es divertido
11. Este tema puede ser útil para otros pero no para mí
12. Entender bien este tema puede ayudarme a entender otros temas interesantes
13. Cuando terminó la clase sentí que no sería capaz de resolver ningún problema de este tema
14. Me siento tranquilo porque entendí el tema
15. El tema es interesante y motivador
16. Espero no tener que usar mucho este tema más adelante
17. No deberíamos perder tiempo en temas como estos, hay otros temas que son más importantes
18. Me pone nervioso pensar que tendré que estudiar este tema
19. No me molesta estudiar estos temas
20. Sería muy bueno que en otras materias se necesite trabajar con este tema
21. Creo que estudiar temas de este tipo es muy importante para mis próximos estudios
22. Este tema es muy poco interesante

Distribución porcentual de las actitudes a posteriori



Algunas conclusiones

- El trabajo cooperativo favorece mejores aprendizajes tanto en lo cognitivo como en lo afectivo y/o actitudinal
- Las estrategias de aprendizaje cooperativo permiten evaluar el aprendizaje de habilidades sociales
- Pueden desarrollarse experiencias de trabajo cooperativo en el ámbito universitario
- Puede estimularse el estudio de la Matemática en carreras no Matemáticas modificando la metodología de trabajo en el aula
- Pueden producirse cambios en las actitudes de los alumnos modificando la propuesta de intervención en el aula

Bibliografía

Escamez, J. ; Ortega, P (1986): "La enseñanza de actitudes y valores"- España . Edit. Nau .

Hernandez , R. ; Gomez Chacon, I (1997): "Las actitudes en educación matemática: Estrategias para el cambio". Revista UNO nº 13 España .Editorial Graó.

Johnson, D.; Johnson, R.; Holubec, E. (1999): "El aprendizaje cooperativo en el aula".

Bs Aires. Ed. Paidós

Johnson, D.W.; Johnson, R. (1994): "Learning together and alone: Cooperation, competition and individualization". (4[a] ed). Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.

Likert, J. (1932) : "Technique of Attitudes Scale Construction". Nueva York. Appleton Century Crofts. Inc.

Mohd Yusof, Y. (1994) : "Changing attitudes to mathematics through problem solving" en J.P. Da Ponte; J.F. Matos (eds.) : Proceeding of 18 Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) , Lisboa. vol 1.

PROPOSICIONES DE EUCLIDES: PROBLEMA-DEMOSTRACIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA ANTROPOLÓGICA

Rechimont, E.- Ferreyra, N.- Parodi, C.- Andrada, N.- Scarímbolo, M.
Universidad Nacional de La Pampa. Argentina
rechimont@exactas.unlpam.edu.ar – parodic@ing.unlpam.edu.ar
Campo de Investigaciones: Resolución de problemas. Nivel Educativo: Medio y Superior
Metodología de Investigación: Cualitativa

RESUMEN

Se realiza este trabajo en el marco de una investigación acerca de la Resolución de Problemas como herramienta de aprendizaje de la matemática.
Proclo, matemático griego, en su *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides,* dice que a pesar de que Euclides indica la diferencia entre problema y teorema con las palabras "lo que hay que hacer" o "lo que hay que mostrar", respectivamente, las proposiciones de los Elementos que son problemas contienen demostraciones que fundamentan y justifican su resolución y no son para mostrar la naturaleza de lo que se ha investigado. En este trabajo se analizan desde una perspectiva antropológica dos de las proposiciones de Euclides para determinar la conveniencia o no de su presentación a los alumnos del Profesorado en Matemática.

Marco Teórico

Como docentes del Profesorado en Matemática y Profesorado de EGB 1ro y 2do Ciclos, observamos, en los alumnos de los primeros años de la UNLPam, dificultades en el aprendizaje de algunos temas de matemática y en particular en los procesos de argumentación, justificación o fundamentación de conceptos presentes en la solución de alguna situación-problema. Por otro lado, existen investigaciones que aportan elementos a la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas y la demostración y confirman el bajo nivel de los alumnos en la resolución de problemas y la comprensión y elaboración de demostraciones.
Por ello es de fundamental importancia lograr que los estudiantes se sientan comprometidos en actividades con sentido, que puedan conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas previamente probadas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Se cree que la resolución de problemas es la actividad indicada para ello.
Sucesivas reformas curriculares del Sistema Educativo de la Argentina, ponen el énfasis en la Resolución de Problemas.
La Matemática se ha construido como respuesta a preguntas que se han traducido en problemas.
Las propuestas curriculares de matemática para los niveles de EGB y Educación Polimodal de la República Argentina hacen referencia a la Resolución de Problemas como *"la forma privilegiada para la construcción de los conocimientos matemáticos"*.
En cuanto a los Contenidos Básicos para la Educación Polimodal (1997) también están presentes consideraciones acerca de la Resolución de Problemas. En las Expectativas de Logro se manifiesta: *"Al finalizar la Educación Polimodal, los estudiantes estarán en condiciones de: Resolver Problemas seleccionando y/o generando estrategias, juzgar la validez de razonamientos y resultados y utilizar el vocabulario y la notación adecuados en la comunicación de los saberes"*.

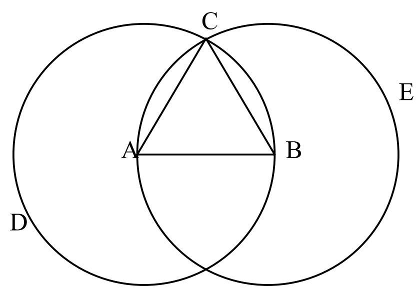
Chevallard, en su Teoría Antropológica de lo Didáctico, considera la actividad matemática como una actividad humana e incorpora las nociones de tarea, técnica, tecnología, teoría. Considera como conceptos fundamentales: los objetos, los sujetos, las instituciones y la relación personal e institucional a un objeto.
Las tareas son consideradas como ciertas acciones con una intención determinada y la institución las reconoce como lo que los sujetos de la institución debieran hacer. La tarea puede ser rutinaria o problemática. Se la considera rutinaria cuando su realización no plantea problemas y problemática cuando su realización implica cierto tipo de dificultades. Cuando una *tarea* resulta rutinaria la persona que debe realizarla posee y domina una determinada forma de hacer que se llama *técnica.*
La ejecución de una determinada tarea supone la puesta en práctica de una determinada técnica que tiene un alcance limitado y es adecuada sólo a un determinado tipo de tarea.
La permanencia de una técnica en una institución supone la existencia de un discurso sobre las técnicas que asegure su justificación y su control, llamado *tecnología*. La tecnología justifica la técnica, pero existe una justificación de esta justificación. Esto es, una tecnología de la tecnología, que es la *teoría* de la técnica.
La respuesta matemática a un conjunto de cuestiones o tareas problemáticas se resume en un conjunto organizado de objetos relacionados entre si que constituyen una *obra matemática.* Está formada por elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. Una obra matemática es un conjunto organizado de objetos ligados entre si por diversas interrelaciones.
La actividad matemática presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática o "praxis" que está constituida de tareas y técnicas, y el discurso razonado o "logos" sobre la práctica que consta de tecnologías y teorías. La práctica matemática es inseparable del discurso razonado y su unión en la actividad matemática constituye la *organización o praxeología matemática*.
La praxeología matemática, entonces, consta de un tipo de problemas determinado, una o más técnicas, la tecnología asociada y la teoría correspondiente. La praxeología es una componente de la obra matemática.
En la matemática griega los problemas están asociados a la propuesta de hacer o construir algo y se lo diferencia de otros enunciados matemáticos que son los teoremas.
En los *Elementos* de Euclides, se diferencian claramente los problemas de los teoremas. Los problemas terminan, en su desarrollo, con la palabra “lo que había que hacer” y los teoremas con “lo que había que demostrar”.
Proclo, matemático griego en su *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides,* pone como ejemplo de problema *“construir un triángulo equilátero sobre una recta dada”* y dice que es un problema porque sobre una recta también se puede construir un triángulo que no sea equilátero.
Los teoremas son así y eso es lo que hay que mostrar. Al respecto dice Proclo *“si pedimos inscribir un ángulo recto en un semicírculo, formulando la petición como problema, la consideraremos extraña a la geometría porque todo ángulo inscripto en un semicírculo es recto”*. En este caso no hay nada que crear ya que toda vez que se dibuje un ángulo inscripto en un semicírculo será recto sin que haya que hacer nada para lograrlo.
Señala Proclo que a pesar que Euclides indica la diferencia entre problema y teorema con las palabras “lo que había que hacer” o “lo que hay que mostrar”, las proposiciones de los Elementos que son problemas contienen demostraciones que sirven para fundamentan y justifican las construcciones del problema y no para mostrar la naturaleza de lo que se ha investigado.

Según Puig, L (1996) "… *que en los problemas de matemática hay que hacer algo con los objetos matemáticos que aparecen en ellos, una construcción con figuras, un cálculo con números, etc, y que el procedimiento con que ese algo finalmente se obtenga ha de probarse mediante una argumentación, cuyas reglas están establecidas por un marco discursivo determinado, propio de una práctica matemática concreta".*

Las Proposiciones de Euclides

Algunas de las proposiciones de Euclides, concebidas como problemas y tal que su resolución contiene una demostración, son analizadas según la Teoría Antropológica de lo Didáctico, con lo cual se pretende mostrar la conveniencia de proponer este tipo de análisis a los alumnos del Profesorado en Matemática, por la riqueza de conceptos matemáticos que pueden exhibirse debido a la necesidad de justificar su uso.
Se transcriben a continuación las Proposiciones 1 y 2 como así también la resolución realizada por Euclides y comentadas por Emanuel S. Cabrera (1949).

Proposición 1: *Sobre una recta finita (segmento) construir un triángulo equilátero.*
[Datos] *Sea AB la recta finita dada.*
[Incógnita] *Se pide construir un triángulo equilátero sobre la línea recta AB.*
[Construcción] *Con centro en A y distancia AB se describe el círculo (circunferencia) BCD* (Postulado III); *y nuevamente, con centro B y distancia BA se describe el círculo ACE* (Postulado III);
y desde el punto C, en que los círculos [circunferencias] se cortan entre sí, se trazan las rectas CA y CB que lo unen a los puntos A y B (Postulado I).



Y puesto que el punto A es el centro del círculo CBD, es AC igual a AB [Definición 15].
Por otra parte, desde que el punto B es el centro del círculo CAE, es BC igual a BA (Definición 15).
Pero se ha demostrado, que CA es igual a AB; entonces cada una de las líneas rectas CA, CB son iguales a AB.
Y como cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí, [Axioma 1], *entonces CA es igual a CB.*
Luego las tres líneas rectas CA, AB, BC son iguales entre sí.
Y por lo tanto el triángulo ABC es equilátero; y ha sido construido sobre la línea recta finita dada AB. L.C.Q.H (lo cual queríamos hacer)

Comentarios

Euclides, hace referencia a Postulados III, Postulado I, Definición 15 y Axioma 1 para justificar los procedimientos que considera en la Construcción:
Postulado I: *Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta.*
Postulado III: *Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier distancia* [*como radio*].

Definición 15: *Círculo es una figura plana comprendida por una sola línea tal que todas las rectas* [*segmentos*] *conducidas de un punto entre aquellos que están en el interior de la figura son iguales entre sí.*
Axioma 1: *Cosas* [o entes] *iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.*

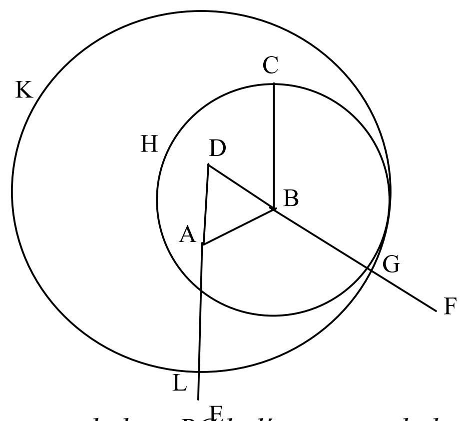
Análisis desde la teoría antropológica

Teniendo en cuenta la Teoría Antropológica de lo Didáctico se distinguen, en la Construcción, las instancias correspondientes a las tareas y técnicas y las tecnologías y teorías asociadas y las relaciones entre ellas como elementos de una organización matemática.
La Proposición 1 propone: C*onstruir un triángulo equilátero sobre la línea recta AB*.
Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica se puede considerar que se propone una actividad no resoluble inmediatamente, es decir es una tarea problemática. Se pretende convertir esta tarea problemática en tarea rutinaria, es decir en tarea realizable con éxito. Para ello se ha encontrado una manera de hacer, de poder arribar a la solución de la propuesta. Esta manera de hacer, de construir el triángulo pedido, es la técnica.
La determinación del punto C, tercer vértice del triángulo pedido, como intersección de dos circunferencias es la técnica que permite realizar la tarea de una manera sistemática y segura: *Con centro en A y distancia AB se describe el círculo (circunferencia) BCD* (Postulado III); *y nuevamente, con centro B y distancia BA se describe el círculo ACE* (Postulado III); *y desde el punto C, en que los círculos [circunferencias] se cortan entre sí, se trazan las rectas CA y CB que lo unen a los puntos A y B* (Postulado I).
La técnica asociada a la tarea pone de manifiesto la existencia de un discurso interpretativo y justificado de la misma y de su ámbito de aplicabilidad o validez. Este discurso recibe el nombre de tecnología.
La tecnología asociada a esta técnica y que la justifica, es el Postulado de Continuidad. El Postulado de Continuidad se encuentra implícito en el desarrollo de la construcción, pero no se menciona explícitamente. Según Emanuel Cabrera, este postulado se enunciaría diciendo *"Dos circunferencias iguales en las que el centro de una es un punto de la otra, se cortan en dos puntos solamente"*.
La técnica considerada pone de manifiesto nuevas tareas:

1. *Trazar el segmento AB.*
2. *Trazar las dos circunferencias, cada una de ellas centrada en un extremo del segmento dado.*
3. *Determina la igualdad de l os segmentos lados del triángulo.*

La técnica asociada a tarea 1, es el trazado con regla y compás de un segmento y la tecnología que sustenta a la técnica es el Postulado I*: Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta*.
La técnica asociada a la tarea 2 es la técnica de los lugares geométricos. Esta técnica está justificada por el Postulado III*: Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier distancia [como radio]*, con lo que este Postulado se convierte en la tecnología asociada.
Actualmente podemos decir que esta tecnología subyacente, consiste en definir la circunferencia como lugar geométrico de la siguiente manera: *El conjunto de puntos del plano a igual distancia d de un punto A es la circunferencia de centro A y radio d.*
Respecto de la tarea 3, la técnica consiste en considerar los segmentos lados como radios de un círculo, la comparación de dichos segmentos dos a dos. La tecnología que fundamenta este procedimiento se expresa por:

<u>Definición 15</u>: *Círculo es una figura plana comprendida por una sola línea tal que todas las rectas* [*segmentos*] *conducidas de un punto entre aquellos que están en el interior de la figura son iguales entre sí.*
<u>Axioma 1</u>: *Cosas* [o entes] *iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.*
La teoría que sustenta esta tecnología es la Geometría Axiomática de Euclides, contenida en la obra Los Elementos.
La obra matemática en este caso se constituye con la proposición, la construcción y la demostración de la igualdad de los lados del triángulo construido, con los postulados, axiomas y definiciones utilizadas para justificar y validar los procedimientos.
Proposición 2: *Por un punto dado (como extremo) llevar* [*construir*] *una línea recta* [segmento] *igual a otra recta* [segmento] *dada.*



[Datos] *Sea A el punto dado, y BC la línea recta dada.*
[Incógnita] *Se pide llevar desde A (como extremo) una línea recta igual a la recta BC.*
[Construcción] *Se une el punto A al punto B por medio de una línea recta AB* (Postulado 1) *y se construye sobre ella el triángulo equilátero DAB* (Proposición 1).
Se prolongan en línea recta *DA y DB en las rectas (semirrectas) AE y BF, respectivamente* (Postulado II); *y con centro B y distancia BC se describe la circunferencia CGH* (Postulado III); *y de nuevo con centro D y distancia DG se describe la circunferencia GKL* (Postulado III).
Entonces, desde que el punto B es el centro de la circunferencia CGH, es BC igual a BG.
Además, puesto que el punto D es el centro de la circunferencia GKL, es DL igual a DG.
Y de estos (segmentos), DA es igual a DB; por lo tanto los (segmentos) remanentes AL y BG son iguales (Axioma 3).
Pero se ha demostrado que BC es igual a BG; por lo tanto cada uno de los (segmentos) AL y BC son iguales a BG.
Y cosas iguales a una misma cosa son iguales entre si (Axioma 1)*; resulta que AL es también igual a BC.*
Luego por el punto dado A se ha llevado la línea recta AL igual a la línea recta dada BC.   L.C.Q.H (lo cual queríamos hacer)
<u>Comentarios</u>
En esta proposición, Euclides hace referencia a:
<u>Postulado I</u>: *Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta.*
<u>Postulado II</u>: *Se puede prolongar una línea recta limitada, indefinidamente en línea recta.*
<u>Postulado III</u>: *Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier distancia* [*como radio*].

Proposición 1: *Sobre una recta finita (segmento) construir un triángulo equilátero.* (Analizada anteriormente).
Axioma 1: *Cosas* [o entes] *iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.*
Axioma 3: *Si a iguales se sustraen iguales, los restos son iguales.*

Análisis desde la teoría antropológica

La tarea a realizar en este caso, es: *Por un punto dado llevar una línea recta igual a otra recta dada,* esto es, consiste en construir un segmento igual a otro dado.
La técnica que se pone de manifiesto es la de los lugares geométricos al construir las circunferencias. Y la tecnología asociada está dada por los Postulados, Proposiciones y Axiomas que se mencionan y que justifican en cada caso la manera de hacer.
La tarea primera se divide en subtareas: 1. Trazado de segmento; 2. Construcción de un triángulo equilátero; 3. Determinación de las semirrectas que contienen a un segmento dado; 4. Trazado de circunferencias; 5. Comparación de segmentos
Cada una de estas tareas tiene una técnica asociada y una tecnología subyacente.
Para la tarea 1, la técnica es la construcción con regla del segmento AB y la tecnología que la fundamenta es el Postulado I.
Para la tarea 2, la técnica es la intersección de dos circunferencias y la tecnología asociada es la Proposición 1.
Para la tarea 3, la técnica es el trazado de una semirrecta con regla y la tecnología correspondiente es el Postulado II.
Para la tarea 4, la técnica consiste en considerar los segmentos como radios de un círculo y la comparación de dichos segmentos dos a dos. La tecnología que fundamenta este procedimiento se expresa por los axiomas 1 y 3.
La **teoría** asociada es la Geometría Axiomática de Euclides.

Conclusiones

La enseñanza- aprendizaje de la matemática es una actividad que consiste en reconstruir y activar ciertas organizaciones matemáticas, esto es resolver tareas aplicando determinadas técnicas justificadas por las tecnologías y teorías correspondientes. La enseñanza consiste en propiciar la activación de la organización matemática y dirigir la reconstrucción.
Por ello el análisis de algunas de las Proposiciones de Euclides, desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, pone de manifiesto la riqueza de conceptos matemáticos involucrados en la resolución. Resultaría de interés considerar, con los alumnos de la carrera Profesorado en Matemática, futuros docentes en los niveles educativos EGB y Polimodal estas proposiciones y efectuar su análisis desde la perspectiva que se ha planteado en este trabajo. Ello incorporaría en los alumnos el hábito de efectuar, para los problemas que planteen, un minucioso análisis de los mismos que redundará en beneficio de acrecentar los conocimientos matemáticos y por ende se verán sus efectos en el desarrollo de sus clases en los niveles que le correspondan.

Bibliografía

Bosch, M. (2000). *Un punto de vista antropológico: La evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática.* IV Simposio SEIEM. Huelva. España.
URL: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_SIMPOSIO.htm

Cabrera, E. (1949). *Los Elementos de Euclides como exponente del "milagro griego"*. Colección Ciencia y Método. Buenos Aires: Librería del Colegio.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El Eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-HORSORI. Universidad de Barcelona.

Contenidos Básicos para la Educación Polimodal. 1997. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. República Argentina.
Puig, Luis (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Colección MATHEMA. Granada: Editorial COMARES.

LAS ARGUMENTACIONES POR REDUCCIÓN AL ABSURDO COMO CONSTRUCCIÓN SOCIOCULTURAL

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*".
Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires (Argentina) ccrespo@uolsinectis.com.ar
Rosa María Farfán
Cinvestav – IPN. México DF. (México) rfarfan@cinvestav.mx
Campo de investigación: Categoría: Pensamiento lógico; Nivel educativo: Superior
Metodología: mixta.
Palabras clave: socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural, reducción al absurdo

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación orientada a analizar las características y el papel que desempeñan las demostraciones y argumentaciones matemáticas en el aula. La investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica. Esta etapa de la investigación se centra en las características de las argumentaciones por reducción al absurdo, tratando de comprender a éstas como un recurso de validación de resultados en matemática que se logra a través de una construcción socio-cultural. En particular el carácter cultural se ha focalizado en el aspecto profesional, por lo que la atención se fijó en estudiantes de distintas carreras y formaciones, tratando de determinar las diversas concepciones de argumentaciones de alumnos y los mecanismos de su funcionamiento.

Las argumentaciones por el absurdo

Las demostraciones por reducción al absurdo han sido durante siglos aceptadas y utilizadas dentro de la matemática tanto por investigadores como por docentes. En el aula, también son presentadas en numerosas oportunidades sin una reflexión explícita acerca de su significación y consecuencias. Sin embargo su significación no es sencilla e involucra ideas que no son para nada triviales.
Este tipo de argumentaciones se basa en el siguiente esquema:

> *A partir de un conjunto Γ de premisas, que constituyen las hipótesis, se pretende probar la validez de cierta conclusión T, que en el caso de un teorema se suele denominar tesis. Se agrega como una nueva premisa la negación de la tesis y de esta manera se tiene un nuevo conjunto de premisas Γ'. A partir de Γ' se aplican reglas de inferencia y se llega a una contradicción. De esto se infiere que el nuevo conjunto de premisas es contradictorio o no consistente, por lo que se admite la verdad de la tesis.*

Dicho de otra manera, las demostraciones por contradicción o por reducción al absurdo propiamente dichas, presentan un formato en el que al agregarse la negación de la tesis a las hipótesis, se hace uso simultáneamente de ambas para llegar a que la conjunción de la hipótesis y la negación de la tesis no es posible. Al llegar a un absurdo, o sea a un enunciado falso, se infiere que la conjunción anterior es falsa, pero como la hipótesis ha

sido considerada verdadera en el enunciado del teorema, es necesario que sea la negación de la tesis falsa, y por lo tanto la tesis debe ser verdadera.
Con frecuencia, la realización de una demostración por reducción al absurdo es más sencilla que la demostración directa. Las argumentaciones por el absurdo presentan una alternativa a la demostración directa, aunque a veces no es necesaria su aplicación y el razonamiento puede realizarse de manera directa. En algunos casos, sin embargo no es posible realizar demostraciones directas y es necesario recurrir a argumentaciones por el absurdo para determinar la verdad de un enunciado.

Su aparición en la historia

A partir de las ideas de Parménides, se funda en Elea una escuela en la que sobresalió Zenón. En el siglo V a.C., Zenón utilizó el método de reducción al absurdo en la explicación de sus famosas paradojas. Eudoxo de Cnido que pasó algunos años junto a los discípulos de Platón, fue quien fundamentó la organización deductiva sobre un sistema explícito de axiomas. Otro mérito de Eudoxo fue la introducción del método de exahución. Este método de demostración supone una doble reducción al absurdo: por ejemplo para probar que el área de cierto recinto es A, se demuestra, utilizando polígonos inscritos, que no puede ser menor que A; y utilizando polígonos circunscritos, que no puede ser mayor que A. En los Elementos de Euclides, es posible encontrar varias demostraciones que hacen uso del recurso de reducción al absurdo.
Fermat empleó el método de *descenso infinito, que es* una variante del método de demostración por reducción al absurdo en la que la contradicción consiste en definir una sucesión infinita estrictamente decreciente de números enteros positivos. La aplicación que hizo Fermat de este método tuvo el fin de demostrar algunos teoremas de la teoría de números.
Las bases lógicas de las argumentaciones por reducción al absurdo, descriptas por Aristóteles, se sustentan en dos principios: el principio del tercero excluido y el principio de no contradicción.
En el siglo XX, para los intuicionistas, es posible que el principio del tercero excluido aplicado a razonamientos matemáticos en los que se realiza una argumentación por reducción al absurdo, condujera a una paradoja. El intuicionisno plantea esta duda y trata de darle solución sin postular nada al respecto (Toranzos, 1943). La posición de los intuicionistas de no aceptación del tercero excluido, no fue sin embargo nueva del siglo pasado. Si buscamos antecedentes en culturas que no incluyeron las argumentaciones por el absurdo como ser las culturas china e hindú, resultan notables algunas aserciones filosóficas sobre las cuales es imposible aceptar las argumentaciones por reducción al absurdo como válidas. En China antigua, las ideas filosóficas se basaron en la coexistencia y equilibrio entre el ying y el yang. Todo ser es combinación de estas formas de energía, nada es totalmente ying o totalmente yang. Esto da un sustento simbólico desde el que fue posible construir diferentes modos de oposiciones numéricas y dio también la posibilidad de surgimiento de objetos matemáticos como el cero. La simetría que preside el paradigma chino es radicalmente distinta de la filosofía de la Grecia clásica. Para los griegos no es posible pasar del ser al no ser, no es posible cambiar el género o la naturaleza de un objeto, no existe ningún elemento identificable que esté en el límite del ser y el no ser. De esta manera, en Grecia no apareció el cero. Por otra parte, la India, cuna del cero con todas sus

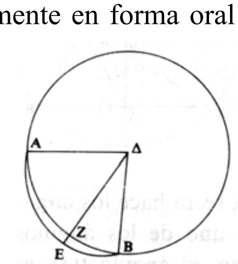
funciones, también se caracterizó por tener ideas filosóficas totalmente distintas a las griegas, en particular en relación con la aceptación del principio del tercero excluido.

Los alumnos ante situaciones relacionadas con las argumentaciones por el absurdo

Con el objetivo de observar y analizar cuáles son las actitudes de alumnos de diversa formación y ante las argumentaciones por el absurdo presentadas en distintos contextos, se diseñó una serie de actividades de diferente tipo.

- **Primera fase de experimentación**

Esta etapa de la experimentación, se orientó a la utilización de las figuras de análisis en las argumentaciones por reducción al absurdo. Ante la hipótesis de que, las figuras de análisis dificultan en oportunidades la comprensión de los razonamientos cuando se utilizan argumentaciones por el absurdo, se diseñó una secuencia que utiliza el texto de la demostración de la proposición 2 del Libro III de los Elementos de Euclides, en la que se solicitó a los alumnos que explicaran la estrategia de argumentación utilizada en este teorema por Euclides y realizaran la construcción correspondiente y explicando el papel y las dificultades de las figuras de análisis en este tipo de demostraciones.
Los destinatarios de esta secuencia fueron los alumnos del último año de la carrera de Profesor de Matemática y Astronomía del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires, Argentina. Estos alumnos han abordado temáticas como lógica proposicional y de predicados y sistemas formales y el análisis de algunos núcleos temáticos medulares en los fundamentos de la matemática, como ser la axiomática de Euclides y de Hilbert para la geometría, la fundamentación del análisis, las geometrías no euclidianas, las posiciones frente a la crisis de los fundamentos en el siglo XX, entre otras, estando acostumbrados a la realización de análisis metamatemáticos de propiedades y conceptos matemáticos. Esta secuencia no pudo ser experimentada en otras poblaciones de alumnos pues requiere de ciertos procedimientos y habilidades a cuya formación se apunta en la asignatura mencionada, pero no generalmente en otras. Los alumnos que intervinieron fueron 12. Una vez realizada la resolución de la secuencia por escrito, se prosiguió con una entrevista oral para profundizar las ideas vertidas en el trabajo.
Los alumnos que accedieron a responder las preguntas presentadas, todos excepto uno identificaron que se trata de una demostración por reducción al absurdo. Realizaron la explicación de este método de argumentación, justificando correctamente su utilización desde el punto de vista lógico. Al intentar realizar la figura de análisis correspondiente a la demostración presentada por Euclides, dudaron y expresaron primeramente en forma oral las dificultades que esta figura de análisis acarrea. Luego, 10 de los 12 alumnos presentaron figuras de análisis que denotan la inconsistencia de la suposición realizada por Euclides. En la figura de análisis que presenta Euclides (Euclides, 1991) debe notarse que la recta AEB es "curva", pues para poder realizar el razonamiento por reducción al absurdo, se supone que este segmento es exterior a la circunferencia y por lo tanto no es posible realizar el trazado correspondiente, ya que esta suposición no es consistente con el resto de las hipótesis.



Presentamos a continuación algunas de las figuras de análisis realizadas por los alumnos encuestados e esta etapa que nos parece pueden brindar idea de las distintas dificultades surgidas y de las maneras en las que cada uno solucionó las mismas:

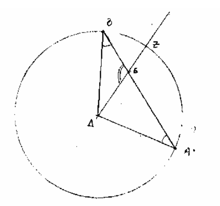


Figura 1

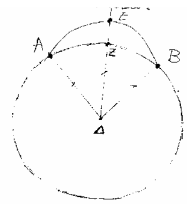


Figura 2

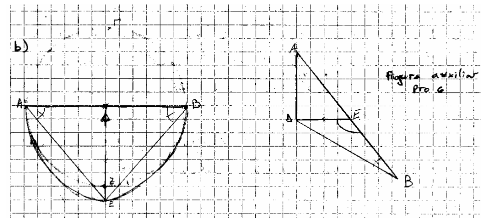


Figura 3

En el caso de la Figura 1 se observa que si bien en el razonamiento se está suponiendo que el punto E es exterior al círculo, en la figura que presenta esta alumna, E es interior. En las explicaciones que realiza, afirma que el punto "*se ve en el interior del círculo, pero está afuera*".

La figura 2, se trata de una construcción muy similar a la presentada por Euclides, en la que se evidencia la necesidad de "curvar la recta" para poder responder a la suposición de la negación de la tesis.

En la figura 3 aparece el punto E en el exterior del círculo, pero además de utilizar una línea curva para representar la recta, se unen los puntos A y E, y B y E con segmentos. Para poder seguir los razonamientos de Euclides, es necesaria además la realización de una figura auxiliar en la que A, E y B están alineados.

En estas entrevistas se puso en evidencia que la totalidad de los encuestados era capaz de identificar tipo de argumentación, tal como lo habían hecho por escrito y de explicar las bases lógicas que sustentan el uso de este tipo de argumentación en matemática. Más de la mitad del grupo se refirieron correctamente al Principio del tercero excluido y al Principio de no contradicción, así como que fueron capaces de identificar la aparición de una proposición contrarrecíproca de la dada en el enunciado a lo largo de la demostración.

- **Segunda fase de experimentación**

La segunda fase de la experimentación se orientó primeramente a determinar si los sujetos que fueron capaces de identificar y explicar la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en un escenario académico, en el análisis de la obra de Euclides, identifican y utilizan correctamente este tipo de argumentaciones ante preguntas y situaciones no académicas. Para ello se sometió al mismo grupo a otra encuesta en esta fase. En esta misma fase de experimentación se compararon los resultados obtenidos en el mismo grupo de alumnos de la primera fase con los de otros dos grupos de alumnos. Uno de ellos provenientes del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico del segundo año de la carrera de Profesorado en Informática. La formación lógica de estos alumnos, si bien han tenido algunas nociones de lógica, es menor que las del primer grupo considerado. Asimismo la orientación de los mismos es distinta en relación al primer grupo, ya que se encuentran siguiendo una carrera informática. El tercer grupo de alumnos que intervino en esta fase de la experimentación se encuentra terminando sus estudios de nivel medio, cursando el tercer año de nivel polimodal. En este año tienen una asignatura denominada Introducción al Conocimiento Científico, en la que estudian ciertos conceptos básicos de

lógica y sus aplicaciones a las ciencias y a la resolución de situaciones problemáticas que correspondan a juegos de ingenio y aplicaciones de estrategias lógicas de resolución.
El cuestionario que constituyó esta fase de experimentación se basa en la propuesta de estudio experimental mencionada por César Sáenz Castro conocida como "*tarea de las cuatro tarjetas*" (Sáenz Castro, 2002). El texto presentado a los sujetos de la experimentación fue el siguiente:

> Una sociedad secreta está formada por miembros y tiene un reglamento que rige las condiciones muy particulares y estrictas para el ingreso a la misma. Una de las cláusulas de este reglamento dice:
>
> *"Si el nombre de un miembro termina en vocal, su apellido comienza con consonante"*
>
> En una reunión concurren cuatro personas que son miembros de la sociedad y que se presentan de la siguiente manera:
>
> Persona1: "*Mi nombre es Nuria"*
> Persona2: "*Mi nombre es Raquel"*
> Persona3: "*Mi apellido es Pérez"*
> Persona4: "*Mi apellido es Álvarez"*
>
> a) ¿Qué datos necesitaría obligatoriamente preguntar a estas personas, miembros de la sociedad para saber si la cláusula anteriormente citada del reglamento de ingreso se está cumpliendo?
>
> b) Explique cuáles son las ideas lógicas en las que se basa para dar la respuesta anterior.

Los alumnos del Profesorado de Matemática que intervinieron fueron 12 (los llamaremos en adelante, Grupo A); los del Profesorado de Informática, 17 (nos referiremos a ellos como Grupo B); los alumnos que están terminando su escuela media, 17 (constituyen el Grupo C).
Una vez realizada la resolución de la secuencia por escrito, se prosiguió como en la primera fase de la experimentación que hemos descrito anteriormente con entrevistas orales de los participantes que se orientaron a profundizar o aclarar algunas de las ideas que surgieron en las respuestas a este cuestionario.
Las respuestas dadas por los alumnos de cada uno de los grupos son las siguientes:

	Personas 1 y 4		**Personas 1, 3 y 4**		**Personas 1 y 3**		**Personas 1, 2, 3 y4**		**Persona 1**		**No responde**	
Grupo		**%**		**%**		**%**		**%**		**%**		**%**
A	5	41,7	0	0	3	25	3	25	0	0	1	8,3
B	2	11,7	0	0	2	11,7	8	47	4	23,6	1	6
C	0	0	1	6	1	6	15	88	0	0	0	0

Indudablemente algo que llama la atención a primera vista es que menos de la mitad del Grupo A haya dado la respuesta correcta a esta pregunta, a pesar de que anteriormente habían identificada y explicado correctamente la manera indirecta de razonar. Sin embargo en el Grupo B, la cantidad de respuestas correctas es proporcionalmente casi la cuarta parte de las dadas por el Grupo A, mientras que en el Grupo C no se presentó ninguna respuesta correcta. En los Grupos B y C la mayoría decidió que es necesario preguntar todos los datos faltantes. La explicación obtenida para el Grupo B a partir de la entrevista se refiere a la manera de preguntar y tomar decisiones en un programa de computación, en el que "*se evalúa el antecedente y de acuerdo a la verdad o falsedad de éste se dispara o no el consecuente en un if...then...*" Las explicaciones del Grupo C se limitan a indicar a quiénes les pedirán los nombres y a quiénes los apellidos justificando que esos son los datos faltantes. No incorporan en las respuestas fundamentaciones lógicas. En las entrevistas a los alumnos de este grupo, no se ampliaron significativamente las respuestas dadas por escrito, limitándose la mayoría a explicar la necesidad de examinar todos los casos presentados.

Algunos resultados evidenciados por la experimentación realizada

Como resultado de las dos fases de experimentación realizadas, podemos enunciar las siguientes conclusiones que evidencian que la formación profesional influye en el tipo de argumentaciones utilizadas, permitiendo comprenderlas como construcciones socio-culturales:

- ✓ La totalidad de los alumnos estudiantes del último año de profesorado de matemática reconocen la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en un contexto matemático.
- ✓ Al encontrarse con este tipo de demostraciones en un contexto matemático, pueden explicarlas correctamente e incluso indicar cuáles son las características y dificultades que este tipo de argumentaciones presentan
- ✓ Sólo menos de la mitad de los mismos alumnos argumentan por reducción al absurdo en situaciones fuera del contexto matemático.
- ✓ Pocos alumnos con formación informática realizan argumentaciones indirectas para resolver situaciones problemáticas.
- ✓ Los alumnos con formación informática prefieren realizar argumentaciones directas, no indirectas.
- ✓ La forma de razonar de los estudiantes de informática en condicionales está unida a la estructura "if...then...", necesitando evaluar el antecedente antes del consecuente.
- ✓ Ninguno de los alumnos de escuela media pudo argumentar correctamente por el contrarrecíproco.
- ✓ Para la mayoría de los alumnos de nivel medio la única manera de demostrar que una implicación es verdadera es probar todos los casos, lo que muestra que no tienen aún incorporada la idea de demostraciones generales que no impliquen razonar caso por caso.

Referencias bibliográficas

Crespo, C. (2003). *Las demostraciones como contenido matemático*. Presentado en la VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero.

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría sin publicar. CICATA-IPN, México.

Crespo, C.; Ponteville, Ch. (2003). *Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones*. En Díaz, L. (Ed.) Volumen 17. Tomo 1 (pp.39-44).

Crespo, C.; Ponteville, Ch. (2004). *Las funciones de la demostración en el aula de matemática*. Presentado en RELME 18, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

Godino, J.; Recio, Á. (2001). *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática.* En *Enseñanza de las ciencias*, 19 (3) (pp.405-414)

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Barcelona: Gedisa.

Sáenz, C. (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas*. En Moreno, M. F. y otros (Ed.) *Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Almería. (pp.47-62).

Toranzos, F. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina.

UNA EXPERIENCIA ETNO-MATEMÁTICA EN EL AMAZONAS COLOMBIANO.

Aldo Iván Parra Sánchez
Universidad Nacional De Colombia -Sede Bogotá; Pais: Colombia
aiparras@unal.edu.co, aldo79@lycos.com

Campo de Investigación: Etnomatemáticas; Nivel Educativo: Superior

Resumen

Se presenta una investigación desarrollada con indígenas Ticuna de la comunidad de Macedonia en el amazonas Colombiano. Partiendo de referentes teóricos y de campo de la etnomatematica, el trabajo se desarrolla en dos campos: a) acompañamiento académico a los docentes de la escuela indígena, estudiando y tratando de comprender la contribución que la etnomatematica puede brindar a la educación escolar b) desarrollo con la comunidad de un estudio descriptivo de actividades tradicionales asociadas al pensamiento matemático: "medir, diseñar, contar y explicar". Se ilustra la investigación hecha sobre el **diseño**, mostrando la identificación y descripción (usando algoritmos computacionales) de diferentes patrones de tejidos artesanales Ticuna. Finalmente se discuten las implicaciones de ésta investigación para la construcción de propuestas pedagógicas posteriores.

El objetivo central de esta comunicación es presentar una experiencia de trabajo enmarcada en la línea de investigación en etnomatemática y discutir las posibles implicaciones de esta investigación para la educación matemática y la educacion para pueblos indigenas. La experiencia fue realizada en Macedonia, un asentamiento de indigenas ticuna en el amazonas colombiano.

En primer término hay que aclarar el trabajo se hizo por una invitación hecha conjuntamente por el Colegio oficial que funciona en este lugar, la comunidad misma. Ellos solicitaron a la Universidad Nacional de Colombia apoyo para su colegio en distintas áreas académicas, entre ellas matemáticas. La escuela que funciona en el resguardo es de carácter estatal, por lo que la asignación de profesores y recursos es determinada por el gobierno departamental, ubicado en una pequeña ciudad llamada Leticia, que está a cinco horas de Macedonia viajando por el río. Como todo colegio en Colombia, el de Macedonia debe contar un currículo propio, establecido en base a las experiencias y necesidades específicas de cada región. En este currículo se deben especificar los contenidos a enseñar, así como las formas de impartir y evaluar esos contenidos. Esto se puede hacer desde una perspectiva integrada e interdisciplinaria, o de forma clásica, dividiendo la enseñanza en distintas asignaturas (materias). La intención de los integrantes del colegio es seguir esta última alternativa y diseñar programas académicos para cada materia. Los profesores del colegio son en su mayoría indígenas ticunas bilingües nacidos en el resguardo o mestizos nacidos en Leticia, en ambos casos con un grado de escolaridad media, sin mayor formación en aspectos pedagógicos y sus conocimientos en enseñanza intercultural son los asimilados por la propia experiencia docente. Entre distintos actores de la comunidad, no sólo los vinculados directamente a la escuela, acordaron ponerse en contacto con la Universidad Nacional de Colombia para solicitarle su ayuda en la elaboración de estos

documentos. Todo lo anterior, si bien parece anecdótico, lo menciono porque me parece muy importante resaltar que el trabajo surge como una iniciativa de la propia comunidad para satisfacer sus necesidades concretas, y no como una investigación netamente académica.
Cuando se tuvo una comunicacion más cercana con los indigenas del resguardo, se planteó más claramente la experiencia, formulando dos frentes de trabajo: Por una parte se apoyaria el trabajo de los docentes formulando desde su propia perspectiva y experiencia, el programa de estudios del colegio y por otra parte se desarrollaria un estudio descriptivo de las formas en las que la comunidad Ticuna de Macedonia realizan actividades de medición, conteo, localización y explicación, que junto a otras han sido identificadas desde una perspectiva cultural, como generadoras del pensamiento matemático.

Acompañamiento a docentes

De otra parte, teniendo en cuenta que desde la educación matemática se propone potenciar aprendizajes significativos por parte de los estudiantes que den cuenta de sus saberes y que para grupos étnicos o sociales plenamente identificados, se promulga una educación que respete valore y atienda sus costumbres, reglas y saberes ancestrales, se considera importante la inclusión de tópicos del entorno cultural del estudiante tanto en los proyectos de aula o de área como en el diseño del currículo.
Aparece entonces un problema interesante y concreto , ¿Cuales son los conocimientos culturales que deben ser rescatados? ¿Quienes los poseen? ¿Esta la comunidad interesada en rescatarlos todos? ¿Cuáles de esos saberes tienen alguna relación con el currículo nacional, que ha sido establecido para todas las instituciones educativas de la nacion?

Durante el trabajo de apoyo los profesores y padres de familia de la escuela manifestaron un interés muy marcado en que los estudiantes comprendan la matemática "occidental", los conceptos de función, cálculo de intereses, estimación numérica y otros tópicos de índole práctico, que permitan un mejor y más rápido desempeño en un contexto comercial, atendiendo los cambios que se presentan en la región amazónica. Ya que la amazonía colombiana ha generado recientemente un interés turístico inusitado, y la presencia de visitantes extranjeros se ha convertido en algo común, creando una nueva fuente de ingresos, y fortaleciendo el transporte fluvial entre distintos asentamientos indígenas a lo largo del río Amazonas, haciendo más frecuentes las transacciones comerciales y las solicitudes de una presencia estatal más sólida y coherente. Entonces las comunidades indígenas deben involucrarse en dinámicas nuevas, que exigen comprender distintos procedimientos y formas de comunicación con el estado. Por otra parte, esta apertura frente a los visitantes de otros lugares del mundo, exige que la identidad cultural de los propios pueblos sea conservada, y la región conserve su carácter exótico y *naif*. Es decir, la defensa de las culturales ancestrales es una estrategia para que la región se consolide como destino turístico en el mundo. Así tenemos dos tendencias que buscan un equilibrio, por una parte es necesario comprender y manejar las matemáticas occidentales, y por otra parte es importante rescatar la memoria de las prácticas culturales propias.
Hasta el momento la escuela se había dedicado a entregar los primeros rudimentos de una aritmética de la vida cotidiana y enseñar a leer y escribir en español, pero ahora se pretende superar esos limites y continuar el proceso educativo hasta ofrecer una educación que permita al estudiante indígena conocer y utilizar las matemáticas y otros contenidos

(literatura, historia universal, biología, etc) a un nivel medio, abriéndole la posibilidad de desempeñarse como ciudadano de su país y acceder a niveles de educación superior, incluso a estudios superiores en la matemática misma. En esto el investigador francés André Cauty es enfático ¿Por qué negar la posibilidad de formar adultos indígenas profesionales en matemáticas, capaces de contribuir al desarrollo de las matemáticas de hoy?[1]

Como el objetivo de nuestro trabajo con los docentes era producir una parte del currículo, se planteó a los profesores identificar temas puntuales que les parecían prioritarios y cercanos a su práctica docente. Después de que ellos lograron hacer una primera visión del documento, lo cotejamos con respecto a los planes oficiales vigentes para las demás escuelas del país, documentos colombianos que se asemejan a los "standards" del NCTM. Así generamos un nuevo documento, planteando nuevos tópicos y otros énfasis a los temas ya planteados, que fue revisado y modificado por los mismos docentes, con base en su experiencia y en sus propios conocimientos matemáticos. Este esquema se replicó hasta llegar a un documento en consenso, que traza la ruta que quiere seguir la escuela en los primeros nueve grados.

Ahora quedaban por estudiar las maneras en que estos conocimientos escogidos debían ser puestos en la practica del salón de clases, por lo que nos encontramos con una gran tarea: Incluir elementos culturales ticuna que puedan ayudar a los estudiantes a entender conceptos y procesos matemáticos. Esto sólo pueden consolidarse a través de la practica docente y la investigación continua. Por tratarse de una experiencia piloto, nuestro proyecto de trabajo no contemplaba una permanencia tan prolongada en el asentamiento, y el tiempo sólo nos alcanzó para hacer unas primeras tentativas de inclusión de tópicos propios de la cultura dentro de la práctica cotidiana en el salón de clase de matematicas. De todos modos nos quedaron algunas consideraciones para esta fase: mas que acercar los ejemplos y situaciones problemáticas que se le plantean al estudiante hacia una cotidianidad y tal como lo plantea Boaler (FLM 13 (2), 1993) el objetivo debe ser que el estudiante pueda transferir apropiadamente su conocimiento a otras situaciones. Uno de los principales rasgos de la matemática es que generaliza, abstrae situaciones y plantea organizadamente escenarios hipotéticos en los que esas generalizaciones puedan no cumplirse. Si queremos saber matemáticas, no debemos perder esto de vista, por lo que debe darse énfasis a la capacidad de encontrar similitudes e identificar la presencia de un concepto o pertinencia de un procedimiento en situaciones distintas, en resumidas cuentas se pretende un saber hacer en un contexto variable. Otra consideración importante es sobre el carácter mismo de ciertos conocimientos a enseñar, piensen por ejemplo en temas de álgebra o estadística, que aunque se pretende que sean aprendidos sin alterar profundamente la cosmovisión de la cultura ticuna, estos temas no necesariamente tienen una conexión directa con actividades concretas de la comunidad, sino que están referidos a objetos y estructuras matemáticas, y requieren el uso de un lenguaje muy especial. La enseñanza de las matemáticas conlleva un conocimiento de este lenguaje y cierto dominio de su escritura, lograr esto se hace complejo cuando se parte de un lenguaje primordialmente oral, como es el caso de muchas lenguas indígenas, y específicamente el

[1] Cauty, A. ¿Como seguir siendo amerindio y aprender la matemáticas que se necesitará? . En: G. Zapata (comp.) *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América latina*, Madrid : Ed. Morata,2001.

Ticuna. Este conocimiento se hace también complejo por la necesidad de involucrar términos y conceptos especializados dentro de la lengua, ya que no es únicamente cuestión de traducir entre idiomas naturales, por ejemplo ingles-ticuna o español-ticuna; Cauty ha evidenciado la imposibilidad de una traducción simple (término a término) de textos matemáticos a una lengua amerindia, y dirige sus esfuerzos a formular elementos que hagan factibles los acercamientos entre sistemas de representación. Estos "acercamientos" son inter-étnicos e interdisciplinarios, y son entendidos como actividades cognitivas dentro de una confrontación de cosmovisiones, procesos en los que se generan nuevos conocimientos a partir de los ya existentes en las culturas que entran en juego. Para ello es necesaria la intervención de lingüistas y matemáticos con sus conocimientos, al igual que el de los indígenas con sus saberes tradicionales, con la memoria de su cultura.

Tejidos en la cultura Ticuna

En las sesiones de trabajo con la comunidad, nos dimos cuenta de que esa memoria se estaba perdiendo, y que sólo los habitantes mas antiguos del resguardo conocían algunas de las practicas matemáticas ticuna. A la par del trabajo con los docentes en la escuela, emprendimos una búsqueda de elementos pertenecientes a la cultura ticuna, que develaran alguna presencia de "pensamiento matemático". Indagamos entonces en la mitología, en la lengua ticuna[2], y en algunas de las actividades que Alan Bishop considera como "universales" y generadoras de pensamiento matemático: medir, contar, diseñar y explicar.

Originalmente los ticuna sólo tenían nombres para los primeros veinte números naturales, estos nombres están asociados con los términos usados para nominar las manos y los pies; tienen además una regla simple de formación de los nombres de los numerales, que hace descansar todo el conteo en los primeros cinco números.

La palabra para el número cinco es sinónimo de "mano" o "los (dedos) que hay en una mano". Cuando se supera esta cantidad se hace uso de la otra mano, la cantidad seis se denota como "un dedo de la otra mano" asumiendo el conteo de la primer mano, o como "los que hay en una mano y uno de la otra", para los números siguientes se van combinando la primer mano con los cuatro primeros números, así ocho es cinco y tres, nombrado como "los que hay en una mano y tres de la otra" o "tres dedos de la otra mano". Se repite el mismo esquema cuando se supera la decena, involucrando esta vez el pie, (indiferentemente si el primero en considerar es el derecho o el izquierdo), por ejemplo 13 es "dos manos y tres del pie" y 17 es "dos manos y dos del otro pie" o "los que hay en dos manos, un pie y dos del otro pie" es decir, 17 es 10+5+2. Como se puede apreciar, hay una descomposición aditiva en múltiplos de 5 y números menores. Naturalmente se cumplen los cuatro principios señalados por Gelman y Gallistel (citados en Nunes, 1992) para que una actividad sea catalogada como conteo.

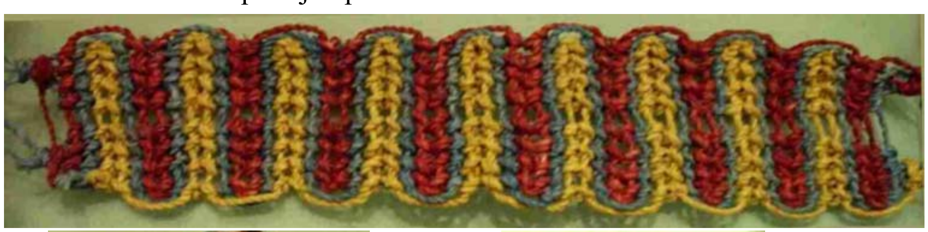
Con el procedimiento a seguir con cantidades mayores, la respuesta obtenida fue "se colocan las cosas en un panero y se cuentan los paneros". El panero es un canasto que se toma como la unidad de capacidad fundamental, en él se cargan toda clase de alimentos, según uno de nuestros entrevistados un "panero" lleno lleva 20 cosas o más, por lo que se

[2] La lengua ticuna es exclusivamente oral, pero recientemente ha tenido propuestas para dotarlo de una escritura, por ejemplo el trabajo de la linguista colombiana Maria Emilia Montes

presume que un conjunto de 25 frutas puede ser contado como un “panero con frutas” y no como un “panero y una mano”. En 1989 fue realizado por Montes[3] un estudio sobre la numeración ticuna, en el que se describe la estructura del sistema y se discuten propuestas de extensión del mismo. Al igual que en el estudio mencionado, en nuestra indagación no se encontró información confiable sobre prácticas gestuales asociadas al conteo. Existe un término asociado al reparto (wüi-chígü = para cada uno) y otro a la duplicación (tare-epüküna = dos veces, doble). También hay términos asociados a la ordinalidad, pero no se distinguen claramente:

Cuando se decidió realizar el estudio sobre la actividad de diseñar, nos dimos cuenta de que la búsqueda se debe centrar más que en lo particular de los objetos, en el proceso de elaboración de los mismos, abarcando tanto la idea primaria que tiene su fabricante, como la técnica que éste emplea para la fabricación del objeto.

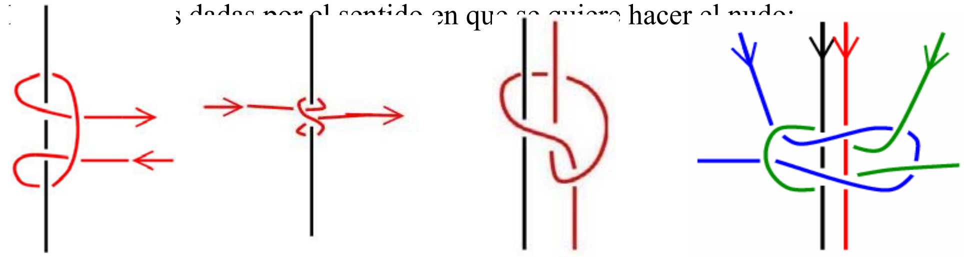
Dentro del amazonas colombiano los ticunas de Macedonia tienen fama de ser excelsos artesanos, dedicados a la talla en madera y al tejido. Estos factores terminaron por privilegiar dentro de nuestro trabajo el aspecto del diseño, y en especial el de los tejidos.
Si bien los ticunas tejen con la fibra de la *Astrocaryum chambira* objetos de toda clase bolsos, hamacas, collares y pulseras, por razones comerciales los artesanos en Macedonia se dedican principalmente a estas dos últimas. En la elaboración de las pulseras se identificaron diferentes tejidos, provenientes de patrones distintos y que difieren en su proceso de elaboración. Con cada tipo de tejido se pueden realizar diversos diseños y motivos de notable belleza, en los que se combinan formas y colores según la creatividad de cada artesano. Veamos por ejemplo :



En primer lugar, para elaborar una pulsera se debe determinar el ancho deseado, ya que este determina a su vez el número de fibras que intervendrán en el proceso. Por lo general, el ancho de una pulsera es de 4 cmts . Aunque una pulsera puede tener de largo la medida específica de la muñeca de una persona, por razones comerciales se fabrican de una longitud fija (17 cm).

[3] Montes, E. (1989). *Numeraciones orales. Numeración en lengua Tikuna*. Mimeografía, Colombia.

Los patrones de tejidos consisten en una sucesión de nudos hechos a mano, siguiendo una secuencia de pasos fija. Aunque hay distintos nudos, en cada pulsera se utiliza un sólo tipo de nudo. Se identificaron cuatro tipos de nudos que podemos considerar básicos, cada uno con [illegible] dadas por el sentido en que se quiere hacer el nudo:



Para hacer los nudos de algunos tejidos, se toman como apoyo fibras que, al tensarse con puntillas clavadas a una tabla de madera, quedan fijas y cumplen el papel de **urdimbre** en el tejido. El artesano debe escoger los colores que usará en la **trama**, que es la parte móvil del tejido. Existen otros patrones de tejidos en los que sólo se usa una pequeña fibra auxiliar, en la que se fijan inicialmente las fibras, pero que no interviene en el resto del tejido, por lo que al final es recortada y se hace imperceptible. Existe un esquema general para trabajar cualquier pulsera: anudar inicialmente, desarrollar los nudos hasta el tamaño deseado y anudar finalmente. Los elementos variables son: el tipo de nudo empleado, el número de fibras usadas y si se utilizan puntillas como guías.
Por lo anterior, vemos que el proceso de elaboración de una pulsera satisface la definición de algoritmo[4], y por lo tanto es posible describirlo con la terminología relativa a estos, basada en instrucciones, funciones y estructuras elementales. Se crearon algoritmos para describir ocho tipos de tejidos distintos, que lograron clasificar las 24 pulseras que conformaron la muestra. Después de esta clasificación todas las pulseras encontradas han podido expresarse como un resultado de alguno de los ocho algoritmos. Lastimosamente escapa a este documento una explicación detallada de las instrucciones de alguno de estos algoritmos. Creemos que este trabajo de descripción de tejidos es útil en dos sentidos, por una parte es un registro físico de un artefacto cultural, del mismo modo que los planos de un edificio sirven para restaurarlo y conservarlo, y por otra parte puede apoyar la enseñanza en la escuela ticuna, para la modelación de procesos y el estudio de patrones y regularidades, al referirse a objetos que los estudiantes conocen y dominan muy bien.

Bibliografía

Bishop, A.(1988). *Enculturacion Matemática.* Barcelona, España: Paidós.

D'Ambrozio, U. (1990). *Etnomatematica: Arte ou tecnica de explicar e conhecer.*Sao Paulo, Brasil: Editora Atica.

Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and Everyday Cognition. En D. Grouws (Ed.),

[4] Por algoritmo se entiende "an unambiguous specification of a sequence of steps performed to solve a problem o ejecutar una tarea". Aho, A. et al, "The Design and Analysis of Computer Algorithms" Addison-Wesley, 1974. Tiene como características esenciales: precisión, determinismo y finitud.

Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp.557-574). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Soto, I. (2001) En A. Lizarzaburu & G. Zapata (comp.), *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en America Látina* (pp. 215-233). Madrid, España: Ediciones Morata.
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (1998). Lineamientos Curriculares. Santafe de Bogotá. Colombia

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (2003) Estándares Básicos de Calidad. Santafe de Bogotá. Colombia.

ARITMÉTICA MAYA: UN APORTE AL CURRICULO

Claudia María Lara Galo
ADEMATE Agrupación de Educadoras de Matemática. Guatemala
claudialaragalo@yahoo.com
Campo de Investigación: Etnomatemáticas-Factores afectivos- Formación de profesores;
Nivel Educativo: Medio y Superior

Resumen

La Aritmética Maya forma parte desde hace pocos años del Currículo Nacional Base de Guatemala como una respuesta a las demandas sociales para la construcción de un país incluyente donde la variedad de culturas se conciba y viva como una riqueza y no como una dificultad.

El presente artículo facilita que el adulto inicie su conocimiento de Aritmética Maya tal como se inician los niños y las niñas actualmente en Guatemala utilizando semillas y palitos (pequeñas ramas) para leer, escribir y realizar operaciones básicas. Además, ofrece la posibilidad de comprender y apreciar las relaciones entre la numeración, los distintos calendarios y la visión de la naturaleza y la vida de los Pueblos mayas actuales herederos de los grandes astrónomos y sabios de la antigüedad.

Contexto geográfico e histórico

La geografía, la historia y la visión de los diferentes Pueblos y culturas, inciden en las representaciones que utilizan y en las investigaciones que realizan. El nacimiento de un sistema de numeración, la forma en que se opera y cómo se resuelven situaciones problemáticas, son particulares de cada lugar y de cada grupo de personas en un momento específico. No podemos comprender plenamente un sistema de numeración si desconocemos el contexto en el cual ha nacido, se ha desarrollado o se mantiene vigente.

En le caso de la Aritmética Maya, es sabido que nace en el corazón de los Pueblos de Mesoamérica. Debido a su reciente inclusión en el currículo guatemalteco, nos referiremos a algunas características de este país que nos permitirán comprender su inserción en el currículo y el alcance que se pretende lograr con esta inclusión.

Guatemala es un país hermoso en su naturaleza y en su gente. Con una variedad de colores y culturas que difieren en los idiomas en los que se comunican y en las tradiciones que practican, es un país con grandes carencias para la mayoría de la población especialmente la indígena del área rural.

En esa realidad, en 1996 se firmaron los Acuerdos de Paz. En un país segregado, donde habitan más de 20 Pueblos diferentes, la firma no produce cambios inmediatos en el corazón y la mente de las personas lastimadas por la guerra. La Reforma Educativa se convierte en una propuesta para cambiar las actitudes y las acciones y empezar a construir un país con nuevos valores donde las diferencias culturales se conciban como fuente de riqueza que posibilite una Guatemala distinta, incluyente, intercultural, democrática, solidaria.

No será posible esta nueva nación si no se favorece el conocimiento de la variedad de culturas que conviven en Guatemala. Así, dentro del Currículo Nacional Base impulsado en la Reforma Educativa, el estudio que lleve a la aceptación y a la valoración de elementos esenciales en cada una de las 24 culturas diferentes, se considera prioritario.

En particular, en el caso de la matemática, se está trabajando por divulgar la matemática propia de cada cultura. La forma de pensar, conocer y representar los conceptos matemáticos, tendrá gran relevancia en la formación de una identidad intercultural y de respeto a los demás. Una de las ventajas de divulgar la Aritmética Maya es que la mayoría de los Pueblos de Guatemala tienen raíces mayas. Sin embargo, creemos que el estudio y conocimiento de ese Sistema y su relación con la cosmovisión Maya son valiosos conocimientos que permiten a todas las personas valorar diferentes culturas y percepciones.

El origen

La evidencia arqueológica sitúa el origen de los calendarios y la numeración maya aproximadamente en el siglo I a.C.

Los calendarios son varios y cambian dependiendo de su propósito. El Tzolkin (Ch'olq'ij) es sagrado y comprende 260 días relacionados con el ciclo de la gestación humana y las coyunturas y dedos del cuerpo humano (tiene 13 meses de 20 días cada uno). El Haab (Ab') es solar, agrícola y abarca los 365 días en que la tierra da vuelta al sol. Por su lado, el Choltun o de "cuenta larga" lleva la cronología histórica en períodos de 5,200 años.

Actualmente los científicos dan crédito a los astrónomos mayas que lograron una exactitud asombrosa en los cálculos de los ciclos y los días.

Para estudiar el sistema de numeración maya en esta ocasión, principalmente porque es fácil de comprender, utilizaremos el Haab de 18 meses de 20 días (para un total de 360 al que se suman 5 días dedicados a ceremonias). En el Haab, cada mes y cada día del calendario tienen un nombre y un símbolo específicos. Son caras humanas con diferentes gestos. Estos *glifos* (símbolos) se encuentran en las estelas y templos de los sitios arqueológicos antiguos.

Es muy importante señalar que los calendarios y el sistema de numeración mayas no son "viejos cuentos". Actualmente, muchas comunidades guatemaltecas utilizan en la elaboración de los tejidos, el trazo de los campos de cultivo y en el cálculo de ciclos y eras, el sistema vigesimal.

Sistema de numeración vigesimal

El sistema de numeración maya es posicional. Utiliza símbolos sencillos asociados a la naturaleza. Un punto simboliza el uno, una raya horizontal significa cinco y un caracol (o una concha, una semilla o una espiral) sirven para representar el cero. Las posiciones son de abajo hacia arriba porque es la dirección en la que crecen las plantas. Una posición superior indica una cantidad mayor.

Símbolos

 equivale a 1

 equivale a 5

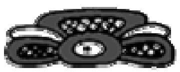
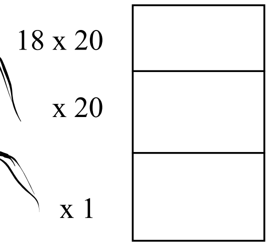
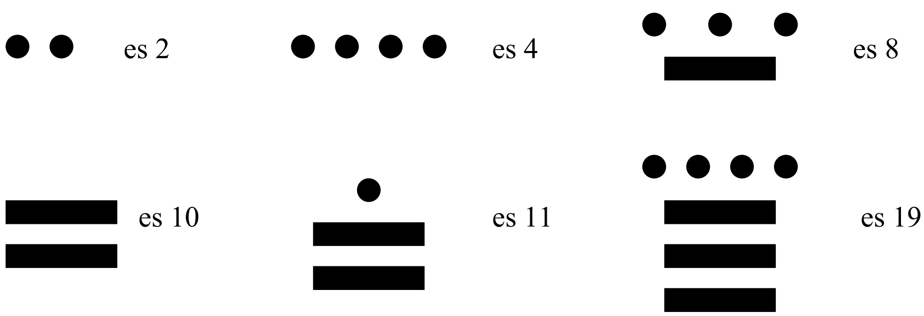
 es uno de los símbolos del cero

Tabla posicional

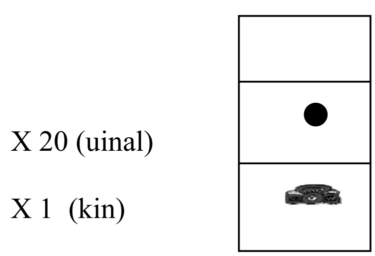


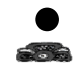
Como estrategia didáctica se sugiere el uso de palillos (mondadientes) y semillas de frijol (habichuelas u otras) para representar en la primera casilla comenzando desde abajo, los números del 1 al 19 sabiendo que no se deben usar más de cuatro frijoles o puntos y tampoco más de tres palillos o barras. Como en todo sistema posicional se busca el "ahorro" de símbolos pero hay, además, una relación con el cuerpo humano en la selección y aplicación de estos signos: cinco unidades hacen una mano y por lo tanto se debe cambiar de símbolo (en vez de cuatro semillas se usará un palillo). Cuatro extremidades hacen un cuerpo completo que genera otro símbolo (en nuestro caso incluso un cambio de posición como veremos).

Ejemplos:



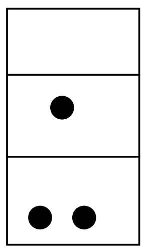
Al intentar escribir veinte notamos que reunimos las cuatro "extremidades" por lo que completamos un cuerpo humano, un ciclo, y cambiamos a la siguiente posición hacia arriba, la de las veintenas. Pero necesitamos usar el cero para indicar el cambio de posición así:



El símbolo de veinte está compuesto por una "veintena" y cero unidades: 
El uso de este símbolo se puede observar en el billete guatemalteco de 20 quetzales.

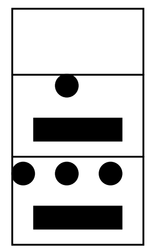
Usando los palillos, las semillas y una moneda para representar al cero, se pueden representar los números de 20 a 359 variando las cantidades en las diferentes posiciones.

Ejemplos:



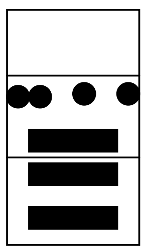
1 x 20

más
2 x 1 es 22



6 x 20

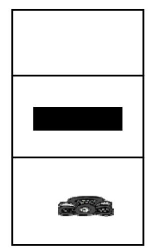
más
8 x 1 es 128



9 x 20

+

10 x 1 = 190



5 x 20

+

0 x 1 = 100

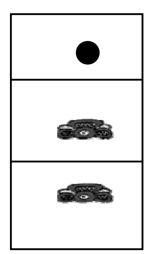
El símbolo de 100 se utiliza actualmente en los billetes guatemaltecos de esa denominación.

No hace falta explicar lo que sucede al llegar a 359…El ciclo anual se completa de acuerdo al calendario Haab y deberemos usar la siguiente posición que corresponde a 18 x 20 = 360 días.

X 18 X 20 (tun)

X 20 (uinal)

X 1 (kin)



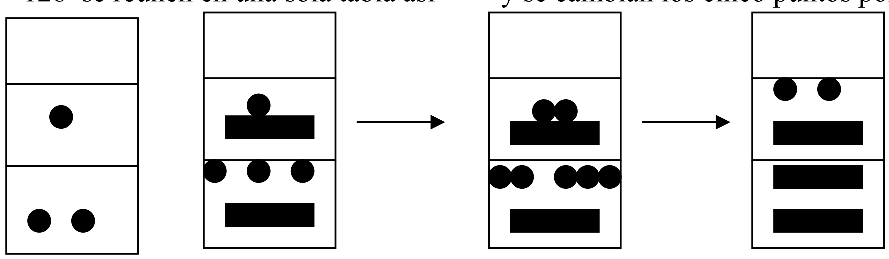
Esta tercera posición no es estrictamente la que correspondería en un sistema vigesimal, porque deberíamos usar 20 x 20 = 400 (esto sucede en otros calendarios). Sin embargo se utilizó este calendario para mostrar la elegancia maya al relacionar el año solar con el sistema de numeración. Es un detalle que no sucede en los sistemas de medidas de otras culturas (baste ver los meses con cantidades de días tan diferentes en el calendario gregoriano de uso actual).

Las operaciones en el sistema de numeración maya

Las suma y la resta en numeración maya se aprenden y practican reuniendo o quitando palillos y semillas. En los casos necesarios, se cambian los símbolos para representar cantidades más grandes o para tener un minuendo mayor al sustraendo.

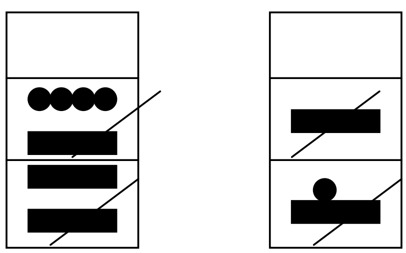
Ejemplos:

22 + 128 se reúnen en una sola tabla así y se cambian los cinco puntos por una barrita:

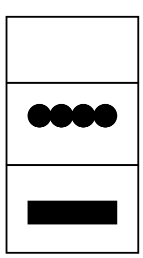
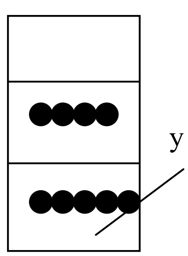
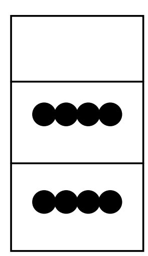


para obtener 150 (7 x 20 + 10 x 1).

En el caso de la resta 190 – 106 debemos quitar posición por posición.



Nos queda una barra de cinco en la posición de las unidades pero aún debemos quitar un punto representando a una unidad en esa misma casilla así que cambiamos una barra por cinco puntos y procedemos a quitar el que quedó:

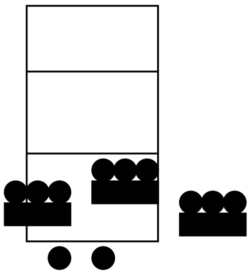
 =  y llegamos a  que es 84 (4 x 20 + 4 x 1)

La estrategia usada para enseñar las operaciones en el sistema maya es perfectamente utilizable para aprender a sumar y restar en el sistema decimal usando piezas de colores para representar cada posición. El valor del concepto de cero se reconoce fácilmente al manipular el material concreto.

Estudiar la multiplicación es muy importante porque el compararla con multiplicaciones en sistemas no posicionales, permite apreciar aún más el ingenio maya.

Ejemplos:

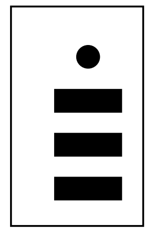
Para representar 2 x 8 usamos la tabla de posiciones así y repetimos dos veces el ocho en la primera casilla:



8

2

al cambiar los símbolos



se obtiene

16 en la primera casilla.

Practicar la lectura y escritura así como operar en el Sistema Maya confirman la importancia de su razón a la inclusión en el currículo guatemalteco. Conocer es el principio para apreciar y valorar.
Al aprender o enseñar el Sistema de Numeración Maya siempre será importante conocer y apreciar su relación con la cosmovisión que nace de la observación del entorno, del deseo de medir para favorecer la cosecha y para comprender los ciclos de la vida. El uso de semillas y de ramas y la selección de los símbolos para cero, NO son casuales, tienen un sentido y una explicación que incluso favorecen su aprendizaje y aplicación.

Sea entonces el estudio de estos temas, oportunidad de profundizar en los sistemas posicionales, de valorar el ingenio de los científicos pasados y presentes y la posibilidad de la adquisición de nuevos lenguajes y estrategias que nos ayuden a comunicarnos mejor.

Referencias bibliográficas:

Castañeda, J. (1980). *Magia y juego de la matemática maya*. Guatemala: Instituto Indigenista Nacional.

Contreras, D. (1999). Historia General de Guatemala. Tomo I: *Escritura Jeroglífica de los Mayas*. Guatemala: Asociación de Amigos del País.

Guedj, Denis. (1998). *El Imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones B, S.A.
MINISTERIO DE EDUCACION (2001) Agenda Pedagógica Bilingüe Intercultural. Guatemala: MINEDUC.

---------------------. (2003). Agenda Pedagógica Bilingüe Intercultural. Guatemala: MINEDUC.
Noj, M. (2003). *Aprendamos a escribir los números mayas*. Guatemala: NOJIB'SA.

EL PAPEL DE LA INTERPOLACIÓN Y LA PREDICCIÓN EN EL CÁLCULO

Hipólito Hernández Pérez
CIMATE - Universidad Autónoma de Chiapas, I. T. de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
polito_hernandez@hotmail.com
Campo de Investigación: Epistemología-Tecnología avanzada; Nivel Educativo: Superior
Metodología: Histórico-crítico
Palabras clave: Predicción, Interpolación, Práctica Social, Cálculo

Resumen

En esta investigación se desarrolla un análisis epistemológico para mostrar el papel de la interpolación y la predicción en el Cálculo con énfasis en la matematización del movimiento, el binomio de Newton y la serie de Taylor. Nuestro análisis está matizado por la aproximación socoiepistemológica entendida como epistemología de prácticas sociales (Cantoral, 2001), con la intención de diseñar una situación del movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo.

Introducción

En el discurso de la matemática escolar actual, el binomio de Newton es utilizado en forma algorítmica para operaciones algebraicas, y la serie de Taylor es enseñado para el estudio de convergencia de funciones con un acercamiento Cauchiano, además estos contenidos matemáticos en el discurso actual no están vinculados con los fenómenos físicos. El objetivo de esta investigación es diseñar situaciones que involucren al binomio de Newton y la serie de Taylor con los contextos físicos, a través de las prácticas sociales de la interpolación y la predicción como unidad de análisis de la aproximación socioepistemológica, es decir, entendida como epistemología de prácticas sociales (Cantoral, 2001). En la investigación se reporta la emergencia de la interpolación y de la predicción en forma implícita desde los estudios del movimiento de los cuerpos por los filósofos del colegio de Merton, obteniendo la regla del grado medio de la velocidad, y posteriormente Oresme retoma estos estudios para explicar y construir el teorema del grado medio o velocidad media en forma geométrica, en consecuencia la velocidad media es la interpolación entre dos estados del movimiento. Galileo conserva estas ideas de la regla del grado medio y la representación geométrica de Oresme para elaborar su ley de caída libre en donde se puede visualizar la interpolación. La interpolación y predicción aparece en forma explícita en el marco epistémico de Newton puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Hernández, 2002) en donde la matematización del sistema genera construcción de herramientas como el binomio de Newton y la serie de Taylor. Con base en lo anterior se diseñará una situación del movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo..

Problemática

En el discurso matemático actual en la enseñanza de la matemática, física y ciencias de la ingeniería que forman parte del plan de estudios de la carrera de ingeniería civil, los contenidos matemáticos en estas disciplinas son abordados con métodos analíticos del Cálculo de una o de dos variables a través del concepto de límite, es decir con un acercamiento de Cauchy. En los cursos, y textos de Álgebra o Cálculo (Baldor, 1988; Kuratowski, 1975), el binomio de Newton es expresado de la forma $(a+b)^n$ y utilizado sólo en un ambiente algorítmico sin considerar su origen y su contexto social. En el discurso de física, el binomio de Newton es sólo utilizado como una herramienta de aproximación, así mismo la serie de Taylor y las diferencias finitas (Zill, 1993; Aleksandrov y Kolmogorov, 1976) son transposiciones de dos saberes matemáticos (Chevallard, 1997) que están desvinculados entre uno y otro, así como del contexto físico, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos actuales que a la vez son recomendados en la matemática escolar vigente. En los textos escolares de física e ingeniería (Benson, 1999) consultadas en nuestro medio, eventualmente aparecen en forma implícita ideas estrechamente vinculadas a las nociones de la serie de Taylor, por ejemplo: $f(x+\Delta x)$ para funciones de una variable independiente, o bien $f(x+\Delta x, t+\Delta t)$ para funciones de dos variables independientes, aunque no aparece en forma explícita la noción de variación y de predicción en los fenómenos físicos. En el contexto anterior hemos abordado la pregunta de investigación siguiente ¿Qué prácticas sociales emergen en la transición del binomio de Newton y la serie de Taylor? tanto de una variable como de dos variables. El discurso de la matemática escolar vigente en las disciplinas mencionadas parece inhibir las ideas de variación y predicción de los estudiantes, puesto que el Cálculo escolar es visto como una estructura formal que antecede al análisis (Cantoral, 2001).

Marco teórico

En esta investigación, nuestro marco teórico está matizado en la aproximación socioepistemológica en donde se analizan de manera sistémica la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva, la dimensión didáctica y la dimensión social. Cada dimensión tiene su propia teoría en cuanto a su marco teórico, pero tienen características comunes entre ellas al interactuar en los procesos didácticos a partir de la actividad humana (prácticas sociales) que realizan conjuntamente profesor - alumno en el aula y fuera de ella. En la investigación de Buendía y Cordero (2003) hacen énfasis que no sólo los aspectos cognitivos están en juego en la construcción del objeto matemático sino en la práctica social que conduce a la adquisición del conocimiento, donde el propósito de la matemática educativa es la de esclarecer y evidenciar la existencia de relaciones entre el conocimiento y prácticas sociales, es decir, enfatizar la componente social sistemáticamente con otras dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica del conocimiento matemático. La aproximación socioepistemológica, es el resultado de la conjunción de estas dimensiones, como marco teórico, en particular en este trabajo, mostramos el papel de la interpolación y la predicción en el Cálculo con énfasis en la matematización del movimiento, el binomio de Newton y la serie de Taylor con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático y las prácticas sociales en tanto unidad de análisis.

La interpolación en diferentes actividades humanas

A continuación se describen diferentes actividades humanas de la actualidad, donde aparece la noción de interpolación, posteriormente se hace un análisis de cómo emerge implícitamente la interpolación y predicción en el movimiento.
El término de interpolación aparece de diferentes maneras, en la vida cotidiana, en el arte, en la física, en la matemática. Con frecuencia se encontrará que se tiene que estimar o predecir valores intermedios entre datos definidos por puntos, a este proceso recibe el nombre de interpolación. En matemáticas aparece como interpolación polinomial, donde consiste en determinar el polinomio único de n-enésimo grado que ajuste n+1 puntos. Este polinomio entonces proporciona una fórmula para calcular los valores intermedios: por ejemplo si la interpolación es lineal se tiene la predicción intermedia entre dos valores o estados de un fenómeno natural. Si la interpolación es cuadrática se tiene valor estimado o la predicción de un valor entre tres valores o estados de un fenómeno natural. Por ejemplo en estadística la interpolación aparece, cuando se tiene un censo de una población, donde las variables son: el número de habitantes y el año, por ejemplo de 1940 a 1990, podríamos preguntarnos, si es posible utilizarlos para obtener una estimación razonable de la población que habría en 1965, e incluso en el año 2000, este tipo de predicciones puede obtenerse por medio de una función que corresponda a los datos disponibles. Este proceso recibe el nombre de interpolación (Burden & Faires, 1980).
La interpolación de forma, se dibuja una forma en un punto del tiempo y se cambia o se dibuja una nueva en otro punto. Al interpolar formas se crea un efecto similar al de transformación y las formas parecen cambiar en el transcurso del tiempo. La animación interpolada es una forma eficaz de crear movimiento y cambios a lo largo del tiempo y de reducir al mínimo el tamaño del archivo. Al contrario de la animación imagen a imagen, sólo necesita almacenar los valores de los cambios de la imagen, no la imagen completa.
La interpolación en las mediciones de temperaturas y precipitaciones son las medias mensuales de temperatura (máxima, mínima y media) y precipitaciones. La disminución del número de estaciones reduce la calidad de las interpolaciones y esta variación en el número de puntos puede introducir movimientos irreales en las series temporales de los campos generados, con independencia del método de interpolación que se utilice; así los campos interpolados con menos estaciones no serán capaces de captar todas las características espaciales del fenómeno. Este inconveniente hizo necesario que se utilizara una estrategia para garantizar que los campos de temperatura y precipitación interpolados, este método se denomina Interpolación Climatológicamente Asistida (ICA), parte de la idea de realizar la interpolación, separando las componentes espaciales y temporales.
La reconstrucción de una señal a partir de sus muestras usando interpolación es un proceso de empleo común en la reconstrucción aproximada o exacta de una señal a partir de sus muestras. Para una señal de banda limitada, si los instantes de muestra están bastante cerca, entonces la señal puede reconstruirse exactamente, es decir, mediante el empleo de un filtro se puede efectuar la interpolación exacta entre los puntos de muestreo. La interpretación de la reconstrucción de una señal como un proceso de interpolación se hace evidente cuando se considera el efecto en el dominio del tiempo del filtro.
La utilización de la interpolación como una técnica tiene un amplio espectro de utilización, tanto es así que es reformulada en cada campo que aplica. La interpolación también es

usada en: topografías, tecnologías de comunicación, genética, biotecnologías, reconstrucción tridimensional de imágenes médicas.

Emergencia de la interpolación y predicción implícita

En el siglo XIV, los filósofos del colegio de Merton estudiaron el movimiento de un cuerpo, considerando la variación de la intensidad de las formas y cualidades, en la cual obtienen la regla del grado medio de la velocidad, para relacionar el movimiento uniformemente diforme. Posteriormente Oresme retoma estos estudios para explicar lo cualitativo por lo cuantitativo y construir el teorema del grado medio o velocidad media en forma geométrica (Cantoral, 2001), un triángulo rectángulo o un trapecio, esto es dependiendo del valor de la velocidad inicial y final, si se une el estado inicial y estado final del movimiento se obtiene una línea recta, en consecuencia la velocidad media es la interpolación entre dos estados del movimiento. Por consiguiente Galileo conserva estas ideas de la regla del grado medio y representación geométrica de Oresme para elaborar su ley de caída libre en donde se puede visualizar la interpolación. Galileo en el contexto de su marco epistémico establece una relación funcional entre variables en la cual emerge la noción de variación y predicción de manera implícita, en este momento aparece el germen de la serie de Taylor (Hernández, 2005).

Emergencia de la interpolación y predicción explícita

Posteriormente con el marco epistémico de Newton se vislumbra mucho más las nociones de: variación y predicción, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Piaget & García, 1996; Muñoz, 2000; Hernández, 2002). En la investigación de Cantoral (2001) considera la noción de predicción como una práctica social para conocer el movimiento de un flujo de agua a partir de un estado inicial, es decir, que *P* es un estado inicial y se quiere predecir el estado ulterior *P + PQ*, donde *PQ* es la variación de un estado a otro, con esta idea y la interpolación Newton descubre su teorema del binomio, el cual es dado como $(P + PQ)^{m/n}$ y utiliza la noción de interpolación, así como las diferencias finitas para construir la serie de Taylor.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Taylor y usando las diferencias finitas se llego a; $y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + ... + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0$. En esencia, Taylor quiso tomar el límite como $\Delta x \to 0, cuando, n \to \infty$ y x es fija, para construir

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\dot{y}_0/\dot{x}_0 + (x - x_0)^2\,\ddot{y}_0/2(\dot{x})^2 + (x - x_0)^3\,\ddot{y}_0/6(\dot{x})^2 + \ldots.$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis el binomio de Newton y la serie de Taylor son vistas como instrumento de predicción en un contexto de variación.

Situación de Movimiento Uniformemente Acelerado

Siguiendo la idea de la interpolación y de predicción (implícita y explícita) en los estudios de Oresme, Galileo y Newton presentamos situaciones para reconstruir el Cálculo, incorporando aspectos socioepistemológicos.

Suponga que la velocidad de un automóvil es de 20 m/seg, que durante un tiempo ha aumentado hasta 40 m/seg y que necesita 4 segundos para ir de la posición A hasta la posición B ¿Qué aceleración tiene? ¿Cuáles son las velocidades y posiciones del automóvil para 1, 2, 3,4 segundos?
Para calcular la aceleración se utiliza la primera diferencia de las dos velocidades de la forma siguiente: $a = \frac{v_1 - v_o}{\Delta t}$ = 5, la aceleración es (5m/seg^2), y significa que la velocidad aumenta 5m/seg, en cada segundo de tiempo.
El cálculo de la velocidad para cada segundo con aceleración constante es de la siguiente manera: $v_1 = v_0 + a\Delta t = 20m/seg + 5m/(seg)^2(1seg) = 25m/seg$, análogamente se calcula v_2, v_3, v_4, es decir se predicen las velocidades posteriores si se conoce la velocidad inicial y la variación, en este caso la aceleración es constante.
Para calcular las posiciones del automóvil, con la noción de predicción, partiendo del valor inicial de la posición y la variación en cada segundo de la velocidad a un movimiento uniformemente acelerado:

$$s_1 = s_0 + v_0(\Delta t) = 0 + 20m/seg(1seg) + 5m/seg = 20m$$

De la misma manera se calculan las posiciones $s_2 = 45m$, $s_3 = 75m$, $s_4 = 110m$, otra forma de calcular las posiciones anteriores es la siguiente:

$$s_1 = s_0 + v_0(\Delta t) + a_0(\Delta t)^2 = 0 + 20m/(seg)(1seg) + 5m/(seg)^2(1seg)^2 = 25m$$

Como se muestra en la siguiente tabla.

t (hrs)	S (m)	V(m/seg)	$a = \Delta v / \Delta t$ = m/s^2
$t_o = 0$	$s_o = 0$	$v_o = 20$	$a = \frac{v_1 - v_o}{\Delta t} = 5$
$t_o + \Delta t = 1$	$S_1 = 20$	$v_1 = 25$	5
$t_o + 2\Delta t = 2$	$S_2 = 45$	$v_2 = 30$	5
$t_o + 3\Delta t = 3$	$S_3 = 75$	$v_3 = 35$	5
$t_o + 4\Delta t = 4$	$S_4 = 110$	$v_4 = 40$	

Por lo tanto construimos el binomio de Newton:
$s_2 = s_1 + v_1\Delta t$, sustituyendo $s_1 = s_0 + \Delta s_0$ y $v_1 = \Delta s_0 + \Delta^2 s_0$

$s_2 = s_1 + v_1\Delta t = s_o + 2\Delta s_o + \Delta^2 s_o$

El polinomio de interpolación de Newton $s_2 = (1+\Delta)^2 s_o$ es de segundo grado.
Para nuestro problema el polinomio de interpolación como lo escriben Newton – Gregory, para obtener las posiciones es:

$$s_2 = (1+\Delta)^2 s_o = s_0 + k\Delta s_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 s_0$$

Donde $k = \frac{t - t_0}{\Delta t} = \frac{t - 0}{1}$, sustituyendo k, $\Delta s_0 = 20$, $\Delta^2 s_0 = 5$ en la ecuación anterior se llega a la ecuación cuadrática, en la cual se tiene una relación funcional de posición y tiempo.

$$S(t) = \frac{35}{2}t + \frac{5}{2}t^2$$

Entonces de la primera y segunda diferencias finitas divididas se obtiene el polinomio de interpolación de Newton y la serie de Taylor dado como:

$s_2 = (1+\Delta)^k s_o$, haciendo $s_0 = s(t_0)$ y cuando $\Delta t \to 0$ se obtiene $v(t_0) = \frac{\Delta s_0}{\Delta t}$, $a(t_0) = \frac{\Delta^2 s_0}{(\Delta t)^2}$, por lo tanto:

$$s(t_0 + k\Delta t) = s(t_0) + v(t_0)(t_k - t_0) + a(t_0)\frac{(t_k - t_o)^2}{2!} + \ldots$$

Con el diseño de la situación para el movimiento uniformemente acelerado se obtiene el binomio de Newton y una serie finita de Taylor con exponentes enteros positivos, pero también se puede llegar a obtener el binomio de Newton y la serie infinita de Taylor para fenómenos físicos como: la ley de enfriamiento de los cuerpos, crecimiento de poblaciones.

Conclusiones

Los resultados muestran que tanto la predicción e interpolación emergen como práctica social respectivamente en forma implícita. En el momento en que aparece la interpolación y la predicción implícitamente en las concepciones de los científicos del colegio de Merton, Oresme, Galileo, también surge la noción de modelación, graficación y esto da origen a la matematización del movimiento.

En el marco epistémico de Newton aparece más explicita la noción de predicción e interpolación para descubrir su teorema del binomio, así como en la transición a la serie de Taylor. En esa época obedeció a un programa emergente, como alternativo al campo de la ciencia, en ello buscaban modelar, anticipar, predecir e interpolar un fenómeno natural, por ejemplo el caso de la metáfora del flujo de agua.

Consideramos que la predicción como práctica social y la interpolación son unidades de análisis para reconstruir el Cálculo y Física escolar, en un sentido de interacción de los aspectos matemáticos y fenómenos físicos.

Estos antecedentes proporcionan elementos para un cambio epistemológico del Cálculo escolar a través de una visión Newtoniana-Tayloriana considerando las prácticas sociales de la interpolación y la predicción para reorganizar el Cálculo escolar.

Bibliografía

Alksandrov, A., Kolmogorov, A. y Laurentiev, M. (1976). La matemática: su contenido, método y significado. México: Alianza editorial.

Baldor A. Álgebra (1988). México: Editorial Publicaciones Culturales.

Benson, H. (1999). Física Universitaria. Editorial CECSA, vol. I. México.

Boyer, C. (1986). Historia de la matemática. España: Alianza Editorial.

Burden, R. y Faires, J. (1980). Análisis Numéricos. México: Editorial Thomson.

Buendía, G. y Cordero, F. (2003). Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana. La predicción como argumento. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 16(1), 112-116.

Cantoral, R. (2001). Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Editorial Aique.

Edward, C. (1979). The historical development of the calculus.Spriger-Verlag New York Inc. USA.

Hernández, H. (2002).Una epistemología de la matemátización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17(2), 594-600. Cuba.

Hernández, H. (2005). Contrastes epistemológicos del binomio de Newton y la serie de Taylor en dos variables en los fenómenos físicos. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 523-529. México.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2), 131-170.

Piaget, J. & García, R. (1996). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. México: Siglo XXI.

Zill, D. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, tercera edición.

Kuratowski, K (1975). Introducción al cálculo. México: Editorial Limusa.

UNA RESIGNIFICACIÓN DE LA DERIVADA. EL CASO DE LA LINEALIDAD DEL POLINOMIO EN LA APROXIMACIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA

María del Pilar Rosado Ocaña, Francisco Cordero Osorio
Facultad de Matemáticas-UADY; CINVESTAV-IPN, México
rocana@tunku.uady.mx, fcordero@mail.cinvestav.mx
Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior

Resumen

Se presenta el resultado de un trabajo de tesis de maestría, el cual consideró como una problemática específica sobre el concepto de derivada en Educación Superior, de nuestro Sistema Educativo, la ausencia, en la matemática escolar, de marcos de referencia que permitan resignificar la derivada. Así, se contribuyó en formular dicho marco, el cual fue cristalizado en el diseño de *la situación de la linealidad del polinomio.* El diseño se justificó con la aproximación socioepistemológica. En este marco la socioepistemología de la linealidad del polinomio puso en juego tres momentos para lograr las resignificaciones: a) Traslación de la gráfica; b) Tendencia de la gráfica y c) Argumentación gráfica.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación se propuso buscar un marco de referencia que ayudara a *resignificar la* derivada para el caso de una función polinómica. La aproximación socioepistemológica nos ayudó a precisar que dicha problemática se trataba de la ausencia, en la matemática escolar, de marcos de referencia que permitieran resignificar la derivada. Por lo que, nuestra contribución consistió en formular dicho marco, a través del diseño de *la situación de la linealidad del polinomio.* El diseño se valió de la perspectiva teórica, la cual, asume que cuando se trata de fenómenos didácticos de la matemática, la construcción de ésta es eminentemente social.
En este trabajo de investigación tomamos como problemática, que *la derivada de una función no logra resignificarse en las experiencias escolares.* Prototipos de la derivada como "la pendiente de la recta tangente a una curva" no se resignifica y algunas veces es el "obstáculo" para que se resignifique. Pero aún más grave, los marcos de referencia para posibilitar tales cuestionamientos están ausentes en el propio discurso matemático escolar. Siendo así, nos propusimos buscar un marco de referencia que ayude a resignificar la derivada.
La investigación, finalmente, ofreció datos importantes para la construcción del marco de referencia. Estos fueron sobre la función y forma del conocimiento matemático; sobre el uso y la modelación de lo gráfico; y sobre las epistemologías de prácticas que generan esquemas para el rediseño de situaciones didácticas.

PROBLEMÁTICA

Asumimos que la derivada de una función polinómica, no logra resignificarse en las experiencias escolares. Es decir, prototipos de funciones polinómicas generalmente no son resignificadas para cuestionar, si la curva polinómica se comporta como una recta en un punto determinado o, si tal comportamiento de la recta afecta el comportamiento

de la curva o, si el comportamiento de la recta tiene relación con la parte lineal del polinomio en cuestión. Pero más aún, el marco de referencia para posibilitar tales cuestionamientos está ausente en el propio discurso matemático escolar.
La problemática que atiende este proyecto, se centra en la ausencia de significados que se presenta en contenidos de precálculo y cálculo. Específicamente, en el concepto de la derivada. Algunos trabajos de investigación reportan que los estudiantes no incorporan más significados al concepto de la derivada, que el de la recta tangente a una curva; por ejemplo, se documenta que en la didáctica actual, todavía se halla énfasis en los aspectos formales y rigurosos, dejando de lado los aspectos epistemológicos y psicológicos concernientes a los conceptos. En el cálculo escolar, los conceptos fundamentales son señalados por la derivación e integración, los cuales son explicados a través de las concepciones de límite y de función, acompañados de sus representaciones geométricas, la recta tangente a una curva, y el área bajo la curva. Cabe señalar que esta didáctica ha generado una "cultura", en el profesor y estudiante; ellos pueden "decir" lo que es la derivada y la integral a través de prototipos geométricos, sin tener una explicación que les permita estudiar fenómenos de variación continua, sólo lo conciben como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación (Cordero, 1997). Esta didáctica privilegia los argumentos analíticos, obligando matizar los conceptos derivada e integral a través de los dominios de las funciones. Sin embargo, estudios epistemológicos indican la necesidad de interactuar a través de diferentes marcos, tales como el geométrico, numérico y algebraico (Douady, 1984). Entonces, se requiere crear una didáctica que equilibre los diferentes argumentos que emanan de dichos marcos. Una consecuencia que se produce cuando se privilegian los argumentos analíticos consiste en que la didáctica toma los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin considerar que estos conceptos tienen que ser construidos por el sujeto. Tal práctica didáctica elimina la posibilidad de considerar al conocimiento matemático como una herramienta funcional, limitando al estudiante a tratar con distintas clases de situaciones.

HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Se propone formular una resignificación de la derivada basándose en la construcción de argumentos para una propiedad de los polinomios.

A tal propiedad se le ha llamado *"linealidad del polinomio"*, la cual puede soportar un argumento gráfico para la derivada ya que relaciona a la recta tangente en un punto con el comportamiento de la función en un intervalo de dicho punto, en particular para el punto $x_0 = 0$, como se muestra en la siguiente gráfica (**Figura 1**).

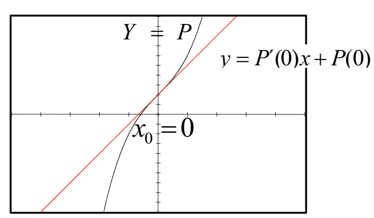


Figura 1

La hipótesis de investigación consiste en afirmar que el comportamiento tendencial de las funciones es considerado como el argumento del estudiante, en el contexto gráfico, que posibilitará la nueva construcción, y con ello construirá la propiedad de linealidad del polinomio.

Esta propiedad puede enunciarse de la siguiente manera:

En todo polinomio $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, la parte lineal $a_1 x + a_0$ es la ecuación de la recta tangente a la curva de $P_n(x)$ en $x_0=0$ (**Figura 2**).

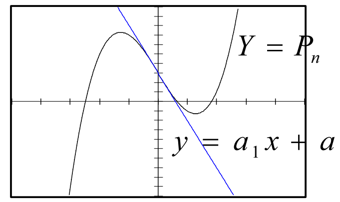


Figura 2

En ese sentido, la linealidad del polinomio consiste en formular una función con comportamiento tendencial. La construcción formula la tendencia y el patrón de comportamiento.

El argumento consistirá en establecer relaciones entre una función polinómica y la ecuación de una recta, a través de determinar un comportamiento que tiende a otro comportamiento cuando *x* toma valores en un intervalo de cero, con ello el estudiante reconstruirá significados a las relaciones (**Figura 3**).

$$h(x) = P_n(x) + recta$$

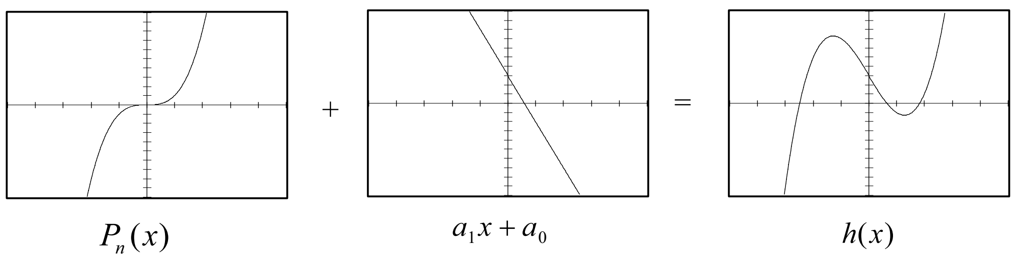


Figura 3

De esta manera, se generan argumentos para predecir el comportamiento de las gráficas de funciones polinómicas, sin necesidad de realizar procedimientos analíticos, basándose únicamente en la forma algebraica del polinomio. Y viceversa, a partir de la forma de la gráfica estimar la función polinómica.

EL DISEÑO DE SITUACIÓN

Con el propósito de ir formulando un método que vigile la hipótesis de investigación (según la socioepistemología), acudimos a un aspecto metodológico el cual consiste en tener un camino (lo más explícito posible) que garantice que el diseño de la situación refleje la hipótesis en cuestión. El concepto descomposición genética de la teoría APOE ayudó a tal fin. Sin embargo la aproximación socioepistemológica, obligó ampliar dicho concepto puesto que las construcciones mentales necesariamente fueron tratadas en el marco de las resignificaciones que se generan en la actividad humana o práctica social.
En ese sentido, señalamos una serie de puntos secuenciales que normaron el diseño de la situación.

- **La socioepistemología de la linealidad del polinomio**. La aproximación socioepistemológica nos señala que una resignificación de la derivada se da en una situación de linealidad del polinomio, cuya argumentación es expresada por el comportamiento tendencial del polinomio en cuestión (todo ello es la hipótesis).

• **Una descomposición genética con base en la socioepistemología**. Se formula una descomposición genética para la construcción de argumentos en la linealidad del polinomio. Para ello, se considera que los argumentos están formados por significados que generan procedimientos y que en la relación entre los significados y los procedimientos, se generan procesos y objetos, como los diferentes niveles cognitivos que reflejan los estudiantes ante una situación determinada. Por lo que, en esta descomposición genética se consideran esos cuatro elementos de la siguiente manera:

- ♦ **Significados**. Los patrones de comportamiento son los significados para las funciones resultantes al sumar una función cuadrática con una recta (desplazamiento de la gráfica), los patrones de comportamiento para las funciones resultantes al sumar una función cúbica con una recta (tendencia de la gráfica) y los patrones de comportamiento de las funciones resultantes al sumar un polinomio con una recta (argumentación de la gráfica).
- ♦ **Procedimientos.** Los procedimientos consisten en variar parámetros en las ecuaciones de las rectas que se suman a una función polinómica específica, así como graficar las funciones resultantes junto con las ecuaciones de las rectas sumadas en un mismo sistema de ejes coordenados, indicar la parte lineal en la gráfica de un polinomio y en algunos casos, proponer la expresión analítica para una gráfica dada.
- ♦ **Procesos-Objetos**. Los diferentes niveles cognitivos se reflejan en las conjeturas y generalizaciones descritas de acuerdo con los significados y procedimientos planteados para cada una de las secuencias que integran la situación, a través de concebir a la función como una instrucción que organiza comportamientos.
- ♦ **Argumentos**. Los argumentos son generalizaciones a través de las justificaciones dadas a los procedimientos realizados para sustentar las conjeturas que se establecen en los significados, en los procedimientos, y en los procesos-objetos.

SECUENCIA DE LA SITUACIÓN

La situación de la linealidad del polinomio conviene formularla a través de tres momentos y éstos a su vez, plantearlos por actividades. A cada uno de estos momentos se les llamará secuencia.

Situación

S1. Traslación de la gráfica
S2. Tendencia de la gráfica
S3. Argumentación gráfica

El proceso de construcción que aparece en la situación es como sigue: la secuencia uno (S1) formula una conjetura: la parábola $y = x^2$ se traslada vertical y/o horizontalmente, dependiendo de los coeficientes de la recta, y el traslado no admite cambios de pendiente de la parábola; la secuencia dos (S2) formula una conjetura distinta a la de la secuencia uno, la cual provoca una contradicción debido a que se espera la misma conjetura para la secuencia dos: la gráfica de $y = x^3$ no se traslada, pero sí cambia de pendiente. Los participantes se enfrentan a la contradicción, y para resolverla tienen que reformular la conjetura 1 con base en la conjetura 2. La linealidad (S3) es el argumento que satisface ambas preguntas y posibilita la generalidad para cualquier polinomio.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para obtener evidencias de la hipótesis de investigación, se realizó la puesta en escena para la implementación de la situación diseñada para generar argumentos en la linealidad del polinomio, para lo cual se contó con cinco estudiantes de Ingeniería en Alimentos, de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología (UPIBI), quienes habían llevado al menos un curso de cálculo. La dinámica que se llevó a cabo con los estudiantes consistió en una pequeña introducción del uso básico de la calculadora graficadora, ya que se utilizó como herramienta para realizar las actividades de las secuencias 1 y 2, posteriormente se formaron dos equipos y se llevó a cabo la aplicación de las actividades que conforman la situación (una pregunta inicial y tres secuencias de actividades) en una sesión realizada en el laboratorio de Didáctica y Cognición del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Los estudiantes entrevistados fueron audiograbados y videograbados, con la finalidad de captar todas las discusiones, los comentarios, sugerencias, dudas y respuestas que surgieran durante cada entrevista, y con ello tener detalles más exactos para el análisis de cada actividad. Cabe mencionar que en una sesión posterior, los dos equipos tuvieron la oportunidad de confrontar sus conjeturas planteadas en cada secuencia y realizar una actividad adicional que sirvió para observar si los estudiantes habían logrado generar argumentos en la situación de linealidad del polinomio. Se consideraron aspectos metodológicos para la recolección de datos, como el análisis a priori, para tratar lo hipotético, y el análisis a posteriori, para tratar lo que realmente hicieron los estudiantes, y se confrontaron ambos análisis para llegar a una conclusión puntual de la situación de la linealidad del polinomio.

CONCLUSIONES

Esta investigación tuvo que ver con varios aspectos de la matemática educativa:

1. La problemática en el nivel superior.
2. La aproximación teórica socioepistemológica.
3. La contribución didáctica.

Los tres aspectos deben interconectarse para apreciar los resultados de la investigación. Para ello, señalamos los principales supuestos. Asumimos que la matemática del nivel superior está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, donde a su vez adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003). Sin embargo, la evolución de la didáctica de la matemática no ha considerado esta dirección. De ahí la necesidad de crear un marco de referencia para entender los fenómenos didácticos en esa matemática escolar. Creemos que uno de esos marcos es la socioepistemología, la cual busca epistemologías más robustas que no sólo se centren en los conceptos matemáticos, sino considere las prácticas sociales que dan cuenta del conocimiento matemático. Tales epistemologías deberán ser más acordes con el conocimiento funcional, de ahí entonces la contribución didáctica.

Es por ello, que la epistemología, en nuestro caso particular, de la linealidad del polinomio, tiene un énfasis especial en la intencionalidad que demanda el ingreso al sistema didáctico, la cual debe modelar las prácticas sociales. Debe "trazar una ruta" de las resignificaciones de tal conocimiento matemático consistente con las formas de reorganización de los grupos humanos, es decir, debe trazar una socioepistemología.

En ese sentido la epistemología de la linealidad del polinomio, nos dió información sobre los diferentes contextos que la linealidad tuvo que confrontar. Además, nos brindó

un marco argumentativo donde los significados, procedimientos y los procesos y objetos del comportamiento tendencial de las gráficas y de las funciones resignifican la derivada en las funciones polinómicas a través de tres momentos en los que se debate, el funcionamiento y la forma del comportamiento lineal intrínseco al polinomio.
La hipótesis de investigación fue formulada en los términos de considerar que existe un argumento llamado comportamiento tendencial de las funciones que permite a los estudiantes, a través del argumento gráfico construir significados de diferentes conceptos matemáticos (Cordero, 1998, 2001, y 2003; Domínguez, 2003; y Campos, 2003). En nuestro caso, la hipótesis consistió en afirmar que con la situación de linealidad del polinomio los estudiantes construirían argumentaciones gráficas según las secuencias de la situación (traslación de la gráfica, tendencia de la gráfica y argumentación gráfica). Con tales argumentaciones gráficas, el modelo original de la derivada (la derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto) se resignifica como la linealidad del polinomio en el cual se debate, como ya lo anotamos, entre *la función* y *la forma* del comportamiento tendencial del mismo.
Entonces, la linealidad del polinomio es intrínseco a éste, es decir, siempre ha estado ahí (todo polinomio se compone de su parte lineal), sin embrago, en el discurso matemático escolar, no se había generado un argumento de ningún tipo a partir de ella. El privilegio algebraico, en algún sentido, ha normado las propiedades del polinomio pero ha obscurecido otras. La situación de linealidad del polinomio es en sí, un marco de referencia que busca los equilibrios de contextos que intervienen en la construcción de la matemática para ir rompiendo tales privilegios.
Sin embargo, ¿qué quiere decir la linealidad del polinomio, en la didáctica de la matemática? Creemos que podría tener varios significados con direcciones diferentes:

1. *Función y forma*. La linealidad tiene como *función* determinar un comportamiento *sui generis* del polinomio cuando éste cruza al eje de las *y*. El polinomio, en ese punto, se comporta como su parte lineal. Este hecho permite identificarle una *forma* a la gráfica del polinomio, de ahí la construcción del argumento gráfico. Con esa forma gráfica se pude estimar la parte lineal del polinomio en cuestión y viceversa, con la parte lineal del polinomio se pude bosquejar la gráfica de la función. Tal situación se generaliza para cualquier polinomio.
2. *Uso y modelación*. La función y la forma de la linealidad se mantiene y se desarrolla a través del argumento comportamiento tendencial de las funciones. Tal argumento establece un *uso gráfico* que corresponde a la *modelación* de "comportamientos tendenciales". Es decir, la parte lineal del polinomio es una instrucción que organiza el comportamiento de éste. La esencia del comportamiento está en la gráfica. En ese sentido la relevancia de la gráfica está en la determinación cualitativa del comportamiento y en la consistencia de su forma analítica.
3. *Epistemología de prácticas*. Una práctica es modelar comportamientos para predecir, ésta es transformada en la situación "didáctica" en argumento. Según nuestro planteamiento socioepistemológico debemos generar una epistemología que desarrolle dichas prácticas y como consecuencia se genera conocimiento matemático. La investigación quiere dar cuenta de éste hecho, la situación de linealidad del polinomio es el ejemplo para el concepto de derivada.

Todos estos significados seguramente fortalecen el marco de referencia construido para resignificar, en este caso, la derivada. Didácticamente, la linealidad del polinomio es una reorganización de la obra matemática, el cual, es un eje que organiza contenidos matemáticos funcionalmente.

Palabras Claves: Resignificación, Socioepistemología, Linealidad del Polinomio.

Referencias Bibliográficas

Campos, C. (2003). *Argumentaciones en la transformación de las funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40.

Cordero, F. (1997). Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada. *Serie: Antologías*, 1, 159-170. Cinvestav, México.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y del análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(1), 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 16, Tomo 1*,* pp. 73-78). México: Editorial Iberoamérica.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Douady, R. (1984). Dialectique outil-objet et jeux de cadres: une realization dans tout le cursus primaire. Unpublished Doctoral Dissertation, Université Paris 7.

DE LA ARITMÉTICA AL CÁLCULO: LA RAÍZ CUADRADA Y SUS DISFUNCIONES EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Maria Patricia Colín Uribe, Gustavo Martínez, Rosa María Farfán
Universidad Autónoma de Guerrero, México
pcolin@cimateuagro.org

Campo de investigación: Pensamiento variacional

RESUMEN

La raíz cuadrada desempeña un papel fundamental en todos los niveles escolares, desde los básicos hasta los universitarios. Concepciones del tipo: a) *la ecuación* $x^2=4$ *tiene sólo una solución la cual es* $x=2$*; b) la expresión* $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ *tiene cuatro valores que se obtienen de combinar los resultados* $\sqrt{4}=\pm 2$ *y* $\sqrt{9}=\pm 3$, muestran la complejidad propia de este concepto matemático. La presente investigación se centra en estudiar este concepto desde el punto de vista de la aritmética, posteriormente del álgebra y por ultimo del cálculo, mediante el análisis de libros de texto y la aplicación de un cuestionario desde el nivel básico hasta el superior. Finalmente mostraremos concepciones específicas relativas a la raíz cuadrada que permanecen en los estudiantes.

La presente investigación tiene su marco de referencia en la Matemática Educativa, la cual tiene como uno de sus objetivos el de hacer descripciones del funcionamiento del sistema didáctico: *saber - profesor – alumno*

Nuestro tema surge a partir de las concepciones de estudiantes de diversos niveles educativos sobre la función raíz cuadrada, y, siendo el sistema didáctico nuestro objeto de estudio, reconocemos la importancia del estudio de *fenómenos didácticos*; es decir aquellos fenómenos que suceden al seno del sistema didáctico conformado con la intención comunicar contenidos, métodos y significados matemáticos, de entre los cuales se derivan los *fenómenos ligados a las concepciones y representaciones de los estudiantes*.

Nuestra investigación encuentra su marco de referencia en la línea de investigación denominada desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998); la cuál busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio. Dentro de las investigaciones en esta línea se encuentran aquellas que prestan atención a la construcción de la noción de función (Farfán et al., 2002a, 2002b). dentro de éstas se encuentran las investigaciones que elaboran explicaciones que dotan de particularidades a su explicación, especialmente en lo referente a las funciones trascendentes como lo son las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.

Con lo anterior podemos decir que la construcción de la noción de función posee particularidades íntimamente relacionadas con el "tipo" de función que se trate. Aquí, nuestro interés por la función raíz cuadrada adquiere pertinencia; pues una de nuestras hipótesis consiste en señalar que ésta posee particularidades específicas que generan fenómenos didácticos específicos.

Nuestro problema de investigación consiste en la descripción de los fenómenos didácticos ligados a las concepciones de los estudiantes respecto a la raíz cuadrada a lo largo de su vida escolar

De acuerdo con nuestra perspectiva sistémica la descripción de las concepciones se encuentran estrechamente ligados a los aspectos escolares y a la naturaleza y significados de la raíz cuadrada, como ejemplo podemos mencionar que en matemáticas la noción de “raíz” posee al menos dos significados explícitos. La primera es usada para señalar cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación. La segunda acepción es usada para señalar a la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado. En este sentido la radicación (la acción de determinar la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado) es considerada la operación inversa de la potenciación (la acción de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado). En particular, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. El operador tradicional para esta operación es el símbolo $\sqrt[2]{\ }$, pero convencionalmente se utiliza el símbolo $\sqrt{\ }$.
Así, la noción de raíz cuadrada es un operador matemático relacionado con otro operador (elevar al cuadrado) a través de un proceso inverso. De esta manera los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada esta fuertemente condicionado a aquellos presentes en el operador elevar al cuadrado y aquellos presentes en los procesos inversos de un operador.

Nuestra investigación consta de:
Análisis epistemológico: ¿Cuál es la naturaleza y significados de la raíz cuadrada?
El objetivo de este análisis es determinar los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada desde un punto de vista histórico-epistemológico; estudiamos a grosso modo diferentes épocas rastreando que tipo de construcciones fueron realizadas en relación a la raíz cuadrada en tanto un operador matemático que se desarrolla e incluye en al menos cuatro contextos diferentes: el geométrico, el aritmético, el algebraico y el funcional. En el contexto aritmético el operador raíz cuadrada se aplica a números concretos, en el contexto algebraico es aplicado a números generalizados e incógnitas y en el contexto funcional es aplicado a variables.
En el contexto geométrico, el Libro II, Elementos de Euclides muestra la presencia del una especie de “raíz cuadrada geométrica”; entendido esto como un proceso inverso al de construir un cuadrado de una recta. Cabe notar que este proceso puede ser identificado “cuadrar” una figura. En cuanto a los babilonios, este concepto era utilizado para “cuadrar” rectángulos. En el papiro de Berlín se encuentra registrado un problema que muestra como calculaban raíces cuadradas
En el contexto aritmético no encontramos evidencia en los escritos de Euclides, pero en cuanto a los babilonios, se han encontrado tablillas que contienen tablas de cuadrados de números, e incluso un problema resuelto en el que se muestra un algoritmo para calcular raices cuadradas.
En el contexto algebraico existen diversas interpretaciones que pueden darse a la letra (Rojas et al., 1997; Ursini, 1996), para nuestra investigación nos interesan las siguientes
a) Letra como incógnita. Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido.
b) Letra como número generalizado. La letra se interpreta como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor especifico.
En términos bastante resumidos, encontramos información en el Libro primero de arithemetica algebratica de Marco Aurel (publicado en Valencia en 1552) y al que hace referencia (Melvilla, 1993) y al de Chuquet en *La triparty en la Science des Nombres* (documento fechado en 1484) del cual hace referencia (Paradís, 1993):

Por ultimo, en el contexto funcional, encontramos obras de finales de siglo XVI en donde no es posible encontrar curvas con ecuaciones del tipo $y = \sqrt{x}$, pero si la curvas con ecuaciones del tipo $y^2 = x$. Esto señala que el operador raíz cuadrada no es necesario en contexto en donde las variables no guardan mingo jerarquía una respecto a otra

Análisis didáctico: ¿Cuáles son las costumbres escolares al momento de tratar la raíz cuadrada?. En esta parte realizamos una revisión bibliográfica de los libros de texto de matemáticas que se utilizan en los diferentes niveles educativos mexicanos. Encontramos que el operador raíz cuadrada es oficialmente introducido en el primer año de Educación Secundaria. En este grado, es utilizado implícitamente como la operación inversa de elevar al cuadrado números naturales, es decir, únicamente se obtienen raíces cuadradas exactas a través de tablas de cuadrados que los estudiantes han obtenido previamente. El tema es nuevamente tratado hasta tercer año, con el cálculo de raíces cuadradas por diversos métodos (algoritmo tradicional o método de la "casita", babilonio, gráfico, de newton y aproximación). Aquí, la raíz cuadrada de un número puede ya tener parte decimal. En este grado escolar, la raíz cuadrada es utilizada en diversos temas:

la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

el cálculo de longitudes y distancias entre dos puntos del plano cartesiano,

el cálculo de uno de los catetos de un triangulo rectángulo

el cálculo de la diagonal de cubos y paralelepípedos.

En general, los libros de texto autorizados por la SEP para la Escuela Secundaria definen al proceso de calcular raíces cuadradas como

"La raíz cuadrada de un numero a (donde a>0) es otro numero b tal que al elevarlo al cuadrado sea igual a a , es decir, b es la raíz cuadrada de a si b^2=a "

En cuanto a los libros de texto utilizados para los niveles medio superior y superior, encontramos que éstos manejan la noción de raíz cuadrada en tres contextos, el algebraico, el aritmético y el funcional.

Análisis cognitivo: ¿Qué concepciones poseen los estudiantes respecto a la raíz cuadrada? Para contestar esta pregunta utilizamos un cuestionario el cual aplicamos a estudiantes de distintos niveles educativos: Educación Secundaria, Educación media superior y superior.

El cuestionario utilizado constó de 16 preguntas relacionadas al concepto matemático raíz cuadrada. Las concepciones ligadas a cada una de las preguntas del cuestionario son las siguientes:

La raíz cuadrada es una operación básica.

Entenderemos por operación básica de la aritmética a aquella que aparece con más frecuencia en los cálculos matemáticos cotidianos que realizamos.

Significado del operador $\sqrt{\ }$

Definimos al operador raíz cuadrada como el proceso que permite encontrar números tales que al multiplicarlos por si mismos nos den el número que se encuentra dentro del operador

Existencia de raíces cuadradas negativas

Un número tiene 2 raíces cuadradas, de las cuales una es negativa

Si $a^2 = b \quad \textit{entonces} \quad a = \sqrt{b}$

Un numero tiene 2 raíces cuadradas, del mismo valor pero de signo contrario. La expresión $\sqrt{b}$ representará la raíz aritmética o principal[1]

[1] Entendemos por raíz principal o aritmética a la raíz positiva

$\sqrt{a} = \pm b$

Un numero tiene 2 raíces cuadradas, del mismo valor pero de signo contrario.

$\sqrt{a^2} = a$

La radicación es la operación inversa de la potenciación

$\sqrt[2]{a} = \frac{a}{2}$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ representa una división

Si $a = b \quad entonces \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$

Se aplica la propiedad *"radicalizadora"* de la igualdad

- ***Las leyes de los exponentes son válidas***

Se cumplen que $(a^{\frac{1}{2}})^2 = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$

Conclusiones: Con los resultados obtenidos por la presente investigación, mostramos que las concepciones que tienen los estudiantes con respecto a la noción de raíz cuadrada y que se presentan desde los niveles básicos de enseñanza hasta los superiores son las siguientes:

La raíz cuadrada NO es una operación básica, puesto que no aparece en los cálculos cotidianos

El operador raíz cuadrada es proceso que permite encontrar números tales que al multiplicarlos por si mismos nos den el número que se encuentra dentro del operador, pero los números negativos NO SON CONSIDERADOS como raíces cuadradas independientes

La ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene una sola solución, puesto que solo se toman en cuanta las raíces principales

La radicación es la operación inversa de la potenciación, y podemos extenderla a todos los reales, por lo cual es valido lo siguiente $\sqrt{a^2} = a$

La expresión $\sqrt[2]{a}$ representa una división en la cual voy a encontrar la mitad del numero dentro del operador

Las propiedades de la igualdad se extienden a los radicales, por lo cual es válido que ***Si*** $a = b \quad entonces \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$

Las leyes de los exponentes se cumplen: $(a^{\frac{1}{2}})^2 = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$ para cualquier valor de ***a***

Bibliografía

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Euclides (2002). *Los elementos de Euclides*. Versión electrónica disponible en http://www.xtec.es/~jdomen28/indiceeuclides.htm#libroVII.
Rojas, P. et al. (1997). La variable matemática como problema puntual. En *La transición Aritmética al Álgebra (Capítulo 39, pp. 30-66)*. Colombia: COLCIENCIAS y Universidad Distrital Francisco José Caldas (Santa Fe de Bogotá)

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación matemática. 8*(2), 33-40.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Cehuquet. En T.

Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al “Libro primero de arithmetica algebratica” de Marco Aurel. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

PRÁCTICA SOCIAL DE PREDECIR Y EL USO DE HERRAMIENTAS EN ESTUDIANTES DE ECONOMÍA.

Saúl Ezequiel Ramos Cancino y Germán Muñoz Ortega
Facultad de Ciencias Sociales, CIMATE UNACH, México.
saulramcan@hotmail.com ; saulram@prodigy.net.mx

Campo de Investigación: Pensamiento variacional – Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior.

Resumen.

El papel que juega el Cálculo infinitesimal en los cursos que se imparten a nivel superior en las diferentes licenciaturas a través de su planes y programas de estudio, y en las bibliografías que utilizan para la enseñanza de éste, nos dicen que el cálculo debe ser una herramienta para resolver diferentes problemáticas que se le presenten tanto en la licenciatura así como en el ejercicio de su profesión, éstas pretensiones desde nuestro punto de vista no se están logrando. En base a la problemática anterior se formuló una epistemología inicial para diseñar situaciones de variación que permitan a los estudiantes reconstruir conceptos microeconómicos a través de supuestos epistemológicos que justifican la naturaleza de éstas y a su vez consideran que el funcionamiento mental debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de herramientas predictoras.

Presentación:

La enseñanza en general de las matemáticas y en particular el Cálculo, ha sido parte fundamental en la actividad científica durante los últimos años. El papel que juega el Cálculo en los cursos que se imparten a nivel superior en las distintas licenciaturas afines a las ciencias naturales a través de sus planes y programas de estudio, y de las bibliografías que se utilizan para la enseñanza de éste, nos dicen que el Cálculo debe ser una herramienta para resolver diferentes problemáticas que se presenten tanto en la licenciatura así como en el ejercicio de su profesión. A lo largo del tiempo, han surgido otras instituciones que no estudian las ciencias naturales y que han incluido a las matemáticas en su curricula escolar y en especial el Cálculo. Las ciencias sociales es una de ellas y en especial la ciencia económica. Como es sabido el Cálculo tiene como origen la ciencias que estudian la naturaleza, en especial las ciencias físicas, cuyas necesidades eran predecir el movimiento (Cantoral, 2001). La ciencia económica tiene como principales objetivos la interpretación y la predicción de fenómenos económicos, al igual que las ciencias físicas.

Entender el papel que ha desempeñado y desempeña el Cálculo desde su origen hasta la actualidad en las diferentes ciencias, y la forma como éste se enseña en las instituciones escolares que imparten las diferentes licenciaturas son aspectos importantes que estudia la Matemática Educativa y que en tanto campo de conocimiento, tiene como responsabilidad dar cuenta de la constitución de los saberes matemáticos y cómo éstos ingresan al sistema didáctico.

Teniendo como referencia que el Cálculo se utiliza como herramienta de predicción en las ciencias físicas, y que éste juega un papel muy importante en el proceso de matematización de la ciencia económica y de otras ciencias, consideramos que es necesario saber; ¿cómo el Cálculo originado en la práctica social de predecir, se incorpora a otras prácticas sociales asociadas a la Economía?. El estudio de esta pregunta se realizó a través de una aproximación socioepistemológica, ya que ésta brinda una aproximación teórica cuya tesis primordialmente plantea dar cuenta del conocimiento a través de las prácticas sociales de los grupos humanos que lo posibilitaron, y la transformación de estas prácticas cuando existe una intencionalidad para que el saber matemático ingrese al sistema didáctico (Cordero, 2002). En el marco anterior y a través de esta aproximación teórica nuestra hipótesis fue:

- La matemática que utiliza la ciencia económica en especial el Cálculo está ligado a la predicción como práctica social y a los procesos de variación y cambio.

Consideramos que es de gran importancia conocer cuales fueron las causas que originaron la necesidad de usar el Cálculo en la ciencia económica, identificar las prácticas sociales que permitieron esta inserción, y con ello justificar la pertinencia de éste dentro de la curricula escolar. Buscando las necesidades y la intencionalidad del uso del cálculo en los diferentes conceptos económicos se ha encontrado el desarrollo cronológico de la evolución de esta metodología, siguiendo como referencia a Arrow e Intriligator (1989), donde clasifica al proceso de la matematización de la economía en tres periodos: 1.El período inicial de la economía matemática (período marginalista, 1838-1947), 2. El período de los modelos lineales y la teoría de los conjuntos (1948-1960), 3. El tercer período, que va de 1961 hasta la actualidad, denominado período de integración del herramental básico, el cálculo infinitesimal por un lado y la teoría de conjuntos y los modelos lineales por el otro.

Para ello se realizó un análisis socioepistemológico en coherencia con nuestra pregunta e hipótesis de investigación. Revisamos diferentes teorías elaboradas antes del periodo marginalista[1] y se tomó la decisión de analizar la teoría de la Renta que se encuentra ubicada en el periodo clásico de la evolución de la ciencia económica con el fin de visualizar el germen del Cálculo.

En este periodo el crecimiento económico es el contexto social que estimula el desarrollo de la teoría clásica de la Renta. Dentro de ella se observó que aparece la variación en sus elementos básicos, los cuales son: los procedimientos de comparación, las nociones de acumulación y valor acumulado (predicción). En el periodo clásico, en particular en el contexto del surgimiento de la teoría de la Renta, el principal interés estaba en el crecimiento económico, o la transición de un estado progresivo a un estado estacionario. En este momento se detendría una nueva inversión (no hay acumulación adicional de capital), por lo que fue de interés predecir cuándo se presentaría el estado estacionario. Por lo tanto, la predicción como práctica social juega un papel muy importante para los economistas de dicha época (Ramos, 2005a; Ramos, 2005b).

Unos de los medios de difusión que tiene la ciencia económica actualmente en la formación de nuevos economistas son las diferentes bibliografías que existen para lograr que éstos dominen el instrumental matemático para entender diferentes teorías que se han formulado en términos matemáticos y utilizar a ésta como una herramienta que todo economista debe de tener. También se realizó un análisis global de los contenidos de los textos que son utilizados en la Licenciatura de Economía y en los libros convencionales que se utilizan en los diferentes cursos de Cálculo, en este análisis se observa que tienen la misma estructura tanto en el contenido, como en la forma de presentación de las temáticas para que los estudiantes aprendan Cálculo. Es decir, se encuentran inmersos en la enseñanza clásica del

[1] La evolución de la Economía en sus grandes etapas de desarrollo la podemos clasificar, en términos generales, según la interpretación de profesores de la Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la UNACH y con base en varios autores de la siguiente manera: pensamiento antiguo y medieval, preclásico, clásico, marginalista, neoclásica, keynesina y neoliberal.

Cálculo. La estructura de los cursos de Cálculo la podemos resumir en términos generales de la siguiente manera: 1) Funciones, 2) Límites de funciones, 3) Continuidad, 4) La derivada, 5) Aplicaciones de la derivada, 6) La integral, 7) Aplicaciones de la integral, 8) Métodos de integración, 9) Ecuaciones diferenciales.En cuanto a la presentación de los contenidos específicos a enseñar, se realiza de la siguiente manera: a) Definición (concepto, demostraciones, teoremas, etc.), b) Ejemplos y c) Problemas ("aplicaciones").Esta estructura establece una definición matemática y un discurso que gira alrededor de este concepto matemático. Este tipo de estructura que tienen los libros actualmente para la enseñanza del Cálculo y específicamente en la Licenciatura de Economía creemos que no están cumpliendo con el propósito de dar a los estudiantes el instrumental matemático que ellos deben de tener para poder utilizarlos como las herramientas necesarias que la licenciatura y la ciencia económica exige.

Las propias necesidades del ser humano lo han llevado a la búsqueda de los medios y formas para salir adelante, para lograr su desarrollo y seguir evolucionando. Esto genera diversas prácticas y actividades sociales, con el propósito de resolver diferentes problemáticas que enfrenta la sociedad según el contexto en que se presente y considerando la cosmovisión de la cultura referida. El ser humano en la búsqueda por resolver diferentes problemáticas ha desarrollado conocimiento con intencionalidades específicas que dependen estrechamente del problema y el contexto social en que se presenta. Es decir, de la convergencia de las características sociales e individuales de los participantes, el entorno físico, las prácticas que realizan, la intencionalidad de los participantes y los supuestos compartidos. Eso da como resultado ciertas actividades sociales, tal como, las prácticas de matematización de los diferentes fenómenos ya sean físicos, químicos, sociales, etc. A lo largo de la historia se han encontrado diversas nociones y procedimientos matemáticos que surgen del proceso de comprender y transformar diversos fenómenos naturales o sociales. La predicción y la modelación son prácticas sociales (Cantoral, 2001; Arrieta, 2003). Estas prácticas tienen una intencionalidad y se desarrollan en interacción con fenómenos, conjeturando y realizando las predicciones acerca de éstos fenómenos a través de la utilización de modelos. Un modelo es " algo utilizado en sustitución de lo modelado, la manipulación del modelo nos permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención " (Arrieta, 2003, p. 35), por lo que un modelo para estas prácticas sociales tienen la función de herramienta[2] para comprender e intervenir un fenómeno. La modelación y la predicción, han y siguen jugando un papel muy importante en la actividad humana y sobretodo en la construcción del conocimiento matemático, ya que la actividad humana de hacer matemáticas tiene una intencionalidad determinada. Incluso esta intencionalidad no es individual, sino social y que tiene como fin encontrar en ellas una herramienta para el desarrollo de la humanidad.

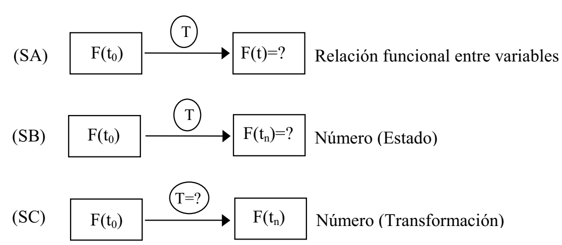
Por otra parte el estudio de la matematización de los fenómenos dentro de la Matemática Educativa ha permitido identificar diferentes categorías del conocimiento matemático basada en el lenguaje de las herramientas. Se identifican así todas las relaciones entre el

[2] Un objeto en sí mismo no es herramienta, es herramienta hasta que el hombre lo utiliza con una intención, determinada no individualmente, sino socialmente. Las herramientas no sólo son objetos físicos, también lo son el lenguaje y otros entes abstractos. La importancia de las herramientas no radica en las herramientas en sí, sino en el programa que orienta su uso (Arrieta, 2003).

conocimiento matemático, donde la naturaleza de esas relaciones lleva directamente a las formas de construir los procesos y objetos, más que los procesos y objetos en sí. Dar cuenta del conocimiento matemático en la Economía través de las prácticas sociales de los grupos humanos que lo posibilitaron, creemos que ayudaría a cumplir con la intencionalidad por el cual se encuentra en la curricula escolar.
A partir del al análisis socioepistemológico y la problemática de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo y en especial los estudiantes de la Licenciatura en Economía se diseñaron e implementaron situaciones que permitan al estudiante reconstruir conceptos microeconómicos a través de supuestos epistemológicos que justifican la naturaleza de éstas y que a su vez consideran las cosmovisiones y prácticas sociales que permitieron matematizar la ciencia económica, con la finalidad de verificar si en el contexto actual tienen significado ciertas nociones que se dieron en el pasado, y que éstas a su vez fueron usadas para resolver diferentes problemáticas que se presentaron en esa época, tanto en las ciencias físicas como en la ciencia económica. Estas nociones están ancladas a la actividad humana dentro de las cuales podemos mencionar a la predicción, la modelación y el uso de herramientas. La naturaleza de las situaciones que se implementaron se diseñaron a partir del contexto del marco epistémico de Newton, lo que implica que están inmersas en la práctica social de predecir. Los problemas microeconómicos se refieren también a fenómenos de variación y cambio, éstos son el referente en el que surgen los conceptos de derivada e integral y también cognoscitivamente favorecen pensar en la integral (Cordero,1994, citado en Muñoz, 2000).

Siguiendo a Muñoz (2000), él identifica los tipos de problemas cuya solución exige una integración y analiza dos categorías de relaciones involucradas en las leyes que cuantifican al fenómeno de variación o cambio, a continuación se describe la primera categoría, ya que es en ésta donde tuvo lugar el diseño de las situaciones:

- La primera categoría dice que: dadas las condiciones iniciales del problema, encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio. Esta categoría la divide en tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado del fenómeno de variación. Estas situaciones son:



en donde: SA = Situación A (*Predicción*); SB = Situación B (*Predicción*); SC =Situación C (*Acumulación*); T = Transformación; $F(t_0)$ = Condición inicial conocida.
En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n)-F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).
Con el análisis epistemológico como se mencionó anteriormente se diseñaron situaciones donde la actividad humana es incorporada como epistemología inicial. Se realizó un análisis *a priori* con base en un conjunto de hipótesis descriptivas y predictoras de lo que

los estudiantes realizarían. Se implementaron las situaciones a estudiantes de 4º semestre de la Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de Chiapas. Finalmente, se recolectaron los datos obtenidos a lo largo de la experimentación y se realizó un análisis *a posteriori*. Una vez realizado el análisis *a posteriori* de estas situaciones podemos comentar lo siguiente:

Los estudiantes, en la necesidad de predecir crearon sus propias herramientas predictoras. Para la generación de estas herramientas pusieron en juego la noción de variación, es decir, revisaron los comportamientos de las variables que estaban presentes, productos, precio, costos y utilidades. Es decir, observaban qué datos permanecían constantes, cuáles variaban, cómo variaban y cuanto variaban, para que a través de esta información ellos pudieran generar una relación funcional entre variables que les permitiera predecir. La relevancia de lo anterior es que originalmente se esperaba únicamente que los estudiantes predijeran. En este análisis se observó que la predicción de los estudiantes fue realizada de dos maneras, una predicción que le hemos llamado implícita y la otra de manera explicita. La predicción implícita consistió en que los estudiantes buscan encontrar el valor del estado final de la variable, observando únicamente la relación funcional que existe entre ellas. Es decir, determinan las características que presenta la variación; una vez identificadas esta características toman patrones de comportamiento para poder buscar relaciones funcionales que les permitan encontrar el estado final de una variable o modelar el fenómeno a través de una función. La predicción explicita consistió en que los estudiantes tomaron en cuenta de forma explicita el papel que juega la condición inicial y fueron sumando las variaciones para encontrar el estado final de esta variable.

Como se mencionó anteriormente los estudiantes generaron sus propias herramientas para poder predecir el estado final de un fenómeno microeconómico, centrando su atención en la variación, para que a través de la información que generaron pudieran determinar la relación funcional entre variables que les permitiera predecir el fenómeno económico.

Otro hecho que consideramos importante es que se determinaron también dos tipos de relaciones funcionales entre variables, una relación funcional explícita y la otra implícita. La relación funcional implícita consiste en que los estudiantes desarrollan relaciones funcionales numéricas, es decir, únicamente manipulan los datos (números) conocidos y los que ellos mismos van generando. No generalizan la información con variables para representar su relación funcional. La relación funcional entre variables explícita es representada a través de números y símbolos o únicamente por símbolos que representan a las variables que están en juego. Lo anterior se menciona porque creemos que es importante que estos aspectos se deben considerar en una epistemología inicial posterior; es decir, tener en cuenta qué tipo de predicción o qué tipo de relación funcional entre variables se espera que los estudiantes desarrollen para que se consideren en futuras situaciones o investigaciones.

Conclusiones:

A manera de conclusión según la evidencias que se obtuvieron en esta investigación a través de la situaciones implementadas a los estudiantes de economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de Chiapas podemos mencionar lo siguiente (Ramos, 2005a):

1. La predicción, sigue siendo un eje central en la actividad humana, aunque la ciencia que se está estudiando no pertenece a las naturales.
2. Tuvieron la necesidad de crear sus propias herramientas para poder predecir el estado final de un fenómeno microeconómico.

3. Para la generación de estas herramientas pusieron en juego la noción de variación, es decir, revisaron los comportamientos de las variables que estaban en juego, productos, precio, costos y utilidades, observaron que datos permanecían constantes, cuáles variaban, cómo variaban y cuánto variaban, para que con esta información ellos pudieran generar una relación funcional que les permitiera predecir.
4. A través de este instrumento predictor, ellos pudieron determinar el comportamiento que pudiera presentar cualquier empresa que tenga condiciones similares a las que se estudiaron en la situación, es decir, están realizando la práctica social de modelar un fenómeno económico.

Identificar las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático requerirán ser interpretadas para ser integradas al sistema didáctico de instituciones que forman economistas, y con ello dar inicio a la construcción de manera gradual de material didáctico fundamentado en situaciones de cambio en el contexto de fenómenos económicos y que cumplan con el papel de herramienta de predicción que requiere la ciencia económica.

Con lo anterior se pretende contribuir al rediseño del Cálculo escolar para economistas en base a la práctica social de predecir a partir de la visión socioepistemológica que considera a la actividad humana como la fuente de la reorganización de la obra matemática. Por con secuencia el conocimiento matemático consideramos que está ligado estrechamente a la actividad humana, es decir, no se encuentra vinculado con alguna ciencia en especial, si no que es parte de la necesidad de la evolución de la humanidad en su conjunto. Dentro de esta evolución se ha desarrollado conocimiento con intencionalidades especificas.

Referencias:

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral, Departamento de matemática educativa, Cinvestav-IPN, México.

Arroy, K. & Intriligator, M. (1989), *Handbook of Mathematical Economics.* Vols. 1-3, North Holland.Amsterdan.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México : Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar.* Tesis doctoral, Departamento de matemática educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (*volumen 16). Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G.(2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa vol. 3, Núm. 2, 131-170.*

Muñoz, G. (2005). Naturaleza de un campo conceptual del cálculo infinitesimal: una visión epistemológica. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp 589-595). México: Comité Latinoamericano en Matemática Educativa. A.C.

Ramos, S. (2005a). *Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía*. Tesis de maestría. Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Ingeniería. UNACH, México.

Ramos, S. (2005b). Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp. 631-637). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

LA PERIODICIDAD EN EL SISTEMA DIDÁCTICO: UNA ARTICULACIÓN A LA LUZ DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA[1]

Gabriela Buendía Abalos
Universidad Autónoma de Chiapas. México.
buendiag@unach.mx
Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel Educativo: Básico, Medio y Superior

Resumen

Este trabajo aporta elementos que robustecen la socioepistemología propuesta sobre lo periódico en la que la predicción es la práctica asociada a la construcción del conocimiento matemático. Además de trabajar en un contexto de funciones periódicas distancia-tiempo, se abordan otros contextos como las sucesiones periódicas de números y de figuras.

Introducción

Nuestra investigación aborda un fenómeno didáctico que muestra la poca coherencia que hay entre la existencia y aplicabilidad de una definición matemática de periodicidad, componente esencial de la estructura matemática, con lo que sucede y se interpreta acerca de lo periódico en ambientes escolares. El discurso matemático escolar ha reducido la propiedad periódica a un equivalente con la definición de tal manera que su uso propiedad se limita a comprobar o aplicar una fórmula. Así, ya sea que se trate de sucesiones numéricas o de íconos o de funciones periódicas, el único referente para tratar –y comprender- su *atributo periódico* termina siendo una definición. Esto, lejos de poder mostrar una coherencia en el conocimiento matemático del alumno de tal manera que lo periódico tenga sentido y sea un saber útil, crea una separación por niveles (educación básica-educación superior), por temas (decimales-funciones) o por otras características (discreto-continuo).

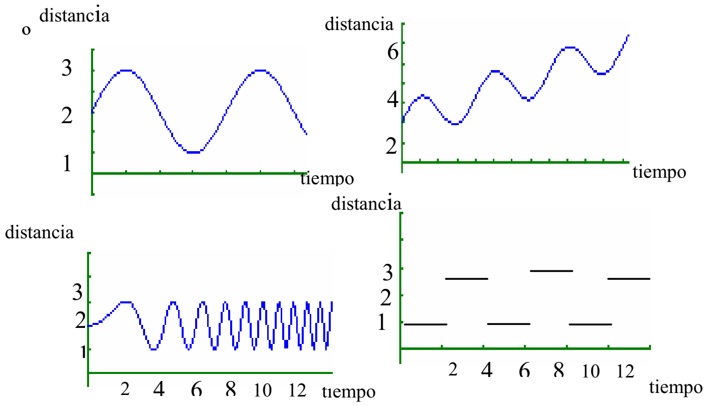
En (Buendía, 2004; Buendía y Cordero, 2005) hemos dado evidencia de que la periodicidad está a tal grado identificada sólo con las funciones trigonométricas, especialmente con la función seno, que cualquier gráfica con forma senoidal o gráficas con cualquier forma de repetición suelen ser calificadas como periódicas (ver figura 1).

Investigaciones más recientes en las que hemos abordado otros objetos periódicos como las sucesiones de figuras o de números (decimales periódicos) muestran también que la propiedad periódica no suele tener un significado por sí misma. En la figura 2 mostramos un procedimiento muy común cuando, al trabajar con números decimales periódicos, se le ha pedido al alumno hallar la cifra que ocupa el lugar 120: escribir explícitamente todas las cifras, sin que el atributo periódico –y la ventaja que podría representar- sea relevante.

A la luz de la Socioepistemología, hemos dado evidencia de que todo aquello que tiene que ver con la periodicidad en un sentido institucional, histórico y cultural, conforma un lenguaje que le da un significado útil al conocimiento matemático. Ya que no basta con las definiciones o su operatividad analítica, sostenemos que lo periódico puede constituir un

[1] Este proyecto de investigación presenta algunos resultados en el marco del proyecto PROMEP “Estudio del desarrollo del saber matemático en un marco socioepistemológico”. Folio UACHIS-PTC-39. Carta de liberación: PROMEP/103.5/94/2927

lenguaje (sin definiciones) aun antes de que aparezca la institucionalización de la periodicidad a través de la definición.



"Todas son periódicas...excepto la última porque es discontinua... "
"Todas son periódicas porque se están repitiendo"
"La segunda gráfica es periódica porque se repite igual todo el tiempo, lo mismo que la primera"
"Bueno, todo depende de la definición de periodicidad que apliquemos"
"La segunda es periódica porque es senoidal y porque va subiendo de dos en dos. Los mínimos van de cuatro en cuatro)

Figura 1
Comentarios de profesores de matemáticas de nivel medio y medio superior

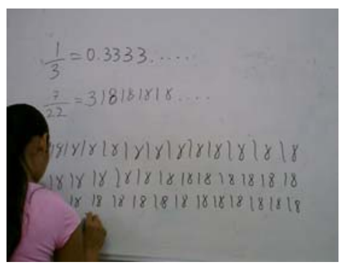


Figura 2
Alumna de nivel licenciatura

En este artículo mostramos algunos resultados acerca de lo periódico para el caso de sucesiones de figuras y números decimales. Ello ha permitido fortalecer la socioepistemología de lo periódico propuesta en el marco de las funciones tiempo-distancia y poder, así, favorecer las articulaciones entre el saber matemático; una articulación cuya base no son los objetos matemáticos, sino las prácticas sociales.

Una socioepistemología de lo periódico

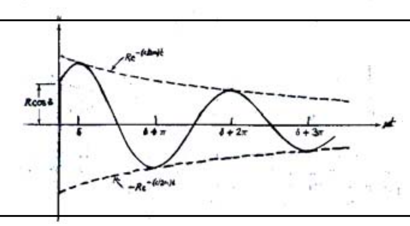
En la socioepistemología de lo periódico que hemos propuesto (Buendía, 2004) se ha señalado que existe una relación entre lo periódico y la práctica de predecir. Se trata de una epistemología de prácticas que propone como la metáfora para explicar la construcción del conocimiento matemático a las prácticas sociales. Sus elementos epistemológicos son entendidos como las circunstancias socioculturales y didácticas que favorecen la construcción del conocimiento.
Hallamos que la asociación entre la función seno y su propiedad de periodicidad a lo largo del devenir histórico no es evidente de forma inmediata ya que aun cuando el seno era

conocido y manejado desde principios de nuestra era como una línea de la circunferencia, su carácter funcional y periódico no era relevante. El interés de Euler, quien estableció formalmente a la periodicidad como una propiedad de la función seno, estuvo en la descripción de un movimiento que ocurre a través del tiempo. Ello resultó distinto a lo que le era contemporáneo –centrado más en las propiedades del tiempo- y fue necesario, hasta entonces, expresar al tiempo como variable independiente y al desplazamiento, como la variable dependiente. De esta manera, Euler podría realizar diversos cálculos relacionados con la descripción del movimiento de osciladores armónicos. Entre ellos, predecir la posición dado un tiempo determinado.

Este interés en la descripción analítica de movimientos es un punto característico de los desarrollos científicos del siglo XVIII, lo cual ayuda en la consolidación de la algoritmia del cálculo. El objetivo central de las ciencias físicas -adelantarse a los acontecimientos, determinar leyes que gobiernen comportamientos de sistemas- parece permear lo que sucede en ambientes matemáticos (Cantoral, 2001). De esta manera, podemos identificar prácticas, como la predicción, propias de contextos físicos, con el reconocimiento significativo de lo periódico.

En otro sentido, también hemos hallado elementos relevantes con relación a lo periódico como el papel que juega el *comportamiento de las funciones*. Por ejemplo, Shama (1997, 1998) reporta que los estudiantes suelen citar como ejemplos periódicos situaciones dinámicas de tal manera que los estudiantes identifican a la periodicidad como un proceso, y no como un objeto. Esta situación da pie a la problemática que hemos abordado (la identificación de fenómenos como periódicos cuando en realidad no lo son) pero también hace evidente el uso de herramientas como el comportamiento de una función presentes en el trabajo matemático del alumno.

Otros autores hablan acerca de la importancia de reconocer comportamientos "casi periódicos" ya que el interés de la ciencia está alrededor de ejemplos de comportamientos que sin ser periódicos, sí presentan cierta repetición (Callahan et al., 1992). De ahí que tome sentido el uso de esta expresión en disciplinas distintas al cálculo (Figura 3) Es interesante notar que la expresión "cuasiperiodo" se refiere a considerar la repetición del movimiento *sólo en relación a la repetición que presenta el eje x*. Esto es, se hace necesaria una distinción de comportamiento entre los componentes de una función: el comportamiento de la variable *x* y el de la variable *y*. Dicha distinción es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que "no es verdaderamente periódico".



"aun cuando el movimiento no es verdaderamente periódico, podemos definir un cuasiperiodo $T_d = 2\pi / \mu$ como el tiempo entre los máximos sucesivos del desplazamiento" (Boyce, DiPrima, 1987).

Figura 3

Otro elemento relevante en la socioepistemología propuesta es la existencia de una unidad de análisis que guarda una dialéctica local-global para tratar los sistemas periódicos. Para que el atributo periódico sea relevante es necesario no un análisis puntual, el más común en

Cálculo, sino dejar un periodo para que el fenómeno muestre su comportamiento. Pero, además, tendrá que analizarse qué pasa en cada uno de los instantes de ese periodo.

Creemos que la existencia de estos elementos alrededor de lo periódico (el comportamiento de la gráfica de una función y una visión dual local-global) se contextualiza y potencia en el marco de la predicción como práctica. En esta relación predecir-periodicidad fundamentamos la socioepistemología de la periodicidad propuesta y que ahora extendemos hacia otros contextos además del de funciones tiempo-distancia (Buendía, 2004).

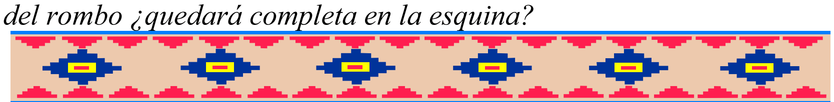
Otras situaciones sobre lo periódico

A la luz de la socioepistemología de lo periódico propuesta, hemos añadido, dos secuencias con relación al aspecto periódico de sucesiones y de números decimales. Las presentamos a continuación junto con los elementos socioepistemológicos de cada una.

Secuencia 1

Supóngase que tenemos una muestra de 15 cm aproximadamente de cada una de las siguientes cenefas (una tira de papel) para decorar una pared. Si las cenefas se venden por rollos que contienen unos 30 metros, responda las preguntas y argumente en cada caso lo más ampliamente posible.

a) Si queremos decorar una pared de 1.5 metros de largo con la siguiente cenefa, la figura del rombo ¿quedará completa en la esquina?



b) Si queremos decorar una pared de 3.75 metros de largo con la siguiente cenefa, ¿qué figura quedará en la esquina?

Secuencia 2

a) *Convierta cada una de las siguientes fracciones a números decimales y describa su resultado.* $\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{4}{7}$

b) *En cada uno de los decimales anteriores, halle la cifra que ocupa el lugar 245. Explique lo más ampliamente posible su procedimiento.*

<u>Elementos socioepistemológicos</u>

El hecho de presentar secuencias de figuras a través de cenefas permite dar la idea de un continuo en dichas sucesiones, ya que las cenefas no se venden por trozos o unidades separadas, como los mosaicos, sino que se venden por rollos. Para el caso de los números decimales periódicos, el proceso periódico continuo surge al hacer la división.

La información de la que se dispone sobre el comportamiento de las figura está contenida en 15 cm representada por la longitud de la muestra, por lo que el decorar una pared de 150 cm y 375 cm son actividades de predicción para las que se pondrán en juego distintas herramientas. Para los decimales, la información puede estar contenida en tantos decimales como se obtengan, por lo que la propuesta es una predicción remota (cifra lejana) para motivar actividades de predicción.

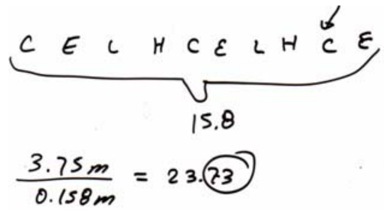
Al predecir, existe en primera instancia una búsqueda de una unidad de análisis que permite, dada una cierta información actual, predecir hacia la longitud o posición pedida. Esa unidad puede tomar diferentes formas, incluyendo la muestra completa para la cenefa de rombos. Sin embargo, si ese fuese el caso, se origina un conflicto con la cenefa de animales, ya que para poder predecir en este segundo caso la unidad de análisis no puede ser la muestra completa: no tendría la continuidad que exige el que la cenefa se venda por rollo y no por piezas. Así pues, la búsqueda de una unidad de análisis tendrá que reorientarse hacia alguna que realmente pueda informar del comportamiento que seguirá la sucesión de figuras. Para el caso de los decimales, la unidad tiene en cada caso una longitud diferente.

Algunos resultados: identificación y uso de una unidad de análisis

El reconocimiento de la periodicidad de una función involucra no sólo el uso y aplicación de una igualdad ($f(x + p) = f(x)$), sino el reconocimiento de su comportamiento; o más precisamente, de aquellos elementos que conforman su comportamiento: la variable dependiente y la independiente. En las exploraciones que hemos realizado (mostramos aquí ejemplos con la cenefa de los animales; figuras 4 y 5), podemos ver evidencia de cómo la práctica de predicción favorece tal reconocimiento a través, básicamente, de hallar y usar una unidad de análisis para predecir.

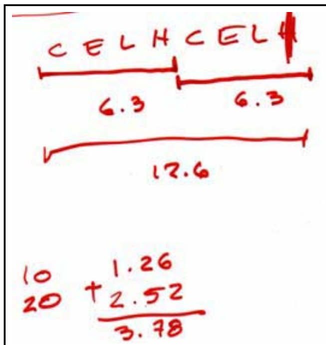
En cuanto a hallar una unidad de análisis, hemos determinado que es una tarea no trivial en la que la naturaleza periódica del comportamiento toma relevancia frente a otras como continuidad-discontinuidad, por ejemplo. Y, aunque los libros de texto suelen referirse al periodo de la función como a la longitud mínima del intervalo de repetición, es común que en el ejercicio de la predicción cualquier longitud sea considerada como suficientemente válida.

Referente al uso de la unidad de análisis, hemos podido percibir que, de manera independiente a si son funciones o sucesiones, o si se trata de profesores o alumnos o de un nivel medio o medio superior, dos procedimientos generales para poder predecir. El primero de ellos, utiliza la división como la operación base, mientras que el segundo, la división. De manera coherente a la estructura matemática, ambos procedimientos son equivalentes. Sin embargo, reflejan un manejo distinto de la información y el entorno sociocultural de la persona en cuestión:
a) *Del futuro al presente*. El tiempo pedido se divide entre el intervalo de la unidad de análisis. Se determinan cuántos ciclos completos hay y se hace una búsqueda local en la primera unidad para ver la posición de acuerdo al residuo de la división.
b) *Del presente al futuro*. Se reproduce la unidad tantas veces como sea necesario hasta hallar, aproximadamente, el tiempo pedido. Esta aproximación puede ser por exceso o defecto al valor pedido. Una vez que se determine cuántos ciclos se cumplirán, entonces se hace una búsqueda local.



Este profesor de matemáticas toma como unidad de análisis la cenefa[2] *completa como un trozo que se transpone.*
Para predecir, divide la longitud pedida entre la longitud de la que se dispone y concluye que son 23 trozos y lo que importa es a qué equivale la fracción 0.73

Figura 4



Esta profesora de matemáticas corta la cenefa en una unidad de análisis que incluye sólo cuatro animales; pero en realidad maneja como unidad aquélla compuesta por dos unidades mínimas.
Para predecir, señala que en diez trozos de "los nuevos" (los cortados) se llega a 1.26 metros; en veinte trozos, a 2.52 metros. Suma para obtener 3.78 y de ahí, se regresa para llegar a la longitud pedida (3.75)

Figura 5

Referencias

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Tesis doctoral. México: Cinvestav-IPN

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. In *Educational Studies in Mathematics.* (58) 299-333.

Callahan, J; Cox,D; Hoffman, K; O'Shea, D; Pollatsek, H. Senecnal, L. (1992). Periodicidad. En *Calculus in context*. (413-158) . USA: Mc Millan.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Shama, G.(1998). Understanding Periodicity as a Process with a Gestalt Structure. *Educational Studies in Mathematics* (35) 255-281

Shama, G. Y Movshovitz-Hadar N. (1997). The Process of Periodicity. En *Proceeding of the Nineteenth Annual Meeting Psychology of Mathematics Education.* ERIC Cleaninghouse for Sciencie, Mathematics and Environmental Education; Columbus, Oh. (pp. 45-50)

[2] C=cebra; E= elefante; L= león; H= hipopótamo

CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Gisela Montiel Espinosa
CICATA del IPN, México
gmontiel@ipn.mx

Campo de Investigación: Socioepistemología;Nivel educativo; Medio Superior

Resumen

La visión que se circunscribe explícitamente al aprendizaje individual hubo de cambiarse por otra centrada en el aprendizaje social. Esta ha sido propia de la teoría del conocimiento y ha influido a las teorías sobre conocimiento científico (filosofía de la ciencia). Si bien se acepta al individuo como agente cognitivo, también se reconoce el carácter situado de tal cognición. Esto constituye nuestro punto de partida para explicar el sentido en el cual la cognición es social. La dimensión social, en nuestro estudio al fenómeno didáctico ligado a la función trigonométrica, toma el carácter de **práctica social**.

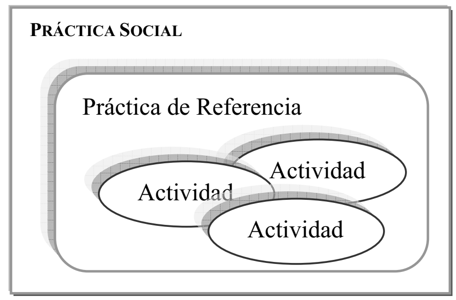
Aproximación *Socioepistemológica*

La Aproximación Socioepistemológica a la Investigación en Matemática Educativa se plantea como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002). Esta aproximación retoma la visión sistémica de la *didáctica en la escuela; pero sin escenarios* (Cantoral y Farfán, 2003) e incorpora una componente social a la construcción del conocimiento matemático. Este acercamiento incorpora entonces cuatro componentes, a saber, el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión social del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004). La incorporación de la práctica social modifica el centro de atención de la *componente epistemológica*, lo desvía de los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos a la identificación de prácticas de referencia y actividades, ubicando a estas en contextos particulares. La *componente cognitiva* asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente y la *componente didáctica*, finalmente se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina sus efectos e implicaciones didácticas. La aproximación teórica que incorpora estas componentes en su estudio de los fenómenos didácticos ligados a un conocimiento matemático en particular recibe el nombre de *Socioepistemología*, y es con base en ella que proponemos la construcción social de la función trigonométrica y sus implicaciones didácticas.

El fenómeno didáctico que nos ocupa esta ligado a la noción de función trigonométrica, la cual se ha contemplado en investigaciones de corte cognitivo (De Kee, et. al, 1996) y didáctico (Maldonado, 2005), mostrando la estrecha relación de sus resultados con la organización de los programas de estudio, la exposición de los libros de texto y el funcionamiento del discurso matemático escolar. Estos resultados constituyen un fuerte argumento del porqué estudiar esta función en contextos más allá del escolar y del matemático. Al incorporar una componente social a nuestro análisis epistemológico reconocimos las *prácticas de referencia* que producen conocimiento y el estatus de las *prácticas sociales* en tanto que inducen la construcción de la función trigonométrica en su contexto de origen, aportando así los principios básicos para modificar el enfoque clásico que vive en la escuela y que se usa en la literatura especializada de matemática educativa.

Un modelo para la construcción social de conocimiento matemático

Para el caso particular de la función trigonométrica distinguimos, desde el contexto histórico de origen, a la actividad, la práctica de referencia y la práctica social como los elementos básicos para describir su construcción social. Nuestro modelo implica entonces una *actividad*, aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, que en su articulación con otras actividades se asocian a una *práctica de referencia* y son reguladas por una *práctica social*.



Una socioepistemología de la función trigonométrica

Delineamos los tres momentos en la construcción social de la función trigonométrica donde se ubican una práctica social normativa, una práctica de referencia asociada a la actividad, un contexto y los objetos matemáticos que sirven como herramienta a la actividad:

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estable – Analítico
Objeto Matemático Asociado	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	$sen\,\theta$ θ ángulo (grados) $sen\,\theta$ longitud	$sen\,x$ x tiempo (radian-real) $sen\,x$ distancia	$sen\,t$ t tiempo (real) $sen\,t$ temperatura

Principios Básicos para la Construcción Social de la Función Trigonométrica

Implicaciones didácticas

El discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares. Esta coherencia se establece respecto de exposiciones previas y futuras, pero también respecto de los conceptos matemáticos asociados. Por su parte, el *discurso matemático escolar* es el conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que *norman* la actividad áulica y al discurso escolar mismo. Una de sus características más importantes es la de alcanzar hegemonía en el contexto escolar. Por ejemplo, el discurso matemático escolar asociado a la noción de función trigonométrica contempla tanto su definición a partir de razones trigonométricas, ilustradas invariablemente con un triángulo rectángulo; mediante el uso del círculo trigonométrico para definir la función y la graficación, al menos de las funciones básicas o primitivas, a fin de ilustrar la periodicidad. El discurso matemático escolar se ha organizado durante años (siglos), *para responder a cuestionamientos de orden teórico e ideológico que muestren la coherencia interna del discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis inusuales* (Cantoral y Farfán, 2004). Probablemente esta sea la razón por la que no encontraremos, o al menos no hemos encontrado hasta ahora, un texto o un programa de estudios, o una exposición de aula que abandone el recurso usual de emplear el círculo trigonométrico como medio de introducción a las funciones trigonométricas.

Llevar al aula una propuesta basada en la *construcción social* de la función trigonométrica presupone entonces la modificación del discurso escolar, discurso que inicia con el estudio de los principios trigonométricos (tercer año de secundaria en el SEM[1]) hasta el estudio de las series trigonométricas (segundo o tercer año del programa de ciencias o ingeniería en el SEM). Con la revisión realizada en los planos histórico - epistemológico, didáctico, cognitivo y social reportada en (Montiel, 2005) se establecieron los principios básicos para cada momento en lo específico de la construcción de la función trigonométrica, dando pie a una primera experiencia exploratoria.

Una primera experiencia fuera del aula

En la pasada Relme[2] 19, celebrada en Montevideo, Uruguay, llevamos a cabo una experiencia didáctica no controlada con la participación de colegas profesores de varios países de Latinoamérica en donde exploramos sus concepciones ligadas a ciertas nociones trigonométricas. La secuencia no fue registrada, dado el escenario donde se presentaba, pero nos dio luz sobre algunas relaciones que se establecen entre el tipo de problemas y la herramienta matemática elegida por los profesores. Iniciamos con actividades exploratorias cuya finalidad era distinguir cómo percibían la relación entre variables, su dependencia y la proporcionalidad en juego. En seguida, planteamos dos problemas que involucraban la longitud de la circunferencia en dos contextos: (1) las vueltas de la llanta de una bicicleta en el tiempo y (2) el recorrido de un minutero. Sin embargo, dos problemas posteriores

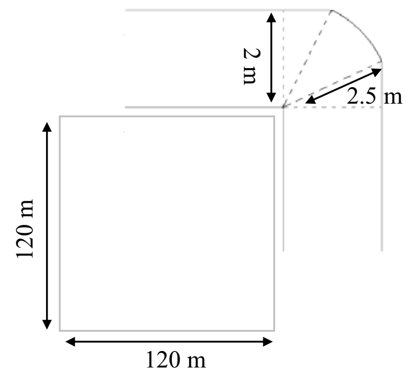
[1] Sistema Educativo Mexicano

[2] Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

llamaron nuestra atención, ya que están íntimamente ligados a nuestro planteamiento sobre la construcción de la función trigonométrica con base en la práctica social.

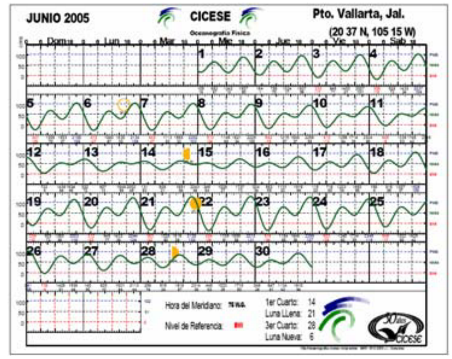
Se propone el siguiente problema:

> Se planea la reconstrucción de la banqueta que rodea a un conjunto de cabañas. Para saber la cantidad de mezcla a usar es necesario calcular el área de la banqueta. Cada esquina se puede aproximar a un sector de circunferencia y dos triángulos rectángulos. ¿Cuál sería el área de cada esquina?, ¿cuál es el área de toda la banqueta?



Los profesores participantes en la experiencia iniciaron por calcular las áreas más *sencillas*, cuatro rectángulos de 120 m de largo x 2m de ancho, 1 cuadrado de 120 m de lado y 8 triángulos de 2 m de base y $\sqrt{2.25}$ m de altura. Esta última medida se debe calcular a partir de los datos proporcionados. El último cálculo es el área de los 4 sectores circulares.
Sólo 4 de 18 profesores obtuvieron el área a partir de la relación proporcional $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\text{área del sector}}{\text{área total}}$ (el ángulo del sector es al ángulo completo, lo que el área del sector al área de todo el círculo). Lo más significativo de dicha resolución es que sólo estos cuatro profesores usaron el ángulo *sólo en radianes*, mientras que el resto obtuvo el ángulo en radianes y lo convirtió a grados, a partir de ese dato ya no continuaron con el ejercicio. Sabemos que es necesaria más investigación sobre esta secuencia y sobre las interacciones que provoca entre los participantes, sin embargo, queremos señalar que dentro del debate que se sostuvo con y entre los profesores no se proporcionaron argumentos que sustentaran la elección del uso del ángulo en grados.

Esta actividad puede pensarse como aquella donde Newton obtiene la serie infinita del seno, pero carece del elemento primordial: el *movimiento*. Además, introduce en el esquema triángulos carentes de medida en uno de sus catetos, por lo que la alusión a la razón trigonométrica es inmediata. En este contexto es mucho más natural el uso del grado que del radián.



En la última actividad se les proporcionó un calendario con los datos que registra el Departamento de Oceanografía Física del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, para discutir sobre la factibilidad de construir un modelo matemático que represente el comportamiento de la marea en Puerto Vallarta, Jalisco, del 1ero al 30 de junio de 2005. Surgieron ideas como:

- recortar cada semana y pegarlas en forma continua (como un electrocardiograma) para ver su comportamiento general,
- definir el modelo en cuatro intervalos para cada periodo (1er cuarto, luna llena, 3er cuarto y luna nueva)
- Determinar el máximo y el mínimo alcanzado en cada periodo, para conocer un posible parámetro de *amplitud* de la función trigonométrica que lo modele.

Al preguntar a los profesores sobre las unidades de medida sólo hubo una respuesta: *tiempo* (variable independiente) y *distancia* (variable dependiente). No hubo siquiera mención de ángulos, todo se centró en el movimiento y las alturas de la marea. El abandono del contexto matemático escolar se logró gracias a las condiciones en las que llevamos a cabo esta experiencia, el objetivo no era la resolución en sí misma de los problemas, sino el debate y los consensos. Gracias a esto los profesores tuvieron más libertad de expresar ideas para resolver los problemas, éstas fueron tan variadas como colores en una pintura y nos permitieron entrar más allá de sus concepciones, a sus ideas y creencias. No recreamos la medición de la marea, pero hicimos un ejercicio de análisis sobre fenómenos dinámicos periódicos que matizaron la actividad con discusiones, argumentos, explicaciones, y no sólo con conceptos.

Conclusiones

Con base en la construcción social de la función trigonométrica apuntamos hacia *el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de conocimiento científico*, mientras que el enfoque clásico trata sólo con el aprendizaje de las razones trigonométricas (ecuaciones e identidades), de las funciones trigonométricas y de las series trigonométricas desvinculadas. Nuestro enfoque atiende a la construcción de conocimiento con base en la experiencia, en el planteamiento de ciertas situaciones – problema, en la identificación de regularidades, en la argumentación, en los consensos, en las explicaciones, entre otras. Ninguna de éstas es exclusiva del ámbito matemático, por el contrario viven en otras áreas de conocimiento y en la vida cotidiana de los estudiantes, lo cual pudimos corroborar en la exploración de las actividades previas.

Referencias

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, Tomo 1, pp. 35 - 42). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 6*(1), 27 – 40.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathematiques 24*(2.3), 137 – 168.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México

LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR[1]

Francisco Cordero Osorio
Cinvestav del IPN, México
fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología, Nivel educativo: Superior

RESUMEN

En este documento reflexionamos sobre dos grandes aspectos que han resultado ser insoslayables en la perspectiva socioepistemológica: *la institucionalización* y el *rediseño del discurso matemático escolar*. Discutiremos cómo es que ciertas concepciones del conocimiento se preguntan por la construcción de cierto conocimiento específico de los individuos y cómo otras se preguntan por la constitución social del conocimiento de los grupos humanos. Todo ello con la intención de hacer ver la conveniencia de ampliar la problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática realizando estudios del *uso del conocimiento en las prácticas institucionales*.

INTRODUCCIÓN

El análisis de una problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática es afectado por la concepción del conocimiento que subyace a la intervención de los procesos de construcción. Tal concepción pone la atención a aspectos del contenido matemático que definen dichos procesos. Como ejemplos de ellos tenemos los procesos cognitivos que un individuo realiza ante un problema matemático o el papel de las interacciones (entre individuos) para realizar tales procesos cognitivos, donde los escenarios socioculturales proveen consideraciones sobre las distintas formas de los procesos. Con ello se logra entender por qué aparecen diferentes procedimientos en un mismo contenido matemático. Pero no así, por qué éstos se hicieron un conocimiento institucional, de tal suerte que son un producto material social que tenemos que enseñar y aprender, cómo es que los grupos se organizan y de qué se valen para constituirlo, cuáles son las colecciones metódicas de los principios de su organización para tal fin. Es en este sentido que discutiremos cómo ciertas concepciones del conocimiento se preguntan por la construcción de cierto conocimiento específico y cómo otras se preguntan por la constitución de tal construcción. Las primeras apuntan a *los procesos cognitivos de los conceptos* que componen dicho conocimiento, algunas veces considerados en la dimensión social, pero las segundas apuntan a las *prácticas sociales* que generan dicho conocimiento. Con la aproximación socioepistemológica llamaremos la atención sobre cómo estas segundas concepciones no anclan la problemática al dominio matemático y abren un camino conveniente para hacer estudios del *uso del conocimiento matemático y su desarrollo.* Con este marco se identifica que (tradicionalmente) la problemática ha sido reducida a ciertos "episodios de aprendizaje" de tal suerte que las prácticas institucionales no han sido los argumentos, en las reflexiones educativas, para reconstruir el conocimiento

[1] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior.* Clave: No. 47045

matemático. La ampliación misma, en consecuencia, tendrá que romper la centración de los conceptos en el discurso matemático escolar y crear otro discurso que ofrezca las prácticas de referencia donde se resignifique la matemática. La resignificación será la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, o sea, será el *uso del conocimiento* en la situación donde se debate entre su *funcionamiento* y *forma* de acorde con lo que organizan los participantes.

¿POR QUÉ SABEMOS UNAS COSAS Y NO OTRAS?

Empezamos esta sección con una experiencia escolar donde participaron profesores y estudiantes con la finalidad de motivar tres preguntas que nos obligan a pensar en el papel que juega lo institucional en la problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La experiencia escolar. Se llevó a cabo en diferentes escenarios escolares (salones de clase y talleres) con estudiantes y con profesores de matemáticas del nivel superior. La experiencia consistió en hacer la siguiente pregunta típica de Cálculo:

(a) Considera la función $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *y halla la recta tangente en el punto (0, P(0)).*

La mayoría de los participantes respondieron satisfactoriamente. Usaron métodos del cálculo diferencial aprendidos previamente que sin escatimar respondieron que la recta tangente en el punto *(0, P(0))* era $y = a_1 x + a_0$. Sin embargo, ningún participante identificó que la recta tangente era precisamente la parte lineal del polinomio dado. Ni mucho menos reflexionó con respecto al comportamiento del polinomio según la pendiente de la recta tangente en el punto *(0, P(0))*.

Después de su respuesta, se les invitó a que reflexionaran sobre la siguiente propiedad.

(b) Para todo polinomio $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$*, su parte lineal* $a_1 x + a_0$ *es la ecuación de la recta tangente a la curva P en el punto* $x = 0$.

Y se les pidió que bosquejaran la gráfica del polinomio con la siguiente instrucción:

(c) Dibuja la recta $y = a_1 x + a_0$ *en un plano cartesiano y con la propiedad del inciso (b) deduce (bosqueja) el comportamiento global del polinomio.*

Pocos participantes apreciaron la generalidad de la propiedad, algunos a pesar de haber respondido adecuadamente la pregunta del inciso *(a)*, no pudieron probar la propiedad. El inciso (c) no lo pudieron responder (una discusión amplia al respecto se encuentra en Rosado (2004)).

Tal experiencia escolar pudiera tener diferentes explicaciones. Sin embargo, nos gustaría enfocarla a tres categorías de preguntas para ir hacia nuestro punto de interés: el papel de lo institucional en la problemática.

Pregunta 1. ¿Por qué tal grupo humano sabe algunas cosas e ignora otras? o bien, ¿Por qué sabe hacer algo pero no todo?

Nos referimos a cualquier grupo humano de cualquier sociedad en el mudo. No es difícil entender que efectivamente no existe grupo humano que conozca todo y no ignore nada, o bien sepa hacer todo lo que otros grupos humanos hacen o no hacen. El aspecto interesante es entender ¿por qué es natural que suceda?; ¿de qué depende?; ¿qué determina que así sea?

Llevemos el sentido de la pregunta 1 al aprendizaje.

Pregunta 2. Cuando un aprendizaje se ha realizado, ¿cómo podrán distinguir los propios alumnos entre todas las decisiones tomadas para ganar, de aquellas que dependen de características coyunturales del "juego particular", de aquellas otras que han sido posibles gracias al conocimiento adquirido? (Brousseau, 1997). Más específicamente: los alumnos que han aprendido un conocimiento matemático son capaces de plantear adecuadamente y de responder a cuestiones que antes ni siquiera podrían enunciar pero, dado que no tiene medios para contextualizar dichas cuestiones, no pueden adjudicar a los nuevos conocimientos un estatuto adecuado. Es preciso, entonces, que alguien del exterior venga a dilucidar cuáles entre sus actividades tiene un interés científico "objetivo", es decir, un estatuto cultural (Brousseau, 1997).
Pero también llevemos el sentido de la pregunta 1 a un cuestionamiento socioepistemológico.
Pregunta 3. Con los estudios de los procesos cognitivos que un individuo realiza ante un problema matemático o con los estudios de el papel de las interacciones (entre individuos) para realizar tales procesos cognitivos en escenarios socioculturales, proveen consideraciones sobre las distintas formas de los procesos. Con ello se logra entender por qué aparecen diferentes procedimientos en un mismo contenido matemático. Pero no así, ¿por qué éstos se hicieron un conocimiento de cierto tipo, de tal suerte que son un producto material social que tenemos que enseñar y aprender?, ¿cómo es que los grupos se organizan y de qué se valen para constituir ciertos conocimientos?, ¿cuáles son las colecciones metódicas de los principios de su organización para tal fin? (Cordero, en prensa(a)).
¿Cuál es en si la materia de estas tres categorías de preguntas? La sociedad humana presenta un fenómeno de una naturaleza especial, la cual consiste en el hecho de que ciertas formas de actuar son impuestas, o por lo menos sugerida *desde afuera* del individuo y son sumadas a su propia naturaleza: tal es el carácter de la institución (Durkheim, 1982).
Esta institución permite la continuidad de la sociedad, sin ella se destruye el continuo.
Tal vez por ello Brousseau (1997) precisa acerca de la institucionalización en la didáctica de la matemática de la siguiente manera.
La enseñanza no puede ser reducida a la organización de episodios de aprendizaje. La toma "oficial" del objeto de conocimiento por parte del estudiante y del aprendizaje del estudiante por parte del maestro es un fenómeno social importante y una fase esencial del proceso didáctico. Este doble reconocimiento es el objeto de *institucionalización*. El rol del maestro es también para institucionalizar.
Todo ello es la función de la *institucionalización* que, de hecho, origina una transformación completa de la situación. Se trata de un trabajo cultural e histórico que difiere totalmente del que puede dejarse a cargo del alumno y es responsabilidad del alumno. Inversamente a la devolución, la institucionalización consiste en dar un estatuto cultural a las producciones de los alumnos: actividades, lenguajes, y conocimiento expresado en proposiciones.
Tales reflexiones, en síntesis, viene a dar cuenta que no es posible creer que el conocimiento matemático es producto de una persona (o de algunas) y que la sociedad voltea a ver tal conocimiento como importante por lo que tiene que aprenderlo y enseñarlo. Por el contrario, la sociedad misma, en su sentido más amplio, es y ha sido la productora del concomiendo matemático a través de la institucionalización. Entonces

entendamos su funcionamiento en los proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

LA TESIS SOCIOEPISTEMOLÓGICA

La socioepistemología es una aproximación sistémica que permite abordar las producciones y difusiones del conocimiento en una perspectiva múltiple, integrando el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 1998). Tal aproximación, obliga a formular epistemologías del conocimiento cuyo aspecto medular no está en los conceptos, sino en la constitución social de tales conceptos, en "aquello" que hace que el conocimiento sea así y no de otra manera. El "aquello" es de naturaleza social que reconoce al grupo humano con su organización, su historia, su cultura y su institución que lo lleva a proceder de una manera y no de otra, es su *práctica social* generatriz de su conocimiento.
Todo lo anterior conlleva cuestionar ¿por qué lo matemático es referido a objetos? y no "aquello" que obliga a construir los objetos, es decir, a las "prácticas sociales" que norman la construcción de los objetos matemáticos. El mismo cuestionamiento está proveyendo de categorías que no habían sido identificadas en los tradicionales tratamientos de las epistemologías del conocimiento. A continuación mencionamos algunas que nos interesa articular en esta discusión: (a) *la resignificación* (esta categoría muestra la función de la práctica social en situaciones específicas, en particular de matemáticas; de alguna manera es el desarrollo del uso del conocimiento en la situación específica, y (b) *la justificación funcional* (la categoría indica que los mecanismos de desarrollo del uso del conocimiento en la situación específica son funcionales).
Así la tesis socioepistemológica parte de la premisa de que las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento matemático a través de los diversos procesos de institucionalización con ello se puede identificar la matemática escolar, analizar el discurso matemático escolar y formular un rediseño del discurso matemático escolar como una respuesta a la problemática.
En Covián (2005) se formula un modelo teórico para explicar la función normativa de la práctica social que permanece en cierta cultura para la construcción de sus viviendas. La evidencia de tal formulación se encuentra en ciertos procesos de institucionalización. Pero también en Cordero (en prensa(a)) conviene aspectos de la institucionalización buscando la consistencia con la problemática anteriormente mencionada. Para ello, en primer plano considera que un saber, ante todo, es un producto material continuo. Pudiéramos no dominarlo, pero socialmente se acepta que es un conocimiento, como es el caso de la matemática: lo continuo refleja su permanencia en la vida que es transformada por la matemática y, a la vez, la matemática es transformada. El continuo, de acuerdo a Durkheim (1982), no se destruye porque hay ciertas formas de actuar impuestas o sugeridas desde afuera del individuo (o sea las instituciones), las cuales son encarnados en sucesos individuales (materiales y explícitos).
Así, hipotéticamente, el "uso del conocimiento" pudiera adquirir la categoría de un producto material continuo, puesto que permanece en la vida que es transformada y a la vez el producto es transformado. En ese sentido el "desarrollo del uso del conocimiento"

hace que el conocimiento se resignifica al debatir entre su funcionamiento y su forma en la situación específica.
El planteamiento anterior no soslaya los conceptos, por el contrario se les ubica en otro estatus epistemológico en el modelo del conocimiento consistente con la intervención de la práctica social (ver (Cordero, en prensa(a)) y (Buendía y Cordero, 2005)). Nos indica que debemos crear un modelo del conocimiento matemático que dé cuenta de lo que constituye su contenido y poner al descubierto las causas reales del desarrollo social de tal conocimiento, las cuales pudieran ser las prácticas institucionales. Con ello, se romperá la centración en los conceptos del discurso matemático escolar y creará otro discurso que ofrezca los marcos o prácticas de referencia donde se resignifique la matemática. La resignificación será la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, o sea, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan los participantes (Cordero, en prensa (a)).

ESTUDIO DEL USO DE LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES

En las secciones anteriores señalamos varios elementos que intervienen en la reflexión: institucionalización, práctica social, uso del conocimiento y rediseño del discurso matemático escolar. Todo ello, justifica y dirige la atención hacia los estudios del uso del conocimiento. Así, en este apartado, queremos presentar el estudio del uso de las gráficas para fines prácticos de la propia reflexión. Convenimos realizarlo a través de tres preguntas que a continuación expresamos.
¿Por qué el uso de las gráficas? La resignificación es un concepto fundamental de la socioepistemología que manifiesta el uso del conocimiento en situaciones específicas. Por ello la naturaleza misma de la resignificación enfoca la atención a las prácticas sociales en oposición al efecto de centración de los conceptos. Por lo que la resignificación manifiesta no sólo el uso del conocimiento sino también su desarrollo que norma la práctica social, todo ello en oposición al desarrollo conceptual del conocimiento. Es así que la gráfica como una representación de la función trata el desarrollo del concepto de función pero no así el desarrollo del uso de la gráfica. Sin embargo, con el marco anterior desarrollar los usos de las gráficas traería en consecuencia el desarrollo del concepto de función. Pero también vale la pena precisar que en la socioepistemología la práctica social como unidad de análisis no analiza a los participantes sino a los usos (y costumbres) de los participantes, porque lo que nos importa de los participantes son sus formas de constituir conocimiento. En ese sentido no estudiamos a las gráficas como una representación del concepto de función, sino los usos de las gráficas de los participantes.
¿Qué es el desarrollo del uso de las gráficas? Significa que el uso se desarrolla en tanto uso. Por lo que su epistemología deberá expresar momentos que formulen semejante desarrollo. Los momentos son reorganizaciones de otros momentos anteriores producto de las contradicciones o confrontaciones o debates que se suceden por el nacimiento de nuevos elementos. Los usos dependen de la situación específica, por lo que tiene sentido formular, en nuestro caso, que las gráficas tienen una función orgánica (funcionamiento) en la situación expresada en alguna forma. Como dependen de la situación viven en una relación dialéctica, los cuales debaten entre los funcionamientos y formas de las gráficas.

¿Cuál es la relación entre el "discurso matemático escolar (dme)" y el "uso de las gráficas"? El dme y la categoría "uso de las gráficas" consiste fundamentalmente en oponerse al efecto de centración de los conceptos. Estos dos aspectos llevan a una paradoja necesaria y fructífera. Considerar, en primera instancia, la currícula escolar para ubicar ahí la aparición de las gráficas y, en segunda instancia, no considerarla para oponerse al efecto de centración. Todo ello obligó a formular la pregunta sobre la génesis del uso de las gráficas en el discurso matemático escolar.
Con las tres preguntas el estudio del uso de las gráficas ha consistido en analizar, en una primera instancia, los libros de texto del nivel básico (educación primaria y secundaria), en el marco de los contenidos curriculares de los textos para cada grado escolar. Se han encontrado tres momentos: *el uso del síntoma de la gráfica de la función, el uso de la gráfica de la función* y *el uso de la gráfica como curva,* los cuales proveen categorías que no habían sido identificadas en los tradicionales tratamientos de las epistemologías del concepto de función y su gráfica: la resignificación y la justificación funcional (Flores, 2005).
La articulación de estas categorías fortalece la formulación de entender a las gráficas de las funciones como prácticas sociales. En ese sentido, debemos ir a destacar características donde la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, crearle un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, entendiéndola como prácticas retóricas y argumentativas gráficas en diversas situaciones donde son resignificadas al debatir entre el funcionamiento y la forma de la graficación. Todo ello necesariamente en sus ámbitos institucionales.
Actualmente se están realizando estudios sobre el uso de las gráficas en el bachillerato (ver (Cordero y Cen, 2005)) y sobre la modelación del cambio en la cinemática (ver (Cordero, en prensa (b)) y (Cordero y Suárez, 2005).

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970-1990*. Kluwer Academia Publishers

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58: 299-333.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilón*, Num. 42, Pág. 353-369. Sociedad Thales, España

Cordero, F. (en prensa(a)). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Cordero, F. (en prensa(b)). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matemática e la sua Didattica*.

Cordero, F. y Cen, C. (2005). El uso de las gráficas de los alumnos en el bachillerato *Resúmenes de la 19ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Montevideo, Uruguay. pp. 239-240.

Cordero, F. y Suárez, L. (2005). Modelación en Matemática Educativa. En J. Lezama, Sánchez, M. y Molina, G (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame* Vol. 18, pp. 639-644

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya* Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Durkheim, E. (1982). *The Rules of Sociological Method and Selected Texts on Sociology and its Method*. The Free Press.

Flores, R. (2005). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

EL PAPEL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA VIVIENDA TRADICIONAL: EL CASO DE LA CULTURA MAYA

Ricardo Cantoral y Olda Covián
Cinvestav-IPN, México
oncovian@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología

Resumen:

La investigación que reportamos surge de la búsqueda de articulación entre la reflexión teórica sobre el papel que juega el conocimiento matemático en la cultura maya y la explicación empírica de su construcción social. El presente escrito presenta los principales resultados de la investigación que muestra un modelo de la evolución en la concepción de la función de la práctica social desde la perspectiva socioepistemológica.

Palabras Clave: Socioepistemología, práctica social, normativa, proceso de institucionalización.

Introducción:
La investigación que reportamos surge de la búsqueda de articulación entre la reflexión teórica sobre el papel que juega el conocimiento matemático en la cultura maya y la explicación empírica de su construcción social desde el marco socioepistemológico. La pregunta de investigación que nos planteamos es: ¿cuál es el papel que juega el conocimiento matemático en las prácticas de la cultura maya?, lo que nos llevó a plantear el objetivo principal: estudiar los mecanismos de construcción social del conocimiento matemático en dichos escenarios.
Para llevar a cabo este estudio se planeó desarrollar un conjunto de conceptos propios del marco socioepistemológico que expliquen estos mecanismos de construcción. Analizamos, entonces, dentro de la cultura maya lo cotidiano en las prácticas e identificamos una en particular, que se encuentra desde épocas ancestrales y es propia de la identidad cultural de la región maya; la construcción de la vivienda tradicional, en específico del estado de Yucatán, México. La vivienda tradicional maya, se estudia en esta tesis (Covián, 2005) desde la aproximación socioepistemológica preguntándonos sobre la naturaleza del conocimiento matemático que se encuentra presente en dicha construcción.

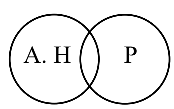
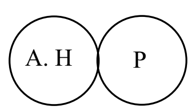
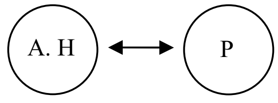
1.- Socioepistemología: La función normativa de la práctica social
La **socioepistemología** (del latín *socialis* y el griego επιστήμη, *episteme*, "conocimiento" o "saber", y λόγος, *logos*, "razonamiento" o "discurso"), también conocida como *epistemología de las prácticas* o *filosofía de las experiencias*, es una rama de la epistemología que estudia la construcción social del conocimiento (Wikipedia, 2005).
Esta aproximación se plantea preguntas que llaman la atención al estudio de la construcción social del conocimiento que atienden a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, Cantoral (1995 p. 56) menciona que: *Un ejemplo es que las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de aprendizaje de la matemática estén originadas, también por la manera en que se ha articulado el contenido matemático que se enseña, y no sólo en*

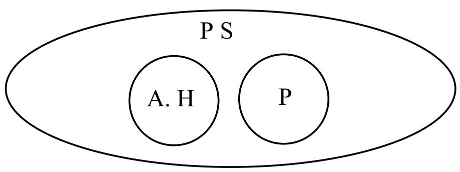
la forma en que lo transmitimos. Digámoslo de otro modo, pensemos también como un problema didáctico la determinación de qué enseñar y no sólo el de cómo enseñar.

Este enfoque considera que integrar las prácticas sociales en el estudio de la aproximación socioepistemológica, desencadena acciones que cambian al paradigma de investigación, basado hasta el momento en los conceptos. En este nuevo paradigma se reconocen categorías del conocimiento matemático que son totalmente diferentes a las conocidas habitualmente, además de propiciar el reconocimiento de formas diferentes de construcción de conocimientos, el ejercicio de fundamentar los diseños de situaciones de aprendizaje, en prácticas de los grupos humanos, entre otras cosas más.

Se reconoce en las prácticas sociales ciertas características propias, como se explica en Arrieta (2003), mostrando que las prácticas sociales poseen características que respetan un contexto, espacio, tiempo, ideología y cultura. La investigación que reportamos reconoce en la práctica social las características antes mencionadas, pero ahora amplía la visión de esta, reconociendo la *función normativa* que ejerce en la relación con la *función pragmática* y la *función discursiva*.

Para nuestros fines planteamos la evolución que se tiene con respecto a las concepciones de práctica, la cuál se presentará en tres etapas que denominamos *etapa inicial*, *etapa primaria* y *etapa teórica.*

Etapa Inicial Se presenta una relación de *identidad* entre la noción de Actividad Humana y Práctica, en sentido genérico.  Relación Sinonímica (R S)  Relación Metonímica (R M)	La relación sinonímica la entendemos por aquella en la que dos elementos son tomados como equivalentes, es decir, se habla de actividad humana y de práctica indistintamente, las características que posee una dan automáticamente las características de la otra. La relación metonímica es una evolución en la relación sinonímica existente entre actividad humana y la práctica. En esta aún existe una relación muy estrecha en la que una recibe, asigna o tiene las característica de la otra. Un ejemplo: Bailar $\equiv$ Baile Bailar es equivalente al Baile
Etapa Primaria Muestra la relación *dialéctica* entre la noción de Actividad Humana y Praxis  Relación Dialéctica (R D)	En esta etapa se considera la relación entre ellas como una relación dialéctica. Explicar las propiedades de uno en conexión con el otro. Identificar las características de la actividad humana en conexión con las de la práctica. Reconocer las características en su conexión, en el que uno no contradice al otro sino se prolonga y niega. Pero ahora en este nivel podemos ver la función de la actividad humana en cuanto a la mera acción, es decir, la función pragmática y la

	praxis en tanto a la reflexión de la acción. Construcción ↔ construir construcción si sólo si construir Actividad Humana Praxis Función Pragmática Función Reflexiva Teniendo en cuenta esta relación, podemos plantear la siguiente pregunta, ¿Si construyo, cómo construyo?
Etapa Teórica Se introduce una relación compleja entre las nociones de Actividad Humana, Praxis y Práctica Social  Relación Simbiótica (R Si)	Esta etapa es la evolución de la anterior reconociendo la relación entre actividad humana y praxis, y sus funciones, pero reconociendo la función normativa de la práctica social sobre estas, es decir se explica la función normativa de la práctica social sobre la relación existente entre la acción y la reflexión de la acción. La preguntas que ahora se plantean son si construyen de cierta manera y se reconoce cómo lo hacen, entonces ¿qué los hace construir como construyen? o ¿por qué construyen cómo construyen?, es decir, en la relación existente ahora tiene sentido preguntarnos ¿qué es lo que les hace hacer lo que hacen? Construcción ↔ construir Actividad Humana Praxis Función Pragmática Función Reflexiva ↓ Práctica Social Función Normativa

Nuestro interés es estudiar, a través de este modelo, el papel que juega la práctica social en la construcción social del conocimiento matemático, por tanto, la problemática a la que nos enfrentamos ahora es, si ya planteamos un modelo de la función normativa de la práctica social, ¿cómo podemos probar que si tiene la función normativa? Consideramos que es a través del proceso de institucionalización que la práctica social adquiere la función normativa.

Esta institucionalización de la que hablamos es un proceso puramente social, es el proceso que ya no es propio del individuo, sino del grupo humano al que pertenece. Permitiendo al individuo entrar y participar en cierto grupo por medio de las actividades y las características de esta. Es por eso que concebimos al proceso de institucionalización como el proceso que reconoce la evolución en las prácticas, reconociendo aquello que está cambiando por la influencia social, los contextos y tiempos que evolucionan a la par, pero identificando lo que permanece.

Cambio——Permanencia

El estudio del proceso de institucionalización es el proceso social que dará a nuestro modelo la validez para mostrar que la función normativa de la práctica social es lo que "hace que hagamos lo que hacemos".

2.- Aspectos metodológicos de la investigación

Para analizar el proceso de institucionalización nos vemos en la necesidad de elaborar un tipo de triangulación de datos entre, lo que se dice que hacen; en referencias bibliográficas propias de la Facultad de Arquitectura de la Universidad Autónoma de Yucatán, lo que narran que hacen; en un manual de Autoconstrucción de la vivienda tradicional maya y lo que observamos que hacen; en un estudio de campo en el cuál se entrevista al señor Gilberto Mate Pool en el municipio de Muna en el estado de Yucatán México. Articulamos estas tres fuentes en nuestro estudio para observar el proceso de institucionalización de dos maneras, la primera para reconocer la manera de evolución en lo que se hace y reflexiona sobre lo que se hace y posteriormente identificar lo que permanece a través del cambio en particular sobre el conocimiento matemático.

3.- La construcción de la Vivienda Tradicional Maya

Las actividades humanas que desarrollaron en la cultura maya fue la agricultura, el conteo del tiempo, la observación de la bóveda celeste, la pintura, la escultura y la construcción. Las casas tradicionales son construcciones que han permanecido desde la época prehispánica hasta nuestros tiempos, evidencia de esto se puede encontrar en frisos de la Casa de las Monjas en Uxmal, Yucatán, en el cuál se observa la forma de la casa tradicional, (Thompson, 2003). El trabajo de investigación que reportamos muestra la evolución de la vivienda tradicional maya, sus cambios a través de los tiempos, debido a influencias socioculturales así como climáticas.

Identificamos tres episodios en los cuales se observa la existencia de la función normativa de la práctica social en los conocimientos matemáticos.

3.1 La proporción de las medidas de la casa

En el trabajo de investigación se reporta un fragmento del episodio llamado **Justificación de las medidas de la casa (IV),** Gilberto nos menciona:

36. G: No, tiene 4 metros, una hamaca lo máximo tiene 4 metros
37. E: ¿Entonces usted lo mide conforme a la hamaca?
38. G: Claro que si, cuando según el grande de la hamaca, cuando tiene 3 metros está más corto. Como esa de allá, lleva una hamaquita, esas te llevan unas normales

En este episodio Gilberto nos muestra que para la construcción de su vivienda necesita tomar en cuenta la proporción del cuerpo de la persona que habitará en ella.

En el manual de Autoconstrucción que consultamos para desarrollar la investigación, nos percatamos que al igual se necesita tomar en cuenta la medida de una vara, que es el equivalente a la mitad de la altura del cuerpo de la persona que habitará en esta.

En ambos, podemos notar que lo que permanece es la noción de proporción que se utiliza en la construcción de la vivienda, a pesar de los cambios que sufra en su estructura o materiales con los que son elaborados, se conserva la proporción con que se elaborará.

3.2 La forma de la casa

El segundo episodio que analizamos muestra el diseño que utiliza Gilberto para elaborar la estructura principal de su vivienda.

En resumen, lo que narra Gilberto es lo siguiente:

Primero localicemos H1, H2, H3 y H4, los Horcomes principales de la vivienda, es decir, las cuatro columnas principales (Fig. 1), posteriormente coloquemos sobre estos B1 y B2 los Balos, que son los palos donde se colgaran las hamacas. Por último se determina la mitad de la longitud del balo y tomando como radio esta medida se trazan las semicircunferencias con diámetros H1H2 y H3H4..

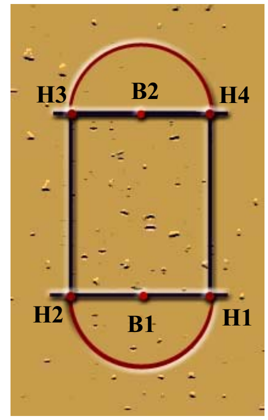


Fig. 1.- Plano principal de la casa.

El manual de autoconstrucción y las referencias que consultamos en la investigación presentan un sistema de construcción, que está basado en una matemática tradicional, sin embargo Gilberto hace uso de sus propios conocimientos y nociones para llevar a cabo su construcción, ¿Con base a qué un individuo modifica la matemática? Creemos que con base a su cultura y necesidades a las que responder. En este caso lo que se conserva a pesar de las modificaciones que sufre es la forma de la vivienda, ya que esta cumple con ciertos requisitos para la resistencia de vientos y temperatura.

3.3 La inclinación del techo

En este episodio Gilberto nos habla de la inclinación que debe tener el techo para que la vivienda resista los embates de la lluvia y el agua no entre en la casa.

Veamos el episodio

13. G: Si quieres ponerle bajo así, para que no acumule el agua (señalando la altura de la casa respecto a la inclinación como se muestra en la Figura 2)
14. G: Porque si lo pones muy así, inclinado pues legalmente cuando venga el agua, penetra (Mostrando la inclinación del techo de la casa con una abertura mayor, como se muestra en la Figura 3)
15. G: Cuando está así, cuando caiga el agua, abajo (Mostrando la inclinación del techo de la casa con una pendiente mas pronunciada, resultando una abertura mas pequeña Figura 3)
16. G: Ahora por ejemplo si quieres ponerle lámina, pues tienes que poner un declive así porque si es de lámina resbala.
17. G: Pero si es para una casa así (señalando la casa de materiales perecederos con un techo de paja), entonces tienes que ponerle altura para cuando venga el agua, abajo, así es
18. E: ah! ¿entonces depende de la caída del agua no?
19. G: Sí, si tiene más altura, más mejor

Fig. 2.- Gilberto explicando que a más inclinación del techo el agua entra a la casa.

Fig. 3.- Gilberto mostrando la altura que debe tener el techo para que el agua no entre.

Este episodio permite observar que Gilberto tiene la noción de inclinación para optimizar el material con que se elabora la vivienda.
El manual de autoconstrucción y las Bibliografía consultada nos muestran una inclinación optima para elaborar la vivienda, 60 grados, sin embargo para Gilberto ya es óptimo. Con esto podemos concluir que efectivamente la normativa de la práctica social es la que induce la manera de construcción.

Conclusiones
Sobre la relación existente entre actividad humana y praxis, es decir, sobre la relación entre la acción y la reflexión de la acción, que en este caso podemos ver en las tres fuentes que estudiamos, como por ejemplo, Gilberto narrándonos la construcción de su vivienda por medio de una reflexión, o el estudio de las fuentes que en realidad reflexionan y narran el estudio elaborado de la actividad humana, existe algo que las norma, adquiriendo esta función por medio del procesos de institucionalización. Afirmamos que mediante este estudio podemos entender que la práctica social es el concepto teórico que induce el comportamiento de lo que se hace, no es lo que se hace.
Poniendo en juego este modelo hemos encontrado que al analizar todo lo cotidiano que está en torno a la construcción de la vivienda, el papel del conocimiento matemático se encuentra presente de manera funcional en las prácticas de la construcción, puesto tiene su propia identidad, es dinámico, depende del contexto y realidad a la que pertenece. El conocimiento matemático reconocido como saber funcional, se va transformando y transmitiendo por generaciones puesto se reconoce su validez.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Cinvestav-IPN, México, D. F, México.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis,* 11(1), 55-101.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México, D. F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origene de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage, France. 24 (2.3), 137-168.

Covián, O. (Dirección y Producción) y Covián, S. (Grabación). (2005). *Entrevista al señor Gilberto Mate Pool.* Muna, Yucatán, México.

Díaz, D. *Manual de Auto construcción de la casa Maya*. Investigación no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida Yucatán, México.

Thompson, J. (2003). *Grandeza y Decadencia de los Mayas* (Zavala, L.). México D. F, México.: Fondo de Cultura Económica. (Trabajo Original Publicado en 1954).

Covian, O. (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura maya. Tesis de Maestría. Cinvestav – IPN, México, DF, México.

Wikipedia (2005). Socioepistemología. (Agosto 8, 2005) de es.wikipedia.org/wiki/Socioepistemolog%C3%ADa

LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA. UN ESTUDIO SOBRE SU RACIONALIDAD

José Iván López Flores, Ricardo Cantoral
Cimate-UAG, Cinvestav-IPN, México
jilopez@cinvestav.mx
Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel educativo:Superior

Resumen

Con esta investigación se pretende atender la siguiente cuestión: ¿cuál es la racionalidad que subyace a una explicación científica que se apoya en la idea de práctica?, se aborda esta pregunta haciendo una comparación con la estructura de otras teorías, que se considera tienen una cierta estabilidad. Esto nos permitió hacer inferencias sobre la racionalidad de la Socioepistemología y desde luego pretende ser también una reflexión de fondo sobre lo que significa hacer ciencia desde esta aproximación.

Introducción

La Socioepistemología es una aproximación teórica emergente dentro de la disciplina científica denominada Matemática Educativa. El objetivo de la Matemática Educativa consiste en explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático, cómo desarrollan por así decirlo una manera matemática de pensar. Dentro de esta disciplina, la Socioepistemología ha hecho planteamientos novedosos, poniendo al centro de la discusión, más que a los conceptos, a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento.

Este trabajo nace al seno de la Socioepistemología como una necesidad por entender nuestro propio trabajo, intenta escudriñar sobre cómo es que mira un socioepistemólogo su objeto de conocimiento. Lo que esta investigación intenta es comprender cuál ha sido el desarrollo que ha tenido la aproximación teórica hasta el momento actual.

El problema de la racionalidad y el camino escogido

Al ser la Socioepistemología una aproximación emergente en la disciplina, desde luego tiene problemas grandes por resolver, uno de ellos es el de su racionalidad teórica, ¿es genuinamente científica una aproximación que se basa en la noción de práctica social?
Por racionalidad estamos entendiendo, como se señala en Álvarez (2003), aquellos modelos sobre la estructura de la conducta de los seres humanos, hablando en un sentido amplio. En el contexto de la Matemática Educativa, podríamos acotar esta acepción diciendo que trata de cómo es que se desarrollan las explicaciones sobre la construcción del conocimiento matemático. Para nuestros fines hemos tomado el camino más clásico, el de la racional entendida como una búsqueda de coherencia discursiva, sostenemos que la racionalidad estará sustentada por la estructura de la aproximación teórica.. Para nuestra investigación tomamos la denominada aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa.
Elegimos cinco aproximaciones al asunto del conocer, que fuesen estables en periodos de tiempo más o menos y que hubieran tenido cierto éxito, nos preguntamos entonces por

cuáles eran aquellas estadios por los que tuvieron que transitar en su desarrollo; las miramos buscando en ellas regularidades que, sostenemos, fuesen las que sustentan su racionalidad teórica y llamamos a estas regularidades *categorías teóricas*.

Las aproximaciones y su análisis estructural

Elegimos para esta parte de la investigación a las producciones teóricas de Thomas Khun, Stephen Toulmin, Imre Lakatos, George Lakoff y Humberto Maturana; en esencia las cinco hablan de alguna forma de conocimiento, los tres primeros se denominan a si mismos filósofos de la ciencia, el cuarto es lingüista y el último es un neurocientífico.

Khun defiende la idea de que el uso de la historia para explicar el crecimiento de la ciencia había estado equivocado, idea que va en contra de la idea positivista de la ciencia, que supone un crecimiento científico como una mera acumulación de conocimiento o resultados, plantea pues un modelo científico en torno a la idea de *paradigma científico* y en términos cíclicos, donde un paradigma es sustituido por otro, situación que denomina *revolución científica.*

Toulmin critica la sobrevaloración que se da a la forma, más que al contenido, dice que la preocupación excesiva por mantener una sistematicidad lógica en ciencia y en filosofía no permite una comprensión histórica y racional de los conceptos, esta idea, como él mismo señala viene de que en ciencia es posible construir una racionalidad en términos lógicos, como única alternativa, plantea pues analizar el desarrollo del conocimiento científico en términos de un modelo que toma en cuenta al uso y evolución de los conceptos, por épocas en una parte y por la evolución individual de cada concepto, después estas dos partes se conjugan con una serie de preguntas para explicar lo que el denomina la evolución conceptual.

El caso de Lakatos, él comparte la idea con Popper de que es un error la distinción entre teoría y observación de los lenguajes científicos establecida por los positivistas lógicos, retoma además la vieja idea de explicar usando la metafísica. Ellos guiaban sus ideas con el siguiente aforismo: “datos primero, teoría después”, es decir, que con base en sus observaciones puras de fenómenos podían encontrar generalizaciones de ellos y con ello vendría la teoría, pero las observaciones, como nos señalaron ellos, no son puras, vienen cargadas de nuestras expectativas y de nuestras creencias, por lo tanto las generalizaciones no eran tales.

Para efectos de proponer un nuevo modelo, Lakatos hace uso del concepto de *Programa científico de Investigación*, lo que afirma es que la ciencia debe mirarse como un conjunto de teorías en evolución, donde existe una parte que cambia (cinturón de protección) y otra que permanece (núcleo), de carácter metafísico, su modelo entonces está conformado por estás dos partes, así como de ciertas heurísticas (determinadas por los dos elementos anteriores) que marcan tanto el rumbo que tomará como el que no seguirá el programa científico.

George Lakoff, por su parte propone una idea diferente al uso común que se le da a la metáfora, por lo general ésta es considerada como mero apoyo para poder expresar ideas; él considera que todo el lenguaje está impregnado de ellas pues nuestro sistema conceptual es a su vez metafórico, todos los conceptos aún los más básicos son al menos parcialmente metafóricos.

Y, finalmente, Humberto Maturana pone la atención sobre la manera en que un científico da una descripción de un fenómeno de su disciplina, hace notar que el tipo de explicación se da como si la persona no estuviese involucrada en el fenómeno; él afirma que para poder describir un fenómeno es necesario además explicar cómo es que estas explicaciones surgen de nosotros mismos. Enfrenta el problema de la construcción de conocimiento de una forma sistémica, tomando en cuenta la constitución de los seres vivos, pasando por los sistemas sociales, así como el lenguaje. Su problema es construir una explicación satisfactoria para el fenómeno del conocer.

Del análisis de estas aproximaciones pudimos observar las siguientes categorías:

Categoría 1. *La unidad de análisis*: Esta categoría se hace necesaria en toda aquella aproximación que intente explicar el desarrollo de la ciencia, permite un análisis estructurado, pues engloba (ya sea en un término o en la caracterización de su uso) lo que va a observar, por otra parte le dará una identidad propia. *Esta categoría está ligada también a la necesidad de acuñar términos propios a las explicaciones de la aproximación.*

Categoría 2. *Sus ejemplos*: Existe dentro de las aproximaciones un elemento que es de suma importancia, estamos hablando de los ejemplos. Ya sean los que validan una tesis, los que muestran cómo es que lo que ya está establecido no funciona o aquel tipo de ejemplos que, precisamente hacen válida la crítica que ellos proponen, éstos son una pieza clave para el convencimiento de la comunidad de la validez de sus propuestas. En un sentido son el tipo de ejemplos que Khun llamaría paradigmáticos, en el sentido de que acompañan a la tesis central y que por lo tanto son rara vez criticados por ellos mismos. Los ejemplos vienen a ser en algún sentido, pruebas empíricas y en determinados momentos son usados de manera muy cercana a la teoría, ante un público no especializado, por ejemplo, es clave para el convencimiento y para ganar adeptos.

Categoría 3. *Construcción de conceptos*: En estos momentos se cuenta con la perspectiva suficiente para poder hablar de la construcción de conceptos en las aproximaciones, las dos categorías anteriores serán de gran importancia en las argumentaciones de ésta.
Las unidades de análisis hablan de la necesidad de la generación de una nueva explicación (construcción teórica nueva) para aquello que se hace evidente mediante la crítica, se plantea también en alguna medida la necesidad de tener una identidad en las construcciones.
Con la segunda categoría se muestra cómo "funcionan" los conceptos nuevos a la luz de estas construcciones, fundamento de lo que se piensa es primordial en el convencimiento de la explicación alternativa.
Si bien se piensa en los conceptos como elementos aislados o como en algo perfectamente diferenciado de lo demás, es posible que dentro de los "nuevos conceptos" se encuentren "viejos conceptos" que han sido caracterizados de manera diferente, ya sea mediante nuevos usos, en nuevos escenarios o complementados con otros conceptos para formar nuevos elementos teóricos.

Categoría 4. *La lucha por la hegemonía*: En esta categoría presentaremos una serie de extractos en donde mostramos cómo es que dentro de una aproximación teórica existen, en determinados momentos, producciones destinadas a ser elementos críticos a las demás

aproximaciones con las que coexisten en la misma disciplina, en este caso, sostenemos que este tipo de producción sólo es posible hasta que existe un cierto grado de construcción teórica, tanto propia como de las demás aproximaciones.
En el caso de las aproximaciones analizadas es en tres de ellas, dada su naturaleza, en las que se pueden encontrar estos elementos, es el caso de las aproximaciones teóricas de Kuhn, Lakatos y Toulmin. Seguramente estos elementos se dieron, pues ellos mismos se catalogan como pertenecientes a la misma disciplina: Filosofía o Epistemología de la Ciencia, que no es el caso de Lakoff y Maturana.
El nombre de la categoría es porque la construcción de este tipo de elementos se da precisamente por la búsqueda de la hegemonía de las aproximaciones dentro de su disciplina, de ahí que la naturaleza de lo construido en esta etapa sea más bien de carácter crítico, ya sea a los fundamentos y/o a los resultados de los "rivales".

Podemos resumir los resultados de esta parte de la investigación en la siguiente tabla:

Aprox/cat.	**Unidad de Análisis**	**Ejemplos**	**Construcción de conceptos**	**Lucha por la hegemonía**
Kuhn	Paradigmas	Revolución Copernicana	Concepto de Paradigma	Notas sobre Lakatos
Toulmin	Cambio Conceptual	El caso del Continuo	Representaciones: Transversal, Longitudinal y Evolutiva	La ilusión revolucionaria
Lakatos	Programa Científico de Investigación	El Programa de Investigación de Newton	La noción de Programa Científico de Investigación	Lakatos vs Kuhn, Toulmin
Lakoff	Uso de las Metáforas	"El debate es una guerra"	La caracterización del uso de la Metáfora	No aplica
Maturana	Fenómeno del Conocer	La organización de lo vivo	Caracterización de Organización y Estructura	No aplica

Tabla1. Las categorías teóricas

En síntesis, estas cuatro categorías constituyen lo que se denominó un "análisis estrutural", que nos servirá ahora para hablar de la Socioepistemología.
Podemos decir que lo que se construyó es un instrumento que nos permite hablar de la racionalidad de una cierta teoría en términos, al menos, estructurales.

La Socioepistemología

La siguiente etapa de la investigación consistió en analizar el desarrollo de nuestra aproximación a la luz de este análisis estructural.
Podemos decir entonces que la Socioepistemología encontró, como punto de partida, esquemas que explicaban de alguna manera la construcción de conocimiento matemático, produciendo explicaciones o bien parciales, o incompletas o que se consideraba iban en contra de cierta evidencia empírica, tales resultados son citados por Cantoral y Farfán (2003):

> En síntesis, este tipo de estudios proporcionaron la explicación que niega, al menos parcialmente, nuestras hipótesis de partida, a saber, si bien es cierto que el

> concepto surge en el ámbito de la determinación del estado estacionario; éste no resulta propicio para recrearse en el aula pues resulta ser más complejo que aquél que deseamos introducir…

Desde luego, podemos decir con base en actividad comunitaria, como es la que realiza la escuela de pensamiento que cobija este enfoque que se ha venido constituyendo **una unidad de análisis propia**, acorde a la visión inicial, es decir, partiendo de la idea de que no basta explicar la construcción del conocimiento en términos de conceptos sino que lo que posibilita esta construcción son las prácticas sociales que le dieron origen. En esencia, la Socioepistemología mira las prácticas asociadas a cierto conocimiento, traza entonces una epistemología, misma que intenta reproducir en contextos escolares, de esta manera es como articula las dimensiones epistemológica y la sociocultural. Desde luego, la problemática es más compleja, pues supone también importante a las otras dimensiones que tiene el conocimiento, como son la didáctica y la cognitiva, atendiendo a estas cuatro de manera sistémica.

Podemos citar pues los trabajos de Arrieta (2003), Cantoral (2003), Cordero (2005), Martínez (2003) en ese sentido, que aunque no explícito es posible inferir.

Hablando de la cuarta categoría, el ejemplo paradigmático, el más significativo, por ser el primero, es el de la identificación de la **"Predicció**n" como una práctica social que genera conocimiento matemático relacionado con lo que escolarmente se conoce como Cálculo, Análisis y Ecuaciones Diferenciales, esta práctica social ha sido observada por nuestra comunidad científica desde sus inicios, el trabajo inicial es la tesis doctoral de Cantoral(1990) y quizá sus estudios fundacionales de los años ochenta, y se ha venido precisando a través de trabajos como los de Arrieta(2003), Cordero(2005), Domínguez(2003) y Rosado(2004).

Hablando de los constructos teóricos de la Socioepistemología, tendríamos que decir que la labor de la comunidad para precisar el concepto de "*práctica social*" es constante e importante, en realidad a lo largo de su desarrollo, la Socioepistemología ha acuñado términos tales como "*rediseño del discurso matemático escolar*", "*resignificación*", "*práctica de referencia*" como se infirió del análisis estructural tanto la construcción como la precisión de éstos es en busca de superar un tope teórico.

La siguiente fase, que es la que en la actualidad se encuentra la Socioepistemología es la de una lucha por la hegemonía dentro del campo de la Matemática Educativa, esta está caracterizada por la interacción con otras comunidades, con el fin de identificar afinidades y precisar fronteras de sus explicaciones, desde luego se buscan "las mejores explicaciones", es claro que en términos filosóficos la evidencia empírica no es criterio suficiente para desechar una aproximación teórica, pero el hecho es que ante los ojos de la comunidad científica la confirmación empírica de una teoría es primordial y fundamental para su aceptación o rechazo, por lo tanto, se buscarán estas ansiadas mejores explicaciones.

Reflexión Final

Las categorías teóricas no son secuenciales, sino más bien se traslapan, si bien se habló que se encuentra en la última categoría lo cierto es que está en un tránsito entre la tercera y cuarta. Por lo tanto, a la luz de esta investigación podemos afirmar que los esfuerzos deberán estar encaminados a superar el tope teórico impuesto, por ejemplo, por la falta de

caracterizaciones del ***aprendizaje*** desde una perspectiva social (probablemente aprendizaje individual no sea el término más adecuado), situación que puede observarse en las tesis que actualmente se encuentran en elaboración: ensayos de nuevos elementos teóricos, precisiones sobre los que ya se tienen y el mirar nuevas *prácticas de referencia*.
Desde luego tendrá que atender los asuntos propios de la cuarta categoría, la comunidad deberá, en nuestra opinión, afrontarla abordardo la siguiente cuestión: ¿por qué la Socioepistemología y no otro marco teórico, para cierto fenómeno? La intención en este caso es mostrar la originalidad de los planteamientos socioepistemológicos, es decir, cómo es que ciertas explicaciones **sólo** se pueden dar a la luz de nuestro marco teórico.
Desde luego, estos planteamientos deberán ser discutidos en foros, como congresos internacionales, que potencien y permitan alcanzar el fin de estas reflexiones.
En cuanto a la preocupación inicial sobre la racionalidad podemos agregar que la Socioepistemología es una aproximación racional teóricamente y que sustenta esta racionalidad justamente en su estructura.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*, Tesis de Doctorado, no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Praediciere" y "lo Analítico"*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). *Mathematics Education: A vision of its evolution. Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherthelands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270. Disponible en http://cimate.uagro.mx/cantoral/.

Cordero, F (2005).(en prensa). *El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica.* Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Domínguez, I (2003). La resignificación de lo asintótico en la aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN.

Kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Lakatos, I. (1978). *La metodología de los programas de investigación científica*. España: Alianza Universidad.

Lakoff, G. (1980). *Metáforas de la vida cotidiana*. España: Colección Teorema.

López, J (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav- IPN. México. . Disponible en http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México. Disponible en http://www.cimateuagro.org/tesis/2003/docgustavo/p.pdf

Maturana, H., Varela F. (2003). *El árbol del conocimiento. Las bases biológicas del conocimiento*. Argentina: Lumen.

Nosnik, A (2000). *El desarrollo de la comunicación social. Un enfoque metodológico*. México: Trillas.

Rosado. P (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana: el uso colectivo y la evolución de los conceptos*. España: Alianza Editorial.

PROCESOS DE RESIGNIFICIACIÓN DEL VALOR NUMÉRICO DE LA FUNCIÓN DERIVADA SEGUNDA: UN ESTUDIO EN EL SISTEMA ESCOLAR URUGUAYO

Ricardo Cantoral; Yacir Testa
rcantor@cinvestav.mx; milefede@adinet.com.uy
Cinvestav – México; I.P.A. – Uruguay
Campo de Investigación: Pensamiento Matemático Avanzado-Pensamiento Variascional- Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior; Metodología: 40

Resumen
Reportamos los resultados de una investigación desarrollada con estudiantes uruguayos respecto del significado gráfico que asignan al valor numérico de la función derivada segunda, y de cómo influye y se desarrolla su Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) al trabajar en actividades que ponen en juego dicho valor numérico. Mediante un análisis del contenido temático de los cursos, y del enfoque curricular, de la bibliografía empleada y de los antecedentes de investigación, observamos que se significa gráficamente al signo del valor numérico de la función derivada segunda, asociándolo a concavidad positiva o negativa, pero no así al valor numérico que esta tieneí. La secuencia didáctica que planteamos en este estudio, enfrentó al estudiante al reconocimiento de las limitaciones de la significación gráfica del signo de $f\,''(a)$ y generó una puesta en juego y un desarrollo de su PyLV al significar gráficamente al valor numérico de $f\,''(a)$.

Introducción

A partir del análisis profundo tanto del currículo como de la forma en que se trabaja el concepto matemático "**derivada**" en los cursos y en los libros de textos, observamos que los estudiantes uruguayos son guiados a trabajar con dicho concepto, a conocer su definición, pero únicamente con el enfoque que indica el currículo, sin poner en primer lugar una enseñanza, en el sentido de Cantoral (2000), que favorezca las distintas miradas del concepto, sus relaciones con conceptos o imágenes ya adquiridas de éstos, lo que favorecería, en nuestra opinión, la formación de una fuerte estructura conceptual.

Dada la importancia que tiene en los currículos el tema "derivadas" y sus indiscutidas aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas, es que creemos que su enseñanza no puede descansar en que los estudiantes puedan "repetir" su definición o que apliquen correctamente ciertas reglas para "derivar". A partir del análisis de los currículos se deduce que el objetivo principal de la enseñanza de este tema es realizar correctamente el estudio analítico y la representación gráfica de una función (EARG) donde, en forma mecánica se determinan las funciones derivada primera y segunda. En este sentido observamos dos aspectos que generaron nuestra investigación; por un lado este tipo de trabajo no implica que el estudiante ponga en juego su *pensamiento y lenguaje variacional*, por lo tanto no posibilita el desarrollo de este tipo de pensamiento fundamental en el entendimiento relacional del tema, por otro lado el valor numérico de la función derivada primera es significado gráficamente, relacionándolo con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión, pero el valor numérico de la función derivada segunda no entra en juego en el EARG, si es distinto de cero, y solo se significa gráficamente a su signo, relacionándolo a la concavidad de la función.

Esta investigación, como otras que también forman parte de la línea de investigación *Pensamiento y Lenguaje Variaciona*l (PyLV), busca determinar elementos que no están presentes en el currículo, que permitan enriquecer el concepto “derivada” así como comprender este concepto desde el punto de vista del estudiante. Nuestro grupo considera imprescindible el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes para trabajar en un ambiente enriquecido los temas de cálculo; y además, en cuanto a este tema específico, distintas investigaciones; entre ellas González, R. (1999), Valero, M. (2000); han mostrado que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. A partir de esta base creemos que se favorecerá este proceso si el estudiante enriquece el concepto de valor numérico de la función derivada segunda con aspectos gráficos y variacionales; es por ello que en este trabajo investigamos **cuál es el significado gráfico que asignan los estudiantes uruguayos al valor numérico de la función derivada segunda y cómo influye su PyLV al trabajar en actividades que ponen en juego estos aspectos.**

La problemática

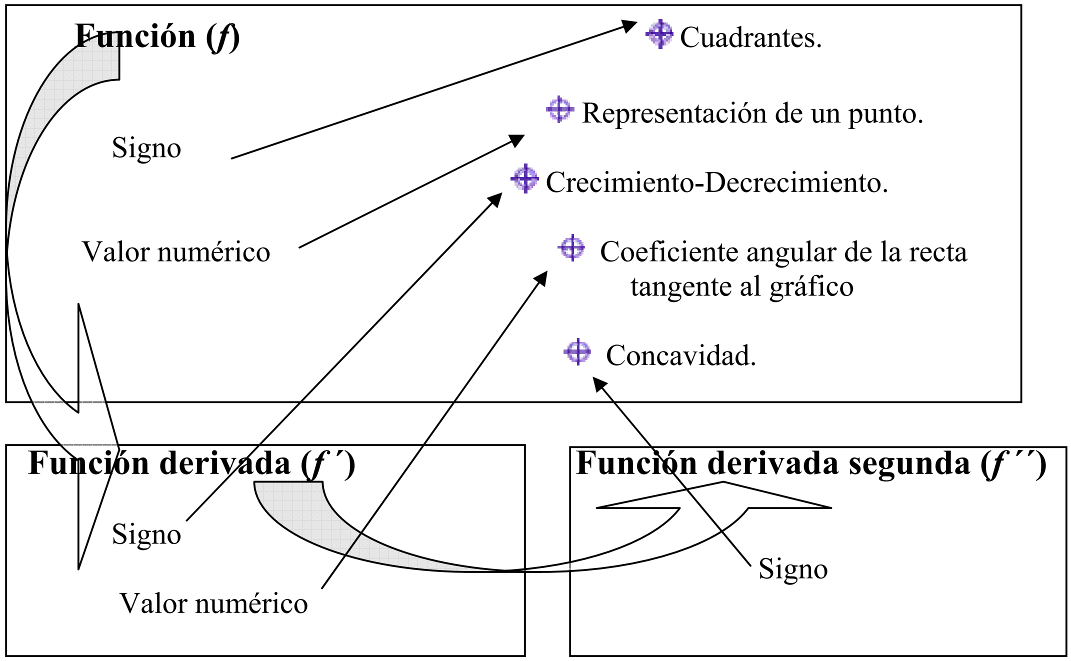
En los cursos de Análisis Matemático de secundaria en Uruguay (estudiantes de 17 años aprox.) se trabajan los tópicos matemáticos: función; valor numérico; función derivada primera; signo de la función inicial, signo de la función derivada primera, valor numérico de la función inicial, valor numérico de la función derivada primera, función derivada segunda, signo de la función derivada segunda. Casi todos estos tópicos son significados gráficamente:

- el signo de la función inicial f con el cuadrante en el cual estará contenida.
- el valor numérico de la función f en $x=a$ con el punto de coordenadas $(a, f(a))$.
- el signo de la función derivada primera f' con el crecimiento-decrecimiento de la función f.
- el valor numérico de la función f' con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto en cuestión.
- signo de la función derivada segunda f'' con la concavidad (positiva o negativa) de la función f.

Pero no hemos encontrado muestras de que se signifique gráficamente el <u>valor numérico</u> de la función derivada segunda.

Estos cursos tienen como objetivo principal el estudio analítico y la representación gráfica de una función dada (f), las funciones derivadas de ésta (función derivada primera y función derivada segunda) solo son estudiadas como herramientas para poder graficar la función dada, pero su vinculación es solo mediante algoritmos matemáticos en una de las vías, ($f \to f' \to f''$), y mediante representaciones geométricas en la otra vía ($f'' \to f' \to f$).

La anterior situación la podemos esquematizar en:



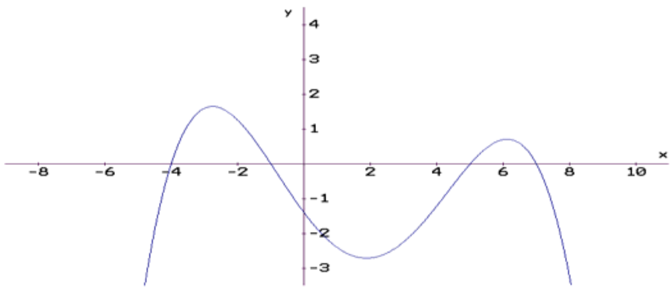
Podemos observar que:

- Las vinculaciones que llamaremos "de bajada" están dadas solamente son por algoritmos o técnicas de derivación y las que llamamos "de subida" sólo brindan información gráfica, o sea, las flechas curvas muestran una relación, exclusivamente algorítmica, entre *f* y *f ´* y entre *f ´* y *f ´´*, y las otras flechas muestran una vinculación entre aspectos de las funciones derivadas de la inicial (*f´*y *f´´*) y aspectos gráficos de la función inicial (*f*).
- No se establecen relaciones de "subida" entre la función derivada segunda y la función derivada primera.
- No está presente el valor numérico de la función derivada segunda, por lo tanto es imposible, en este marco, poder establecer relaciones entre este valor y la función dada, o entre este valor y la función derivada primera.
- No están presentes ningunas de las funciones derivadas de orden mayor que dos.
- No se establecen relaciones "de bajada" entre aspectos de la función, función inicial o función derivada primera (*f* y *f´*), con las funciones derivadas sucesivas de ellas a no ser las de orden siguiente (*f´* y *f´´*).

Nuestra investigación

En esta investigación confirmamos nuestra creencia inicial de que en la estructura conceptual asociada al concepto "derivada" de los estudiantes no estarían presentes significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda, y que el trabajar en la secuencia que creamos posibilitaría que los estudiantes reflexionaran sobre este tópico, que llevaran a un nivel conciente las limitaciones de la estructura conceptual construida en el transcurso de su escolarización y generaran significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda. La secuencia, especialmente desarrollada para esta investigación, enfrenó a los estudiantes a aspectos del concepto nunca antes tenidos en cuenta, tal vez por no estar presentes en forma específica en los currículos, y permitió que ellos descubrieran y propusieran formas de solucionar la problemática planteada. A partir del análisis que hemos realizado de distintos elementos creemos que los estudiantes nunca se habían visto enfrentados a actividades que pusieran en juego el significado gráfico de la función derivada segunda, de donde las actividades propuestas fueron para ellos realmente situaciones problemas.

Un ejemplo de las actividades que planteamos en nuestra investigación es el siguiente:
Dado el gráfico de una función f:



Indica cuál afirmación es seguramente falsa, cuál es seguramente verdadera, cuál podría ser verdadera, en cual no lo puedes contestar. Explica ampliamente tu respuesta.

a) $f''(-3.8) = 1$
b) $f''(1) = -2.5$
c) $f''(5) = -3$
d) $f''(1) < f''(8)$
e) $f''(-5) < f''(-3.8)$
f) $f''(2) < f''(3)$

En las partes a), b) y d) se intenta establecer si el estudiante diferencia, a partir del gráfico, cuándo la derivada segunda en cierto real es positiva y cuándo negativa. Para dar respuestas a estas preguntas sólo se requiere haber significado correctamente el signo del valor numérico de la función derivada segunda. En cambio en los demás ítems el estudiante **debe significar el valor numérico de la función derivada segunda en un real en contexto gráfico**, ya no se compara a este real sólo con cero, ya no es suficiente haber asignado “concavidad positiva”, o negativa. Nos interesa ahora investigar qué información brinda al estudiante sobre el gráfico de una función f que $f''(5) = -3$ o que $f''(5) = -4$, así como comparar los gráficos de la función f con $f''(a) > f''(b)$ en el caso que ambos reales tengan el mismo signo. En otras palabras nos interesa observar cómo diferencian los estudiantes en el gráfico de una función la situación de que en dos reales la derivada segunda sea del mismo signo pero con distintos valores numéricos, $f''(3) = 5$ y $f''(4) = 9$ *les indica que en ambos reales la concavidad de la función f será positiva, pero, ¿cuál será el significado gráfico que asignarán los estudiantes a la diferencia en los valores numéricos?*

Algunos resultados

En una primer instancia el significado gráfico que asignan los estudiantes a la expresión $f''(a) = b$ es el previsto, si $b>0$ la función f presenta concavidad positiva en $x=a$, y si $b<0$ la concavidad de f es negativa en $x=a$, como podemos observar **no se asigna un significado al valor numérico en sí de $f''(a)$ sino solo a su signo**. A medida que los estudiantes avanzaban en las actividades reconocen que asociar al real $f''(a)$ los conceptos “concavidad positiva” o “concavidad negativa” no es suficiente ni para determinar algunos aspectos gráficos de funciones en las cuales los valores numéricos de sus funciones derivadas segundas son distintos, pero de igual signo, aunque haya una relación entre este concepto y el signo de dichas funciones derivadas segundas; ni para comparar los valores numéricos de las funciones derivadas segundas en un real en el cual los gráficos de las funciones iniciales tienen concavidades del mismo signo. De la toma de conciencia de estas limitaciones comienzan a surgir conjeturas que intentan dar respuesta a estas nuevas situaciones.

Algunas de las conjeturas generadas por los estudiantes surgen del análisis de familias de parábolas y de funciones. Una de las familias de parábolas que analizan es la que surge a partir de la expresión de la forma $f(x)=ax^2$, el cual permitió a los estudiantes observar similitudes y diferencias en el comportamiento de sus gráficos al variar el coeficiente principal y a partir de allí generar conjeturas sobre el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda. A partir de este análisis surge una relación "por dentro", o más "apretada", que será base de sus conjeturas. Si los estudiantes hubieran asumido cada parábola como un gráfico independiente, con características propias, y no como un gráfico perteneciente a una familia en la cual las variaciones determinan las similitudes y diferencias de los elementos de dicha familia, tal vez no hubieran podido generar herramientas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda.

El pensamiento y lenguaje variacional desarrollado por los estudiantes, evidenciado en el análisis de sus diálogos, les ha brindado herramientas para, entre otros aspectos, reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían, estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos, establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas, hacer presente la concepción de los elementos del dominio como elementos fijos e independientes entre ellos, a los cuales se les aplica un proceso, y de elementos que se pueden relacionar por ciertas variaciones, y además, comunicar oralmente y gestualmente sus conjeturas y argumentos.

El desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional de los estudiantes permitió enriquecer el significado gráfico asociado al valor numérico de la función derivada segunda. Se deduce de nuestra investigación que el PyLV desarrollado por los estudiantes les brindó elementos para significar de manera gráfica a la función derivada segunda no solo en términos de concavidad positiva o negativa. Para establecer una relación entre el signo de $f''(a)$ y el signo de la concavidad de f en $x=a$ no se necesita poner en juego un PyLV, dado que puede concebirse la gráfica de f como un objeto estático del cual sólo se tendrá en cuenta su concavidad en un entorno de a. En cambio el significado que han asignado los estudiantes a $f''(a)$ al enfrentarse a la secuencia está basado en reconocer algunos de los aspectos variables y otros constantes de dicho gráfico; por ejemplo la variación de los coeficientes angulares de las rectas tangentes al gráfico de la función f en un entorno de a. Además se deduce que reconocer aspectos constantes y variables en sus análisis les permitió significar gráficamente aspectos gráficos de las funciones derivadas haciendo una ruptura entre la asociación derivada-fórmula pasando a considerar una asociación derivada-variación. Esta nueva concepción de la derivada rompe con la concepción curricular que comúnmente se realiza en los cursos, permitiendo resignificarla enriqueciéndola, "en las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento". (Cantoral, 2000). Por lo tanto el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional ha permitiendo en estas actividades enriquecer los significados de conceptos que ya conocían y significar nuevos.

Algunas recomendaciones didácticas

Es la creencia de nuestro grupo de investigación, y la nuestra propia, que "el aprendizaje se basa en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas" (Cantoral, et al., 2000). Por lo tanto creemos que esta investigación brinda herramientas para generar nuevas actividades que tengan por objetivo que el estudiante signifique gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda en un ambiente de descubrimiento, argumentaciones, confrontaciones. Esto permitirá, en forma específica, que el estudiante enriquezca el concepto derivada segunda al romper las dos asociaciones fundamentales que hemos detectado: "derivada segunda-fórmula" y "derivada segunda–estudio de signo de concavidad", al resignificar el concepto permitiendo una visión gráfica de él, y además llevará a enriquecer el propio concepto "derivada" al realizarse una mirada del concepto desde una óptica no tradicional permitiendo generar una significación gráfica del valor numérico de la función derivada segunda, de la cual hemos dado muestras en nuestra investigación que no está presente en los cursos ni en los textos analizados. Además creemos que esta nueva visión favorecerá la significación de la función derivada tercera y de las derivadas consecutivas. En forma general permitirá que el estudiante desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, que desarrolle su capacidad de visualizar en matemáticas, y brinda la oportunidad de discutir con compañeros, conjeturar, argumentar, refutar, lo cual ayudará a que las ideas evolucionen hacia ideas más robustas matemáticamente.

Referencias bibliográficas

Balparda, O. y Lois, L. (1993). *Matemáticas Sexto-Para el trabajo en clase*. Ediciones de la Plaza, Montevideo Uruguay.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis.* En Cantoral, R. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamericana, México. Pp. 69-91.

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas. México.

Dolores, C. (1989). *Algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada.* Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, celebrada en San José de Costa Rica en julio de 1989.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de maestría. Cinvestav. México

Sipvak, M. (1992). *Calculus*. Editorial Reverté. Barcelona, España. Pp. 274, 197- 283, 302-313.

Valero, M. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de maestría. ITESM. México.

UM ESTUDO ETNOMATEMÁTICO DAS ESTERAS (*POP*) SAGRADAS DOS MAIAS
(UN ESTUDIO ETNOMATEMÁTICO DE LAS ESTERAS (*POP*) SAGRADAS DE LOS MAYAS)

Milton Rosa y Daniel Clark Orey
Encina High School, Sacramento, California, Estados Unidos y Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil
milrosa@hotmail.com y orey@csus.edu
Campo de Investigación: Etnomatemáticas; Nivel Educativo: Básico, Medio y Superior

RESUMEN

El contexto holístico de la etnomatemáticas busca estudiar, reflejar, y comprender las relaciones existentes entre los componentes del grupo cultural a través del análisis constante de cada individuo en el propio ambiente cultural. En este contexto, los mayas utilizaron padrones geométricos llamados de esteras o Pop que se tornaron sagrados. Esos padrones eran esculpidos en piedras, utilizados como joyas y dibujados en tejidos. Algunos objetos encontrados en México y en América Central muestran que los sacerdotes mayas tomaban ciertas decisiones basadas en las esteras sagradas, pues ellas contenían significados sagrados basados en valores finales de cada padrón. Los autores demuestran aspectos etnomatemáticos de la cultura maya que están basados en las pesquisas realizadas sobre las ideas y practicas matemáticas de este pueblo.

Introducción

Uno de los conceptos de la etnomatemáticas es considerar la asociación entre la matemáticas y las distintas formas culturales. La etnomatemática es un programa más amplio de lo que la matemática y más abrangente de lo que los conceptos de etnias. La etnomatemáticas consiste en el análisis de la generación y producción, del proceso intelectual, de los mecanismos sociales de institucionalización y transmisión del conocimiento (D'Ambrosio, 1990).

Los Mayas

La civilización surgió hace más de 3000 años. La civilización Maya es conocida por los padrones que encontraron en las observaciones que hicieron sobre el universo, en el desenvolvimiento de las relaciones matemáticas y, en el sistema simbólico y sagrado que desenvolvieron para representar estos padrones.
Actualmente, existen 1.2 millones de mayas viviendo en el sur de México y aproximadamente 5 millones de ellos están dispersos en la península de Yucatán y en comunidades urbanas y rurales en Belice, Guatemala, Honduras y El Salvador.

El Padrón Geométrico del Diamante Maya

Los Mayas hicieron uso de una serie de padrones geométricos y numéricos que fueron transmitidos de generación en generación y que se tornaron sagrados.
Probablemente, la utilización de uno de estos padrones se origino con la observación de una de las especies de cascabel Crotalus Durissis, que es encontrada en la región en que los mayas vivían y que poseen padrones y dibujos en la piel que tiene formas geométricas que son parecidas con diamantes (Nichols, 1975; Diaz, 1995; Grattan-Guiness, 1997).

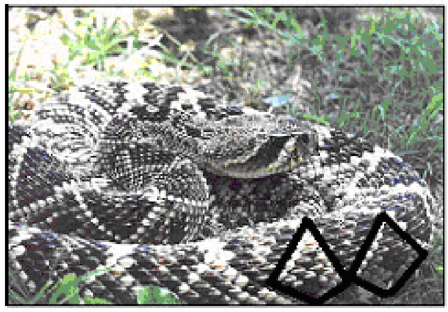


Figure 1:Cascabel Crotalus Durissis

La contemplación de esta forma y de este padrón geométrico parece haber inspirado el arte, la geometría y la arquitectura de los mayas (Diaz, 1995, Grattan-Guinness, 1997). Así, las imágenes de estas cascabeles son constantemente encontradas en los registros de la cultura maya. Ellas simbolizan el nacimiento, el cambio de vida, pues segundo los mayas, ellas se moví mientan y se arrastran a través del tiempo.

Figure 2: Cabeza de la cascabel esculpida en un templo antiguo en Chichen Itza

Las Pirámides Mayas

Los escalones de las pirámides Mayas son muy a pique y altos dificultando una escalada confortable. Los escalones del Templo El Castillo en Tikal poseen aproximadamente 46 cm de altura. Los sacerdotes mayas subían y bajaban las pirámides en un ritual que era semejante a las huellas que las cascabeles marcan en la tierra al moví mentarse.

Figure 3: El Castillo en Chichen Itza

El Significado Sagrado de los Números

En la cultura maya, los números, los símbolos y las palabras poseían significados que estaban relacionados con otros números, símbolos y palabras con valores semejantes. Los números eran utilizados por los mayas como una especie de numerología, pues los números de 1 a 9 poseían un valor sagrado y un significado especifico (Coe, 1966; Coe & Kerr, 1988; Nichols, 1975, Orey, 1982).

1. Dios y Diosa
2. Creador y Padres
3. Criatura y Vida
4. Venus, llamada de Kulkulkan
5. Sacerdote: La mano de Dios
6. Vida y Muerte
7. Dios y el Divino Poder
8. Cuerpo y Alma
9. Las Nueve Bebidas

Figure 4: El Significado Sagrado de los Números

Las Esteras Sagradas Mayas

La palabra Popul presente en el titulo del libro sagrado Popul Vuh (Recinos, 1978), considerado como la Biblia maya, contiene el prefijo Pop que es la palabra maya para estera.

Figure 5: Padrones Geométricos de la Estera Sagrada Maya

Los Dioses que están representados en los monumentos y en las pirámides mayas se encuentran sentados sobre los Pops o esteras sagradas (Diaz de Castillo, 1983). Esos monumentos también fueron construidos sobre esteras que contenían los valores mágicos y sagrados de los números.

Figure 6: Diversos Padrones Geométricos de la Estera Sagrada Maya

Mucho de lo gravado encontrado en cerámicas, linteles, estelas y murales también contienen los mismos padrones o formas geométricas que son utilizados en los tejidos mayas.

Figure 7: Pared de un Templo Maya en Yucatan, México

Los cuatro rincones de las esteras o Pop poseen las formas X o XX que también representan los cuatro puntos cardinales del mundo maya Nichols (1975).

Figure 8: Stela Maya en Quirigua, Guatemala

Decodificando Mensajes Mayas

Los números colocados en las esteras mayas avanzan en secuencia zigzagueando en diagonal Nichols (1975). El primer numero se localiza en el vértice derecho del primer cuadrado que compone la estera.

Por ejemplo, en una estera compuesta de 3 líneas y 2 columnas, los números son colocados como en el diagrama abajo:

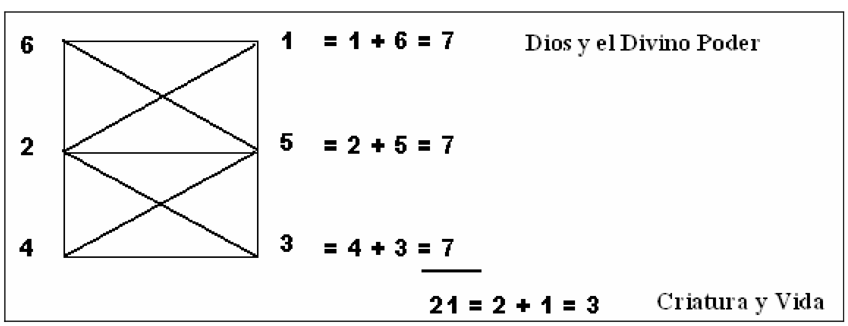


Figure 9: Una Estera Compuesta de 3 Líneas y 2 Colunas

El valor numérico final de esta estera es calculado de la siguiente manera:

Adicionamos los números correspondientes a cada línea de la matriz.

$$1 + 6 = 7$$

$$5 + 2 = 7$$
$$3 + 4 = 7$$

Consultando la tabla, el resultado 7 tiene como significado Dios es el Divino Poder.
Adicionamos todos los resultados obtenidos:

$$7 + 7 + 7 = 21$$

Adicionamos los números resultado final obtenido: 2 + 1 = 3. Consultando a tabla, el número 3 corresponde a Criatura y a la Vida. Una probable interpretación del mensaje constante en este resultado es: Dios utilizando su Divino poder da la vida a todas las criaturas del mundo maya.
Algunos objetos encontrados en Tikal y Quirigua revelan que los sacerdotes mayas tomaban ciertas decisiones basadas en las esteras sagradas que contenían significados numéricos sagrados que eran basados en los valores finales de cada padrón. En una determinada situación, un sacerdote debería tomar una decisión al codificar una estera que contenía el valor final 6 que significa "Vida y Muerte".
Los sacerdotes mayas eran los mantenedores del conocimiento espiritual, religioso y científico de la civilización maya.

Conclusión

La etnomatemáticas es un programa que incorpora las ciencias y la justicia social. A pesar de que los mayas poseen una historia de lucha para la preservación de sus derechos, de su cultura, y de su modo de vivir, ellos aún continúan siendo las víctimas del abuso de la elite dominante.
A través del estudio de los diamantes y de las esteras sagradas mayas, utilizando una perspectiva etnomatemáticas, podemos preservar un aspecto de la sabiduría y del conocimiento de este pueblo, a través de la restauración del respeto y de la dignidad por las tradiciones culturales del pueblo maya.

Bibliografia

Coe, M. D. (1966). *The Maya*. New York, NY: Praeger Publishers.

Coe, M. D., Kerr, J. (1988). *The art of the Maya scribe*. New York: Harru N. Abrams.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, SP: Editora Ática.

Dias de Castillo, B. (1983). *Historia verdadera de la conquista de La Nueva España*. Ciudad de México: Porrúa.

Diaz, R. P. (1995). The mathematics of nature: The canamayté quadrivertex. *ISGEm Newsletter, 11*(1), 5-12.

Grattan-Guiness, I. (1997). *The rainbow of mathematics: A history of the mathematical Sciences*. London: W. W. Norton & Co.

Nichols, D. (1975). *The Lords of the mat of Tikal*. Antigua, Guatemala: Mazda Press.

Orey, D. (1982, February). Mayan math. *The Oregon Mathematics Teacher, 1*(1), 6 – 9.

Recinos, A. (1978). *Popul Vuh: The sacred book of the ancient Quiché Maya*. (D. Goetz & S. G. Morley, Trans.) Oklahoma: Norman University of Okalahoma Press. (Original work published 1960).

CATEGORÍA 4:

USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE Y EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA ASISTIDO POR ORDENADOR EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS

Anido, Mercedes; Craveri, Ana María
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario (FCE y E de la UNR) – Argentina
craveri@arnet.com.ar
Campo de investigación: Didáctica de la Matemática; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

En este trabajo se analiza el rendimiento del aprendizaje de Matemática Básica en el nivel universitario realizado con la asistencia del ordenador y su relación con los Estilos de Aprendizaje según la concepción de Honey-Alonso.
Consta de tres fases. La primera es exploratoria, se analiza comparativamente el rendimiento de tres grupos de alumnos, con distintas metodologías de enseñanza. La segunda es un estudio correlacional entre Estilos de Aprendizaje y rendimiento de los alumnos en dos situaciones de aprendizaje. La tercera, en ejecución, es el diseño de un conjunto de múltiples y diferentes ejercicios a desarrollar en un Laboratorio de Computación, teniendo en cuenta las diferentes formas de aprender de los alumnos, con vista a lograr una construcción correcta y multifacética del pensamiento matemático.

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (UNR), establece en la currícula del primer año, común a las Carreras de: Contador Público, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración, el desarrollo de dos cursos de Matemática: Matemática I que abarca temas de Álgebra y Geometría Analítica y Matemática II que comprende el desarrollo de Análisis Matemático en una y varias variables. Estos cursos de matemática se dictan en forma cuatrimestral y son la base de cursos subsiguientes como los de Matemática III, Matemática para Economistas I y II entre otros. Para el desarrollo de estas asignaturas se requiere que el alumno tenga conocimientos de álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y matemática discreta. La necesidad de desarrollar los contenidos en un tiempo reducido y para un gran número de alumnos, ha planteado el problema de implementar cambios en la metodología de enseñanza a fin de optimizar tiempo y esfuerzo.
En este contexto nos planteamos a qué soporte teórico recurrir para lograr un aprendizaje eficiente en los cortos espacios de tiempo asignados en el currículum.
Kolb (1984), Honey y Mumford (1986) trabajaron sobre el aprendizaje para identificar la gama de diferencias individuales, experimentando con una gran variedad de recursos para determinar la existencia de relaciones entre formas propias de aprendizaje y recursos instructivos. Observaron que la mayor parte de los estudiantes, con ciertas características, tienden a responder bien ante ciertos recursos especialmente seleccionados.
Surge así el concepto mismo de Estilo de Aprendizaje que no es común para todos los autores. Keefe (1988) propone: los “Estilos de Aprendizaje” son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que sirven como indicadores, relativamente estables, de cómo los alumnos perciben interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje.

Tomamos de Alonso (1999: 70) la descripción de Peter Honey y Alan Munford (1986) de los Estilos de Aprendizaje que en forma sintética podríamos caracterizar en la siguiente forma:

- Estilo Activo: Las personas que tienen predominancia en Estilo Activo se implican plenamente en nuevas experiencias. Son de mente abierta y acometen con entusiasmo las tareas nuevas.
- Estilo Reflexivo: A los reflexivos les gusta considerar las experiencias y observarlas desde diferentes perspectivas. Son personas que gustan considerar todas las alternativas posibles antes de realizar un movimiento.
- Estilo Teórico: Los teóricos adaptan e integran las observaciones dentro de teorías lógicas. Enfocan los problemas de forma vertical escalonada por etapas lógicas. Tienden a ser perfeccionistas integran los hechos en teorías coherentes. Les gusta analizar y sintetizar.
- Estilo Pragmático: El punto fuerte de las personas con predominancia en Estilo Pragmático es la aplicación práctica de las ideas.

Esta categorización teórica, de acuerdo a nuestra experiencia de 10 años de trabajo con distintos softwares matemáticos (DERIVE, BASILE Y MATLAB), es compatible con los resultados de la observación del trabajo de los alumnos en el Laboratorio**.**

La forma de trabajo en el Laboratorio frente al computador en una relación de dos alumnos por máquina, facilita el conocimiento personal del alumno e incluso las intervenciones del docente, creando un ambiente propicio para observar distintas modalidades de trabajo:

- Grupos de Alumnos que apenas se ingresa al programa, comienzan a aplicar las sentencias a distintas situaciones, más allá del ejercicio propuesto y a veces antes de que el profesor termine su explicación, Interactúan con el computador con rapidez y casi con avidez.
- Grupos de alumnos que aguardan con pasividad frente a la pantalla del computador que el docente concluya las indicaciones para realizar el trabajo, luego consultan frecuentemente al docente y son cuidadosos en seguir las instrucciones, dialogan con su compañero.
- Un tercer grupo, que ante una respuesta imprevista en la pantalla (por ejemplo cuando se pide el cálculo de la matriz inversa y la matriz cuadrada dada es no regular, o cuando en problemas de resolución de sistemas de ecuaciones se enfrenta con un sistema incompatible) buscan llegar a una explicación de la respuesta del computador recurriendo al material teórico o al análisis de otros ejemplos sobre el tema y quedan satisfechos o podríamos decir que gozan, cuando logran generalizar en una propiedad teórica alguna conclusión extraída de situaciones particulares.
- Por último, notamos alumnos que, ante la presentación de un nuevo concepto, sólo se entusiasman en el momento en el que el docente plantea alguna situación de la vida real vinculada con estos conceptos.

En esta observación orientada, de las modalidades de trabajo en el Laboratorio, en forma casi natural, se evidencian ya desde nuestra propia experiencia, lo que Honey -Alonso categorizan como “estilos : activo, reflexivo teórico y pragmático”

La herramienta de diagnóstico primeramente utilizada fue el LSQ (Learning Style Questionaire) elaborado por Honey y Mumford a partir de una reflexión académica y de un análisis de la Teoría y Cuestionario de Kolb (1984). El sujeto debe responder si está de acuerdo o en desacuerdo a todas las preguntas. La mayoría de los ítems son comportamentales, es decir describen una acción que alguien puede realizar. El LSQ está diseñado para detectar las tendencias generales del comportamiento personal. (Alonso 1999: 69-71)

Honey y Mumford recogen la idea de los Estilos de Aprendizaje en el área académica y la trasladan al mundo empresarial. Desde allí se ha tomado, luego, para reincorporarla al campus universitario con el nombre de CHAEA (Cuestionario Honey-Alonso de Estilos de Aprendizaje) que es un cuestionario fruto de la traducción y adaptación al contexto académico español, del Cuestionario de Estilos de Aprendizaje LSQ de P. Honey elaborado para profesionales de empresas del Reino Unido.(Alonso 1999: 79)

El CHAEA consta también de 80 ítems breves y se estructura en cuatro grupos o secciones de 20 ítems correspondientes a los cuatro Estilos de Aprendizaje (Activo, Reflexivo, Teórico y Pragmático). Todos los ítems están distribuidos aleatoriamente formando un solo conjunto. La puntuación absoluta que el sujeto obtenga en cada grupo de 20 ítems, será el nivel que alcance en cada uno de los cuatro Estilos de Aprendizaje.(Alonso 1999: 81)

La fiabilidad y validez del CHAEA ha sido demostrada a través de las investigaciones llevadas a cabo por Catalina Alonso en 1371 estudiantes de las Facultades y Escuelas Universitarias, pertenecientes a las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid.

2-PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En relación al área de la Matemática Básica, conflictiva, sobre todo en carreras no matemáticas, la posesión de una herramientas de diagnóstico sobre las distintas formas de aprender y las características de esas formas lleva al planteo de preguntas que abren distintas líneas de investigación:

¿Cuáles son las predominancias en las formas de aprender de nuestros alumnos?

¿Cómo determinar y equilibrar los estilos de aprendizaje de los alumnos?

¿Cómo implicar en la actividad propia de la matemática a aquellos alumno naturalmente activos? .¿Cómo llevarlos a la reflexión sobre los procesos matemáticos en juego?

¿Cuáles son los efectos del uso de la tecnología computacional en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en relación al estilo de aprendizaje de los alumnos.

En la búsqueda de aproximaciones de respuestas a estas preguntas planteadas, se analiza el caso del aprendizaje del Álgebra Lineal asistido con el computador desde la perspectiva de la teoría de los Estilos de Aprendizaje .

Se supone que el conocimiento de los Estilos de Aprendizaje predominantes en los alumnos puede orientar el diseño de actividades a ser desarrolladas en un laboratorio de computación con herramientas C.A.S (Computer Algebraic System). y facilitar en esta forma el aprendizaje significativo del Álgebra Lineal

3 OBJETIVO

Evaluar el aprendizaje de temas básicos de Álgebra Lineal , realizado con la asistencia del computador, y su relación con los Estilos de Aprendizaje de los alumnos

4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN Este trabajo se organiza en tres fases:

1º FASE) Etapa exploratoria. Con un diseño cuasiexperimental, se analiza comparativamente el Rendimiento Académico, de tres grupos de alumnos, en el aprendizaje de Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales. Uno de ellos, el grupo control, utiliza la metodología de enseñanza tradicional (el docente explica los fundamentos teóricos del tema y resuelve algunos de los ejercicios de los trabajos prácticos en el pizarrón) y los otros experimentales que utilizan la herramienta computacional con un software de aplicación (DERIVE) pero diferenciados: uno con enseñanza presencial y el otro con enseñanza semipresencial. El diseño cuasiexperimental, es el diseño que se utiliza en aquellas situaciones de investigación en las que no es posible un control total, por lo que no se puede realizar propiamente un experimento. Con relación a este tema, Campbell y Stanley (1993) analizan diseños de experiencias en las que la "inflexibilidad del ambiente" determinan que la selección y asignación aleatoria de los sujetos al grupo control y al grupo experimental no está garantizada, llamando a estos diseños cuasiexperimentales. Abundan las situaciones educativas en las que, como en esta investigación, no es posible asignar sujetos de forma aleatoria al grupo control y al grupo experimental, ya que se trata de grupos o comisiones con horarios y docentes pre-establecidos.
Con respecto a la variable "Rendimiento Académico", la evaluación del rendimiento en la enseñanza superior sigue utilizando métodos tradicionales, pues la práctica más comúnmente utilizada son los exámenes, bien sean escritos u orales, con predominio de los primeros.

Si bien, somos conscientes de lo impreciso que resulta el identificar el rendimiento académico con la nota del examen, cabe destacar que, en la Universidad, ésta encierra una gran importancia sobre todo para el sujeto que la recibe. Nos referimos a las notas o calificaciones que cada alumno recibe, en la Universidad, al final de una evaluación y de las que dependen aspectos, tan importantes, como su éxito o fracaso en la aprobación de la materia y las implicaciones que éstos tengan para el futuro. En este trabajo se ha considerado, como uno de los índices para evaluar el aprendizaje, la nota obtenida en las evaluaciones parciales (pretest) y la nota de la evaluación final relativa a los temas de Álgebra Lineal (postest)
Esta primer investigación realizada en el año 1998 con 183 alumnos que cursaban Matemática I en la carrera de Contador en la Facultad antes mencionada, se continuó hasta el año 2001 en condiciones similares abarcando la experiencia en total l047 alumnos.
La experiencia muestra que en los alumnos con un cierto nivel de formación, aprobación de pretest , la metodología de trabajo en el Laboratorio de Informática con asistencia del docente es muy positiva .En cambio los alumnos con rendimiento insuficiente no muestran una calificación superior en el postest. (Anido,Craveri, Spengler .2001)

2º FASE) Etapa de Desarrollo de la investigación. Se abre en dos ejes de investigación:
Eje Nº 1) Determinación de los Estilos de Aprendizaje de alumnos de primer año en una Facultad de Ciencias Económicas.
Eje Nº 2) Un análisis correlacional entre Estilos de Aprendizaje y aprendizaje con ordenador

5-DESARROLLO DE LA 2ª FASE DE LA INVESTIGACIÓN .

Eje Nº 1: Se busca conocer las distribuciones de los estilos de aprendizaje, definidos por Honey-Alonso, en la población de alumnos que ingresan a la FCE y E de la UNR. La herramienta de diagnóstico es el CHAEA que se aplica a 381 alumnos ingresantes en los años 2002 y 2003. Se obtienen los puntajes promedio para cada estilo y a partir de las distribuciones de frecuencia de los mismos se construyen baremos de interpretación de los puntajes individuales.
Resultados y conclusiones parciales: el mayor puntaje promedio en la muestra es el correspondiente a estilo reflexivo (13,7 puntos sobre una puntuación máxima de 20 puntos), luego el teórico (12,15), el pragmático (11,53) y por último el activo (10,62). Los estudiantes de la FCE y E (UNR) aparentemente estarían bien predispuestos para: seguir analogías, procesar información, generalizar propiedades y abstraer los contenidos del aprendizaje, no tendrían dificultades en llevar a la práctica estos contenidos pero deberían mejorar lo relativo a la búsqueda y exploración espontánea de la información. Deberían ser estimulados en un aprendizaje autónomo.

Interpretación de los puntajes individuales. Baremos de interpretación
Siguiendo el criterio utilizado en las investigaciones de Honey, Mumford y Alonso se agruparon los puntajes observados por los estudiantes en cinco niveles, para cada uno de los cuatro estilos:

Preferencia muy alta: el 10% de las personas que han puntuado más alto
Preferencia alta: El 20% de las personas que han puntuado alto
Preferencia moderada: el 40% de las personas que han puntuado con nivel medio
Preferencia baja: el 20% de las personas que puntúan bajo
Preferencia muy baja: el 10% de las personas que han puntuado más bajo.

El análisis realizado sobre las estructuras de percentiles nos permite clasificar a los alumnos dentro de cinco categorías para cada estilo de aprendizaje, cada una de ellas determinada por el puntaje obtenido según la siguiente tabla:

Baremo de interpretación de los puntajes en Estilo de Aprendizaje de los alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (UNR).2002/3

Estilo	Categoría				
	Muy baja	Baja	Moderada	Alta	Muy Alta
Activo	0-6	7-8	9-13	14-15	16-20
Reflexivo	0-9	10-12	13-16	17-18	19-20
Teórico	0-8	9-11	12-14	15-16	17-20
Pragmático	0-7	8-10	11-14	15	16-20

El primer criterio de interpretación es la relatividad de las puntuaciones obtenidas en cada estilo. La interpretación de las puntuaciones individuales deber ser referidas a todos los sujetos participantes con quienes comparamos los datos individuales. Por ejemplo, lo importante es, no sólo saber que el alumno ha puntuado 9 en algún estilo, sino sobre todo qué significa ese 9 comparado con todos los participantes.
El alumno que ha puntuado 9 en estilo activo, por ejemplo, está en el intervalo entre 9 y 13, que abarca el 40% de los puntuaciones centrales y corresponde en consecuencia a la

preferencia moderada en estilo activo. En cambio si obtiene 9 en estilo reflexivo, según la distribución de las puntuaciones, en esta Facultad, se encuentra en el intervalo entre 0 y 9 y corresponde a una preferencia muy baja en este estilo, ya que está en el 10% de las puntuaciones más bajas en estilo reflexivo.

Eje Nº 2: Con un diseño cuasiexperimental con un grupo experimental (en una situación de aprendizaje asistido con ordenador y conocimiento de su estilo de aprendizaje) y un grupo control (en una situación de aprendizaje tradicional) se calculan los coeficientes de correlación de Pearson entre las variables Rendimiento Académico y Estilos de Aprendizaje en el aprendizaje de temas específicos de Álgebra Lineal.
La investigación consistió en la evaluación del rendimiento académico comparativo de ambos grupos en el aprendizaje de Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales. La experiencia se llevó a cabo con 381 estudiantes que cursaron esta asignatura durante los años 2002 y 2003 con un diseño cuasiexperimental de pretest y postest. De los 381 alumnos 109 fueron asignados al grupo control y 272al grupo experimental o grupo tratado.
El pretest, aplicado a ambos grupos, evalúa temas de la currícula de Matemática I desarrollados con metodología tradicional, también permitió establecer una cierta equivalencia entre el grupo control y el experimental, en cuanto a rendimiento académico. Se verificó además equivalencia en las variables sexo, edad y puntuación promedio en cada Estilo de Aprendizaje.
Resultados y conclusiones parciales: entre el grupo control y el tratado la estructura de correlaciones entre los estilos de aprendizaje es la misma: el estilo pragmático está correlacionado positivamente con el estilo activo, reflexivo y teórico; por otra parte el estilo reflexivo está correlacionado positivamente con el estilo teórico.
No se detectó la existencia de correlación significativa entre las puntuaciones de los estilos de aprendizaje y los resultados del rendimiento académico obtenidos con el pretest en ambos grupos.(recuérdese que al momento del pretest ambos grupos han trabajado, los temas evaluados, en las mismas condiciones; además los alumnos del grupo experimental desconocen sus personales predominancias en los distintos Estilos de Aprendizaje)
Respecto a los resultados del rendimiento académico obtenidos en el postest, en el grupo control no se observa relación significativa con la variable Estilo de Aprendizaje. Lo que nos permite concluir que no hay evidencia de que el trabajo con la metodología tradicional favorezca el aprendizaje para algún Estilo en particular. En cambio cuando analizamos el grupo tratado los alumnos que muestran predominancia en los estilos reflexivo y teórico obtienen mejores puntajes en el postest. Lo contrario ocurre con los alumnos con predominancia del estilo activo. Contra lo que se podría esperar, el trabajo con la herramienta computacional, habitualmente asociada a una actividad mecánica, con un uso adecuado, estimularía a alumnos con predominancia en lo reflexivo y teórico.
Se observa también algo interesante en cuanto al rendimiento académico, que se fortalece con lo visto anteriormente. En ambos grupos la correlación entre la nota del pretest y postest es significativa y positiva. Pero en el grupo control el grado de correlación es mayor que en el tratado. Esto indicaría que en grupos en los que se utiliza la herramienta computacional se puede esperar una mejora en los puntajes del postest, el alumno no ha quedado encasillado, se podría hablar de una mayor movilidad en cuanto a la superación de la nota previa.

6. CONCLUSIONES

De las observaciones señaladas en la Introducción y de las conclusiones parciales se podría considerar que la utilización adecuada de herramientas computacionales facilita el aprendizaje de los alumnos reflexivos y teóricos. Como trabajo en prospectiva, de relevancia, nos proponemos el diseño de problemas de Álgebra Lineal, con esas mismas herramientas, que sean disparadores de situaciones de acción, reflexión, formulación y validación por la justificación teórica o la verificación empírica.

BLIOGRAFÍA

Alonso, C.; Gallego, D.; Honey, P. (1999) "*Los Estilos de Aprendizaje*". Madrid. Ediciones Mensajeros.

Campbell, D. y Stanley, J. (1993) *"Diseños Experimientales y Cuasiexperimentales en la Investigación Social"*. Amarrortu Editores S.A. Buenos Aires.

Honey, P; Mumford, A (1986) "*Using our Learning Styles*". Berkshire.

Keefe, J (1988) "*Profiling and Utilizing Learning Style*" National Association of Secondary School Principals. Reston. Virginia.

Kolb, D. (1984) "*Learning Cycle and the Learning Style Inventory Experiential Learning".* New Jersey. Prentice Hall.

ESTUDO DE FUNÇÕES COM O USO DE SOFTWARE EDUCACIONAIS

Ana Regina Gregory Brunet, Dolurdes Voos, Magda Leyser
ULBRA / FAPA / IPA - Brasil
anabrunet@cpovo.net; dvoos@cpovo.net; mleyser@cpovo.net
Campo de investigação: Tecnologia avançada; Nível: superior

RESUMO

O presente trabalho relata a investigação do processo de construção do conhecimento matemático, especificamente o estudo de funções reais, utilizando-se *software* educacional como recurso metodológico. Nesse processo o *software* não é o ponto de chegada para a visualização das funções elementares, mas o recurso de onde os sujeitos partem para a visualização geométrica das funções, o que lhes permite fazer generalizações.

Palavras chave: Educação Matemática; *software*; construção do conhecimento; funções.

ABSTRACT

The present work reports the investigation of the process of construction of knowledge, more exactly the study of real functions, using education software as a methodological tool. In this study the use of the software is not the aim, but rather the starting point to improve the student's ability to visualize construct and to generalize the functions.

Os seres humanos caracterizam-se pela capacidade inata de aprender, do que sempre resulta mudança nos modos de perceber e de se relacionar com a realidade em que estão inseridos.

A evolução na área educacional não ocorre senão articulada com outras mudanças:

> Todas as evoluções que se estão esboçando na área educacional estão em congruência com as modificações das atividades cognitivas observadas em outras áreas. O uso dos computadores no ensino prepara mesmo para uma nova cultura informatizada. (LEVY, 1998, p. 29-30).

Nesse contexto, o professor não mais será o fiscal de sala de aula, nem simplesmente o responsável pela resolução da problemática dos conteúdos. Ele será o incentivador de um processo em que o próprio aluno busca a informação que deseja obter. O professor, então, ajudará o aluno a organizar seus conhecimentos e a buscar novos conceitos, indicando pontos que devem ser observados, dirigindo o trabalho de interpretação e incentivando reflexões críticas. Enfim, o professor deverá orientar e desafiar os alunos.

O novo papel do professor inclui a mediação de grupos de aprendizes, que poderão trocar conhecimentos entre si, de tal modo que todos saibam trabalhar em grupo. O profissional assumirá, também, a postura de quem se mostra interessado em aprender, pois, assim, estará dando um exemplo de como um aprendiz deve se comportar. De acordo com Claudio e Cunha (2001, p. 170), *[...] uma das grandes contribuições que deve ser oportunizada a alunos e professores é a de definir e* *entender a desmistificação do ensino com papel e lápis*. O docente será, então, constantemente um pesquisador, que buscará avaliar o aprendizado de seus alunos, tendo em vista melhorar sua própria intervenção no processo.

A aquisição de computadores por instituições de ensino e a imposição do seu uso pelos diretores e gestores, em geral, é insuficiente para garantir que se atinjam esses objetivos. A interface com essa nova mídia possibilita tanto a transmissão de conceitos quanto a intervenção no sentido de auxiliar o aluno no entendimento desses conceitos, na reflexão sobre eles e na sua interpretação. Para tanto, os professores devem ser preparados para lidar, ao mesmo tempo, com a informática e com os alunos. O auxílio na realização de tarefas, quando o estudante não as compreende, somente leva ao computador o que as aulas tradicionais impõem. Para sanar esse problema, deve-se incluir, na sociedade do conhecimento, o perfil do profissional que critica de forma construtiva, pensa, aprende, motiva, questiona e conhece suas limitações. De acordo com Valente (1999, p. 43), os professores estão na iminência de deixarem de ser *entregadores* de conceitos, passando a agir como facilitadores no processo de aprendizagem.

A sociedade vive um flagrante processo de mudança, e as instituições de ensino devem dar suporte à evolução. Para tanto, é necessário conceber um novo professor, cujo perfil já está delineado: um profissional em constante aprimoramento.

Durante a atividade que aqui se relata ocorreram dez encontros de quatro horas/aula cada, no curso de extensão *Estudo de funções com o uso de software educacionais* realizado no período de 26/02/05 a 09/04/05 na Faculdade Porto Alegrense – FAPA com vinte e cinco graduandos do curso Ciências Licenciatura Plena, Habilitação em Matemática que estavam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Para os encontros foi confeccionado material de apoio escrito pelo grupo de professores relatores que se reuniram sistematicamente para discussões e trocas de idéias.

Decidiu-se que não haveria menção específica à ferramenta de apoio, isto é, pretendeu-se que o material pudesse servir para qualquer *software* cujas características englobassem recursos gráficos suficientes para as mesmas. No decorrer dos encontros, à medida que fossem surgindo as necessidades, o(s) coordenador(es) forneceriam os comandos básicos de digitação pertinentes ao *software*.

O *software* escolhido para este trabalho foi *Winplot*. Trata-se de um programa *freeware*, ou seja, um programa de domínio público, de modo que não há custo no seu uso.

Sob o ponto de vista dos envolvidos, o *software* fornecendo visualização dos entes em estudo serve para, em um primeiro momento, apresentar os objetos através de seus nomes sem uma definição formal para que o aprendiz explore e conclua propriedades, classificações, características. Em outros momentos, servirá para testar conjecturas.

A diretriz de elaboração concebida pelo grupo foi de inicialmente haver maior detalhamento das atividades, visto que nessa fase a preocupação maior foi o domínio do *software*, ou seja, a compreensão dos comandos e lógica do recurso tecnológico em uso pelos participantes. Mas, simultaneamente, houve a preocupação de o foco ser o estudo de funções e o *software* a ferramenta para esse estudo. Decidiu-se, então, que nos primeiros contatos com o *software* as atividades propostas seriam de fácil execução e simples sob o ponto de vista dos conceitos envolvidos para o público alvo, com o objetivo de o docente aprender a interagir com o ambiente, explorando suas possibilidades e limitações, sem abrir mão do estudo das funções elementares.

Este período inicial durou de 8 a 12 horas/aula, aproximadamente três encontros. Nele foram propostas atividades que versavam sobre equações e sistemas de equações do 1º grau, funções do 1º grau, funções do 2º grau. Ele se caracterizou pela necessidade de apoio constante por parte do(s) coordenador(es) aos docentes, principalmente na compreensão dos comandos e lógica do recurso tecnológico. Observou-se interação entre os participantes.

Estando o aluno familiarizado com o ambiente computacional avançou-se, enfocando situações mais elaboradas sob o ponto de vista conceitual, envolvendo mais funções e explorando mais relações.

Neste segundo momento, que também durou de 8 a 12 horas/aula, as relações exploradas foram basicamente as translações e reflexões. Definiu-se a função modular e a partir dela sugeriu-se a construção de novas funções, mediante translações e reflexões. Outras funções foram sendo introduzidas nos moldes da seguinte atividade:

1) Utilizando o software, criar no mesmo sistema de coordenadas, as funções:
   a) $y = x$ b) $y = x^2$ c) $y = x^3$ d) $y = x^4$ e) $y = x^5$
   Qual foi a mudança percebida?

2) Como você imagina que seja o gráfico das funções $y = x^6$ e $y = x^7$?
   Verifique suas conjecturas utilizando o software.

3) Como você imagina que seja o gráfico da função $y = x^n$ com:
   a) n par b) n ímpar

4) Como você imagina que seja o gráfico das funções:
   a) $y = x^3 + 1$ b) $y = - x^3$ c) $y = – x^4$ d) $y = -x^7 - \frac{1}{2}$
   e) $y = (x – 2)^3$ f) $y = (x – 1)^3 – 2$ g) $y = (x + 3)^4 - 1$
   Verifique suas conjecturas utilizando o software.

A equipe de professores decidiu testar de forma mais concreta os conceitos matemáticos enfocados até então. Pediram aos alunos que fizessem o seguinte:

1) Construir uma tabela das formas dos gráficos do tipo:
   a) $y = x^n$ b) $y = x^{\frac{1}{n}}$ c) $y = \frac{1}{x^n}$

2) Seja f função e seja g função obtida a partir da função f mediante transformações. Em cada item abaixo é dada uma transformação. Escreva qual a correlação entre o gráfico de f e g.
   a) $g(x) = f(x) + a$, para $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$;
   b) $g(x) = f(x + a)$, para $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$;
   c) $g(x) = -f(x)$; d) $g(x) = f(-x)$; e) $g(x) = |f(x)|$;
   f) $g(x) = c\, f(x)$, $c > 1$; g) $g(x) = \frac{1}{c} f(x)$, $c > 1$;
   h) $g(x) = f(cx)$, $c > 1$; i) $g(x) = f(\frac{1}{c} x)$, $c > 1$.

Este questionário foi respondido, em geral, com êxito pelos participantes.

Nos dois encontros posteriores julgou-se possível um maior grau de liberdade e criação por parte dos alunos, visto que estavam motivados e autoconfiantes. Então, após explorarem-se a noção e definição de funções exponenciais as propostas seguiram o modelo abaixo:

FUNÇÕES EXPONENCIAIS - TRANSFORMAÇÕES

Como qualquer outra função podemos criar novas funções a partir de $\mathbf{y = a^x}$, com $a \in \Re$, $a > 0$ e $a \neq 1$ (função "mãe"). Exploraremos as da forma $\mathbf{y = b + ca^{x + d}}$, com a, b, c, d reais, $c \neq 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

1) Complete a tabela abaixo criando funções desta forma com as condições dadas.

$b = 0$, $c = -1$, $d = 0$	$b \neq 0$, $c = 1$, $d = 0$	$b = 0$, $c = 1$, $d \neq 0$	$b \neq 0$, $c = -1$, $d = 0$	$b = 0$, $c = -1$, $d \neq 0$	$b = 0$, $c \neq -1$, $c \neq 1$, $d = 0$

2) Use o software para comparar a função "mãe" com a primeira de cada coluna. Após, esboce o gráfico das demais da mesma coluna. Verifique suas conjecturas no software.

3) Responda qual a transformação que o gráfico da função "mãe" sofre ao variarmos o parâmetro:
a) b b) c c) d

4) A função exponencial aparece com freqüência como aplicação em outras Ciências como Economia, Biologia, Física, etc. Em cada item abaixo admita que o fenômeno pode ser modelado por uma equação da forma $y = ca^t$. Faça conjecturas sobre os possíveis valores de **a** e **c**. Justifique.

a) y(t) é a quantidade de bactérias, em um meio nutriente homogêneo, no instante t. Sabe-se que no instante t = 0 havia 100 bactérias e que o número de indivíduos aumenta no decorrer do tempo.

b) y(t) é a quantidade de material radioativo de uma substância cuja meia vida é de 25 anos. Isto é, em 25 anos haverá a metade da massa original do material. Sabe-se eu no instante inicial havia 20 mg do material.

Os alunos se envolveram nesta atividade e permaneceram mais tempo nela do que nas anteriores. Esta etapa foi marcada pela formação de grupos de estudo e empenho dos participantes.

Para o último encontro, decidiu-se novamente aplicar um teste. Neste desafio havia algumas expressões algébricas de funções as quais deveriam servir de base para a determinação da construção algébrica de outras funções dadas na forma gráfica. Algumas dessas eram definidas por mais de uma sentença.

Os encontros foram eficazes para acabar com a insegurança em relação ao uso dos *software* e facilitar o desenvolvimento de atividades, envolvendo os conteúdos, bem como para a reflexão sobre como trabalhar com estes. Outras dificuldades, porém, foram identificadas, o que favorece sua superação.

Avaliando seus próprios desempenhos, durante os encontros, os participantes novamente reclamaram da falta de tempo, para realização de atividades e envolvimento nos encontros: *tentei realizar todas as atividades propostas, talvez eu poderia ter me envolvido mais nos encontros, mas, em muitas ocasiões, faltou tempo para me preparar melhor*. Todos os participantes consideraram sua contribuição às atividades apresentadas como "excelente" ou "boa", e isso foi verificado durante os encontros.

O uso de novas tecnologias pelos professores exige uma mudança de postura em sala de aula e reformulações na prática pedagógica. Em um primeiro momento, o docente tem que aprender a interagir com o ambiente, explorando suas possibilidades e limitações. Após compreender bem a ferramenta, deve pesquisar tópicos onde seja interessante e possível a utilização da mesma.

Os resultados da investigação indicam que a aprendizagem efetiva da Matemática pode ser alcançada por meio da combinação entre atividades especialmente elaboradas para serem desenvolvidas durante o curso, o uso do *software* como ferramenta de apoio e a coordenação desse trabalho pelo professor pesquisador durante os encontros.

O trabalho em sala de aula foi recompensado com alunos motivados pelo uso do computador, por ser uma dinâmica diferente. Simultaneamente viu-se a autoconfiança dos alunos aumentando, já que os discentes puderam fazer inferências e testar suas conjecturas, surgindo, assim, questionamentos diferentes e enriquecedores do processo de ensino e de aprendizagem.

Bibliografia

Anton, H. (1988) *Cálculo um novo horizonte*. Vol.1, 6 ed. Porto Alegre, Bookman.

Claudio, D. M., Cunha, M. L. (2001) As novas tecnologias na formação de professores de Matemática. In: Cury, H. N. (org.) *Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada*. (pp. 167-190). Porto Alegre: Edipucrs.

Lévy, Pierre. (1998) *A máquina universo: criação, cognição e cultura informática.* Porto Alegre: ArtMed.

Stewart, J. (2001) *Cálculo*. V.1, 4.ed. São Paulo, Pioneira Thomson Learning.

Valente, J. A. (1999) *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas - SP, UNICAMP/NIED.

Voos, D. (2004) *Educação Matemática, software e rede de professores: repercussões no discurso e na prática pedagógica*. Dissertação de Mestrado, PUCRS, Porto Alegre.

ENSINO DE MATEMÁTICA: NOVAS TECNOLOGIAS, NOVOS PROBLEMAS

Maria Cristina Bonomi Barufi
Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – BRASIL
crisb@ime.usp.br

Campo de investigação: Formação de Professores - Uso de tecnologia em sala de aula de Matemática; Nível educativo: Superior

Resumo

O instrumental tecnológico constitui um potencial valioso tanto para os professores como para os estudantes: para os primeiros como um auxílio poderoso visando a construção significativa do conhecimento; para os segundos como uma ferramenta que possibilita o desenvolvimento da capacidade de investigação e conseqüentemente da capacidade de estabelecer e desenvolver projetos.
Algumas atividades, que exemplificam a ênfase colocada, são propostas no trabalho.

Palavras chave: Ensino/aprendizagem de Matemática, uso da tecnologia, projetos, conhecimento significativo.

Atividades a serem propostas aos alunos podem ser muito variadas. Apresentamos alguns exemplos, sem, obviamente, ter a pretensão de esgotar o assunto. O professor, enquanto pesquisador de sua própria prática, com o auxílio da tecnologia, pode criar um grande número de situações de acordo com a sua turma, os objetivos de seu projeto de ensino, as ferramentas disponíveis. A questão não é a de utilizar o computador para mais rapidamente resolver determinados problemas, sempre os mesmos... A grande questão é a de descobrir novos problemas, e instrumentalizar os alunos com todo o arsenal propiciado pela tecnologia. O objetivo maior é que eles cresçam em sua inteligência, em sua capacidade de perguntar, de investigar e, conseqüentemente, em sua capacidade de propor projetos.

Atividade 1: Sabendo que as figuras abaixo são formadas apenas por arcos de parábolas, defina as funções em seus respectivos domínios, de modo a obter cada uma das figuras dadas.

a) Máscara da tristeza

b) Máscara da alegria

Comentário: A atividade objetiva o estabelecimento de várias perguntas, ou seja, o detalhamento de um pequeno projeto por parte dos alunos. Envolve também a recuperação de todo o desenvolvimento realizado no estudo da função polinomial do segundo grau[1] e de seu gráfico, como resultado de uma translação horizontal ou vertical ou mudança de inclinação do gráfico da função mais simples $y = x^2$.

Atividade 2: Crie uma figura de maneira que ela possa ser produzida por meio do gráfico de funções polinomiais de primeiro grau ou quociente delas, ou funções polinomiais de segundo grau. Estabeleça quais são as funções envolvidas e em quais domínios. Em seguida faça os gráficos e verifique se a figura obtida é realmente aquela desejada, fazendo os ajustes necessários. Você pode utilizar segmentos de reta verticais que, embora não podendo ser obtidos como gráficos de funções, podem ser úteis para conectar trechos de sua figura.
Comentário: Nessa atividade a idéia de estabelecer um projeto é central. Necessariamente, há de haver certa simplicidade e o respeito à limitação de ser possível construir a figura por meio de gráficos de funções.

Atividade 3: Esboce por pontos os gráficos das funções $y = x.\text{sen}\, x$ e $y = x^2.\text{sen}\, x$. Em seguida, esboce os mesmos gráficos utilizando os conceitos de derivada primeira e derivada segunda de uma função. Explique, com suas palavras, as dificuldades operacionais que você encontrou.
Comentário: O intuito dessa atividade é o de mostrar aos alunos a existência de dificuldades não desprezíveis na construção desses gráficos, apesar de todo o instrumental teórico propiciado pelo curso de Cálculo Diferencial.

Atividade 4 (continuação da Atividade 3): Utilizando um programa gráfico[2], esboce os gráficos das funções $y = x.\text{sen}\, x$ e $y = x^2.\text{sen}\, x$. Ao desenhar o gráfico da primeira função, desenhe no mesmo par de eixos os gráficos de $y = x$ e de $y = -x$. No caso de $y = x^2.\text{sen}\, x$, desenhe no mesmo par de eixos os gráficos de $y = x^2$ e de $y = -x^2$. Utilize o recurso do *zoom*, a fim de visualizar desigualdades algébricas que podem ser estabelecidas para as funções $y = x.\text{sen}\, x$ e $y = x^2.\text{sen}\, x$ em seus respectivos domínios. Prove, algebricamente, a validade de suas afirmações.

Comentário: Os recursos tecnológicos permitem muitas vezes auxiliar de maneira efetiva a execução de determinada tarefa. A demonstração algébrica adquire um significado mais importante e palpável. Esse tipo de atividade possibilita o trânsito entre registros gráfico e algébrico, que é fundamental na construção do conhecimento matemático, numa tentativa inclusive de minimizar o sério problema da distância artificialmente estabelecida entre a Álgebra e a Geometria.

---

[1] Em $y = ax^2 + bx + c = a(x+m)^2 + k$, os parâmetros *a*, *b*, *c*, *m*, *k* são números reais, sendo *a* não nulo.

[2] Um bom exemplo é o *software* livre Winplot, disponível no endereço
http://math.exeter.edu/rparris

Atividade 5: Invente, para cada caso, uma função definida por partes – pelo menos três – tal que:

i) seja contínua em todos os pontos do domínio.

ii) seja derivável em todos os pontos do domínio.

iii) seja contínua, mas não derivável nos pontos de "emenda".
Justifique, com cuidado, a fim de mostrar que suas criações satisfazem as exigências colocadas.

Comentário: Por meio dessa atividade, usando um software gráfico, os alunos poderão recuperar os importantes conceitos de continuidade e derivabilidade de uma função num ponto de seu domínio. O ponto de "emenda" precisa ser determinado, mas também é necessário avaliar a qualidade da "emenda".

Atividade 7: Dado um sistema linear de três equações com três incógnitas, por meio de um *software* gráfico faça sua representação em R^3. Em seguida, utilizando um *software* algébrico que trabalhe com notação matricial[3], encontre a solução do sistema dado. Observe que, por meio do processo de eliminação de Gauss – escalonamento – você pode resolver o sistema. Sendo assim, em cada passo do escalonamento, faça a representação gráfica do novo sistema obtido e resolva-o utilizando o *software* algébrico, com a notação matricial. Verifique que, em cada passo do escalonamento, você obtém um sistema linear equivalente àquele dado inicialmente.

Comentário: A visualização da representação gráfica do sistema linear no espaço tridimensional é importante para os alunos. Além disso, é possível recuperar conceitos já trabalhados como a equação geral e a equação vetorial do plano. Nesse tipo de atividade os alunos alternam os registros gráfico e algébrico, fazendo a conversão de um para o outro, estabelecendo as conexões necessárias.

Atividade 8: Invente em cada caso, um sistema linear de três equações a três incógnitas que seja:

a) compatível com solução dada pelo ponto $(1,2,3)$.
b) compatível com solução dada pela reta que passa pelos pontos $(1,2,3)$ e $(-1,2,-3)$.
c) incompatível.

Verifique, em seguida, por meio da representação gráfica que, em cada caso, o sistema criado satisfaz a condição colocada.
Comentário: Esta é mais uma atividade que recupera os conceitos envolvidos no tópico dos sistemas lineares. O fato de o aluno ser convidado a criar um sistema linear que satisfaça

[3] Novamente, um bom exemplo é o *software* livre Winmat, também disponível no endereço http://math.exeter.edu/rparris

uma determinada condição dada torna possível verificar se os conceitos envolvidos estão realmente claros para ele. É uma forma de sair do paradigma já estabelecido e sempre presente nos livros didáticos, de, dado um sistema linear, pedir para encontrar a solução do referido sistema.

Bibliografia

Barufi, M. (1999) *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Barufi, M. e Lauro, M. (2001) *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando o microcomputador*. CAEM-IME-USP, São Paulo.

Brolezzi, A. (2004). Matemática – Módulo 4. *Pró-universitário*. Governo do Estado de SP, SEESP, USP, São Paulo.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Machado, N. (2000). *Educação: Projetos e Valores*. São Paulo: Editora Escrituras.

USO DE HERRAMIENTAS NUMÉRICAS Y COMPUTACIONALES EN EL AJUSTE DE CURVAS

Ascheri, María E. - Pizarro, Rubén A.
Facultad de Cs. Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa - Argentina
e-mail: mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar
Campos de investigación: Uso de tecnología en la enseñanza de temas de Cálculo Numérico; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

Nuestro objetivo es introducir a los alumnos de Cálculo Numérico en el uso de *la técnica de ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados* en la solución de problemas de ingeniería, de física y de matemática aplicada, utilizando herramientas numéricas y computacionales.
La metodología usada para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de este temática particular de Cálculo Numérico con computadora es la siguiente: se combina la enseñanza tradicional, las técnicas grupales de aprendizaje activo y la computadora como apoyo a la explicación del docente y para fomentar el aprendizaje de los alumnos.
En este trabajo se muestran, básicamente, los resultados obtenidos a partir de la implementación de esta propuesta metodológica.

INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo del curso de Cálculo Numérico describimos los métodos numéricos aplicados, a alumnos de tercer año de las carreras: Ingeniería Civil, Licenciatura en Física y Profesorado en Matemática.
Entre los objetivos propuestos en este curso podemos citar los siguientes:

- Que sea fácilmente comprensible para los alumnos con un conocimiento mínimo de matemáticas.
- Capacitar a los alumnos para que practiquen los métodos numéricos en una computadora.
- Elaborar programas simples que puedan usarse de manera sencilla en aplicaciones científicas.
- Proporcionar software que resulte fácil de comprender.

La importancia de los métodos numéricos ha aumentado de forma drástica en la enseñanza de la ingeniería y la ciencia, lo cual refleja el uso actual y sin precedentes de las computadoras. El desarrollo de un programa siempre es importante en el aprendizaje de métodos numéricos. Cuando los alumnos implementen con buen resultado los métodos numéricos en una computadora personal y los apliquen para resolver problemas que de otro modo resultan intratables, tendrán, entonces, una demostración tangible de cómo les pueden ayudar las computadoras para su desarrollo profesional.
Con la finalidad de implementar nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza de *la técnica de ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados*, y dentro del marco teórico de la ingeniería didáctica (Artigue, 1998), buscamos actividades relativas a los intereses de los alumnos que se matriculan en el curso de Cálculo Numérico. Al presentar esta temática a través de situaciones que resulten cotidianas, se logrará una mayor receptividad por parte de los educandos. Para la resolución de estas actividades, los alumnos debieron desarrollar los programas utilizando el paquete MATLAB. Estas actividades fueron precedidas por:

- **Un marco teórico:** para sistematizar los conocimientos dentro de la asignatura.
- **Resolución de ejercicios:** para afianzar los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas.

DESARROLLO

En la ciencia y en la ingeniería se da, a menudo, el caso de que un experimento produce un conjunto de datos $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$, siendo las abscisas $\{x_i\}$ distintas entre sí. Uno de los objetivos del cálculo numérico es la determinación de una fórmula $y = f(x)$ que relacione las variables.
Los alumnos han visto cómo se construye un polinomio cuya gráfica pase por todos los puntos de un conjunto dado. Si todos los valores $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ se conocen con una precisión de varias cifras significativas, entonces la interpolación polinomial produce buenos resultados, lo que no ocurre en otras circunstancias. Algunos experimentos se llevan a cabo con una maquinaria que permite obtener los datos con varias cifras significativas de precisión; sin embargo, muchos experimentos se realizan con un equipamiento de, como mucho, dos o tres cifras significativas. A esto se añade, a menudo, un cierto error experimental de las mediciones, de forma que aunque se calculen tres o cuatro cifras de los valores $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$, sucede que el valor exacto $f(x_i)$ verifica

$$f(x_i) = y_i + c_i,$$

donde c_i es el error de la medición.
¿Cómo se encuentra la mejor aproximación que pase cerca (no por encima de cada uno) de los puntos? Esta pregunta se usa como disparador para introducir el contenido temático aquí involucrado.
Seguidamente desarrollamos la teoría básica para investigar todo lo referido al ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados. Esta teoría se da en la forma tradicional y con el apoyo de un Cuaderno elaborado por los docentes de la Cátedra.
A los alumnos les proporcionamos una amplia variedad de ejercicios que los ayudarán a mejorar sus habilidades, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica del ajuste de curvas por medio de la regresión con mínimos cuadrados. Con la misma finalidad les damos además, distintas actividades en donde se plantean situaciones problemáticas reales de ingeniería, de física y de matemática aplicada, en general.
Las actividades que implementamos tienen como finalidad lograr una revisión e integración de conocimientos de esta temática particular de Cálculo Numérico, para que les permitan, tanto al alumno como al docente, una evaluación de los saberes matemáticos enseñados y aprendidos según el marco teórico subyacente y la batería de ejercicios planteados previamente.
Las tareas de computación con el paquete MATLAB que les proponemos a los alumnos, se desarrollan en la Sala de Computación, en grupos y con la supervisión de los docentes de la asignatura. Cabe señalar que durante las primeras semanas de iniciado el curso, se les dan a los alumnos algunas nociones básicas y un Cuaderno sobre el uso del paquete MATLAB. Además, si bien se pretende que, por sí mismos, los alumnos desarrollen las actividades propuestas, ellos cuentan con el apoyo de los docentes y pueden intercambiar ideas con sus pares. De esta manera, se espera contribuir a una mayor comprensión de los contenidos temáticos involucrados, y lograr un aprendizaje dinámico e interactivo favorecido por el intercambio de experiencias, producto del análisis y discusión de las situaciones problemáticas planteadas. Adicionalmente, el hecho que los alumnos diseñen programas propios para resolver las actividades propuestas, juega un rol importante en el aprendizaje de los métodos numéricos. No sólo le ayudarán a afianzar los conceptos teóricos involucrados, sino que además, le

permitirán aprender a reconocer y controlar los errores de las aproximaciones obtenidas que, como sabemos, son inseparables de los cálculos numéricos a gran escala.
A continuación mostramos algunas de las actividades propuestas a los alumnos para su elaboración y posterior análisis. En cada caso de estudio deben emitir las conclusiones a las que arribaron. Estas, conjuntamente con una síntesis de los resultados obtenidos de cada actividad y los programas por ellos diseñados, deben ser incluidos en un informe final que deben presentar cada uno de los grupos a los docentes de la asignatura. Dicho informe además, debe ser expuesto y defendido, en forma individual, frente a los docentes y a los restantes alumnos del curso de Cálculo Numérico, a efectos de que se produzca un intercambio de experiencias y efectuar tareas remediales, si fuese necesario. De esta manera surgirán, naturalmente, los casos en donde se debe profundizar y/o extender el tratamiento de los aspectos más conceptuales y más difíciles de entender, y de las técnicas numéricas utilizadas y su implementación en la computadora. Esto redundará en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido curricular considerado, resultando enriquecedor tanto para los alumnos como para los docentes de la asignatura.
Son evaluados: la presentación del informe, su exposición y defensa, el trabajo en grupo y el desempeño de cada integrante dentro del mismo. Esta evaluación forma parte de las evaluaciones parciales contempladas en el curso de Cálculo Numérico.
La **Actividad 1** tomada de la ingeniería química, demuestra cómo se puede linealizar un modelo no lineal y ajustarse a datos que usan regresión lineal.
La **Actividad 2** muestra que si los datos que se deben ajustar no son lineales y no presentan una naturaleza polinomial, entonces puede ocurrir que la curva resultante presente oscilaciones grandes (*oscilación polinomial*). Esta actividad ilustra entonces, el hecho de que no se suelen usar polinomios de grado seis o mayor, a no ser que se sepa que la función de la que provienen los datos es un polinomio.

Actividad 1
Los modelos de crecimiento poblacional son importantes en muchos campos de la ingeniería. La suposición de que la tasa de crecimiento de la población (*dp/dt*) es proporcional a la población actual (*p*) en el tiempo (*t*) es de fundamental importancia en muchos de los modelos, en forma de ecuación

$$\frac{dp}{dt} = kp \; , \tag{1}$$

donde k es un factor de proporcionalidad conocido como la tasa de crecimiento específico y tiene unidades de tiempo^{-1}. Si k es una constante, entonces se puede obtener la solución de la ecuación (1) de la teoría de ecuaciones diferenciales

$$p(t) = p_0 e^{kt} \; , \tag{2}$$

donde p_0 es la población en el tiempo $t = 0$. Se observa que $p(t)$ en la ecuación (2) tiende a infinito a medida que t crece. Este comportamiento es claramente imposible en los sistemas reales. Por lo tanto, se debe modificar el modelo y hacerlo más realista.
Primero, se debe reconocer que la tasa de crecimiento específico k no puede ser constante a medida que la población crece. Esto es porque, cuando p tiende a infinito, el organismo que se modela se ve limitado por factores tales como el almacenamiento de comida y producción de desperdicios tóxicos. Una manera de expresar esto matemáticamente es la de usar el modelo de tasa de crecimiento y saturación tal como

$$k = k_{\text{máx}} \frac{f}{K + f} \, , \tag{3}$$

donde $k_{máx}$ es la máxima tasa de crecimiento posible para valores de comida (f) abundante y K es la constante de semi-saturación. Vemos que cuando $K = f$, $k = k_{máx}/2$. Por lo tanto, K es la cantidad de comida disponible que sostiene una tasa de crecimiento poblacional igual a la mitad de la tasa máxima. Las constantes K y $k_{máx}$ son valores empíricos basados en medidas experimentales de k para varios valores de f. Como ejemplo, supóngase que la población p representa una levadura empleada en la producción comercial de cerveza y f es la concentración de la fuente de carbono a fermentarse. Las medidas de k contra f de la levadura se muestran en el siguiente cuadro. Se necesita calcular $k_{máx}$ y K de estos datos empíricos.

Datos usados en la evaluación de las constantes en un modelo de promedio de crecimiento de saturación que caracteriza a la cinética microbial.

f, mg/l	k, días^{-1}
7	0.29
9	0.37
15	0.48
25	0.65
40	0.80
75	0.97
100	0.99
150	1.07

Úsese el método de mínimos cuadrados lineal para determinar $k_{máx}$ y K, y realícese el gráfico correspondiente. Escríbanse además, las conclusiones a las que se arribaron.

Resultados obtenidos por los alumnos:

Datos usados para la regresión lineal

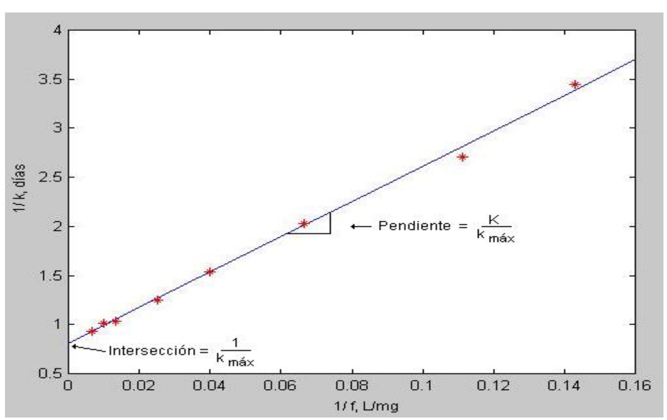
f, mg/l	k, días^{-1}	$1/f$, L/mg	$1/k$, día	$(1/f)^2$, L^2/mg^2	$(1/f)(1/k)$, L/mg. día
7	0.29	0.14286	3.44828	0.02041	0.49262
9	0.37	0.11111	2.70270	0.01235	0.30030
15	0.48	0.06667	2.08333	0.00444	0.13890
25	0.65	0.04000	1.53846	0.00160	0.06154
40	0.80	0.02500	1.25000	0.00063	0.03125
75	0.97	0.01333	1.03092	0.00018	0.01374
100	0.99	0.01000	1.01010	0.00010	0.01010
150	1.07	0.00667	0.93458	0.00004	0.00623
		$\sum$: 0.41564	$\sum$: 13.99837	$\sum$: 0.03975	$\sum$: 1.05468

Se obtiene

$$k_{máx} = 1.23 \text{ días}^{-1}, \qquad K = 22.18 \text{ mg/L}$$

De estos resultados, de (3) y de (1), se obtiene

$$\frac{dp}{dt} = 1.23\,\frac{f}{22.18 + f}\,p\,.$$



Linealización del modelo de promedio de saturación. La línea es un ajuste con mínimos cuadrados que se usa en la evaluación de los coeficientes del modelo, $k_{máx}$ = 1.23 días $^{-1}$ y K = 22.18mg/L, para levadura en la fabricación de cerveza.

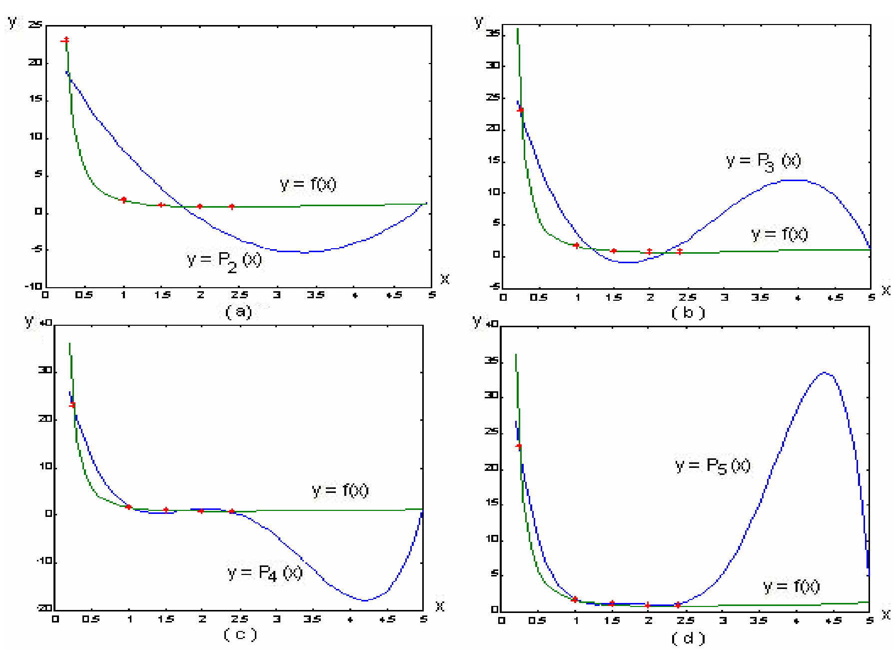
Conclusión a la que arribaron los alumnos luego de realizar esta actividad:
Si *f* se aproxima a cero a medida que *p* crece, entonces *dp/dt* tiende a cero y la población se estabiliza.

Actividad 2
Se usa la función $f(x) = 1.44/x^2 + 0.24x$ para generar seis parejas de datos (0.25, 23.1), (1.0, 1.68), (1.5, 1.0), (2.0, 0.84), (2.4, 0.826) y (5.0, 1.2576).
Obténganse los ajustes mediante polinomios óptimos en mínimos cuadrados para 2, 3, 4 y 5 grados.
Grafíquense, para cada caso, el polinomio óptimo y la función f(x).
Escríbanse además, las conclusiones a las que se arribaron.

Observación. No deja de ser tentadora la posibilidad de utilizar un polinomio óptimo en el sentido de los mínimos cuadrados para ajustar datos que no son lineales. Pero si los datos no muestran una naturaleza polinomial, puede ocurrir que la curva resultante presente oscilaciones grandes. Este fenómeno llamado *oscilación polinomial*, se hace más pronunciado conforme aumenta el grado del polinomio y, por esta razón, no se suelen usar polinomios de grado 6 o mayor, a no ser que se sepa que la función de la cual provienen los datos es un polinomio.

Resultados obtenidos por los alumnos:

$P_2(x) = 22.93 - 16.96\,x + 2.553\,x^2$
$P_3(x) = 33.04 - 46.51\,x + 19.51\,x^2 - 2.296\,x^3$
$P_4(x) = 39.92 - 80.93\,x + 58.39\,x^2 - 17.15\,x^3 + 1.680x^4$
$P_5(x) = 46.02 - 118.1\,x + 119.4\,x^2 - 57.51\,x^3 + 13.03x^4 - 1.085x^5$



(a) Ajuste de $P_2(x)$ a los datos (b) Ajuste de $P_3(x)$ a los datos
(c) Ajuste de $P_4(x)$ a los datos (d) Ajuste de $P_5(x)$ a los datos

Conclusiones a las que arribaron los alumnos luego de desarrollar esta actividad:

1. $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$ presentan oscilaciones grandes en el intervalo [2, 5].
2. $P_5(x)$ pasa por los seis puntos; sin embargo, es la que peor se aproxima a la función.
3. El polinomio que se ajusta a los datos y se aproxima a la función es $P_2(x)$.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A parir de la observación de las distintas secuencias de esta experiencia, podemos concluir que hemos obtenido algunos otros logros con respecto a los grupos de alumnos de años anteriores con aquellos que han cursado la asignatura bajo esta metodología, donde, básicamente, se han incorporado actividades adicionales que contemplan temas relativos a sus propias carreras y en las cuales deben usar herramientas numéricas y computacionales. Dichos logros son los siguientes:

- Se logra un mayor rendimiento académico de los alumnos.
- Se reafirman e integran los conocimientos de los alumnos, adquiridos en el aula.
- Se muestran más motivados al ver que pueden realizar cálculos a gran escala y en poco tiempo de ejecución de los programas y que además, pueden controlar y comprobar los resultados rápidamente, lo que genera una participación activa y de intercambio de experiencias por parte de los alumnos.
- Se nivelan los conocimientos adquiridos de los alumnos a través del trabajo grupal.
- Se logra que los alumnos tengan un buen manejo del paquete MATLAB y puedan así desarrollar sus propios programas sin demasiadas dificultades.
- Se sienten motivados a consultar bibliografía adicional.

Además, consideramos acertada la elección del paquete MATLAB, porque además de que ahorra tiempo y esfuerzo en la resolución de una gran variedad de problemas, que las soluciones obtenidas resultan más fiables que las obtenidas manualmente, que es una herramienta para la enseñanza de la matemática, facilita el proceso de enseñanza - aprendizaje aportando una interfaz gráfica visual más didáctica y comprensible.
Concluimos que la experiencia resultó positiva y que es viable implementarla en otros temas de Cálculo Numérico.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1998). *Ingeniería Didáctica* en: *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

Burden, R. y Faires, J. (2002). *Análisis Numérico*, International Thomson Editores, S. A., México. (Trad. de Numerical Analysis, 7th. Ed., Brooks/Cole, 2001).

Chapra, S. y Canale, R. (1992). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. *Con aplicaciones en computadoras personales*, McGraw - Hill, México. (Trad. de Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications, McGraw - Hill, 1985).

Gerald, C. y Wheatley, P. (2000). *Análisis Numérico con Aplicaciones,* Pearson Educación, México. (Trad. de Applied Numerical Analysis, Sixth Ed., Addison Wesley, 1999).

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*, Prentice - Hall Iberia S.R.L., España. (Trad. de Numerical Methods using MATLAB, Prentice - Hall, 1999).

USO DE TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE TEMAS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Ascheri, María E. - Pizarro, Rubén A.
Facultad de Cs. Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa - Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar rubenpizarro71@yahoo.com.ar
Campo Investigación: Uso de tecnología en la enseñanza de Matemática; Nivel educativo: Superior

RESUMEN
En el marco del Proyecto de Investigación acreditado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, titulado "Software educativo para la enseñanza – aprendizaje de temas de Cálculo Numérico", estamos diseñando un software educativo con el objetivo de facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos temáticos de Cálculo Numérico. Comenzamos a trabajar en el tema: "Resolución numérica de ecuaciones no lineales".
La combinación de elementos de tecnología educativa con los tradicionales es una buena alternativa. Un alumno que disponga de los contenidos temáticos desarrollados a través de las presentaciones usuales en combinación con este software, tendrá una mayor motivación y logrará la apropiación de los contenidos curriculares pertinentes.

INTRODUCCIÓN
La realización de ejercicios y prácticas es una de las modalidades más aplicadas en Matemática, debido a la naturaleza misma de la materia. Esta modalidad permite reforzar las etapas de aplicación y retroinformación utilizando la técnica de repetición (Galvis, 1992).
Con el software que hemos comenzado a desarrollar, el alumno puede complementar el estudio de los contenidos temáticos de Cálculo Numérico y comprender los aspectos más conceptuales y más difíciles de entender, teniendo el profesor la posibilidad de profundizar y extender el tratamiento de ciertos temas y/o dedicar tiempo a tareas remediales. Además, el alumno podrá realizar las actividades prácticas en una forma mucho más dinámica, interactuando fácilmente y teniendo una rápida respuesta a sus inquietudes. Para que esta modalidad realmente sea efectiva, previo al uso de un software de este tipo, el alumno ha debido adquirir los conocimientos de conceptos y destrezas que va a practicar. Por otra parte, el rol docente se verá afectado por la implementación de este software educativo. Con la inclusión de herramientas informáticas en nuestras clases, la actividad del docente cambiará del tradicional rol de informante a la del facilitador o guía.
Es importante que el software contemple no solamente las prácticas, sino que proporcione al estudiante ayuda en la solución de los problemas y brinde una retroinformación completa, sin limitarse a indicar que se ha cometido un error, sino brindando información acerca del tipo de error (Alemán de Sánchez, 1999). Este y otros aspectos son considerados en los diversos ejemplos que incluimos en nuestro software, y que describiremos a continuación.

DESARROLLO
En el curso de Cálculo Numérico, alumnos de las carreras: Profesorado en Matemática (3º Año), Licenciatura en Física (3º Año) e Ingeniería Civil (2º Año), abordan distintos temas relacionados con el uso de métodos numéricos. Desde el año 2001 venimos trabajando en forma gradual y sistemáticamente en la enseñanza de los distintos

contenidos contemplados en esta asignatura, dentro del marco teórico de la ingeniería didáctica la cual hace una distinción temporal de su proceso experimental en cuatro fases (Artigue, 1998):

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori.
3. Experimentación.
4. Análisis a posteriori y evaluación.

Como resultado parcial del análisis a posteriori y validación de la propuesta, hemos comenzado a diseñar este software educativo que incluye, inicialmente, el tema: "Resolución numérica de ecuaciones no lineales", a efectos de utilizarlo como una herramienta adicional de apoyo didáctico en el desarrollo de los contenidos temáticos involucrados en Cálculo Numérico.

Entre las actividades planificadas en esta asignatura, se encuentran aquellas en donde los alumnos deben elaborar los programas correspondientes a los diferentes métodos numéricos desarrollados en las clases teóricas, complementando, de esta forma, las actividades de cálculo manual por medio de las cuales se arriban a los resultados una vez que se aplican dichos métodos. Los programas que diseñan e implementan los alumnos en MATLAB, les permiten, en cada ejecución, ingresar los datos y obtener la solución de la ecuación considerada. Por ejemplo, como se muestra en la figura 1.

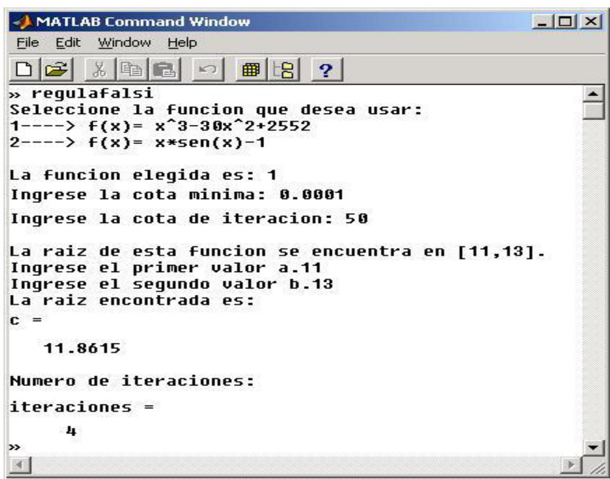


Figura 1

Consideramos que la elaboración de estos programas es muy útil para los alumnos, ya que les brinda la posibilidad de interpretar el método numérico y, eventualmente, adaptarlos a ejemplos que puedan encontrar en su futuro profesional, debido a que han afianzando suficientemente sus conocimientos de programación. Pero, a menudo, se pierde de vista cómo "funciona" el método para ir acercándose a la solución deseada. Es común que la gráfica de la función analizada, así como el intervalo en el que se hará el análisis o los valores iniciales y las condiciones de convergencia, pasen a un segundo plano y sólo se tome en consideración el resultado que arroja el programa. Además, la elección de las diferentes funciones, de los valores iniciales y la corrección de los errores que se pueden cometer al cargar los datos en la ejecución del programa, constituyen una tarea dificultosa.

Luego de la búsqueda y análisis de bibliografía y de trabajos desarrollados en el área de Informática Educativa y de las Ciencias de la Educación, hemos comenzado con la planificación y el diseño de este software educativo. Para ello nos propusimos los siguientes objetivos:

- Generar el contexto educativo adecuado al contenido a desarrollar y a los objetivos propuestos en la asignatura.
- Facilitar la interpretación analítica y gráfica de los diversos métodos numéricos.
- Permitir mayor libertad, rapidez y flexibilidad en el ingreso y corrección de los parámetros necesarios para la aplicación de los métodos numéricos.
- Visualizar el funcionamiento de cada método numérico, y la obtención de resultados parciales y finales.
- Facilitar la enseñanza y el aprendizaje de los diversos métodos numéricos.

A continuación, presentamos la primera pantalla de este software en donde se muestran los distintos métodos que se incluirán en el mismo (ver figura 2), y exponemos sus características para el método de la regula falsi y el método de la secante. Cabe señalar que, hasta el momento, hemos elaborado la parte que corresponde a los métodos de bisección, iterativo de punto fijo, de la regula falsi y de la secante. En los dos primeros métodos le hemos agregado la ayuda teórica correspondiente, la cual se encuentra disponible durante la ejecución de los mismos (Ascheri y Pizarro, 2005).

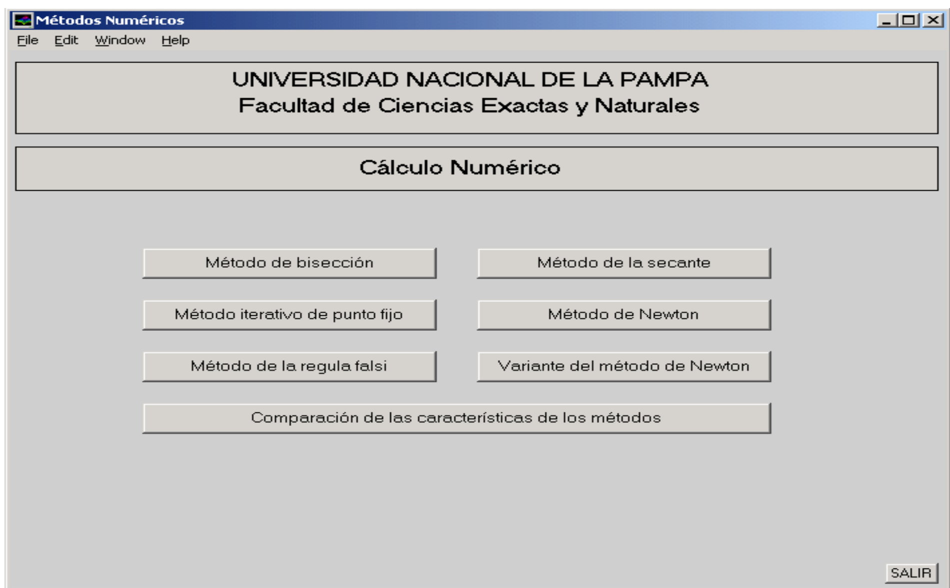


Figura 2

Método de la regula falsi

En la figura 3, se muestra la interfaz gráfica del software aplicando el método de la regula falsi.

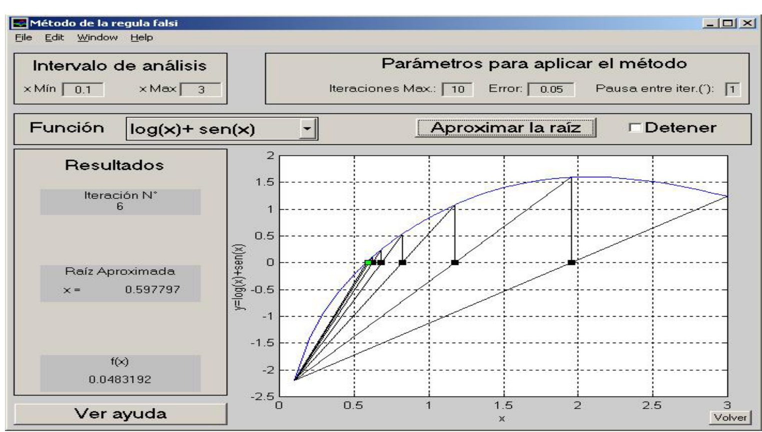


Figura 3

En esta pantalla podemos distinguir varias secciones con las cuales el usuario puede interactuar. En algunas de estas secciones se deben ingresar los datos o las acciones a seguir, y en otras se obtendrán la gráfica de la función y los resultados. Las secciones y el orden a seguir para acceder a ellas es el siguiente:

1. **Intervalo de análisis**

   Aquí el alumno debe indicar el intervalo en el cual quiere analizar la ecuación para encontrar su raíz. Es, además, el intervalo en el cual se realizará el gráfico de la función correspondiente. Por medio de este recurso puede ir ajustándolo de tal forma de "encerrar" la raíz convenientemente, esto es, de ir achicando el intervalo que contiene a la raíz de la ecuación en estudio.

2. **Selección de las acciones que ejecutará**

   El alumno que se encuentre utilizando este software debe elegir la función que desea analizar entre un conjunto de funciones. Al seleccionarla, se controla que los extremos del intervalo ingresado previamente sean los adecuados para poder representarla gráficamente (dado [a, b] que $a < b$). Si no es así, aparece el siguiente mensaje para que el alumno pueda corregir el intervalo de análisis ingresado:

   Una vez ingresado correctamente el intervalo de análisis, verá la gráfica de la función seleccionada y podrá ingresar los parámetros (cuya descripción se encuentra en el punto 3). Luego, al cliquear sobre el botón *Aproximar la raíz* (ver figura 3), comenzará la ejecución. Antes de empezar a mostrar los resultados, se controla si la ecuación tiene una raíz en el intervalo de análisis y si esta raíz es única. Si no fuese así, aparece el siguiente mensaje:

   a partir del cual el alumno puede modificar los datos ingresados inicialmente y repetir el proceso.

   En cualquier momento de la ejecución, el alumno puede detener el proceso seleccionando la opción *Detener* (ver figura 3).

3. **Parámetros para aplicar el método**

   Aquí el alumno debe ingresar aquellos datos que hacen al funcionamiento del método, como son:

   - Iteraciones máximas: deberá ingresar el número máximo de iteraciones que considera necesario que se ejecute el método. Si se supera este valor, el método se detiene y le indica al alumno que no converge, al menos con los datos ingresados, con el siguiente mensaje:

   - Error: se deberá ingresar la cota de error con la que se desea obtener la solución.

- Pausa entre iteraciones: por cada iteración, el software ubica en el gráfico la aproximación obtenida. Modificando el tiempo de espera entre cada una de ellas, se modifica la velocidad de ejecución del método.

4. **Gráfica de la función**

   Tal como dijimos en el punto 2, y según el intervalo de análisis ingresado correctamente, al seleccionar la función aparece en esta sección su gráfica. Una vez ingresados los parámetros para el método y a medida que se suceden las iteraciones, aparecen en la gráfica los puntos cuyas coordenadas son $(x_n, 0)$, donde x_n es la aproximación más actualizada de la raíz. El último punto que se grafica es de distinto color, con el propósito de facilitar la ubicación del resultado final del procedimiento. Es en esta sección en la cual el alumno puede interpretar, a partir del gráfico, cómo el método “encierra” la raíz de la ecuación considerada.

5. **Resultados**

   En esta sección, el alumno puede observar los resultados que arroja el método en cada iteración. Estos resultados parciales adquieren mayor importancia, si consideramos que el alumno puede regular el tiempo entre cada iteración o detener la ejecución para registrarlos, compararlos, analizarlos, etc.

6. **Ayuda**

   A partir de este botón (ver figura 3), el alumno podrá acceder a una nueva ventana en la cual estarán detalladas las principales características del método en cuestión. Como mencionamos anteriormente, por ahora sólo hemos desarrollado la ayuda correspondiente a los métodos de bisección y de punto fijo.

   ¿Por qué la opción *Ver ayuda*?. Luego de que los alumnos utilizaran el software para resolver los ejemplos con el método de bisección y el método iterativo de punto fijo, notamos que, frecuentemente, no recordaban conceptos teóricos fundamentales para poder aplicarlos. Este desconocimiento traía inconvenientes al momento de elegir el intervalo de análisis, el valor inicial o la cantidad de iteraciones. Para que los alumnos puedan recurrir a un marco teórico apropiado que les permita salvar estos inconvenientes (durante la instancia misma de aplicación del software), se decidió agregar en cada método una ayuda, estando actualmente en la etapa de construcción de la misma.

7. **Salida del software**

   Para salir de este software, el alumno debe cliquear sobre el botón *SALIR* (ver figura 2).

Método de la secante

En la figura 4, se muestra la interfaz gráfica del software aplicando el método iterativo de la secante.

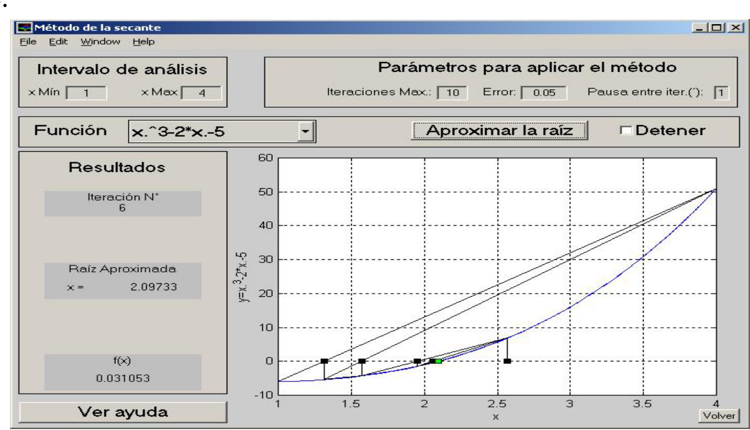


Figura 4

El ingreso de los datos se debe hacer en forma similar al método anterior y la interacción con el usuario es la misma. Nuevamente adquiere gran importancia para el alumno la posibilidad de graficar la función seleccionada, permitiéndole realizar los ajustes de los valores ingresados según el gráfico obtenido. Una vez que se selecciona *Aproximar la raíz* (ver figura 4), en la sección correspondiente se muestra cómo trabaja el método gráficamente, es decir, se observa que se acerca a la raíz si converge o, en caso contrario, se aleja de la zona de interés.

Acciones futuras inmediatas

El diseño de material de este tipo es más que un "software" y debe presentar ventajas respecto a otros medios instruccionales, y esto debe quedar muy claro al autor y a los sujetos del curso que de esta manera estarán más motivados a estudiar bajo esta modalidad que por los medios tradicionales (Rivera Porto, 1997). Por ello es que, al material elaborado hasta el momento le seguiremos incorporando herramientas que aumenten la interacción con el alumno, tales como agregar secciones en las cuales se puedan rever otros contenidos teóricos que hacen al correcto funcionamiento de los métodos numéricos (por ejemplo, las condiciones de convergencia de los mismos).

Además, según el análisis a posteriori que haremos y atendiendo a las posibles necesidades que surjan a partir de este análisis, iremos incorporando nuevos ejemplos a efectos de que los alumnos observen y entiendan las características y el comportamiento de los métodos numéricos utilizados, para resolver una misma situación problemática.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Debemos tener en claro que la tecnología educativa es un elemento importante para generar cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje, pero no constituye la solución de todos los problemas educativos. Además, la mejora de estos procesos no depende de la utilización de un software educativo, sino de su adecuada integración curricular, es decir, del entorno educativo diseñado por el profesor.

Mediante el uso de este software se ha logrado que el alumno:

- Afiance los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas, adquiridos en el aula.
- Ejecute todos los pasos de un algoritmo y explore sus peculiaridades, probando interactivamente distintos ejemplos.
- Lleve a cabo un proceso investigativo que incluye la reflexión y el análisis a partir de la resolución de un problema.

BIBLIOGRAFÍA

Alemán, A. (1999). *La enseñanza de la matemática asistida por computadora.* Disponible en: http://www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematica.html

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

Ascheri, M. y Pizarro, R. (2005). Software para la enseñanza - aprendizaje de algunos métodos numéricos. En EMAT (Ed.), *Publicación en las Memorias del VII SEM* (CD-ROM ISBN Nº 987-20239-3-X,10 páginas). Chivilcoy, Argentina.

Galvis, A. (1992). *Ingeniería de Software Educativo*. Colombia: Ed. Uniandes.

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. México: Prentice-Hall. (Trad. de Numerical Methods using MATLAB, Prentice-Hall, 1999).

Nakamura, S. (1997). *Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*, Pearson Educación. (Trad. de Num. Anal. and Grap. Vis. with MATLAB, Prentice-Hall, 1996).

Rivera, E. (1997). *Aprendizaje asistido por computadora. Diseño y realización.* Disponible en: http://www.geocities.com/eriverap/libros/Aprend-comp/apen1.html

FUNCIONES CON DERIVE... A DISTANCIA: CATEGORIZACIÓN Y ANÁLISIS DE ERRORES

MANSILLA, Sandra; PANELLA, Erica; PAVÁN, Graciela; SADAGORSKY, Ana.
Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura–Univ. Nacional de Rosario–Argentina
mansilla@fceia.unr.edu.ar , panella@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Formación de profesores / Educación a distancia; Nivel Educativo: Media – Superior.

Resumen

En este trabajo mostramos los resultados obtenidos del análisis empírico de los errores y problemas detectados a partir de las consultas y la ejercitación presentada en un curso de formación para docentes de enseñanza media consistente en el desarrollo de un tema de Análisis Matemático utilizando el software Derive, organizado por la Escuela de Postgrado de nuestra facultad y llevado a cabo desde 10/2003 hasta 04/2004, con metodología de trabajo semipresencial y el uso de una Plataforma Educativa virtual.
En el proceso de análisis empírico agrupamos respuestas según algunos aspectos comunes de interés. A partir de los resultados obtenidos detectamos que el mayor porcentaje de errores correspondía a aquellos relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos, y no con cuestiones referidas al software o a la Plataforma.

Introducción

En el marco de las actividades que tienen por objetivo mejorar la articulación entre la enseñanza media y la universidad, la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Universidad Nacional de Rosario, a través de la Escuela de Postgrado, implementó desde octubre de 2003 hasta abril de 2004 un curso de formación para docentes de enseñanza media consistente en el desarrollo de un tema de Análisis Matemático con utilización del software Derive.
Debido a la amplia aceptación de esta propuesta, una vez finalizado el curso, comenzamos esta investigación con el objetivo puntual de evaluar la calidad del material didáctico utilizado en el desarrollo del mismo, para optimizarlo en pos de una futura implementación.
Partimos de una premisa epistemológica que consiste en asumir que "no existe conocimiento sin problemas", es decir, para conocer debe haber algo por resolver, por enfrentar, por explorar". (Ricardo Cantoral)
De la resolución de los mismos, de la forma de enfrentarlos y de explorar utilizando este Software, quisimos extraer las situaciones problemáticas comunes a todos los estudiantes/ docentes para evaluar en forma cuantitativa y cualitativa los errores y extraer, en consecuencia una conclusión.
Entender la forma de enfrentar los problemas como unidad en la diversidad, fue la que determinó nuestro modo de categorizar los errores, considerando que la heterogeneidad no debe ser vista como dificultad, sino como una riqueza.
Entonces, uno de los aspectos para lograr nuestro objetivo fue realizar una clasificación empírica de los errores y problemas detectados a partir del análisis de la ejercitación presentada por los docentes-alumnos y las consultas recibidas y respondidas a través de la plataforma informática. En el proceso de análisis empírico fuimos agrupando respuestas según algunos aspectos comunes de interés. Se crearon nuevas categorías

cuando en algunas respuestas aparecían datos no contemplados en ninguna de las categorías ya formadas. Este proceso permitió ir refinando paulatinamente las categorías que se iban considerando.
A partir de los resultados obtenidos en esta aproximación descriptiva detectamos, contra nuestro supuesto, que el mayor porcentaje de errores correspondía a aquellos relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos, y no con cuestiones referidas al software (desconocido por la mayoría de los docentes-alumnos al iniciar el curso), o a la plataforma educativa virtual.
Es por esto que creemos indispensable, además de continuar con las tareas de articulación citadas al comienzo, enfocarnos en el diseño y aplicación de estrategias conjuntas con los institutos de formación docente, que contribuyan a dar solución a esta problemática.

Características del curso

Los estudiantes/docentes fueron treinta Profesores de Matemática que se inscribieron en el curso de formación para docentes de Enseñanza Media, algunos de ellos de localidades vecinas, consistente en el desarrollo de un tema de Análisis Matemático I (Funciones) con la utilización del Software Derive.
Este curso fue diseñado con metodología de trabajo semipresencial mediante el uso de la Plataforma Educativa Virtual.
Se dividieron los alumnos en grupos de cinco integrantes, teniendo en cuenta algunas consideraciones como ser : el nivel de conocimiento tecnológico o el lugar de trabajo.
Cada grupo tenía asignado un tutor, el cual era responsable del seguimiento de los alumnos, de brindar el apoyo necesario y corregir los trabajos.
Todos los tutores estaban coordinados a su vez por un tutor general responsable del curso.

Características del grupo

Los 30 estudiantes/docentes eran profesores en ejercicio con las siguientes características principales:

- 50% tenía más de diez años de antigüedad.
- 80% provenía de localidades vecinas.
- 90% poseía una computadora en su casa.
- 30% había realizado algún curso de formación específica en el manejo de un software matemático.
- 30% declaró utilizar computadoras en sus clases .

Estos porcentajes sirven sólo para dar una idea de proporción, ya que los mismos tienen validez estadística para poblaciones mayores a 30.

Objetivo de estudio

El objetivo de nuestro trabajo fue la clasificación y análisis de la corrección de las tareas realizadas por los estudiantes/docentes y enviadas a los tutores correspondientes vía Plataforma.
El estudio fue hecho en base a las respuestas dadas por los tutores en cada caso.
Pudimos identificar distintos tipos de errores que categorizamos de la siguiente manera:

- Errores derivados del manejo del entorno tecnológico, como por ejemplo: los pasos necesarios para poder interactuar con la Plataforma Virtual, manejo del correo electrónico, etc.

- Errores en el manejo específico del Software Derive 3.1, como ser: la necesidad de “limpiar” el contenido de una variable, editar expresiones, realizar gráficos, guardar archivos.
- Errores relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos, como ser: la determinación del dominio de una función, la resolución de sistemas de ecuaciones y/o de inecuaciones, manejo de notación simbólica (por ejemplo la utilización de paréntesis cuando correspondía corchetes)
- Errores de interpretación de enunciados y de resultados, como ser: dificultad en la modelización matemática de un problema de la vida real, obtención de gráficas, omisión de respuestas, carencia de verificaciones, pautas de presentación de las actividades y elaboración de conclusiones.

Además relevamos los problemas relacionados con la organización y desarrollo del curso, que no son precisamente errores, pero que interesan a la hora de evaluar al mismo.
En primera instancia consideramos tres tipos de problemas:

- PT: Problemas de temporalización (plazo para la entrega y devolución de los trabajos)
- PC : Problemas de comunicación (tutor- alumno y tutor- equipo responsable)
- PD: Problemas de diseño (del material didáctico, de la plataforma, etc.).

Desarrollo de la investigación
A raíz de un exhaustivo análisis de las consultas y respuestas documentadas en la plataforma virtual realizamos el siguiente conteo:

Errores en el manejo específico del Software Derive	
Aplicación de comandos u operadores	52
Impresión	5
Interpretación de salidas	9
Introducción de símbolos y sentencias	27
Manejo de archivos DERIVE	18
Total	**111**

Errores derivados del manejo del entorno tecnológico	
Acceso y gestión de la Plataforma	5
Generales	11
Configuración del hardware y software	8
Total	**24**

Errores relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos: 162

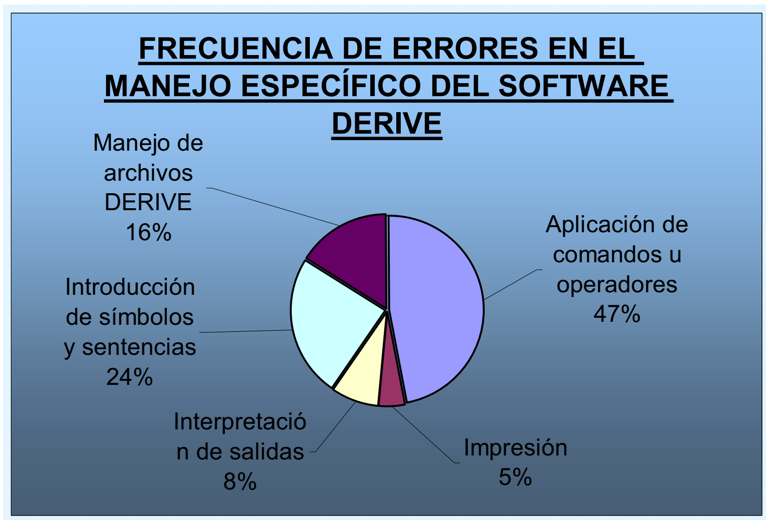
Errores de interpretación	
Consignas	72
Enunciados	16
Resultados	4
Total	**92**

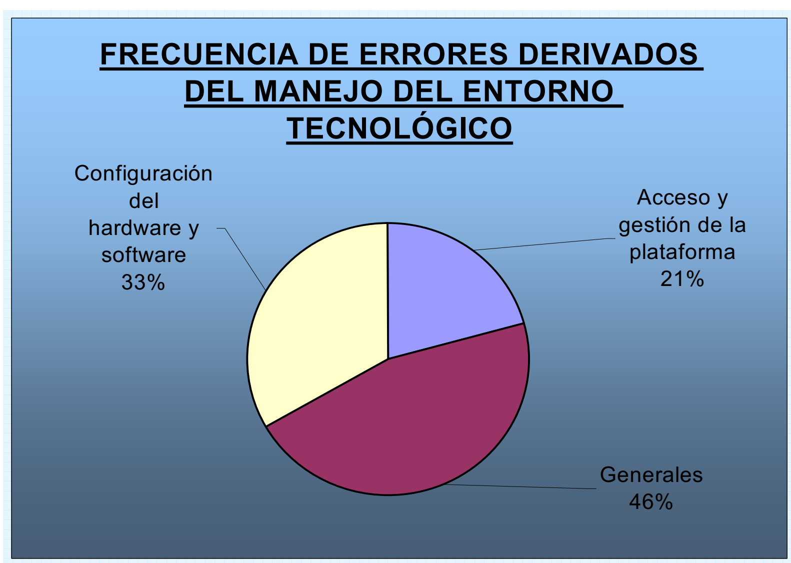
Problemas de temporalización: 7

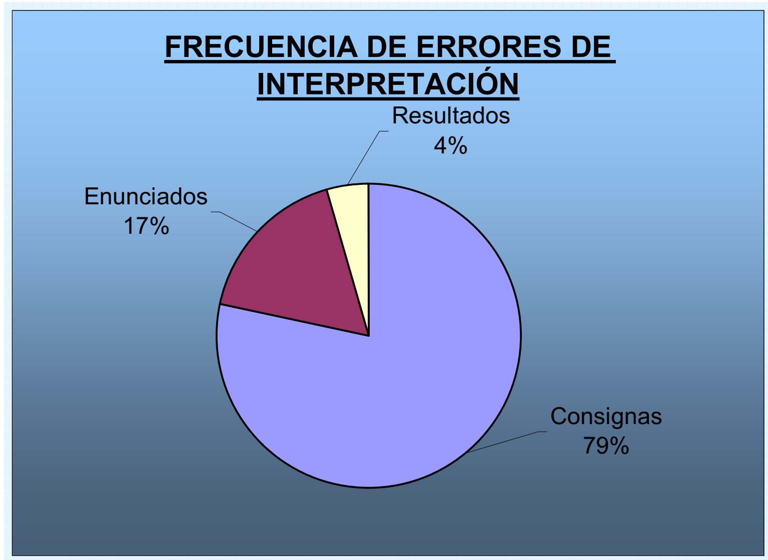
Problemas de comunicación	
Recepción /envío de actividades	13
Recepción / Envío de correcciones	9
Total	**22**

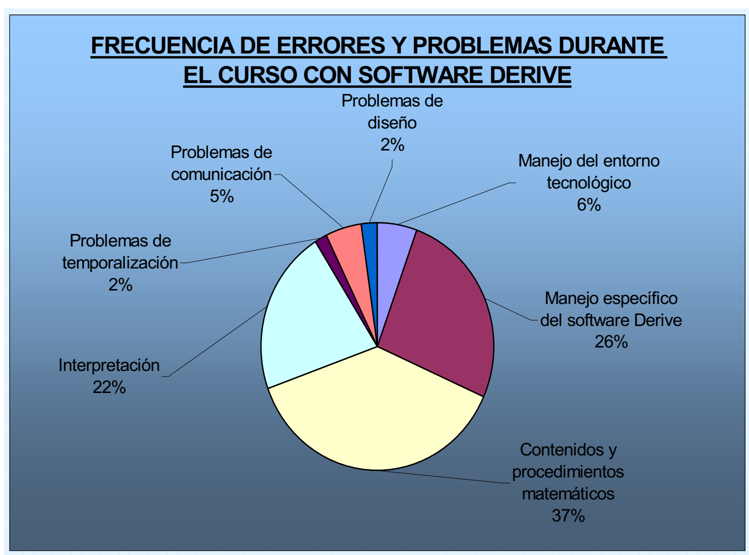
Problemas de Diseño: 9

Para una mejor visualización de estos resultados mostramos a continuación los gráficos de torta correspondientes:






FRECUENCIA DE ERRORES DE INTERPRETACIÓN
Resultados 4%
Enunciados 17%
Consignas 79%


FRECUENCIA DE ERRORES Y PROBLEMAS DURANTE EL CURSO CON SOFTWARE DERIVE
Problemas de diseño 2%
Problemas de comunicación 5%
Manejo del entorno tecnológico 6%
Problemas de temporalización 2%
Manejo específico del software Derive 26%
Interpretación 22%
Contenidos y procedimientos matemáticos 37%

Conclusiones

El mayor porcentaje de errores correspondió a aquellos relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos, en particular los que hacen a la comprensión de los conceptos de: dominio de una función, composición de funciones, concepción de la gráfica desde la definición de la función, continuidad en un punto.
Luego, teniendo en cuenta este trabajo, creemos indispensable:

- continuar con las tareas de articulación entre la enseñanza media y la universidad,
- abocarnos al diseño y aplicación de estrategias conjuntas con los institutos de formación docente, que contribuyan a dar solución a esta problemática
- reeditar el material teniendo en cuenta este trabajo realizado.

Bibliografía

Alfonso, H. (1999). Reflexiones didácticas desde y para el aula. *Revista EMA* 4(2), pp. 186-193.

Linares, S. (1998). La investigación "sobre" el profesor de Matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula.* 10, pp. 153-179.

Parceriza, A. (1996). *Materiales curriculares*. Barcelona, España: Ed. Graó.

Perlo, C. (1998). *Hacia una didáctica de la formación docente*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens.

Radatz, H. (1980). Student's errors in the mathematical learning process: a survey for the learning of Mathematics. 1.1, 16-20.

EVOLUCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE UNIDADES CURRICULARES

KOEGEL, Liliana - PLUSS, Ileana
Universidad Nacional de Rosario–Fac. de Ciencias Económicas y Estadística-Argentina
bonaudo@cablenet.com.ar - ipluss@cablenet.com.ar
Campo de investigación: Educación continua

Resumen

Este trabajo describe un análisis y evaluación de materiales curriculares utilizados por estudiantes de Matemática del Ciclo Introductorio a las carreras de Ciencias Económicas (UNR, Argentina). Se realizaron dos tipos de análisis estadísticos:
1-Análisis de confiabilidad: para este análisis se utilizó el coeficiente α de Cronbach, con el fin de disponer de un cuestionario confiable y simple de aplicar.
2-Análisis Multivariado: se decidió realizar un análisis de Componentes Principales con el fin de descubrir la verdadera dimensión del espacio en el que se encuentran los datos y se analizaron los coeficientes de correlación de Pearson con el fin de conocer la asociación entre las componentes principales y los puntajes asignados a las afirmaciones del cuestionario. [1]

Introducción

La enseñanza de la Matemática en el nivel universitario, en razón de los tiempos asignados al desarrollo efectivo de las clases en relación a los contenidos curriculares, exige momentos de enseñanza que van más allá de la confluencia espacial y temporal sistemática entre profesores y alumnos. Es ahí donde entran a jugar los procesos de enseñanza-aprendizaje a través de los materiales preparados por los propios docentes y es ahí donde se presenta el problema de la investigación.
La perspectiva de análisis de materiales que se ha tomado en cuenta en esta investigación se enmarca en la siguiente función: "proporcionar información para la toma de decisiones ... especialmente en relación con los elementos que componen el sistema" (Martinez,1992).
La evaluación de materiales curriculares corresponde a "decisiones de estructuración, que se refieren a la especificación de los medios para adquirir los fines establecidos como resultado de la planificación (enseñanza preactiva)" (Pérez, 1985).
La tarea de evaluar tiene cuatro componentes esenciales, a las cuales se puede ajustar perfectamente la evaluación de materiales curriculares entendida como un tipo específico de evaluación (Stufflebeam y Shinkfield, 1987):

- Conciencia de la necesidad de que hay que tomar una decisión
- Diseño de la situación de decisión
- Elección entre alternativas
- Actuación de acuerdo con la alternativa escogida

"La evaluación es el proceso de identificar, obtener y proporcionar información útil y descriptiva acerca del valor y el mérito de las metas, la planificación , la realización y el impacto de un objeto determinado, con el fin de servir de guía para la toma de decisiones, solucionar problemas de responsabilidad y promover la comprensión de los fenómenos implicados"(Stufflebeam,1987).

[1] Este trabajo fue realizado en el marco de los proyectos de investigación: "La elaboración y evaluación de los materiales curriculares para la Matemática Básica de las Carreras de Cs. Económicas" y "La ingeniería didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares" dirigidos por la Dra. M. Anido

El análisis y evaluación de este material curricular, diseñado para facilitar un aprendizaje autónomo, se realizan en las fases preactiva y postactiva del proceso enseñanza aprendizaje, lo cual permite constatar cómo se han usado los materiales, teniendo en cuenta tanto su adecuación en función del logro de intenciones educativas como el análisis del curriculum oculto (valores, actitudes, estrategias, etc) que los materiales colaboran a desarrollar.
En cuanto al diseño del instrumento de análisis, se intentó encontrar un equilibrio entre la rigurosidad y la operatividad en su uso.

Objetivos de la Investigación

- Disponer de un cuestionario confiable para evaluar un material curricular.
- Conocer si el material curricular le brinda al alumno la posibilidad de lograr un aprendizaje significativo y autónomo.
- Correlacionar la metacognición en el aprendizaje del alumno con su rendimiento académico (entendiendo por rendimiento académico la nota, o sea la calificación, obtenida en el sistema de evaluación vigente).
- Obtener conclusiones que sirvan de guía para tomar decisiones tendientes a mejorar la calidad del material curricular y el proceso enseñanza-aprendizaje.

Metodología del Trabajo

♦ *En una primera etapa* se lleva a cabo la evaluación de las siguientes Unidades Curriculares: *Vectores ; La recta en el plano ; Matrices y determinantes ; Sistemas de ecuaciones lineales.*
Para ello se diseñaron cuatro cuestionarios distintos tipo escala de Likert (Anido, 2004). Cada cuestionario consta de aproximadamente 20 afirmaciones, que apuntan a generar variables que evalúen la adecuación del material en cuanto a:

$$\textit{Cuestionario A}\begin{cases}\textit{Motivación}\\ \textit{Pasaje entre registros verbales, gráficos y simbólicos}\end{cases}$$

$$\textit{Cuestionario B}\begin{cases}\textit{Transposición - Forma de desarrollo y manejo de los contenidos}\\ \textit{Propuesta de actividades de aplicación en problemas}\end{cases}$$

$$\textit{Cuestionario C}\begin{cases}\textit{Estructura lógica}\\ \textit{Grado de dificultad de las actividades}\end{cases}$$

$$\textit{Cuestionario D}\begin{cases}\textit{Socialización del trabajo}\\ \textit{Diseño gráfico}\\ \textit{Utilidad del material}\end{cases}$$

Se trabajó con una *muestra piloto*; cada alumno debió responder uno de los cuestionarios sobre una de las unidades evaluadas. La información obtenida se sometió a *un análisis descriptivo*, obteniéndose resultados que permitieron responder a los objetivos fijados.
♦ *En una segunda etapa*, se lleva a cabo la evaluación de las siguientes Unidades Curriculares: *Matrices y determinantes ; Sistemas de ecuaciones lineales.*
Se trabajó con una *muestra aleatoria simple de 460 alumnos* y se llevaron a cabo los *dos tipos de análisis* que se describen a continuación:
1-Análisis de confiabilidad
Objetivo de este análisis: disponer de cuestionarios confiables.
Esto es importante en la evaluación de unidades curriculares especialmente cuando las variables derivadas de los cuestionarios van a ser utilizadas en análisis predictivos.

Las variables obtenidas a partir de un cuestionario son confiables sólo si al repetir el mismo a las mismas personas, las respuestas resultan estables. La confiabilidad se puede expresar en términos de estabilidad, consistencia y equivalencia.

Es por ello que, continuando con la investigación curricular - en la cual se sigue un proceso cíclico de experimentación, evaluación y modificación del material - en la segunda etapa se decide realizar un *Análisis de Confiabilidad* para cada una de las variables didácticas de cada cuestionario contestado por los alumnos en la primera etapa. Se utilizó el coeficiente "alpha" de Cronbach. Este coeficiente es una medida de la contribución de la variancia de los puntajes de cada una de las afirmaciones de un cuestionario, a la variancia total ; su rango de variación es de 0 a 1 y cuanto mayor es su valor, mayor es la confiabilidad del cuestionario. Nunnaly en 1978 indicó que 0.7 es un valor de "alpha" aceptable. Su fórmula es: $\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right]$ donde n es el número de afirmaciones, σ^2 es la variancia del total de los puntajes y σ_i^2 es la variancia de los puntajes correspondientes a la afirmación i.

Con este análisis se logra simplificar, sin pérdida de rigurosidad, el instrumento utilizado para evaluar el material, ya que se consigue reducir el número de afirmaciones de los cuestionarios y resumir los cuatro en uno sólo, confiable y ágil en su aplicación, que consta de las nueve variables didácticas consideradas para evaluar el material curricular.

Además, cada cuestionario se completó con la nota de práctica y de teoría que el alumno obtuvo en el tema sobre el cual respondió, con el fin de correlacionar la metacognición en el aprendizaje del alumno con su rendimiento académico (se entiende por rendimiento académico la nota en el sistema de evaluación vigente).

La muestra aleatoria simple con la que se trabajó, fue extraída de una población de 460 alumnos regulares y libres que se presentaron a rendir en el primer turno de examen. Cada alumno respondió el cuestionario con todas las variables para una unidad, asignando un puntaje de 1 a 5 (escala de Likert) a cada una de las 60 afirmaciones.

2-Análisis Multivariado

Objetivo de este análisis: determinar las variables que mejor explican la calidad del material como herramienta facilitadora de un aprendizaje significativo y autónomo.

Algunas de las técnicas multivariadas ayudan a los investigadores a crear nuevas variables con propiedades deseables. Una de ellas es el *Análisis de Componentes Principales* que se decide aplicar en esta investigación. Este análisis resulta útil para aquellos investigadores que desean realizar una división en subgrupos de las unidades experimentales, de modo que aquellas que son similares pertenezcan al mismo subgrupo.

En el análisis de componentes principales se usa un procedimiento matemático que transforma un conjunto de variables respuesta correlacionadas en un nuevo conjunto de variables, conocidas como *componentes principales,* de modo que:

1. Las nuevas variables *componentes principales* no estén correlacionadas.
2. La primera componente principal explique tanto de la variabilidad total de los datos como sea posible.
3. Cada componente subsiguiente explique tanto de la variabilidad restante como sea posible.

El objetivo básico de un análisis de componentes principales, es *descubrir la verdadera dimensión del espacio en el que se encuentran los datos* y así, si es posible, reemplazar las variables originales por un número menor de variables subyacentes, sin que se pierda información. No siempre se pueden interpretar estas nuevas variables que llamamos

componentes principales y tampoco es necesario hacerlo, pues este análisis es suficientemente útil sin interpretarlas (Johnson, 1998)
En esta investigación se aplicó un análisis de componentes principales a las nueve variables didácticas del cuestionario. Luego se analizaron los coeficientes de correlación de Pearson obtenidos en dicho análisis; el rango de variación de estos coeficientes es de –1 a 1, y cuanto más cercano a 1 se encuentra su valor absoluto, mayor es el grado de asociación lineal entre las componentes principales (factores de diferenciación) y las variables (puntajes asignados a las afirmaciones) del cuestionario.

Análisis de Resultados

Con el *análisis de confiabilidad* (realizado en la 2da etapa en base a los resultados obtenidos en la 1ra) se logró reducir el número de afirmaciones de los cuestionarios iniciales conservando o aumentando el coeficiente de confiabilidad.
A modo de ejemplo se muestran los resultados obtenidos *para los cuestionarios A y B*:

- Para la variable *Motivación,* las 11 afirmaciones iniciales se redujeron a 7, conservando el valor del coeficiente de Cronbach (α=0,72).
- Para la variable *Pasaje entre registros verbales, gráficos y simbólicos* las 11 afirmaciones iniciales se redujeron a 7, aumentando el valor del coeficiente de Cronbach de 0,86 a 0,88.
- Para la variable *Transposición,* las 8 afirmaciones iniciales se redujeron a 5, aumentando el valor del coeficiente de Cronbach de 0,70 a 0,71
- Para la variable *Propuesta de actividades de aplicación en problemas,* las 14 afirmaciones iniciales se redujeron a 10, conservando el valor del coeficiente de Cronbach (α=0,89).

Como resultado de este análisis los cuatro cuestionarios iniciales con un total de 80 afirmaciones se convirtieron en uno sólo, confiable, con 60 afirmaciones.
A modo de ejemplo, se describe el *Análisis Multivariado* aplicado a la variable *Motivación* para la Unidad Curricular *Matrices.*
Las siete afirmaciones del cuestionario relacionadas con la variable Motivación son las siguientes:

1 →Me sentí motivado a utilizar el material didáctico que se evalúa en esta unidad

2→La forma de presentación del material de estudio fue adecuada para motivarme a seguir indagando en el tema

3 →Sentí interés en realizar las propuestas de demostraciones teóricas

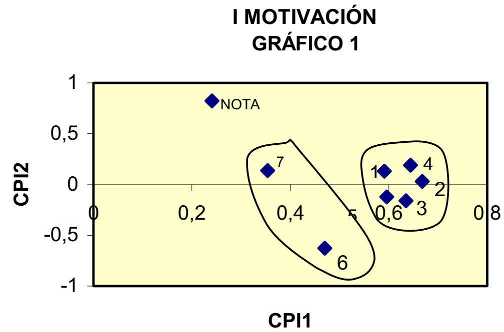
4 →Sentí placer al culminar una demostración propuesta

5 →Me sentí motivado a aplicar los conocimientos adquiridos en problemas de mi área de estudio

6 →Lo s problemas introductorios me motivaron el estudio de la unidad

7 →Volví a intentar realizar los ejercicios que no pude hacer en un primer intento

Del Análisis Multivariado realizado, el cual resume la opinión de los alumnos acerca de las 7 afirmaciones del cuestionario y la Nota (rendimiento académico), se seleccionan tres Componentes Principales que explican el 59% de la variabilidad total. La primera componente explica aspectos más importantes que la segunda y la tercera.
La simbología que se utiliza es: primera Componente Principal : CPI1 , segunda Componente Principal : CPI2 , tercera Componente Principal : CPI3.
Los coeficientes de correlación de Pearson obtenidos para *la primera y la segunda* componente principal se visualizan en el gráfico 1:



e indican el grado de asociación lineal entre cada una de dichas componentes y los puntajes asignados a las siete afirmaciones del cuestionario y la nota.

El gráfico 1 permite visualizar que la primera Componente Principal, CPI1, separa los alumnos que se sintieron motivados a utilizar el material didáctico de aquellos que no.

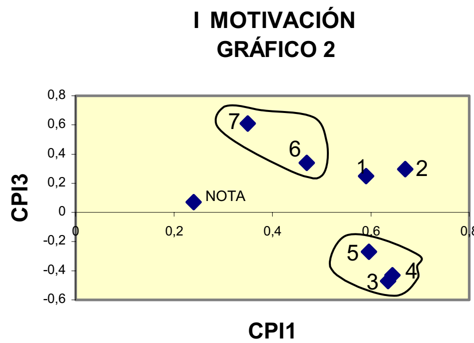
CPI1 está asociada con las afirmaciones 1, 2, 3, 4 y 5, mientras que no lo está con las afirmaciones 6 y 7 ni con la nota. Se puede observar lo siguiente:

- Los alumnos en general, se sintieron motivados a utilizar el material didáctico que se evalúa en esta unidad (af. 1)
- La forma de presentación del material de estudio fue adecuado para motivar a los alumnos a seguir indagando en el tema (af. 2)
- Los alumnos manifiestan que sintieron interés en realizar las propuestas de demostraciones teóricas (af. 3)
- Dicen los alumnos que sintieron placer al culminar una demostración propuesta (af. 4)
- Los alumnos se sintieron motivados a aplicar los conocimientos adquiridos en problemas de su área de estudio (af. 5)

En cambio:

- Los alumnos manifiestan que no se sintieron motivados por el problema introductorio para el estudio de la unidad (af. 6)
- Los alumnos que volvieron a intentar realizar los ejercicios que no pudieron hacer en un primer intento, dicen que no se sintieron motivados por el material (af. 7)
- La componente CPI1 no está asociada con la nota, lo que estaría indicando que los alumnos motivados obtuvieron puntajes altos y bajos en el examen.
- Según la segunda Componente Principal, CPI2, los alumnos con alto puntaje no se sintieron motivados por el problema introductorio (af. 6). Esto estaría indicando que no se reflexiona sobre el mismo.

Los coeficientes de correlación de Pearson obtenidos para *la primera y la tercera* componente principal se visualizan en el gráfico 2:



indicando el grado de asociación lineal entre cada una de dichas componentes y los puntajes asignados a las siete afirmaciones del cuestionario y la Nota.

Según la tercera Componente Principal CPI3, los alumnos con alta motivación por los problemas introductorios (af. 6) y que perseveran en realizar ejercicios que no logran resolver en un primer intento (af. 7), no se sintieron motivados por las propuestas de demostraciones teóricas (afirmaciones 3 y 4) y por la aplicación de los conocimientos adquiridos en problemas del área de estudio (af. 5). Esto estaría indicando que se tiende a la resolución mecánica de ejercicios.

Los gráficos correspondientes a las restantes ocho variables didácticas del cuestionario se analizaron en forma similar.

Conclusiones

Como resultado del análisis estadístico multivariado realizado a cada una de las nueve variables didácticas del cuestionario podemos destacar:

♦ No existe, en general, relación entre la nota obtenida en el examen y la consideración de la propia compresión, *lo cual indicaría que los alumnos fallan en los procesos de metacognición.*

♦ Los alumnos con mayor nota en el examen, parece que no se sintieron motivados por el problema introductorio. *Esto estaría indicando que el problema introductorio de la unidad es de utilidad para aquellos alumnos con menor agilidad en el pensamiento matemático.* Aparentemente, los que no tienen dificultad no se detienen a reflexionar sobre el mismo.

♦ Los alumnos con alto puntaje manifiestan que tuvieron dificultad en la comprensión de la simbología. *Esto indicaría la necesidad de hacer más aclaraciones sobre la simbología utilizada.*

♦ En general los alumnos no se detienen a reflexionar sobre los contenidos teóricos. *Esto indicaría la conveniencia de proponer ejercicios y problemas que induzcan a un pensamiento reflexivo y que demanden procesos de justificación.*

♦ Los alumnos que perseveran en realizar ejercicios que no logran resolver en un primer intento, manifiestan que no se sintieron motivados por las propuestas de demostraciones teóricas. *Esto estaría señalando que se tiende a la resolución mecánica de ejercicios, sin fundamentación teórica.* Nuevamente se potencia la necesidad de aumentar la presencia de los requisitos favorecedores de un aprendizaje reflexivo que tienda a toda la comprensión de los elementos que conforman un concepto.

♦ Los alumnos admiten que no tienen conocimientos previos de teoría matemática, y tienen dificultad en las demostraciones de propuestas teóricas y en las fundamentaciones teóricas. *Esto hace al perfil de los ingresantes y a la necesidad de una mayor vinculación con la enseñanza media.*

♦ Los alumnos opinan en general lo siguiente : el material los animó a trabajar en grupo, el aspecto general del material es atractivo, el diseño del texto ayuda a captar el orden lógico conceptual, y recomendarían el material porque les resultó útil para comprender los temas del programa.

Algunas Reflexiones de Prospectiva

En prospectiva se buscará avanzar en dos objetivos:

1º) Perfeccionar los materiales curriculares que se utilizan en la asignaturas de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas, como facilitadores de un aprendizaje significativo y autónomo.
2º) Perfeccionar y estandarizar un instrumento de evaluación de materiales curriculares aplicable a las distintas áreas de la Matemática Básica.

Bibliografía

Anido M. (2004).Los materiales curriculares en el desarrollo de las competencias de los estudiantes de Matemática. *Publicación de las II Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria, Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Alicante*

Johnson, D. (1998). *Métodos multivariados aplicados al análisis de datos.* México: Ed. International Thomson Editores.

Parcerisa Aran, A. (1996).*Materiales curriculares.* Barcelona : Ed. Graó

Parcerisa, A. (1994). Decisiones sobre evaluación. *Cuadernos de Pedagogía* 223, 45-49.

Martínez, J. (1992) ¿Cómo analizar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía* 203, 14-18.

Santos R. (1999). Cronbach Alpha: A Tool for Assessing the Reliability of Scales. *Journal of Extension*, 37- 2.

Santos, M.(1991).Cómo evaluar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía*, 29-31.

Stufflebeam,D. y Shinkfield, A (1987). Evaluación sistemática. Guía teórico y práctica. *Temas de Educación 4*. Madrid Paidós / MEC.

LA INTEGRAL DEFINIDA Y EL CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIONES PLANAS: UN RECURSO EN LA WEB.

Adriana Engler
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral - Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar
Pensamiento matemático avanzado/Medio-Superior

Resumen

La enseñanza de los principios del Cálculo Integral es una tarea difícil. En general el estudiante aprende a calcular mecánicamente primitivas y resuelve problemas sencillos pero surgen grandes dificultades al ingresar en el campo disciplinar y alcanzar a comprender satisfactoriamente los conceptos y métodos del pensamiento matemático.

Este trabajo que tiene como objetivo aportar un recurso multimedial de apoyo para el estudio de la Integral Definida y su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas para estudiantes de carreras universitarias de disciplinas científicas pero no matemáticas, con el fin de lograr mejorar el aprendizaje. La obra está desarrollada en HTML y se ofrece a través del portal web de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral (http://www.fca.unl.edu.ar).

Consideraciones generales

Las Universidades tienen la tarea de formar profesionales creativos, capaces de impulsar innovaciones tecnológicas y asumir un papel activo en el desarrollo socioeconómico de un país. La formación de un profesional de perfil amplio exige que el egresado universitario domine las bases de los conocimientos científicos y adquiera competencias que le permitan incrementar y renovar permanentemente su bagaje científico y profesional.

La enseñanza no puede quedar aislada de la realidad en la que surge, dado que es un acto social, histórico y cultural orientado a valores y en el cual se involucran seres humanos. Para lograr que la escolarización resulte significativa, se debe aspirar a la creación de contextos sociales donde el aprendizaje sea activo, así como alentar la prueba, la búsqueda de caminos alternativos, el análisis crítico de los errores, el contraste de hipótesis y la investigación.

Los alumnos deben lograr desarrollar hábitos mentales que les permitan ser protagonistas del aprendizaje y del conocimiento, y no simplemente alumnos informados.

Por estas razones, es absolutamente indispensable que el docente se proponga:

- enseñar a aprender,
- lograr un conocimiento bien estructurado de modo que, a partir de pocas informaciones o representaciones sólidamente asimiladas, el alumno pueda recrear el conocimiento o acceder fácilmente a él,
- enseñar a pensar y a resolver problemas, a fin de alcanzar un pensamiento reflexivo, crítico y creativo.

La educación no puede transcurrir sólo en el ámbito escolar y mucho menos sólo en el aula. Para que el aprendizaje sea eficaz se debe crear en el estudiante la necesidad de aprender y generar un ambiente donde se posibilite y se motive la exploración del significado personal de los conceptos. Debido a la presencia de cambios tan vertiginosos en las diferentes disciplinas científicas y tecnológicas, se torna necesaria una redefinición de la currícula matemática en cada carrera y una adecuada planificación de cada unidad didáctica particular.

No cabe duda de que los avances tecnológicos, si resultan útiles, deben ser adoptados a los fines educativos y adaptados a la filosofía de la educación, así como a sus necesidades y derivaciones pedagógicas y didácticas. Muchas son las cuestiones que surgen respecto de los métodos y las innovaciones que acompañan la formación del alumno.

No podemos desconocer que los docentes jugamos un papel protagónico en este proceso de transformación de la educación y en el descubrimiento constante de nuevas formas de enseñar. La informática juega un papel muy importante en la búsqueda de estas nuevas formas, puesto que resulta un instrumento facilitador y motivador del proceso de enseñanza y permite considerar la singularidad del alumno en su ascenso cognoscitivo. Incorporarlo para favorecer y mejorar cualitativamente el aprendizaje implica redefinir el recurso técnico como un recurso didáctico-pedagógico, evitando así que resulte un elemento de distorsión.

Las actitudes con las que el alumno enfrenta el proceso de aprendizaje, intervienen decididamente en la adquisición de los conocimientos y son factores que influyen notoriamente en los resultados de tal proceso. El alumno desarrollará actitudes positivas o negativas hacia determinada asignatura, no sólo en función de su contenido, sino también en función del ambiente que se genere durante el proceso de intervención, y de las actividades que se propongan.

Teniendo en cuenta lo expresado y convencida de que la enseñanza de los principios del Cálculo es una tarea difícil y complicada se origina este trabajo que tiene como objetivo aportar un recurso multimedial de apoyo para el estudio de la Integral Definida y su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas para estudiantes de carreras universitarias de disciplinas científicas pero no matemáticas, con el fin de lograr mejorar el aprendizaje.

Características y diseño de la obra

El desarrollo de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo con las especificidades observadas en cada caso está abriendo la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de estos temas.

El tratamiento tradicional impide la comprensión de los conceptos fundamentales y una aplicación creativa. Las nuevas tendencias son un aporte para solucionar el problema de dar significado a los contenidos aprendidos. Para la mayoría de los alumnos la noción de Integral Definida desarrollada en forma abstracta y con la perfección y rigurosidad matemática no alcanza a tener un verdadero significado, y en la mayoría de los casos no entienden el por qué del enorme esfuerzo deductivo al que se los somete, en especial para aquellos que serán usuarios de la matemática y no futuros matemáticos. Más allá del cálculo de áreas "puras" no logran reconocer cuándo el cálculo de una magnitud requiere de una integración.

El enfoque propuesto en esta obra para desarrollar los contenidos del cálculo integral en relación con el cálculo de áreas es primordialmente gráfico e intuitivo. Los estudiantes construyen desde el principio una concepción de integral como un número que da la medida de un área, de una cantidad acumulada o de efectos de cambio. Se reconstruye didácticamente el desarrollo histórico de la integral definida partiendo de la aproximación por sumas y se trabaja además con razones de cambio para establecer la relación existente entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. Se busca establecer una dinámica de trabajo más activa y más próxima al quehacer matemático en la fase de elaboración de una teoría donde interviene la intuición, la improvisación, las analogías, las pruebas, las aproximaciones y donde los propios estudiantes participan en la construcción de las concepciones.

El guión se diseñó teniendo en cuenta básicamente esta secuencia: problemas de introducción, desafíos a resolver, construcción y formalización de la concepción y, ejercicios y problemas de aplicación. Las definiciones, propiedades y teoremas se establecen formalmente después de haber sido abordados desde lo informal y la intuición. Las demostraciones son motivadas y cuidadosamente explicadas para que puedan ser comprendidas. Al establecerse una propiedad o teorema sin demostración se motiva a la discusión mediante gráficos, ejemplos e interrogantes que conducen a un análisis de la situación planteada. Se otorga importancia relevante a los modelos matemáticos de las aplicaciones de la vida cotidiana y la profesional. Se tiene en cuenta que no se beneficia al estudiante si sólo se le enseña cómo manejar los símbolos matemáticos del cálculo. El estudiante necesita manejar con facilidad el lenguaje del cálculo por entender su utilidad como un medio para resolver problemas de administración, economía, física, ciencias naturales y ciencias sociales.

La propuesta didáctica busca combinar lo gráfico, lo numérico y lo algebraico y tiende a poner en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas de cálculo sin la comprensión de dichos conceptos. Se presentan los conceptos matemáticos de integral definida en su doble aspecto de *objetos de conocimiento* y de *instrumentos de conocimiento*. Su desarrollo se basa en considerar que el aprendizaje del concepto de integral definida es independiente del aprendizaje de los conceptos relacionados con la derivada.

Se estudia la integral definida independientemente de la derivación y se evita así que ellos sólo interpreten la integración como operación inversa de la derivación y se logra descubrir el teorema fundamental del cálculo como la herramienta que genera una relación casi inesperada entre las estructuras matemáticas de derivación e integración aparentemente independientes.

En el diseño y desarrollo del producto multimedial se toman en consideración, básicamente, los siguientes elementos conceptuales:

- La necesidad de superar el modelo educativo tradicional, caracterizado por una presentación dogmática y verbalista de “contenidos”.
- La caracterización del proceso de aprendizaje como un proceso de ascenso gradual en el nivel de abstracción de los conceptos científicos.
- La relevancia de los procesos de desantropomorfización y desustancialización que se operan en los conceptos al pasar del lenguaje natural –expresión del sentido común– al ámbito científico.

Al final del artículo se incluye el mapa de vínculos hipertextuales donde se destacan las principales conexiones entre los diferentes contenidos. Sólo se incluyen los principales links y se enfatiza la secuencia eje de esta obra:

- Necesidad del concepto Integral Definida.
- Definición de Integral Definida.
- Teorema Fundamental del Cálculo.
- Cálculo de áreas.
- Aplicaciones a modelos físicos, biológicos, económicos, químicos, técnicos y sociales etc.

En la obra además se sugiere la consulta a sitios en la WEB donde aparecen interesantes animaciones a fin de motivar el aprendizaje.

A modo de ejemplo se muestra la página llamada "Pantalla Principal" en el mapa de vínculos hipertextuales. A partir de ella se pueden abordar todos los contenidos intentando motivar así el aprendizaje autónomo.

Integral Definida

Su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas

¿Por qué estudiamos la Integral Definida?	
Un poco de Historia: - El nacimiento del Cálculo - Los contribuyentes al Cálculo	Objetivos Contenidos Bibliografía

Para comenzar nuestro trabajo analicemos alguna de las dos situaciones planteadas

EL PROBLEMA DEL ÁREA **¿Cómo calculamos un área?**	**EL PROBLEMA DE LA DISTANCIA** **¿Cómo se mide la distancia recorrida por un objeto?**
¿Qué conclusiones obtiene después de trabajar, analizar y discutir cada uno de los planteos?	

El por qué de desarrollar la obra en HTML

Internet es la red mundial de interconexión de computadoras. Dada su avanzada tecnología, durante años se ha considerado a Internet como algo duro de aprender, difícil de utilizar y de mantener o promover.

La World Wide Web ha hecho que todo esto cambie. La "Web" se convirtió rápidamente en la interfaz gráfica de usuario para Internet, y no tiene ninguna competencia por parte de otros servicios de información interactiva en cuanto a términos de estética, flexibilidad y facilidad de uso, disponibilidad de datos y, costos de desarrollo, mantenimiento y acceso. Esta capacidad y potencia informativa se basa en el hipertexto. Hipertexto es la capacidad de vincular términos y palabras clave con otros textos conexos (tanto conceptual como "físicamente"). Desde el punto de vista educativo, el hipertexto posibilita acercar a los usuarios una organización de los contenidos similar a los mapas o esquemas mentales posibilitando así superar las limitantes de los textos tradicionales (linealidad, secuencialidad única).

Pero un página web no es simplemente hipertexto. Se podría decir que la World Wide Web es la madre de todos los sistemas de hipertexto. Esto se debe a que uno no está limitado a establecer vínculos al propio texto que ha creado. Ni siquiera está limitado a establecer vínculos a documentos de su propia computadora. Tiene a su disposición cualquier documento existente en la World Wide Web, lo cual posibilita al usuario acceder a informaciones desarrolladas por otros especialistas en el tema y complementar el trabajo propio. Además, el hipertexto posibilita la interconexión de todo tipo de información multimedia: textos, imágenes, sonidos, videos, animaciones, con lo cual se potencia la presentación de la información al posibilitar seleccionar el medio o canal más adecuado para transmitir el concepto o ejemplo.

El HTML no es un verdadero lenguaje de programación, es un sistema para el formateo de información que permite integrar, en un mismo documento, objetos de distinta naturaleza (multimedia). La combinación de la capacidad multimedia junto al hipertexto soportado por la Web ha resultado ser una fórmula de éxito debido a las siguientes ventajas no compartidas por otros sistemas multimediales: difusión, permanencia de los contenidos, capacidad de actualización, interactividad, atención personalizada y costo de desarrollo y de difusión mínimo.

El presente producto se ofrece a la comunidad mundial a través del portal web de la FCA (UNL): http://fca.unl.edu.ar , desde la sección "Material de Apoyo" para los

"Alumnos" de Carreras de Grado. También se podrá bajar íntegramente a fin de ser consultado sin necesidad de conexión permanente.

Reflexiones

Al plantear esta propuesta pretendí generar un complemento para la enseñanza de un contenido muy importante en el vasto desarrollo del Cálculo Integral, la Integral Definida y su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas. Con ella espero despertar en los estudiantes el interés por el tema y la necesidad de participar activamente en su aprendizaje. Busco lograr la construcción del conocimiento con el apoyo de la herramienta informática en su papel de recurso didáctico-pedagógico.

Bibliografía

Anton, H. (1991). *Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1.* México: Limusa.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Dovady, R.; Moreno, L.; Gómez, P., (Eds). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp.97-140). Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arya, J. y Larner, R. (1992). *Matemáticas aplicadas a la Administración. Economía, Ciencias Biológicas y Sociales.* Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.

Baum, A.; Milles, S. y Schultz, H. (1992). *Cálculo Aplicado.* Méjico: Limusa. Grupo Noriega Editores.

Budnick, F. (1997). *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales, Tercera Edición.* Méjico: Mc. Graw Hill.

Farfán Márquez, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Goldstein, L.; Lay, D. y Schneider, D. (1990). *Cálculo y sus Aplicaciones. Cuarta Edición.* Méjico: Prentice Hall.

Hughes–Hallet, D.; Gleason, A.; et al. (2001). *Cálculo. Segunda Edición.* Méjico: CECSA.

Kilpatrick J.; Gomez, P.; Rico, L. (1995). *Educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Larson, R.; Hostetler, R.; Edwards, B. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica, Volumen 1. Quinta Edición.* Méjico: Mc. Graw Hill.

Leithold, L. (1999). *El Cálculo, 7 ed.* Méjico: Oxford University Press.

Lial, M. y Hungerford, T. (2000). *Matemáticas para Administración y Economía.* Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.

Litwin, E. (compiladora). (1995). *Tecnología Educativa. Política, historia, propuestas.* Buenos Aires: Paidós.

Perero, M., (1994). *Historia e Historias de Matemáticas.* Méjico: Grupo Editorial Iberoemérica.

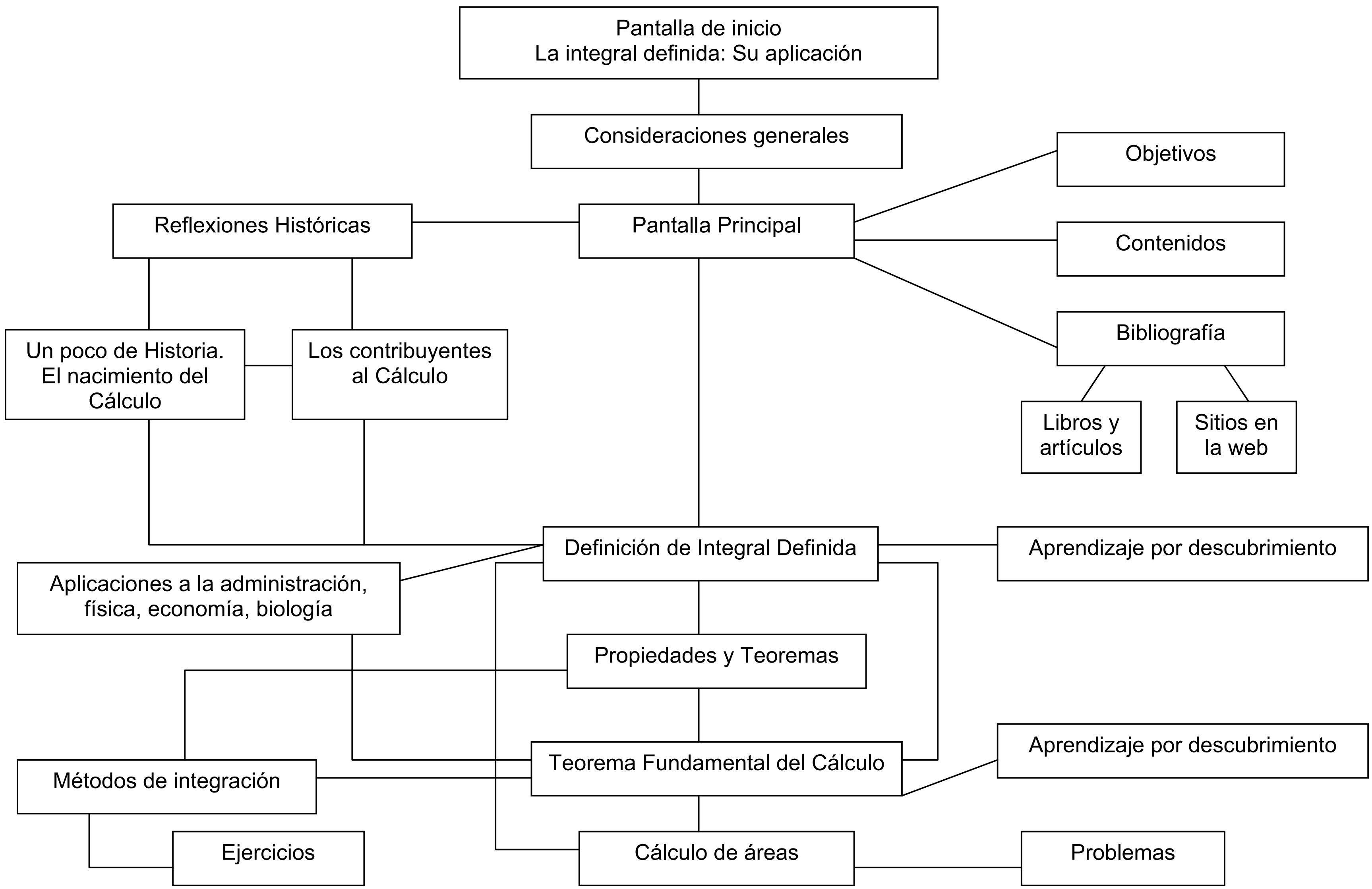
Purcell, E. y Varberg, D. (1993). *Cálculo Diferencial e Integral. Sexta Edición.* Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.

Purcell, E. y Varberg, D. (1995). *Cálculo con Geometría Analítica.* Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.

Stewart, J. (2001). *Cálculo, Conceptos y contextos.* México: International Thomson Editores.

Thomas, G. y Finney, R. (1998). *Cálculo, una variable.* Méjico: Pearson. Addison Wesley Longman.

Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo Integral.* Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.


Pantalla de inicio
La integral definida: Su aplicación
Consideraciones generales
Pantalla Principal
Objetivos
Contenidos
Bibliografía
Libros y artículos
Sitios en la web
Reflexiones Históricas
Un poco de Historia. El nacimiento del Cálculo
Los contribuyentes al Cálculo
Definición de Integral Definida
Aprendizaje por descubrimiento
Aplicaciones a la administración, física, economía, biología
Propiedades y Teoremas
Teorema Fundamental del Cálculo
Aprendizaje por descubrimiento
Métodos de integración
Ejercicios
Cálculo de áreas
Problemas

O USO DO SOFTWARE MAPLE NO ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Carmen Teresa Kaiber, Sandra Pacheco Renz
Universidade Luterana do Brasil – Brasil
kaiber@ulbra.br, sp_renz@yahoo.com.br
Campo de Investigación: Visualización

RESUMO

Este artigo apresenta resultados parciais do projeto de pesquisa "Investigando o potencial de utilização do software Maple no ensino do Cálculo Diferencial e Integral" que objetiva investigar possibilidades de utilização do referido software no desenvolvimento teórico e prático do Cálculo Diferencial e Integral. Metodologicamente, o projeto fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática que, segundo Artigue (1995), se caracteriza por ser um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, no que diz respeito à concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino.

Palavras-chave: ensino do Cálculo, software Maple.

INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, a exploração de recursos computacionais em sala de aula faz-se necessária para que a educação cumpra seu papel de preparar o indivíduo para a vida social e para o mundo do trabalho, em um contexto onde a tecnologia se faz cada vez mais presente. Segundo Taneja (1997, p.14), "O computador não deve ser inserido na educação como uma máquina de ensinar, deve ser usado como uma informatização construcionista que permita reflexão e construção de idéias a partir da relação professor, computador e aluno." Quando o aluno interage com o computador está manipulando conceitos e isso contribui para o seu desenvolvimento mental, pois forma conceitos da mesma maneira que os adquire quando interage com objetos do mundo. As novas tecnologias oferecem recursos em que a representação de processos abstratos passa a ter um caráter dinâmico, com reflexos nos processos cognitivos e nas aprendizagens dos alunos. Nogueira e Andrade (2004, p.25) ponderam que não se trata apenas da inserção da informática nos currículos escolares, e sim da alteração dos pressupostos do processo educativo, de forma a possibilitar a construção e a elaboração de conhecimentos a partir das características específicas das novas tecnologias computacionais. Em relação ao ensino da Matemática, metodologias que incorporam tais recursos ao currículo estão sendo propostas e é com este intuito está sendo desenvolvido o projeto "Investigando o potencial de utilização do software Maple no ensino do Cálculo Diferencial e Integral" que objetiva investigar e analisar a utilização do *software* Maple no contexto da sala de aula, como ferramenta para desenvolver aspectos teóricos e práticos do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo, criando e organizando atividades que integrem aspectos teóricos e práticos, permitindo uma análise crítica e qualitativa dos conceitos matemáticos.

Metodologicamente, o projeto fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática que, segundo Artigue (1995), como metodologia de investigação, caracteriza-se por ser um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. A metodologia da Engenharia Didática abrange uma distinção temporal em seu processo experimental, composta de quatro fases: análise preliminar, concepção e análise a priori das situações didáticas, experimentação e fase de análise a posteriori e avaliação.

Análise preliminar

O Cálculo Diferencial e Integral surgiu no final do século XVII, a partir dos trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Diversos problemas que ocupavam os matemáticos da época, como o cálculo de longitudes, áreas, volumes e centros de gravidade, determinação de máximos e mínimos e determinação da velocidade instantânea a partir da posição em cada momento e sua recíproca passaram a ter um tratamento unificado dado por Leibniz. As idéias de derivada, diferencial e integral bem como suas interpretações geométricas e físicas foram desenvolvidas rapidamente, muitas vezes associadas ao desenvolvimento da Física. O Cálculo, que no início do seu desenvolvimento tinha um caráter mais geométrico, passou a ter, no século XVIII, um caráter mais algébrico, que passou a ser a base da argumentação e obtenção de resultados (Rivaud, 1996).
Embora o cálculo tenha se desenvolvido para resolver problemas de Física, sua potência e versatilidade levaram aos mais diversos campos de estudo. A utilização dos seus conceitos fundamentais – a derivada e a integral definida – estão presentes na solução de problemas que vão desde a descrição do comportamento de partículas atômicas e a estimativa da evolução de um tumor na terapia radioativa até a determinação do trabalho necessário para mandar uma sonda espacial a outro planeta. Ambos os conceitos, de derivada e integral, são definidos por processos de limites. A noção de limite é a idéia inicial que separa o Cálculo da Matemática elementar .
No que se refere ao seu ensino, o Cálculo Diferencial e Integral, historicamente, caracteriza-se pela prevalência de processos algébricos seguidos de exercícios, via de regra, de caráter repetitivo e com pouca, ou quase nenhuma interdisciplinaridade. Aplicações a ciências como física e engenharia são apresentadas como exercícios ou em capítulos separados, às vezes parecendo algo isolado. Artigue (1995) pondera que, apesar de se poder ensinar aos estudantes a realizar cálculos de derivadas e primitivas e a resolver problemas clássicos, há grandes dificuldades para levá-los a entrar no campo do Cálculo e fazê-los alcançar uma compreensão satisfatória dos conceitos e métodos de pensamento que são o centro desse campo da Matemática. Essas dificuldades, segundo a autora, estão relacionadas à complexidade dos objetos básicos do Cálculo, à conceitualização e formalização da noção de limite e às rupturas necessárias com relação ao modo de pensamento puramente algébrico. Acrescenta-se a essas dificuldades as questões metodológicas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem já mencionadas anteriormente.
No que se refere à utilização de recursos computacionais como apoio metodológico para o ensino do Cálculo, um aspecto importante a ser considerado é a disposição de professores e alunos em utilizá-los. Nesse sentido, investigou-se essa postura junto a alunos e professores. Foram entrevistados vinte e três (23) alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III e ficou constatado que, dos alunos entrevistados, onze consideram seu conhecimento de informática regular, doze nunca utilizaram software matemático em

sala de aula, dez consideram importante utilizar um recurso computacional na disciplina, e nove não conhecem o Maple.
Quando questionados sobre como deveriam ser as aulas de Cálculo utilizando recursos computacionais, oito indicaram que deve ser na exploração dos conteúdos, quatro na apresentação de exemplos e seis na resolução de exercícios. Com relação aos professores, foram investigados quatorze docentes do Departamento de Matemática da Universidade onde o projeto se desenvolveu. Dos professores entrevistados, sete conhecem o Maple e consideram importante utilizá-lo para o desenvolvimento do conteúdo. Acreditam que o interesse dos alunos pelas aulas seria superior se fosse utilizado um software. Quanto à questão aprovação e reprovação, seis dos professores entrevistados acreditam que a aprovação dos alunos seria superior, caso fosse utilizado um software em aula enquanto que quatro indicam que a aprovação seria igual e quatro não opinaram a respeito. A opinião dos professores se dividiu com relação à forma como a aula deveria ser organizada, entre uma aula expositiva e prática, utilizando o software para desenvolver o conteúdo com a participação do aluno que refaz no software os exemplos citados pelo professor e uma aula igualmente expositiva e prática, porém, utilizando o software para desenvolver o conteúdo com a participação do aluno que constrói seus próprios exemplos.

Concepção e análise a priori das situações didáticas

As aulas de caráter teórico-prático foram desenvolvidas no laboratório de informática, alternando discussões teóricas, pesquisa bibliográfica e o trabalho com o software. Foram propostas atividades nas quais era solicitado que o aluno, primeiramente, apresentasse uma proposta de solução, ou seja, quais as estratégias que seriam utilizadas, em que momento e de que forma seria utilizado o software e como seria possível validar o resultado obtido, passando, a seguir, a resolver o problema. Foram realizados 17 encontros de quatro horas-aula sendo que 10 deles ocorreram no laboratório de informática. Os encontros, a produção e o desempenho dos alunos foram avaliados continuamente através da observação do professor e registrados em um diário de campo. O instrumento utilizado para avaliar a proposta de trabalho junto aos alunos foi um questionário aplicado no término do projeto. As situações didáticas, sob a forma de atividades, são apresentadas a seguir.

Aplicação da Seqüência Didática

A fase da experimentação ou aplicação da seqüência didática é uma etapa importante do processo porque, nessa fase, são acompanhadas, observadas e registradas a postura, atitude e tomada de decisão dos alunos em relação à realização das tarefas propostas. O professor acompanha o trabalho do aluno, faz indagações, refuta, argumenta e registra os fatos relevantes em um diário de campo que é retomado para complementação logo após o desenvolvimento da sessão. As tarefas desenvolvidas pelos alunos, as soluções apresentadas, as estratégias desenvolvidas também são acompanhadas através da análise das escritas dos alunos. Esses registros são de fundamental importância para garantir a proximidade dos resultados com a análise teórica e permitir uma análise posterior de qualidade. A seguir, são apresentados exemplos de problemas propostos com os comentários pertinentes.

Problema : Se f(x)=$\frac{1}{x^2}$, encontre $\int_1^t f(x)\,dx$ quando t=1000, 2000, 3000, 4000 e 5000. O que está acontecendo? Calcule a integral analiticamente quando t tende a mais infinito e compare os resultados.

Objetivo: Investigar o comportamento da integral de uma função a partir de um conjunto de valores. Analisar a convergência ou divergência de uma integral imprópria.

Solução apresentada pelos alunos (evolução da atividade):

A primeira idéia apresentada pelos alunos foi a construção do gráfico da função f(x)=$\frac{1}{x^2}$ em um intervalo qualquer. Na primeira tentativa de construção surgiu na tela um gráfico com linhas sobre o eixo das abscissas e das ordenadas, conforme figura 1-a. As manifestações foram imediatas: “Por que está acontecendo isso? Está errado?”, “O meu não deu certo!...” Após uma breve discussão foi conjecturado que, certamente, devia-se ao fato da falta de limitação no eixo das ordenadas.

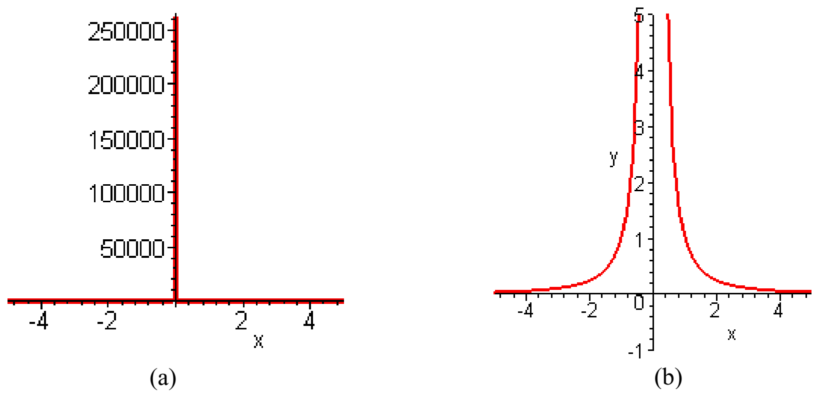


Figura 1 – Construção das soluções apresentadas pelos alunos

Ajustado o gráfico conforme a figura 1-b, partiu-se para a resolução do problema da integral para diferentes valores de t, conforme figura 2.

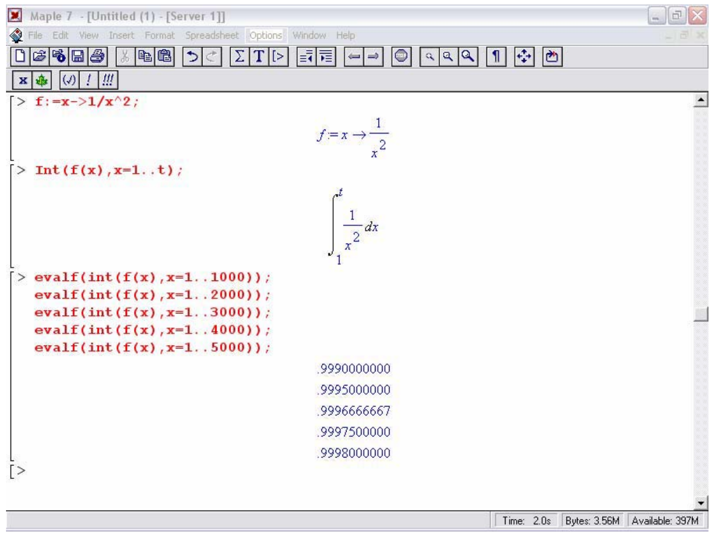


Figura 2 – Construção da solução apresentada pelos alunos

Examinando os resultados surgiram os seguintes comentários "O limite da integral dessa função, de 1 a t, com t tendendo a infinito é 1". "O resultado está tendendo a 1, portanto, a integral converge". "A integral está se estabilizando, tendendo a 0,9998000. A integral converge para 1". Quando solicitados a encontrar a solução analítica, alguns solucionaram utilizando o software, outros lápis e papel, confrontando os resultados e concluindo que a integral convergia.

Retornou-se ao gráfico discutindo qual o significado do valor encontrado em termos de representação geométrica. Na seqüência trabalhou-se a função $f(x) = \frac{1}{x}$ comparando-se e discutindo os resultados.

A partir da construção gráfica, da análise dos resultados e da verificação analítica, o conceito de integral imprópria foi sendo construído. Ao longo do processo de aprendizagem, surgiram fatos novos que envolveram outros aspectos, que não o solicitado pelo professor, o que propiciou a reflexão e a discussão entre os alunos.

Análise a posteriori e validação

Com a utilização do Maple como recurso na disciplina de Cálculo, constatou-se grande interesse e uma significativa participação dos alunos. Os trabalhos foram realizados em pequenos grupos, o que propiciou a investigação das atividades, a análise do software e o questionamento entre os envolvidos. Foi possível observar que, no primeiro contato com o software, houve a idéia de que todos os problemas matemáticos estariam resolvidos, pois o software resolvia limite, derivada e integral. Quando solicitados a apresentarem uma proposta de solução para as atividades, houve uma resistência inicial. Foram comuns perguntas como "O que eu tenho que fazer?", "Que comandos preciso usar?". Aos poucos, foi se atingindo o amadurecimento dos alunos em relação à proposta de trabalho.

O estudo das integrais impróprias permitiu que a potencialidade do software fosse descoberta. Ao fazer uma análise gráfica e perceber que o software apresentava um

resultado diferente do que era conhecido, a aprendizagem passou a ocorrer no domínio do processo matemático e não na mecanização do processo ou exclusivamente na solução algébrica. Surgiu a preocupação com a definição dos conceitos e com a maneira de expressar oralmente esses conceitos.
Cabe ressaltar que essas experiências foram possíveis devido à flexibilidade do Maple e através do enfoque não analítico adotado. Percebeu-se que o conhecimento foi construído a partir do envolvimento na solução dos problemas propostos, nas discussões realizadas nos pequenos e no grande grupo e através das ações e intervenções do professor. O ambiente informatizado foi o diferencial, pois possibilitou um substrato de ação que a aula convencional não propicia.

CONCLUSÃO

O desenvolvimento do projeto mostrou que explorar softwares matemáticos, identificando o potencial de utilização dos mesmos no ensino da Matemática, é um trabalho fascinante e promissor. Levar esse trabalho para a sala de aula motiva os alunos, possibilita um trabalho autônomo, aumentando o interesse e a participação, o que leva a uma melhor compreensão dos conteúdos.
Contudo, incorporar tecnologia às aulas de Matemática vai muito além de proporcionar os instrumentos tecnológicos aos estudantes. A aprendizagem deve desenvolver-se em um ambiente apropriado e em situações que favoreçam a construção sólida dos conhecimentos, transformando a maneira como se resolvem problemas teóricos e práticos, como se faz e como se percebe a Matemática (Silva, 2003). Cabe ressaltar que a continuidade das pesquisas envolvendo ferramentas computacionais é de grande importância, pois se constitui em estudo atual e necessário não só em termos de aplicações específicas, mas como base para a discussão dos efeitos da sua utilização no ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995) Ingeniería didáctica en educación matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Nogueira, C. y Andrade, D.(2004). Você quer discutir com o computador. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 16, maio.

Rivaud, J. (1996) Cálculo al Análisis: Desarrollo del concepto de función. In: Trigo, L. M. e Sánchez, E. Perspectivas en Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A,. p.117-133.

Silva, C. (2003). Informática e Educação Matemática. In: V Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy. Memorias. Buenos Aires: Edumat.

Taneja, I. (1997) MAPLE V – Uma Abordagem Computacional no Ensino de Cálculo. Florianópolis: Editora da UFSC.

GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS : UN ACERCAMIENTO CON TECNOLOGÍA DIGITAL

Edison De Faria Campos[1]
Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Campo de Investigación :Pensamiento geométrico; Nivel Educativo: Medio y Superior

Resumen

En este curso corto utilizamos distintas aplicaciones de geometría dinámica para realizar construcciones geométricas en el modelo de Poincaré para geometría hiperbólica con el propósito de investigar y determinar la naturaleza de algunos teoremas de geometría para la enseñanza secundaria y superior. De esta forma clasificamos algunos de los teoremas de geometría plana como neutrales, estrictamente euclidianas o estrictamente hiperbólicos.

Introducción

La National Council of Teachers of Mathematics en los estándares de evaluación y currículo para la enseñanza de las matemáticas en la enseñanza media propone como objetivo enseñar la geometría para "desarrollar la comprensión de un sistema axiomático mediante la investigación y la comparación de geometrías no euclidianas con la euclidiana" (NCTM, 1989). Por un lado, el carácter extraño y no intuitivo de las geometrías no euclidianas ayudan a los estudiantes a percibir la diferencia entre definiciones y teoremas usados en geometría. Por otro lado, descripciones no euclidianas del mundo físico, utilizadas por ejemplo en la teoría de la relatividad y en las investigaciones sobre fenómenos ópticos y sobre la propagación de ondas, se revelaron bastante adecuadas.
En este curso analizamos algunos teoremas en geometría plana para determinar si dependen o no del quinto postulado de Euclides. La geometría que se desarrolla sin recurrir a este postulado se conoce como neutral y los teoremas neutrales son válidos tanto en la geometría euclidiana como en las no euclidianas. Los teoremas que utilizan el quinto postulado – directa o indirectamente - son estrictamente euclidianos y los que usan una negación del postulado en mención son estrictamente no euclidianos (hiperbólicos o elípticos). Utilizamos algunos programas de geometría dinámica que nos permitieron conjeturar acerca de la naturaleza de los teoremas que analizados. También determinamos los equivalentes a las leyes de seno y coseno para triángulos hiperbólicos y utilizamos la métrica de Poincaré para calcular distancias entre puntos del plano hiperbólico (Coxeter, 1988; Pedoe, 1988; Kimberling, 2003).

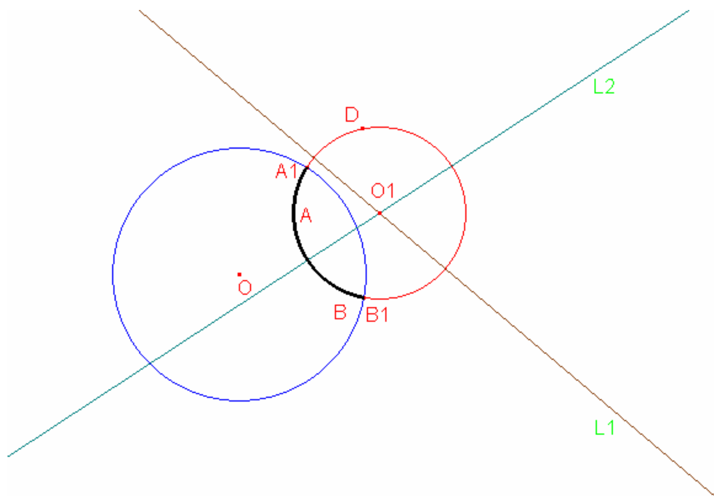
Para la clasificación de los teoremas utilizamos modelos. Para crear un modelo de un sistema axiomático, tenemos que encontrar una interpretación para los objetos del sistema (en nuestro caso de la geometría). Así un modelo es euclidiano si el quinto postulado es verdadero en él. Si un teorema A es verdadero en un modelo de geometría euclidiana y verdadero en un modelo de geometría hiperbólica entonces podemos concluir que el teorema es neutral. Si un teorema B es verdadero en un modelo de geometría euclidiana y falso en un modelo de geometría hiperbólica entonces el teorema

[1] Asociación de Matemática Educativa, ASOMED
Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, CIMM

es estrictamente euclidiano. Si un teorema C es falso en un modelo de geometría euclidiana y verdadero en un modelo de geometría hiperbólica entonces es estrictamente hiperbólico. Existen varios modelos para la geometría hiperbólica, siendo más conocido y utilizado el que propuso el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912).

El disco de Poincaré

La inversión de un punto P en un círculo C centrado en O con radio r, $°(O,r)$, es el punto Q en la línea OP tal que $\overline{OP}.\overline{OQ} = r^2$ si $P \neq O$. Dado el círculo $°(O,r)$ (disco de Poincaré), sean A y B dos puntos distintos en el interior del círculo. Sean D la inversa de A en $°(O,r)$, L_1 mediatriz (euclidiana) del segmento AD y L_2 mediatriz (euclidiana) del segmento AB. Sean $O_1 = L_1 \cap L_2$, C_1 el círculo de radio $r_1 = \overline{O_1A}$ centrado en O_1, A_1, B_1 puntos de intersección de C con C_1. Entonces la recta hiperbólica por A y B es el arco $\widehat{A_1ABB_1}$.



Existen dos tipos de rectas en este modelo:

1. Todo diámetro del disco de Poincaré, excluyendo los puntos que se encuentran en la frontera es una recta hiperbólica.
2. Si C_1 es un círculo euclidiano ortogonal al disco de Poincaré, entonces los puntos de C_1 que se encuentran en el interior del disco de Poincaré (arco de circunferencia) también es una recta hiperbólica.

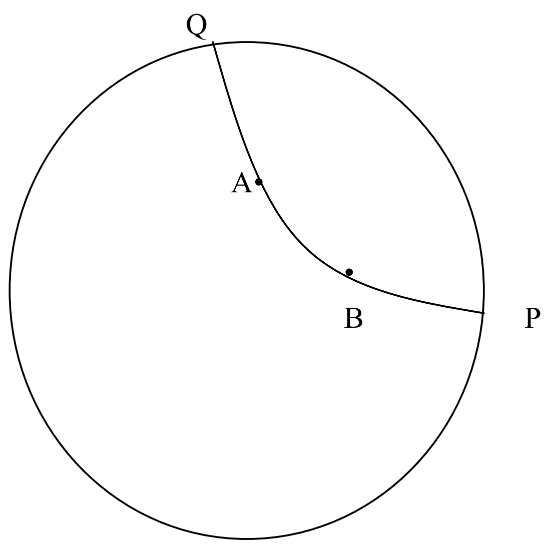
En este modelo los puntos son interpretados como aquellos puntos euclidianos que se encuentran en el disco de Poincaré. En este disco decimos que dos rectas son paralelas si ellas no poseen un punto en común. En la geometría hiperbólica reemplazamos el quinto postulado por el siguiente:

Postulado de paralelas hiperbólicas: Si L es una recta y P un punto exterior a L, entonces existen por lo menos dos rectas que pasan por P y que son paralelas a L.

En realidad, en este modelo dado una recta y un punto exterior a ella, existen infinitas rectas que pasan por el punto y que son paralelas a la recta dada. Así existen infinitas rectas que pasan por un punto exterior a una recta dada y que son paralelas a la misma.

La distancia (hiperbólica) entre los puntos A y B en el disco de Poincaré se define como:

$$d(A,B) = \left| \ln \left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \right) \left(\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \right) \right|$$



P, Q representan los puntos de intersección de la recta hiperbólica que contiene A, B y la frontera del disco de Poincaré. En realidad P y Q son puntos en el infinito. AQ, BQ, BP y AP son distancias euclidianas.

Si dos rectas hiperbólicas se cortan, el ángulo entre ellas se define como el ángulo entre las rectas euclidianas que son tangentes a las rectas hiperbólicas en el disco de Poincaré. Si las rectas son diámetros en el disco de Poincaré entonces la medida del ángulo coincide con la medida euclidiana del ángulo central formado por los diámetros. Si una de las rectas es un arco de circunferencia euclidiano, la medida del ángulo es la medida del ángulo euclidiano entre las tangentes a las rectas en el punto de intersección.

Si PQ es perpendicular a una recta hiperbólica L en el punto Q y PR es la paralela asintótica a L que pasa por P, entonces el ángulo $Q\mathrm{P}R = \theta$ se denomina ángulo de paralelismo para la longitud PQ.

Dado un punto A en el interior del disco de Poincaré y R positivo, el lugar geométrico de un punto P cuya distancia hiperbólica al punto A es R se denomina circunferencia hiperbólica con centro A y radio R. Existe una única circunferencia hiperbólica con centro dado y que pasa por un punto dado.

Para clasificar los teoremas utilizamos los programas Geometer Sketchpad, Cabri Geometry y NonEuclid (http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/). Este último es gratuito relativamente pequeño e independiente de la plataforma utilizada, pues fue desarrollado en Java.

Actividades desarrolladas

Algunas de las actividades utilizadas para experimentar, conjeturar y argumentar sobre los teoremas investigados fueron:

1. Construcción de un cuadrilátero de Lambert.

Construimos en el disco de Poincaré un cuadrilátero con tres ángulos rectos y conjeturamos sobre el cuarto ángulo del cuadrilátero y sobre las longitudes de sus lados. Concluimos que no existían rectángulos hiperbólicos.

2. La suma de los ángulos de una región triangular.

En esta actividad verificamos que en la geometría hiperbólica, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados. También argumentamos que si el área del triángulo disminuye entonces la suma de los ángulos de la región triangular aumenta acercándose a 180 grados cuando el área del triángulo se acerca a cero.

3. Segmentos que unen los puntos medios de un cuadrilátero.

Verificamos si los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman o no un paralelogramo.

4. Teorema de Pitágoras.

La actividad consistió en averiguar si el teorema de Pitágoras era verdadero o falso en la geometría hiperbólica. Al concluir que este es un teorema estrictamente euclidiano verificamos su equivalente en geometría hiperbólica. Utilizando el Geometer Sketchpad logramos comprobar que si el triángulo rectángulo hiperbólico ABC tiene ángulo recto en C, entonces $\cosh c = \cosh a \cosh b$.

5. Elementos en un triángulo.

Unimos los puntos medios de dos lados del triángulo y determinamos si este segmento era paralelo al tercer lado. También verificamos si existe alguna relación entre la medida del segmento que une los puntos medios y la medida del tercer lado del triángulo. Concluimos que el teorema respecto al paralelismo estrictamente Euclidiano. Hicimos lo mismo con el teorema para las medidas de los elementos analizados.

6. Triángulo inscrito en un semicírculo.

Verificamos que un triángulo inscrito en un semicírculo y con un lado sobre el diámetro del semicírculo no es rectángulo.

7. Bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Construimos un triángulo arbitrario y sus bisectrices. Verificamos si éstas se intersecan en un punto común. Posteriormente verificamos si este punto común es el centro de un círculo inscrito en el triángulo.

Repetimos el procedimiento anterior con las alturas, las mediatrices y las medianas del triángulo.

Una pregunta importante en esta actividad fue: ¿Siempre podemos construir un círculo inscrito en un triángulo hiperbólico?

8. Teorema de Napoleón.

Construimos un triángulo arbitrario ABC. Sobre cada uno de los lados del triángulo construimos un triángulo equilátero con su respectivo baricentro. Finalmente construimos el triángulo con vértices en los baricentros y verificamos si el triángulo construido era equilátero.

9. Equivalente a la ley de senos.

Verificamos que para cualquier triángulo hiperbólico UVW se cumple

$$\frac{\sin U}{\sinh u} = \frac{\sin V}{\sinh v} = \frac{\sin W}{\sinh w}$$

10. Equivalente a la ley de cosenos.

Igualmente verificamos que para el triángulo hiperbólico UVW

$$\cosh w = \cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v \cos W$$

$$\cos W = -\cos U \cos V + \sin U \sin V \cosh w$$

Clasificación de algunos teoremas.

A partir de las actividades realizadas logramos clasificar algunos teoremas enumerados a seguir:

En geometría hiperbólica

1. Si una recta interseca a una de dos rectas paralelas entonces ella no necesariamente interseca a la otra.
2. Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas entonces ella no necesariamente es perpendicular a la otra.
3. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que 180.
4. La suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero convexo es menor que 360.
5. No existen rectángulos.
6. El cuarto ángulo de un cuadrilátero de Lambert es agudo.
7. La medida del lado del cuadrilátero de Lambert que se encuentra entre dos ángulos rectos es menor que la medida del lado opuesto.

Otros resultados importantes encontrados fueron:

1. El teorema de Pitágoras es estrictamente euclidiano.
2. El teorema de Viviani es estrictamente euclidiano.
3. La suma de los ángulos en un cuadrilátero convexo es igual a 360 grados es estrictamente euclidiano.
4. Si una recta interseca a uno de dos rectas paralelas entonces interseca a la otra es estrictamente euclidiano.
5. Todo segmento tiene exactamente un punto medio es neutral.
6. Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz es neutral.
7. La desigualdad triangular es neutral.
8. Si dos lados de un triángulo son congruentes entonces los ángulos opuestos a los lados son congruentes es neutral.

Bibliografía

Coxeter, H. (1988). *Fundamentos de geometría*. (2da. ed.). México: Limusa.

Kimberling, C. (2003). *Geometry in action*. USA: Key Collage Publishing.

NCTM (1989). Currículo and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Pedoe, D. (1988). *Geometry: A comprehensive course*. New York, USA: Dover Publications, Inc.

EXPERIENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA UNIVERSITARIA EN AMBIENTES DE PROGRAMACIÓN SOBRE ASISTENTES MATEMÁTICOS.

Oscar Antonio González Chong, Cristiano Torezzan, Juan Miguel Valdés Placeres.
Universidad de Pinar del Río, Cuba; Universidade Estadual de Mato Groso, Brasil;
Universidad de Pinar del Río, Cuba.
oscar@info.upr.edu.cu
Campo de Investigación: Tecnología avanzada; Nivel Educativo: Superior.

Resumen:

El trabajo muestra las experiencias en la enseñanza de las matemáticas en carreras de perfil informático y matemático apoyado en un ambiente de programación sobre asistentes matemáticos durante dos años en las carreras de ingeniería informática en la universidad de Pinar del Río en Cuba y en las carreras de licenciatura en computación en la universidad estadual de Mato Groso Brasil. La metodología aplicada consistió en la construcción de conceptos y modelos matemáticos fundamentales pasando por las etapas gráfica, numérica y analítica apoyados en niveles de programación, el trabajo se desarrollo en equipos. Se pueden utilizar en esta metodología diferentes asistentes matemáticos siempre que permitan la programación.

Introducción

En la actualidad dos factores están influyendo significativamente sobre la enseñanza de las ciencias básicas: La informatización creciente y la integración de las ciencias.
La informatización esta cambiando las prioridades con relación al tiempo e intensidad que se le dedica al trabajo con algoritmos de cálculo que ya están programados y a disposición en paquetes específicos y por tanto el trabajo con conceptos está recibiendo más tiempo y atención , en la enseñanza de las matemáticas esto se esta observando con mayor intensidad.
En lo que respecta a la integración de las ciencias que es hoy una necesidad de la investigación científica, esta provocando un aumento de la interdisciplinaridad en la enseñanza de las ciencias básicas y específicas. En la enseñanza de las matemáticas esta determinando el trabajo con aplicaciones a otras ciencias y proyectos integradores. Este trabajo fue orientado a dar respuesta en parte a esas dos exigencias actuales.
El Marco teórico de la investigación es el constructivismo actual con sus dos referentes psicológicos fundamentales la epistemología genética de Jean Piaget y el enfoque histórico cultural de Lev Vigostky, lo que quedará más claro al explicar la metodología aplicada.

Metodología

Consistió en el trabajo con conceptos matemáticos fundamentales pasando por las etapas gráficas, numéricas y analíticas en un proceso inductivo, tanto en las conferencias, clases prácticas y laboratorios desarrollados, es en estos últimos donde aplicamos las ideas principales de esta metodología .en ellos los estudiantes apoyados en la programación sobre el asistente utilizado en este caso el mathematica , construyen sus versiones sobre los conceptos. Los niveles de programación también fueron escalonados de acuerdo con la

disciplina de algoritmos y programación y para los efectos se determinaron los siguientes tres niveles de programación:
•1er nivel
–Uso de comandos básicos del asistente
–Definición de funciones
–Construcción de animaciones gráficas
•2do nivel
–Uso de comandos avanzados
–Programación estructurada
–Programación recursiva
•3er nivel
–Programación avanzada del asistente
–Importación y exportación con otros programas y lenguajes.
El trabajo en equipos para desarrollar proyectos y trabajos extra-clase con la tutoría del profesor fue otro factor importante en la metodología aplicada.

Trabajos desarrollados

Expondremos básicamente los resultados en el cálculo diferencial e integral.
Evidentemente la forma de trabajar la disciplina tiene que cambiar, las conferencias van más a construir conceptos, teoremas, exponer aplicaciones y orientar el estudio independiente y trabajo en equipos, para en las actividades prácticas en general estar constantemente construyendo los conceptos a través de los ejercicios, los problemas, las discusiones teóricas, los laboratorios fundamentales en esta metodología y centro de este trabajo se dedicarán mediante la programación en el asistente a seguir ese camino de construcción conceptual de los conceptos fundamentales del cálculo.

Cálculo Diferencial

Tomaremos de ejemplo el trabajo que fue desarrollado con el concepto de derivada.
Como expresamos cada concepto tendrá una construcción por etapas de gráfica, numérica y analítica.
Tratamiento gráfico del concepto de derivada
El sentido geométrico de la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.
Por tanto en el laboratorio de este tema, será colocado como trabajo la construcción de animaciones gráficas que muestren esta idea fundamental. En este momento del semestre el alumno esta comenzando a programar, por lo que el nivel de exigencia no puede ser alto. un alumno propuso:
Definió dos funciones a partir de una función f[x] predefinida

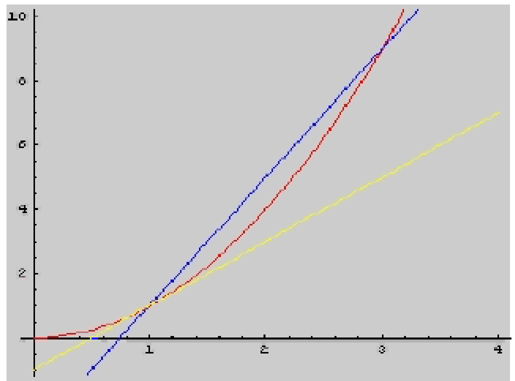
```
retsecante=Function[{f,x0,x1},Function[x,(f[x1]-f[x0])/(x1-x0)(x-x0)+f[x0]]]
rettangente=Function[{f,x0,y0},Function[x,(D[f[x],x] /.x->x0) (x-x0)+f[x0]]
```

A continuación construyo la siguiente tabla de gráficos

```
h=1/10;
Table[Plot[{f[x],retsecante[f,1,3-h*i][x],rettangente[f,1,3][x]},{x,0,4},AspectRatio->1,Background->GrayLevel[0.8],PlotRange->{-1.2,10.2}, PlotStyle->{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,0,1]},{RGBColor[1,1,0]}}],{i,0,19}]
```

Usando la función f[x]=x^2, construyo una animación con el siguiente gráfico inicial:

Bibliografía:



Para el tratamiento numérico de este concepto les pedimos a los alumnos construir alguna secuencia de pendientes de secantes convergiendo a la pendiente de la tangente

Para el tratamiento analítico del concepto pedimos a los alumnos usar el concepto de límite para construir finalmente el concepto de derivada

Un alumno creo una función derivada usando límite del cociente incremental de la siguiente forma:

derivada=Function[{x,f},Limit[(f[x+dx]-f[x])/dx,dx->0]]

y la evalúo para la función f[x] ya creada y el punto x=1.

derivada[1,f]

Como ejemplo de proyecto de aplicación del concepto de derivada colocamos para un equipo programar el método de Newton para determinar raíces de una ecuación no lineal. Este proyecto es presentado al final del semestre y los alumnos ya están concluyendo la disciplina programación I y por tanto para desarrollar el proyecto necesitarán el nivel dos de programación antes mencionado. Un equipo desarrollo el siguiente programa:

```
minewton[f_, var_, x0_, iteraciones_, a_, b_] :=
  NewtonAux[Function[var, f], N[x0], iteraciones, a, b];
NewtonAux[f_, x0_, iteraciones_, a_, b_] :=
    Module[{x, xx = x0, i},
            df[x_] := f'[x];
            For[i = 0, i < iteraciones, i++, x = xx;
                    If[df[x] ≠ 0,
    g[i] = Plot[{f[x], df[xx] (x - xx) + f[xx]}, {x, a, b}, PlotRange → {-2 f[a], f[b]}];
    xx = N[x - f[x]/df[x]],
                        Return["Error: derivada igual a cero"]
                    ] (*fin del If*)
                ]  (*fin del For*)
            (*Print["solución aproximada: "];
                    Print[xx];
                            Print["error de aproximaciones sucesivas: "];
                    Print[Abs[xx-x]] ;
                       Print["---------------------------------"];
                    xx*)
          ]
    (*fin de Module*)
```

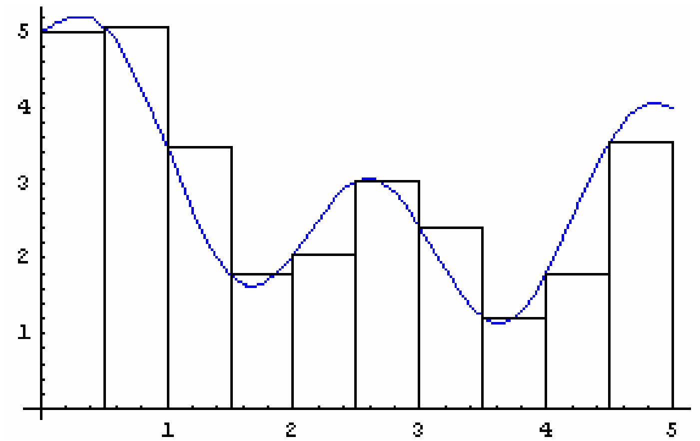
Que muestra una animación gráfica de las aproximaciones sucesivas del método.

Cálculo Integral

En el tema de cálculo integral fue programado un laboratorio para construir el concepto de integral de Riemann pasando por las tres etapas de la metodología de trabajo.
El tratamiento gráfico fue calcular aproximadamente el área bajo la curva de una función usando rectángulos con particiones uniformes o aleatorias.
Una de las propuestas fue el siguiente programa

```
f=Function[x,2+(1/3)(x-3)^2+Sin[3 x]];
a=0;b=5
g1=Plot[f[x],{x,a,b},PlotStyle□{{RGBColor[0,0,1]}}]
particao=Function[{a,b,n},N[Table[a+i(b-a)/n,{i,0,n}]]];
n=10;
particao[0,5,10]
imagemparticao=Function[{a,b,n},N[Table[f[a+i(b-a)/n],{i,0,n}]]];
imagemparticao[0,5,10]
esquinasretangulo=Function[{a,b,n},{{particao[a,b,n][[i]],0},{particao[a,b,n][[i]],imagemparticao[a,b,n][[i]]},{particao[a,b,n][[i+1]],imagemparticao[a,b,n][[i]]},{particao[a,b,n][[i+1]],0}}];
Table[esquinasretangulo[a,b,n],{i,1,n}]
g2=Graphics[Table[Line[esquinasretangulo[a,b,n]],{i,1,n}]]
Show[{g1,g2}]
```

Dando el siguiente gráfico final usando10 rectángulos



Existieron propuestas con particiones uniformes distintas a esta y particiones aleatorias de mayor complejidad de programación.
Para el tratamiento numérico del concepto fue colocada la construcción de secuencias de valores convergiendo hacia el valor exacto del área, que los alumnos saben el asistente tiene un comando para calcularla
Una propuesta fue construir una función área de rectángulo y comparla con el valor del área exacta.

$$\text{arearetangulos} = \text{Function}\Big[\{a, b, n\}, \sum_{i=1}^{n} \text{imagemparticao}[a, b, n][[i]] * (\text{particao}[a, b, n][[i+1]] - \text{particao}[a, b, n][[i]])\Big]$$

```
N[Integrate[f[x], {x, a, b}]] - arearetangulos[a, b, n]
n = 50
N[Integrate[f[x], {x, a, b}]] - arearetangulos[a, b, n]
```

Para el tratamiento analítico del concepto fue propuesto a los alumnos intentar construir una función apoyada en el concepto de límite.
Apareció la siguiente propuesta

$$\text{somamed} = \text{Function}\Big[\{a, b, n, g\}, \sum_{i=0}^{n-1} (b-a)/n * g[(a + i\,(b-a)/n + a + (i+1)\,(b-a)/n)/2]\Big]$$

```
Re[N[Limit[somamed[a, b, n, f], n → Infinity]]]
```

Evaluando la función creada para una función g[x] y los valores de a y b, vemos que el valor coincide con el determinado por el comando Integrate
En otro momento de construcción del concepto pedimos a los alumnos mostrar que para las funciones siguientes no era posible definir la integral de Riemann y demostrarlo construyendo sumas que diverjan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \text{ racional} \\ 1, & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Ambas funciones definidas en el intervalo [0,1]

Una de las propuestas en el primer ejemplo fue:

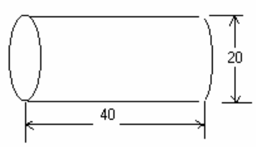
```
f = Function[x, If[x ∈ Rationals, 0, 1]]
```

$$\texttt{somarac = Function}\left[\texttt{n, } \sum_{i=0}^{n-1} \texttt{1 / n * f[i / n]}\right]$$

$$\texttt{somairrac = Function}\left[\texttt{n, } \sum_{i=0}^{n-1} \texttt{1 / n * f[i / n + 1 / (Pi + n)]}\right]$$

```
somarac[1000]
somairrac[1000]
```

Que devuelve al evaluar la suma usando un racional el valor cero y la suma usando un irracional devuelve el valor uno.
En el segundo ejemplo las propuestas fueron a mostrar que la suma de áreas va creciendo indefinidamente.
Estos ejemplos dieron pie a una conclusión definitiva de para que tipo de funciones existe la integral de Riemann.
Como ejemplo de proyecto integrador en este caso fue colocado a uno de los equipos el aforo de un tanque usando la integral definida:
Ejemplo:
Un tanque en forma de cilindro acostado



Aquí será necesario usar la programación
La propuesta de un equipo fue:

```
Aforo := Function[,
   For[l = -1, l < 20, l++;
    a = 40 * N[2 * Integrate[Sqrt[100 - y^2], {y, -10, l - 10}]];
    Print[l → a ];
   ]
  ];
```

Consideraciones finales

La aplicación de esta metodología para enseñar cálculo en carreras de perfil computacional fue excelente, este tipo de estudiante gusta de la programación y por tanto el colocarlos en los laboratorios y proyectos de aplicación a programar fue estimulante para ellos y conseguimos unir lo útil con lo agradable.
Los conceptos matemáticos quedaron muy claros en la mayoría de los estudiantes, se evidenció en los proyectos desarrollados un alto grado de independencia en la modelación

de complejos conceptos matemáticos y en la resolución de problemas intra e interdisciplinarios.
Esta experiencia ya fue aplicada en la carrera de ingeniería informática en la universidad de Pinar del Río en Cuba y en la carrera de licenciatura en computación en la universidad estadual del estado de Mato Grosso , Brasil

Bibliografía

Wolfram, S. (1991). A System for Doing Mathematics by Computer, Second Edition, Addison Wesley.

Carmo ,J. (1999). Introducción a la programación con el Mathematica, Lisboa.

Dos Santos, A. y Bianchini, W. (2002). *Aprendendo Cálculo com Maple*. Cálculo de Uma Variável.,Río de Janeiro.

Stewart, J.(2002) *Cálculo,* volume II, São Paulo, Pioneira, Thomsom Learning,

ENSEÑANZA SEMIPRESENCIAL DE LA MATEMÁTICA UTILIZANDO COMO SOPORTE TECNOLÓGICO UNA CALCULADORA GRÁFICADORA.

Dr. Eugenio Carlos Rodríguez.
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana. Cuba.
ecarlos48@yahoo.com
Campo de investigación: Tecnología Avanzada; Nivel Educativo: Superior

Resumen.

En este trabajo se presenta la temática presentada en el curso “**Enseñanza semipresencial de la Matemática utilizando como soporte tecnológico una calculadora gráficadora”**, en el cual se mostró una variante del desarrollo de cursos semipresenciales en el que se utiliza como soporte tecnológico una calculadora graficadora , aprovechando las posibilidades que ofrece la calculadora CASIO ClassPad 300 para desarrollar documentos electrónicos que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes, las llamadas e-activities, teniendo en cuenta que la efectividad de los procesos de educación virtual no dependen exclusivamente de las técnicas que utilicemos, y que todo proceso de educación requiere introducir visiones, paradigmas y mecanismos innovadores en su diseño (Gómez , 2003). En el curso se muestran los elementos a tener en cuenta en la preparación de un curso semipresencial y las particularidades del uso de la calculadora con estos fines.

La Educación Virtual.

En la actualidad, con el desarrollo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) existe una tendencia a el uso de estas tecnologías en todos los ámbitos de la vida, la educación no queda fuera de esta tendencia. Un gran número de instituciones de educación están incursionando en lo que se ha dado en llamar “Educación Virtual”. Esta visto también que cada vez es mayor el número de maestros y profesores se involucran en el uso de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En una primera aproximación a la educación virtual se ha trabajado con plataformas de soporte virtual para reproducir lo que hasta ahora se ha hecho en el aula con clases tradicionales, llamadas en este contexto como “clases presenciales”, utilizando en esta experiencia los mismos programas de estudio que tradicionalmente se han utilizado. Esta aproximación no tiene en cuenta que la Educación Virtual constituye un cambio de paradigma, que debe cambiar la forma de actuar y de pensar a los estudiantes, a los docentes y a las instituciones de educación.

Entre las razones que más pesan a la hora de tomar una decisión sobre la conveniencia de adoptar soluciones virtuales para el proceso de enseñanza aprendizaje, se destaca la ampliación del radio de influencia que adquiere una oferta educativa (Subotobsky, 2003).

Una modalidad virtual que se ha desarrollado con mucha fuerza en los últimos tiempos es la Educación a Distancia, sobre la cual se puede encontrar una gran cantidad de información relativa a investigaciones y resultados prácticos (Montiel y Farfán, 2002). Otra modalidad, no tan difundida como la anterior, pero con propósitos similares es la Educación Semipresencial (Horta et al, 2002; Alonso et al, 2003). Una revisión de la literatura nos muestra que no existe una variedad de investigaciones en esta modalidad. En la actualidad, todos los casos de Educación a Distancia o Semipresencial, utilizan como soporte tecnológico la computadora.

La Educación a Distancia.

La modalidad de Educación a Distancia ha sido muy difundida y existe una gran cantidad de literatura relativa a diseños, parámetros a tener en cuenta, ventajas, posibilidades de desarrollo, etc. Y en particular sobre investigación en educación a Distancia, una referencia obligada es el trabajo de Montiel y Farfán (Montiel y Farfán, 2002), en el se plantea que ¨… el aprendizaje a distancia es la adquisición de conocimientos y habilidades a través de medios de información e instrucción, utilizando la tecnología adecuada. La educación a distancia es entonces el proceso que involucra ese aprendizaje y la instrucción que lo permita…¨

Igualmente se señala que el foco de atención en la Educación a Distancia está puesto en la responsabilidad que adquiere el alumno y que esta responsabilidad ante su aprendizaje constituye un elemento clave para que el alumno se desenvuelva exitosamente en los ambientes a distancia.

La Educación Semipresencial.

Una modalidad de educación virtual no tan difundida como la Educación a Distancia pero que ha cobrado fuerza en los últimos tiempos es la Educación Semipresencial, en la cual se exige también el máximo de responsabilidad al estudiante pero en ella interviene con un papel importante el profesor.

Para el análisis de esta modalidad tomaremos como referencia el trabajo de Alonso y otros colegas cubanos (Alonso et al, 2003) en el cual se describe un modelo semipresencial que en la actualidad se está poniendo en práctica en la educación superior cubana en algunas carreras universitarias.

El modelo que se ha concebido esta compuesto por tres subsistemas: estudiante, profesor / tutor y medios. Además el proceso de enseñanza aprendizaje es semipresencial y por ello consta de dos fases: fase no presencial y la fase presencial.

El cambio de rol que experimenta el estudiante al integrarse a la modalidad de enseñanza semipresencial constituye un gran reto pues debe apropiarse de los conocimientos a través del autoaprendizaje. La falta de hábitos y habilidades de estudio independiente y el salto al nivel de enseñaza universitario constituyen grandes exigencias para él.

Es por esto que se deben colocar a su disposición, materiales bien diseñados académica y gráficamente, que resulten atractivos y faciliten el autoaprendizaje de las complejas materias que se imparten.

Los medios fundamentales con que debe contar el estudiante para su aprendizaje son:

- Un **texto básico de la asignatura (digital o papel),** que constituye la base del contenido de la asignatura e incluye algunos materiales complementarios y ejercicios de control que le permita al estudiante comprobar, por sí mismo, el grado de dominio alcanzado de los contenidos.

- Una **guía de estudio de la asignatura**, que contenga las indicaciones para el estudio de los diferentes temas, la bibliografía recomendada, las precisiones sobre el contenido que se requieran.

El texto básico como su nombre lo indica es sobre el que se diseña el proceso de enseñanza aprendizaje. Este material establece las pautas del programa de la asignatura. Este medio debe tener la calidad pedagógica y de diseño suficiente que garantice el autoaprendizaje y la ejercitación y ampliación de los conocimientos.

El modelo consta de dos fases: fase no presencial y fase presencial.

La fase no presencial garantiza la parte informativa del curso basada en el aseguramiento de materiales didácticos, soporte técnico y la actividad independiente de los estudiantes que tendrá un gran peso en el sistema de formación. Para una eficiente ejecución de esta fase es imprescindible garantizar la calidad de los medios que se le entregan al estudiante.

La fase presencial del proceso de enseñanza-aprendizaje se utiliza fundamentalmente para garantizar la retroalimentación de este proceso y su regulación así como la atención individualizada a los estudiantes en cada asignatura En la fase presencial deben perseguirse aquellas habilidades más complejas relacionadas con la modelación, problemas que combinan varios conceptos, problemas literales y problemas inversos.

En este modelo el proceso de **enseñanza aprendizaje** cambia sustancialmente pues recae sobre el estudiante el autoaprendizaje de los contenidos y los profesores deben centrar sus esfuerzos en la individualización de la enseñanza garantizando un seguimiento del aprendizaje de cada alumno.

El proceso de diseño de un curso de este tipo consta de tres fases fundamentales:

- Concepción y planificación.
- Diseño académico.
- Digitalización y Búsqueda de Materiales.

La concepción y planificación tiene en cuenta la caracterización de los materiales que dispone el profesor y la definición de la estructura pedagógica del material multimedia a producir.

La fase de diseño académico es donde el profesor prepara los contenidos del curso acorde al Modelo pedagógico planteado, a las exigencias de forma estilo y redacción predeterminadas y teniendo en cuenta los recursos tecnológicos y metodológicos con que cuenta. De este proceso se derivan necesidades de digitalización y búsqueda de materiales que deben ser atendidas en la fase correspondiente.

En la fase de digitalización y búsqueda se convierten en formato digital todos los materiales que posee el profesor y son necesarios tanto para la preparación de los contenidos básicos como complementarios de la asignatura.

La calculadora como soporte tecnológico.

Una propuesta innovadora es el desarrollo de cursos semipresenciales en el que se utilice como soporte tecnológico una calculadora graficadora , aprovechando las posibilidades que ofrece la calculadora CASIO ClassPad 300 para desarrollar documentos electrónicos que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes, las llamadas e-activities, teniendo en cuenta que la efectividad de los procesos de educación virtual no dependen exclusivamente de las técnicas que utilicemos, y que todo proceso de educación requiere introducir visiones, paradigmas y mecanismos innovadores en su diseño (Gómez , 2003).

En esta modalidad los medios fundamentales con que debe contar el estudiante para su aprendizaje son: la calculadora ClassPad 300 y el libro de texto. La calculadora es el soporte tecnológico fundamental para el desarrollo del curso y el estudiante hace uso de ella en la fase no presencial para la consulta de las e-activities.

La e – activity en la classpad 300.

Una de las herramientas novedosas en la calculadora ClassPad 300 es la creación de la e-activity, la cual consiste en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, construcciones geométricas, tablas, etc., en forma ordenada para presentar cierta información que nos permita solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado. Por esto es de esperar que puedan ser muy útiles como herramientas en la organización y distribución del material didáctico de una clase. (Moya et al, 2005).

El curso de métodos numéricos.

La propuesta que aquí se presenta se materializó en una experiencia con un curso de Métodos Numéricos. En esta experiencia se tomó el tema de Raíces de Ecuaciones, que incluye la Separación de Raíces y los métodos de Bisección, Regula Falsi, Newton-Raphson y Secantes. Se adoptó como texto el libro "Métodos Numéricos" (Álvarez et al, 2004).

Antes de comenzar la experiencia se llevaron a cabo varias sesiones de trabajo en las cuales se les explicó a los estudiantes la utilización de la calculadora y la elaboración de e-activities.
La experiencia constó de tres actividades presenciales, la primera se dedicó a las orientaciones generales del curso y a los temas de Separación de Raíces, Bisección y Regula Falsi. En la segunda se revisó lo orientado en la primera actividad y se orientaron los temas de Newton-Raphson y Secantes. En la tercera actividad se revisaron los últimos temas orientados. En cada actividad presencial se indicó el tema a estudiar, las e-activities y las paginas del libro de texto como complemento.
Las e-activities utilizadas tienen la siguiente estructura: objetivos, bibliografía y ejercicios propuestos del texto, desarrollo del tema, programación de métodos, ejemplos, tareas y conclusiones.

Los resultados mostraron que los estudiantes consideran que la calculadora es una herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente y les permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa.

Conclusiones.

El curso "**Enseñanza semipresencial de la Matemática utilizando como soporte tecnológico una calculadora gráficadora"** fue presentado la Relme 19, y en él participaron profesores y maestros de Matemática con alguna experiencia en el uso de calculadoras graficadoras de las marcas CASIO y TEXAS, en todos los casos les resultó novedoso el empleo de la calculadora como soporte tecnológico en un curso de este tipo, en el cual se utiliza, tradicionalmente, una computadora.

Todos los participantes en el curso coincidieron en que el uso de la calculadora demuestra que la afirmación de que "la efectividad de los procesos de educación virtual no dependen exclusivamente de las técnicas que utilicemos", y que, en todo caso, introduce "visiones, paradigmas y mecanismos innovadores en su diseño" (Gómez , 2003).

Bibliografía.

Alonso, A., Febles, A., La O A. y Rosete A. (2003). Proyecto de digitalización de la Carrera de Ingeniería Informática para la Universalización de la Enseñanza. Proyecto de investigación de la Facultad de Ingeniería Industrial, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana. 2003.

Gómez, H. (2003). ¿Cómo estructurar un plan efectivo de e-learning? En M. Fontela, N. Hellers, A. Mann, C. Podlesker y S. Subotovsky (Eds.), *E-learning. Mejores prácticas y recomendaciones para organizaciones iberoamericanas*. Buenos Aires: Ediciones Tecnonexo.

Horta, M, Marcelo M, Martínez R, Horta N, Herrán M y Garzón W. (2002). Una experiencia, utilizando las NTIC, en el estudio individual de alumnos de cursos semipresenciales de matemática para Ingenieros Industriales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15(2). Grupo Editorial Iberoamérica.

Montiel, G. y Farfán, R. (2002) Investigación en educación a distancia. Un acercamiento sistémico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 15(2). Grupo Editorial Iberoamérica.

Moya L. M. y Novoa J. F. Ejemplos de ayudas pedagógicas con calculadoras programables para el mejoramiento de la enseñanza en Matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana.* 10, Bogotá , Colombia.

Subotobsky, S. (2003) E-learning académico. En M. Fontela, N. Hellers, A. Mann, C. Podlesker y S. Subotovsky (Eds.), *E-learning. Mejores prácticas y recomendaciones para organizaciones iberoamericanas*. Ediciones Tecnonexo. Buenos Aires, diciembre de 2003.

EXPERIENCIAS EN EL USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA EN UN CURSO SEMIPRESENCIAL DE MATEMÁTICA NUMÉRICA.

MSc. Esther Ansola Hazday y Dr. Eugenio Carlos Rodríguez.
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana. Cuba.
e_hazday@yahoo.com, ecarlos48@yahoo.com

Campo de investigación: Tecnología Avanzada.
Nivel Educativo: Superior.

Resumen.
La Educación a Distancia es la modalidad de educación virtual que más se ha desarrollado en los últimos tiempos, pudiéndose encontrar una gran cantidad de información relativa a investigaciones y resultados prácticos (Montiel y Farfán, 2002). Otra modalidad, no tan difundida como la anterior, pero con propósitos similares es la Educación Semipresencial (Horta et al, 2002; Alonso et al, 2003). En todos los casos de Educación a Distancia o Semipresencial, se utiliza como soporte tecnológico la computadora. En este trabajo se presenta una experiencia del desarrollo de cursos semipresenciales en el que se utiliza como soporte tecnológico una calculadora graficadora, aprovechando las posibilidades que ofrece la calculadora CASIO ClassPad 300 para desarrollar documentos electrónicos que facilitan el auto aprendizaje.

El curso tradicional

Se han tenido tres experiencias fundamentales en la enseñanza de la Matemática Numérica con el uso de un software didáctico, elaborado especialmente para este tipo de curso, con distintos tipos de clases: conferencia - clase práctica, clase teórico-práctica y clase encuentro – laboratorio. (Carlos et al, 2003)

De los tipos anteriores el más utilizado ha sido el de conferencia – clase práctica. En la conferencia el profesor explica el método y el algoritmo, y en elaboración conjunta con los alumnos llega a la programación del método en un seudo código; luego muestra ejemplos resueltos en la computadora. En la clase práctica el estudiante modela problemas y aplica los métodos para resolver ejercicios utilizando la computadora. Un elemento importante es la evaluación, algunas aplicaciones de las tecnologías en la enseñanza no van acompañadas de un adecuado diseño de la evaluación. En este tipo de clase, la evaluación está diseñada para el uso de la computadora. El alumno tiene disponible una computadora para evaluarse y la evaluación contiene preguntas teóricas, modelación de problemas, cálculos en la computadora y elaboración de algoritmos.

El curso semipresencial.

El cambio de rol que experimenta el estudiante al integrarse a la modalidad de enseñanza semipresencial constituye un gran reto pues debe apropiarse de los conocimientos a través del autoaprendizaje. Es por esto que se deben colocar a su disposición materiales bien diseñados que resulten atractivos y faciliten el autoaprendizaje de los temas que se imparten en el curso (Alonso et al, 2003).
El modelo pedagógico consta de dos fases: fase no presencial y fase presencial.
La fase no presencial garantiza la parte informativa del curso basada en el aseguramiento de materiales didácticos, soporte técnico y la actividad independiente de

los estudiantes que tendrá un gran peso en el sistema de formación. Para una eficiente ejecución de esta fase es imprescindible garantizar la calidad de los medios que se le entregan al estudiante.

La fase presencial del proceso de enseñanza-aprendizaje se utiliza fundamentalmente para garantizar la retroalimentación de este proceso y su regulación así como la atención individualizada a los estudiantes en cada asignatura En la fase presencial deben perseguirse aquellas habilidades más complejas relacionadas con la modelación, problemas que combinan varios conceptos, problemas literales y problemas inversos.

En este curso los medios fundamentales con que debe contar el estudiante para su aprendizaje son: la calculadora ClassPad 300 y el libro de texto. La calculadora es el soporte tecnológico fundamental para el desarrollo del curso y el estudiante hace uso de ella en la fase no presencial para la consulta de las e-activities. Una de las herramientas novedosas en la calculadora ClassPad 300 es la creación de e-activity, la cual consiste en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, construcciones geométricas, tablas, etc., en forma ordenada para presentar cierta información que nos permita solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado. Por esto es de esperar que puedan ser muy útiles como herramientas en la organización y distribución del material didáctico de una clase. (Moya et al, 2005). El texto básico como su nombre lo indica es sobre el que se diseña el proceso de enseñanza aprendizaje. Este material establece las pautas del programa de la asignatura.

La experiencia con la ClassPad 300 y la utilización de las e-activities.

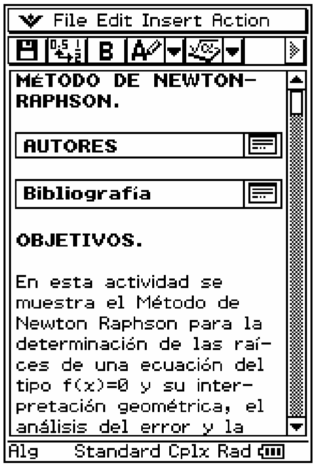
La experiencia consistió en un curso semipresencial que se llevó a cabo con un grupo de 25 estudiantes de 2do año de Ingeniería Informática que ya habían recibido parte de la asignatura Métodos Numéricos en la forma explicada anteriormente. Se tomó para realizar dicha experiencia el tema de Raíces de Ecuaciones, que incluye la Separación de Raíces y los métodos de Bisección, Regula Falsi, Newton-Raphson y Secantes. Se adoptó como texto el libro “Métodos Numéricos” (Álvarez et al, 2004). Antes de comenzar el curso se llevaron a cabo varias sesiones de trabajo en las cuales se les explicó a los estudiantes la utilización de la calculadora y la elaboración de e-activities.

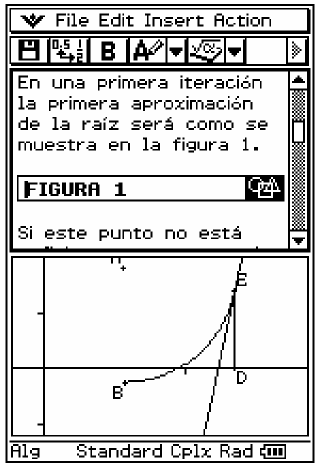
El curso constó de tres actividades presenciales En cada actividad se le orientó a los estudiantes el uso de la calculadora, las e-activities correspondientes a cada tema y las paginas del libro de texto como complemento; la tarea de cada estudiante consistió en utilizar las e-activities para estudiar la parte teórica, realizar los ejercicios propuestos y programar los métodos.

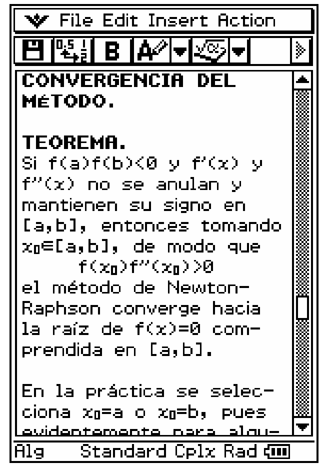
La primera actividad se dedicó a las orientaciones generales del curso y a los temas de Separación de Raíces, Bisección y Regula Falsi. En la segunda se revisó lo orientado en la primera actividad y se orientaron los temas de Newton-Raphson y Secantes. En la tercera actividad se revisaron los últimos temas orientados.

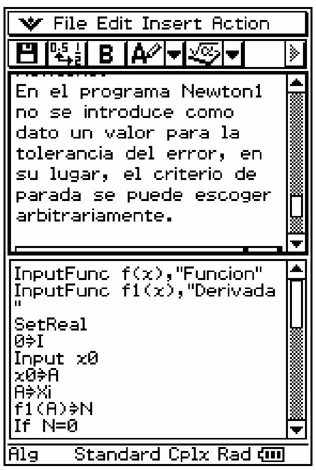
Descripción de las e-activities

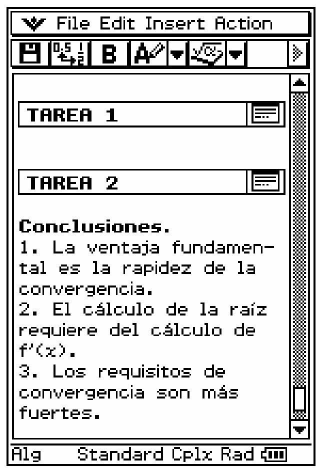
Las e-activities utilizadas tienen la siguiente estructura: objetivos, bibliografía y ejercicios propuestos del texto, desarrollo del tema, programación de métodos, ejemplos, tareas y conclusiones. A continuación se muestran algunas pantallas del ClassPad Manager referidas a la e-activity del Método de Newton-Raphson.











Evaluación de los resultados.

Con el objetivo de analizar la efectividad del curso se diseñó una encuesta que midiera las diferencias con el método tradicional, el desarrollo de habilidades derivadas del uso de la calculadora gráfica, el nivel de satisfacción con el uso de la misma y los aspectos positivos y negativos del curso (Anexo 1). Esta encuesta se aplicó a los estudiantes del curso y se obtuvieron los siguientes resultados.

La utilización de las calculadora graficadora es:					
Clara	60.0%	indeciso	0.0%	Confusa	40.0%
Organizada	80.0%		20.0%	Desorganizada	0.0%
Dinámica	100.0%		0.0%	Estática	0.0%
Buena	100.0%		0.0%	Mala	0.0%
Moderna	100.0%		0.0%	Retrograda	0.0%
Precisa	100.0%		0.0%	Imprecisa	0.0%
Novedosa	100.0%		0.0%	Tradicional	0.0%

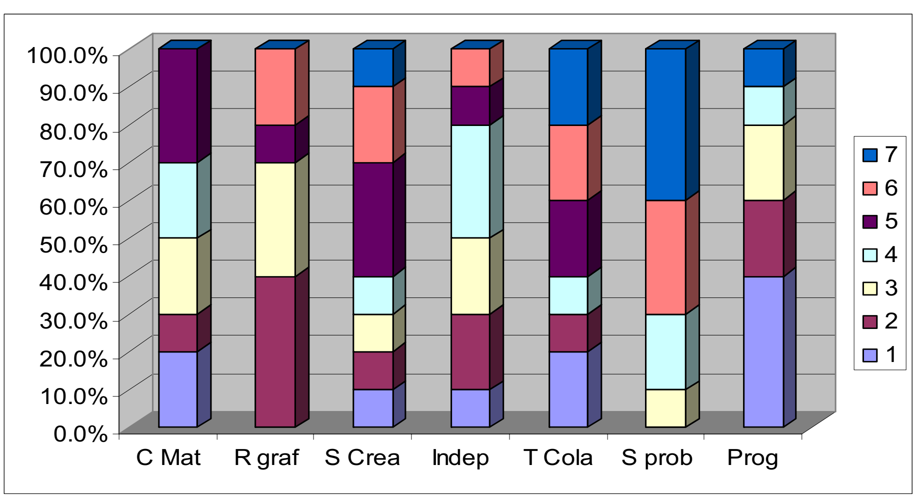
Activa	100.0%		0.0%	Pasiva	0.0%
Deseada	80.0%		20.0%	Indeseada	0.0%
Agradable	90.0%		10.0%	Desagradable	0.0%
Comprensible	70.0%		30.0%	Incomprensible	0.0%

- Más del 80 % de los estudiantes considera que la utilización de la calculadora es organizada, dinámica, buena, moderna, precisa, novedosa, activa y deseada.
- Solamente en claridad y comprensión los porcientos son por debajo de 80

La utilización del método tradicional es:					
Clara	80.0%		10.0%	Confusa	10.0%
Organizada	80.0%		10.0%	Desorganizada	10.0%
Dinámica	60.0%		20.0%	Estática	20.0%
Buena	90.0%		10.0%	Mala	0.0%
Moderna	40.0%		50.0%	Retrograda	10.0%
Precisa	100.0%	indeciso	0.0%	Imprecisa	0.0%
Novedosa	20.0%		30.0%	Tradicional	50.0%
Activa	60.0%		20.0%	Pasiva	20.0%
Deseada	70.0%		20.0%	Indeseada	10.0%
Agradable	60.0%		30.0%	Desagradable	10.0%
Comprensible	100.0%		0.0%	Incomprensible	0.0%

- Los mayores porcientos se encuentran en los aspectos claridad y comprensión.
- El resto de los aspectos se encuentran por debajo de los porcientos alcanzados en la utilización de la calculadora.

	Orden de las habilidades con el uso de la calculadora graficadora						
	Cálculos Matemáticos	Realización de gráficos	Soluciones creativas	Independencia	Trabajo colaborativo	Solución de problemas	Programación
1	20.0%	0.0%	10.0%	10.0%	20.0%	0.0%	40.0%
2	10.0%	40.0%	10.0%	20.0%	10.0%	0.0%	20.0%
3	20.0%	30.0%	10.0%	20.0%	0.0%	10.0%	20.0%
4	20.0%	0.0%	10.0%	30.0%	10.0%	20.0%	10.0%
5	30.0%	10.0%	30.0%	10.0%	20.0%	0.0%	0.0%
6	0.0%	20.0%	20.0%	10.0%	20.0%	30.0%	0.0%
7	0.0%	0.0%	10.0%	0.0%	20.0%	40.0%	10.0%



Como se observa en las tablas y gráfico anteriores los estudiantes opinaron que las mayores habilidades adquiridas habían sido en la programación, la realización de gráficos, los cálculos matemáticos y la independencia.

Conclusiones.

En este trabajo se presentó una experiencia del desarrollo de un curso semipresencial en el que se utilizó como soporte tecnológico una calculadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma para facilitar el auto aprendizaje de los estudiantes, mediante las llamadas e-activities. En el trabajo se muestran los resultados que se obtuvieron con un grupo de estudiantes de segundo año de ingeniería al recibir un tema de Matemática Numérica en forma semipresencial y su comparación con este mismo curso impartido en forma presencial con el uso de computadoras. Los resultados muestran que los estudiantes consideran que la calculadora es una herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente y les permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa.

Bibliografía.

- Alonso, A, Febles, A, La O A. y Rosete A. (2003). Proyecto de digitalización de la Carrera de Ingeniería Informática para la Universalización de la Enseñanza. Proyecto de investigación de la Facultad de Ingeniería Industrial, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana. 2003.
- Álvarez, M, Guerra, A. y Lau, R. (2004) *Matemática Numérica*. Editorial Félix Varela. La Habana . Cuba.
- Carlos, E. y Ansola, E. Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica . Experiencias didácticas. Resúmenes de la Séptima Escuela de Invierno y seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero, México. Diciembre de 2003.
- Gómez, H. (2003). ¿Cómo estructurar un plan efectivo de e-learning? En M. Fontela, N. Hellers, A. Mann, C. Podlesker y S. Subotovsky (Eds.), *E-learning. Mejores prácticas y recomendaciones para organizaciones iberoamericanas*. Ediciones Tecnonexo. Buenos Aires, diciembre de 2003.
- Horta, M, Marcelo M, Martínez R, Horta N, Herrán M y Garzón W. (2002). Una experiencia, utilizando las NTIC, en el estudio individual de alumnos de cursos semipresenciales de matemática para Ingenieros Industriales. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen15, Año 2002. Tomo 2. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Montiel, G. y Farfán R. (2002) Investigación en educación a distancia. Un acercamiento sistémico. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen15, Año 2002. Tomo 2. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Moya L. M. y Novoa J. F. Ejemplos de ayudas pedagógicas con calculadoras programables para el mejoramiento de la enseñanza en Matemáticas. Revista de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana. Volumen 10. Bogotá , Colombia.

ANEXO 1

Encuesta

La utilización de las calculadoras gráficas se empleó por primera vez este curso. Los profesores de la asignatura Matemática Numérica estamos interesados en conocer tu opinión acerca de su empleo en clases. Gracias por tu colaboración.

I.- A continuación te presentamos una serie de pares de adjetivos que pueden describir cómo percibes las diferencias entre la aplicación de las calculadoras gráficas y del método tradicional. Hay cinco espacios entre cada pareja de adjetivos que representan una escala continua entre ambos polos opuestos. El espacio central representa una posición más bien neutra, y los restantes, diferentes grados de proximidad a uno u otro polo. Marca con una cruz (X) en el espacio que mejor exprese cómo percibes cada método. Trata de evitar los puntos medios de la escala.

La utilización de la Calculadora Gráfica es:			La utilización del método tradicional es		
Clara	__ __ __ __ __	Confusa	Claro	__ __ __ __ __	Confuso
Organizada	__ __ __ __ __	Desorganizada	Organizada	__ __ __ __ __	Desorganizada
Dinámica	__ __ __ __ __	Estática	Dinámica	__ __ __ __ __	Estática
Buena	__ __ __ __ __	Mala	Buena	__ __ __ __ __	Mala
Moderna	__ __ __ __ __	Retrógrada	Moderna	__ __ __ __ __	Retrógrada
Precisa	__ __ __ __ __	Imprecisa	Precisa	__ __ __ __ __	Imprecisa
Novedosa	__ __ __ __ __	Tradicional	Novedosa	__ __ __ __ __	Tradicional
Activa	__ __ __ __ __	Pasiva	Activa	__ __ __ __ __	Pasiva
Deseada	__ __ __ __ __	Indeseada	Deseada	__ __ __ __ __	Indeseada
Agradable	__ __ __ __ __	Desagradable	Agradable	__ __ __ __ __	Desagradable
Comprensible	__ __ __ __ __	Incomprensible	Comprensible	__ __ __ __ __	Incomprensible

II.- A continuación relacionamos algunas habilidades derivadas del uso de la calculadora gráfica. Ordena jerárquicamente (de lo más logrado a lo menos logrado) aquellas mejor desarrolladas por ti.

___ Cálculos matemáticos.
___ Realización de gráficos.
___ Solución creativa de problemas propuestos por el profesor.
___ Independencia para trabajar.
___ Trabajo colaborativo.
___ Solución de problemas de la profesión.

III.- ¿En qué medida estás satisfecho con la aplicación de las calculadoras gráficas?. Marca la opción que más se ajuste a tu caso.

___ Muy satisfecho.
___ Más satisfecho que insatisfecho.
___ Tan satisfecho como insatisfecho.
___ Más insatisfecho que satisfecho.
___ Muy insatisfecho.

IV.- ¿En qué medida estás satisfecho con la aplicación del método tradicional?. Marca la opción que más se ajuste a tu caso.

___ Muy satisfecho.
___ Más satisfecho que insatisfecho.
___ Tan satisfecho como insatisfecho.
___ Más insatisfecho que satisfecho.
___ Muy insatisfecho.

V.- De acuerdo a tu opinión, ¿cuáles serían las dificultades en la aplicación de las calculadoras gráficas?

ACTITUDES, APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS Y COMPUTADORAS: FASE INICIAL DE UN ESTUDIO LONGITUDINAL

José Antonio Juárez López
Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México
loupemy04@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Factores afectivos; Nivel educativo: Básico

Resumen

La presente investigación trata sobre las actitudes hacia las matemáticas y el aprendizaje que muestran hacia esta materia los estudiantes de Telesecundaria cuando usan la hoja electrónica de cálculo. Se ha iniciado un estudio longitudinal que contempla el manejo de dos grupos que se encontraban cursando el primer grado: un grupo experimental que usa actualmente la hoja de cálculo y un grupo de control que no trabaja con ella. En esta primera fase del estudio, se aplicó en ambos grupos, un Cuestionario de Matemáticas para diagnosticar el aprendizaje de los sujetos. Para medir sus actitudes se les aplicó también a ambos grupos una escala de actitudes. El análisis de los primeros resultados obtenidos en esta fase muestra ligeras diferencias en las actitudes hacia las matemáticas entre ambos grupos.

Antecedentes

La Telesecundaria es un subsistema del Sistema Educativo Nacional que coadyuva a prestar a la población el servicio que prescribe el artículo tercero constitucional. Dicho subsistema en México surgió en la mitad de la década de los sesenta para responder a la necesidad de proporcionar educación secundaria a jóvenes de comunidades rurales en donde no es posible establecer escuelas secundarias generales o técnicas.
Este servicio está caracterizado porque un solo maestro es el responsable del proceso educativo en todas las asignaturas de un grado, de manera similar al maestro de primaria. En la metodología de Telesecundaria se cuenta con el apoyo de programas de televisión y materiales impresos que están elaborados con sentido complementario.
Los alumnos de Telesecundaria son personas cuya edad oscila entre los 13 y los 17 años.

Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología: EMAT

A partir de 1997 la Secretaría de Educación Pública en México desarrolla un proyecto nacional llamado EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología), en el cual se utilizan herramientas tales como computadoras y calculadoras TI-92 para apoyar la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. El propósito durante la fase piloto (1997-2000) fue la incorporación de las tecnologías computacionales en algunas secundarias públicas del país con el fin de facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que forman parte del currículo establecido y acercarlos a ideas matemáticas avanzadas.
Adicionalmente al proyecto EMAT, propuesto inicialmente para secundarias generales y técnicas, a partir de 2001 se está explorando la posibilidad de incluir el uso de la tecnología

computacional para apoyar la enseñanza de las matemáticas también en el sistema de Telesecundarias. Hasta el momento el avance de dicho proyecto contempla el diseño y elaboración de material didáctico para adaptar los materiales EMAT al subsistema de Telesecundaria, con el correspondiente ajuste de las hojas de trabajo para ser resueltas en 30 minutos así como la elaboración de las sesiones de vinculación con las respectivas orientaciones para el maestro.

Objetivos

La presente investigación tiene como propósito principal realizar un estudio longitudinal que permita conocer cómo afecta el uso de la tecnología al aprendizaje de las matemáticas de los alumnos de Telesecundaria, así como indagar acerca de las actitudes de los mismos hacia las matemáticas y analizar si existe alguna correlación entre ambos aspectos. Se pretende además, mediante este estudio, dar respuesta a interrogantes tales como:
¿los alumnos de Telesecundaria aprenden más, menos o simplemente no hay cambio en su aprendizaje con el uso de la tecnología?, ¿en qué beneficia el uso de la tecnología al aprendizaje de los alumnos?, ¿hay cambios en las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas con el uso de la tecnología?, si existen estos cambios, ¿cómo influyen en su aprendizaje?, ¿los alumnos de telesecundaria son capaces de resolver problemas y manejar el álgebra adecuadamente después de trabajar con tecnología?, ¿existe correlación entre las actitudes hacia las matemáticas y el aprendizaje que logran los alumnos?, si existe tal correlación entre el aprendizaje y las actitudes de los alumnos, ¿cambia dicha correlación con el paso del tiempo?.

Marco teórico

El constructo actitud tiene su origen en los trabajos de William I. Thomas y Florian Znaniecki quienes, en 1918, propusieron que éste debería incorporarse al conjunto de conceptos y de términos que la psicología social usaba con el fin de dar una explicación a los fenómenos colectivos que en aquella época eran los que más atraían la atención. Posteriormente el constructo actitud se constituyó en el objeto de estudio por excelencia de la Psicología Social. Un marco teórico viable para la presente investigación estaría basado en la definición multidimensional de las actitudes que varios autores consideran como componentes:
Cognitiva. Este componente se integra de las percepciones, creencias, estereotipos, informaciones e ideas que posee la persona acerca del objeto de actitud.
Afectivo. Este componente se refiere a los sentimientos que el objeto suscita en la persona o en el grupo.
Conductual. El componente conductual está compuesto por las tendencias, las disposiciones, las intenciones y las acciones que se dirigen hacia el propio objeto.
(Poner más sobre las componentes)
Las actitudes que en general posee un individuo derivan del aprendizaje al que éste ha estado expuesto a lo largo de su vida. Un rasgo central de las actitudes es su carácter social, ya que, aunque éstas se expresan de manera individual, se forman socialmente y cada individuo forma sus actitudes dentro del medio social donde se desarrolla.
Las cualidades que poseen las actitudes son: dirección, grado, intensidad, consistencia y prominencia.

La incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas sin duda ha tenido un impacto en el aprendizaje de los alumnos en los diferentes niveles escolares, lo cual ha sido reportado por varios investigadores para el caso concreto de la hoja de cálculo (Rojano, 1996); (Rojano y Sutherland, 1991); (Rojano y Sutherland, 1993); (Sutherland y Rojano, 1993); (Friedlander y Tabach, 2004). Sin embargo, la mayoría de estos trabajos se ha enfocado en el aspecto cognitivo, reflejado éste en el aprendizaje de conceptos, la adquisición de estrategias, la resolución de problemas, etc. Pocos estudios se han centrado en profundizar sobre el ámbito afectivo que ineludiblemente surge durante el aprendizaje de las matemáticas cuando se trabaja en un ambiente computacional. Como hemos visto, las actitudes hacia cualquier fenómeno u objeto involucran un componente afectivo que, junto con los otros van formando cierta predisposición para actuar de determinada manera.

Gran parte de los investigadores sobre las actitudes hacia las matemáticas coinciden en considerar tres componentes fundamentales de las actitudes: cognitivo, afectivo y conductual. No obstante, algunos han puesto mayor énfasis en investigar sobre los efectos de uno de estos componentes y su relación con el aprovechamiento de los estudiantes. McLeod (1992), por ejemplo, enfatiza la importancia del componente afectivo en educación matemática y considera las actitudes hacia las matemáticas como una categoría del dominio afectivo, que es más amplio y que incluye otras categorías como son las creencias acerca de las matemáticas, acerca de uno mismo, de la enseñanza de las matemáticas o del contexto social así como también las emociones.

De hecho, las actitudes hacia las matemáticas son enfocadas desde distintos puntos de vista, dependiendo de cuál de los componentes se quiere enfatizar, Hannula (2002), por ejemplo, propone un nuevo marco teórico para las actitudes hacia las matemáticas. A través de un estudio de caso en el que se describe cómo la actitud hacia las matemáticas cambió de negativa a ser más positiva, este investigador concluye que las actitudes se encuentran definidas a través de evaluaciones de tipo afectivo y cognitivo, principalmente, y sugiere que el constructo actitud debe ser revisado más a fondo.

No existe acuerdo entre los investigadores en cuanto a si las actitudes son parte del dominio afectivo o si la componente afectiva es parte de las actitudes, sin embargo, algunos autores como Hernández y Gómez-Chacón (1997) y Rufell et al (1998) sostienen que las actitudes hacia las matemáticas están formadas por las tres componentes, que pudiéramos llamar "clásicas" de las actitudes, sin importar el objeto hacia donde están dirigidas, esto es: la componente cognitiva, afectiva y conductual. La presente investigación se fundamenta en esta última conceptualización de las actitudes hacia las matemáticas, no obstante que la definición de éstas se encuentra aún en discusión.

Galbraith and Haines (1998), por otro lado, describen los resultados de la aplicación de seis escalas de actitudes hacia las matemáticas, hacia la computadora y hacia la interacción entre éstas. Cada una de las escalas constó de 8 cuestiones y aunque en el artículo se muestra sólo una de las escalas, se explica qué atributos trata de medir cada una y se dan a conocer las correlaciones halladas entre cada instrumento.

En el estudio realizado por Vale y Leder (2004) las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas fueron definidas como la percepción de su logro (auto-eficacia) y como la aspiración para lograrlo en estas disciplinas.

Destaca el comentario sobre que pocos estudios se han enfocado a investigar o analizar los factores afectivos en las clases de matemáticas y el uso de computadoras y aún menos se han realizado estudios de género en este sentido, ya que, se dice que la mayoría de investigaciones han puesto énfasis en lo cognitivo o en los logros que obtienen los alumnos.

Marco metodológico

Con la finalidad de estudiar posibles cambios en las actitudes hacia las matemáticas y su aprendizaje en el ambiente de la hoja de cálculo, se realizará la primera fase del estudio longitudinal. Parece existir un acuerdo general en que la investigación longitudinal posee una clara referencia a cualquier estudio que se lleva a cabo a través del tiempo. Una de las principales características de la investigación longitudinal es su dimensión temporal y su propósito fundamental es la descripción y explicación de los procesos que se producen como consecuencia del paso del tiempo. El diseño longitudinal implica una serie de medidas recogidas secuencialmente en el tiempo, de una o más unidades de análisis con el mismo instrumento o método (Arnau, 1995). La presente investigación, en su primera fase, consistirá en la aplicación y análisis posterior de un cuestionario sobre matemáticas de primer grado de secundaria y la escala AMMEC (Ursini et al, 2004) a dos grupos de Telesecundaria que han trabajado dentro del proyecto EMAT. Posteriormente, cuando los estudiantes se encuentren en 2º y 3º grado se les aplicará la misma escala AMMEC y los cuestionarios que correspondan al grado.

Uno de los principales propósitos de la ciencia es descubrir relaciones entre fenómenos con la visión de predecir y, en algunos casos, controlar su ocurrencia (Cohen y Manion, 1989).

Dichas relaciones se refieren a cualquier tendencia de las variables a variar consistentemente. Aunque existen diversas medidas de correlación en función de la naturaleza de las variables, para la presente investigación se usará el Coeficiente de correlación de Pearson, el cual involucra dos variables continuas (aquí se considera que una variable continua es aquella que puede tomar valores entre dos puntos sobre una escala).

En nuestro caso, se trata de hallar la relación entre los puntajes obtenidos por los alumnos en el Cuestionario de matemáticas y la Escala AMMEC, usando para ello el coeficiente ya mencionado a través de la hoja de cálculo en la cual se ha elaborado la base de datos correspondiente.

Instrumentos

Las actitudes son procesos subjetivos cuya medición no es de ningún modo sencilla de realizar, puesto que ellas no son accesibles a la observación directa, sino que tienen que ser inferidas de la conducta. Una cuestión importante que debe notarse es que, si uno "mide actitudes" como son conceptualizadas en la literatura, uno necesita encontrar maneras de operacionalizarlas y convertirlas en números. Sin duda la mayor atención ha sido dedicada a la medida de la magnitud (o intensidad) de las actitudes dejando de lado los demás atributos que caracterizan a éstas, tales como la consistencia, la coherencia o la prominencia (Scott, 1968).

Existen diferentes escalas para medir actitudes como pueden ser: el diferencial semántico, la escala tipo Thurstone y la escala tipo Likert. En esta investigación se utilizará una escala tipo Likert conocida como Escala AMMEC (Ursini et al, 2004).

Esta escala se diseñó tomando como base diferentes escalas utilizadas en otros estudios; para la elaboración de la escala AMMEC se llevó a cabo un estudio sobre la validez y confiabilidad de la misma. El análisis de confiabilidad se realizó calculando el coeficiente alpha de Cronbach con el fin de examinar la consistencia interna del instrumento. Por otro lado, con la finalidad de verificar la validez del instrumento se realizó un análisis factorial.

El Cuestionario de Matemáticas Primer Grado, en su versión original, es un instrumento de evaluación que consiste de 14 preguntas de opción múltiple.

Población

Los sujetos de esta investigación son estudiantes de una escuela Telesecundaria ubicada en la ciudad de Puebla, México. La edad de los sujetos involucrados en el estudio varía entre 12 y 14 años. En ella se encuentra el grupo control, que consiste de dos grupos atendidos por dos profesores y que no han trabajado con la tecnología como apoyo para el aprendizaje de las matemáticas, y el grupo experimental, que consiste de un sólo grupo atendido por un docente el cual sí ha trabajado con el proyecto EMAT.

Análisis de los datos obtenidos en la primera fase

Aquí se presenta un breve análisis de las opciones marcadas en la escala AMMEC para ambos grupos del estudio.

Porcentajes para cada opción por ítem de la escala AMMEC para el Grupo sin EMAT y el Grupo con EMAT

Grupo sin EMAT *(N = 45)*				
1. Me gusta la clase de matemáticas				
MUCHO	*SI*	*INDECISO*	*POCO*	*NO*
22%	24%	2%	40%	11%

Grupo con EMAT *(N = 23)*				
1. Me gusta la clase de matemáticas				
MUCHO	*SI*	*INDECISO*	*POCO*	*NO*
4%	61%	0%	8%	0%

Aunque esta aseveración se encuentra dentro del componente afectivo de las actitudes hacia las matemáticas, el componente cognitivo, en este caso las creencias acerca de las matemáticas tal como considera McLeod (1992) (al hacer una distinción entre ellas) también está presente, debido a la interacción entre los componentes afectivo y cognitivo de la actitud, lo cual puede explicarse si consideramos que una creencia acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas puede provocar una emoción o sentimiento de agrado o desagrado. Dicha interacción traería como resultado una predisposición para la acción que se manifestaría en los estudiantes con el hecho de no entrar a las clases de matemáticas o no realizar sus tareas. Podemos observar además que más de la mitad del grupo (51%) contesta que las matemáticas no son de su agrado, mientras que un 46% del grupo muestra agrado por las matemáticas. Sólo un 2% muestra indecisión.

Grupo sin EMAT*(N = 45)*				
2. La clase de matemáticas es aburrida				
MUCHO	*SI*	*INDECISO*	*POCO*	*NO*
29%	53%	4%	11%	2%

Grupo con EMAT *(N = 23)*				
2. La clase de matemáticas es aburrida				
MUCHO	*SI*	*INDECISO*	*POCO*	*NO*
39%	57%	4%	0%	0%

Este ítem puede considerarse dentro de las creencias sobre las matemáticas, aunque también se relaciona con el componente afectivo ya que, como se ha visto, las creencias interaccionan con las emociones, es decir si el estudiante comparte la creencia de que "la clase de matemáticas es aburrida", esto le ocasiona la sensación de aburrimiento, lo cual puede verse en el alto porcentaje de alumnos que contestaron que la clase de matemáticas es aburrida (82%), aunque lo anterior puede estar ocasionado más por la forma de enseñar del profesor que por los contenidos matemáticos abordados. Podemos apreciar también que sólo un 11% contestó que la clase es un poco aburrida y únicamente un 2% contestó negativamente a este ítem.

Referencias bibliográficas

Arnau, J. (1995). *Diseños longitudinales aplicados a las ciencias sociales y del comportamiento*. Limusa-Noriega.

Cohen, L. y Manion, L. (1989). Research Methods in Education. NY: Routledge.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2004). Levels of student responses in a spreadsheet-based environment. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the PME*, vol. 2, pp. 423-430. Norway.

Galbraith, P. y Haines, C. (1998). Disentangling the Nexus: Attitudes to Mathematics and Technology in a Computer Learning Environment. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 36, no. 3, pp. 275-290.

Hannula, M. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 49, pp. 25-46.

Hernández, R. y Gómez, I. (1997). Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio. En *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*. No. 13, pp. 41-61.

Scott, W. (1968). Attitude Measurement, in Lindzey, G. and Aronson, E. (Eds). *The Handbook of Social Psychology*. Addison-Wesley.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. pp. 575-596. New York: Macmillan.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1991). Symbolising and solving algebra word problems: the potential of a spreadsheet environment. *Proceedings of the XV Conference of the PME Group*, Assisi, Italia.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1993). Towards an Algebraic Approach: The role of spreadsheets. *Proceedings of the XVII International Conference of the PME.* Vol. III. University of Tsukuba, Tsukuba, Ibaraki, Japan.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. In *Approaches to Algebra*. Bedanrz, N., Kieran, C., Lee, L. (eds.). Kluwer Academic Publishers. Cap. 9. pp. 137-145.

Rufell, M. *et al* (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 35, pp. 1-18.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). *A spreadsheet Approach to solving Algebra Problems,* Journal of Mathematical Behavior. Vol 12, number 4, pp. 351-383.

Ursini, *et al* (2004). Validación y Confiabilidad de una Escala de Actitudes hacia las Matemáticas y hacia las Matemáticas Enseñadas con Computadora. *Educación Matemática*. vol. 16, no. 3, pp. 59-78.

Vale, C. y Leder, G. (2004). Student views of computer-based mathematics in the middle years: Does gender make a difference?. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 56, pp. 287-312.

UN ENFOQUE CTS PARA LA ENSEÑANZA DE ESTADÍSTICA.

José Luis Pittamiglio y Sylvia Borbonet
Liceo de Carmelo - Uruguay
pitta adinet.com.uy

Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo; Nivel educativo: Medio

Resumen

Se trata de una propuesta de clase en la cual se plantea a los alumnos la resolución de una situación real en base a una serie de datos estadísticos previamente recogidos. El tema sobre el cual se plantea la decisión a tomar implica de parte de los alumnos confrontar previamente las diferentes opiniones que existen en el medio social sobre esa decisión a tomar. La situación a plantear no puede ser ajena al entorno social en el cual están insertos los alumnos.

La metodología de trabajo será la siguiente: se forman grupos dentro de la clase que tienen que asumir un rol en defensa de una de las distintas posturas en torno al tema en cuestión. Además de los datos estadísticos, los docentes aportan material suficiente como para que cada equipo elabore, discuta y asuma la posición que luego habrá de defender en la discusión general del tema.

El objetivo que se persigue es que los alumnos logren ubicarse en el papel de quien tiene que tomar decisiones manejando datos estadísticos, buscando que dicha aplicación no aparezca descolgada de la realidad, como un mero ejercicio matemático, sino como parte fundamental de una decisión que puede alterar la vida de mucha gente.

UN ENFOQUE CTS DE LA ESTADÍSTICA

OBJETIVOS

- Desarrollar la capacidad de leer e interpretar datos estadísticos, que se presentan a través de tablas, gráficos o informes.
- Fomentar el razonamiento crítico basado en la valoración de evidencia objetiva.
- Incentivar la capacidad de discutir, comunicar y argumentar opiniones respecto a la información estadística interpretada.
- Reconocer la necesidad de obtener datos objetivos para poder tomar decisiones sobre problemas reales concretos.
- Integrar la estadística y el contexto real.

¿POR QUÉ EL ENFOQUE CTS?

Hasta pasada la mitad del siglo XX se mantenía vigente la visión tradicional de la ciencia y la tecnología como entidades alejadas de las controversias sociales: persistía aun la idea de que la ciencia y la tecnología pertenecían al laboratorio, absolutamente aislado de la realidad que cotidianamente vivimos en nuestras ciudades y a los problemas que necesariamente debemos enfrentar. Aparece sobre finales del siglo una orientación académica que reclama la contextualización social de la ciencia y la tecnología, de modo que comienza a perder terreno aquella idea del experto que toma decisiones de manera aislada en su laboratorio. Esta nueva situación supone romper en forma definitiva con al concepción positivista de las relaciones entre ciencia y sociedad, vigente hasta no hace tanto tiempo.

La separación entre tecnociencia y sociedad, ha llevado a lo largo de los siglos al surgimiento de la *tecnofilia* (la practican los adoradores de todo lo tecnológico) y la *tecnofobia* (practicada por aquellos que odian todo lo que provenga del área de la ciencia o la tecnología). Por encima de este enfrentamiento surge una nueva consideración de esas relaciones desde la perspectiva CTS (Ciencia, Tecnología y Sociedad), a través de la cual se niega la diferenciación precisa entre ciencia y tecnología y se coloca al contexto social en el centro del análisis para comprender el proceso de construcción tecnocientífica y sus efectos concretos sobre el medio social. De este modo el enfoque CTS hace que la tecnociencia baje unos cuantos escalones del sitial de endiosamiento en que se encontraba y pasa a ser considerada como una construcción social más, aunque con un alto grado de construcción institucional. Se parte de la base de que el desarrollo de la tecnociencia habilita la transformación de la realidad, pero también se comprende que supone un proceso de construcción de conocimientos y realidades no neutral desde el punto de vista valorativo. Se trata de una actividad humana y, como tal, la tecnociencia se va construyendo según valores determinados por los correspondientes contextos históricos, sociales y por lo tanto culturales. Por esta razón sus resultados no son nunca inocentes.

LA DILUCIDACIÓN DE CONTROVERSIAS

Una de las experiencias del enfoque CTS aplicado a un aula, es el llamado *Dilucidación de Controversias*. Se trata de un modelo de participación pública que trata de abrir el proceso de toma de decisiones en innovación tecnológica o intervención ambiental a la comprensión y valores de una sociedad determinada. La idea básica de este sistema de trabajo consiste en la formación de equipos dentro de un aula, que más adelante habrán de exponer las razones de cada uno de los participantes de la controversia, defendiendo sus posiciones cuando sea necesario. Cada equipo contará con una serie de materiales que el profesor aportará, quedando en libertad de hacerse del material extra que consideren necesario para intervenir en la controversia. Cada equipo defiende la posición de uno de los actores involucrados, confrontando posiciones con los demás. Todo el proceso se desarrolla en forma colectiva, lo que permite que todos los actores participen de la discusión y conozcan las razones que mueven a los demás.

Con este enfoque y sistema de trabajo, se pretende:

1. Democratizar el acceso a la toma de decisiones sobre asuntos relacionados con la ciencia y la tecnología.
2. Acercar a la ciudadanía (al alumnado) a la comprensión pública de la ciencia mediante el debate público informado.
3. Profundizar la convicción en los valores democráticos, mediante el estímulo de la toma de posición y la implicación cívica.

NUESTRA PROPUESTA DE TRABAJO

El primer paso consiste en determinar un tema que tenga vinculación directa con la ciencia y la tecnología y que a su vez se trate de un problema que se esté discutiendo a nivel de toda la comunidad. En este caso, nuestra opción fue por un tema vinculado a la problemática del cuidado y preservación de nuestro medio ambiente: la muy cercana ciudad de Fray Bentos -capital del departamento de Río Negro- se encamina a recibir en el corto plazo la instalación de una planta de celulosa propiedad de una importante compañía finlandesa llamada Botnia. Esta empresa ya tiene otras plantas de celulosa en diferentes países del mundo y ha presentado un proyecto para instalarse en esta ciudad del litoral uruguayo, a orillas del río Uruguay.

El hecho ha suscitado una serie de controversias y discusiones en las cuales aparecen involucrados diversos actores, algunos de los cuales coinciden en sus posturas, otros coinciden solo parcialmente y en algunos casos se registran enfrentamientos que parecen inconciliables.

La propuesta de trabajo consiste en cuatro momentos diferentes:

- **RECOPILACIÓN DE INFORMACIÓN:** el docente proporciona a los alumnos toda la información posible, cuidando de que cada actor social tenga suficientes elementos como para debatir.

- **PREPARACIÓN PARA EL DEBATE: :** los equipos leen y discuten la información que entregó el profesor; si lo consideran necesario la pueden ampliar con recortes de prensa, entrevistas a protagonistas de los hechos o información obtenida en internet.

- **DEBATE:** se trata de organizar el intercambio y confrontación de ideas, moderado por el docente. Previo al debate suele ser interesante que el docente haga llegar una serie de preguntas (las mismas a todos los equipos) para incentivar la discusión.

- **EVALUACIÓN:** se recogen las opiniones personales de los alumnos sobre el proceso seguido a lo largo del tema.

LOS EQUIPOS

Ante este hecho, resolvemos plantear la formación de SEIS EQUIPOS dentro de la clase, cada uno de los cuales habrá de representar diferentes ACTORES SOCIALES, que habrán de participar de un debate. Para que esta confrontación de posiciones sea real, el docente entrega a los equipos una cierta cantidad de documentación mínima (que el equipo podrá ampliar) para prepararse a defender la postura que les corresponde. Es importante aclarar que la documentación a entregarse puede ser real o puede ser preparada por el docente (documento ficticio). Los equipos son los siguientes:

1. **Población de Fray Bentos**: este equipo será el vocero de los habitantes de la ciudad. Se les entregará como documentación los resultados de una encuesta de opinión realizada entre habitantes de la ciudad sobre el posible impacto ambiental del emprendimiento y sobre el tema laboral en la ciudad (la realidad actual y cómo estiman que será cuando la planta esté funcionando).
2. **La voz de la empresa**: este equipo habrá de representar a la empresa. Manejarán información sobre las plantas de celulosa en general (utilizando material repartido por la propia empresa), sobre los índices de contaminación de sus plantas en otros países y sobre la cantidad de puestos de trabajo que habrán de crear, una vez que la planta esté funcionando.
3. **Organizaciones ambientalistas**: este grupo tendrá en su poder el informe oficial sobre impacto ambiental, así como los informes sobre contaminación en otros países, diferentes a los que maneja la propia empresa. También manejarán información que avala la postura de la disminución del turismo que traerá aparejada la instalación y funcionamiento de la planta.
4. **Gobierno uruguayo**: el equipo que representa al gobierno manejará el informe de la DINAMA (Dirección Nacional de Medio Ambiente). También estimará la baja de la desocupación de acuerdo a un informe estadístico preparado por el Instituto de Estadísticas de la Facultad de Ciencias Económicas. Finalmente manejarán información sobre el monto a invertir por la empresa en nuestro país y su incidencia en la creación de empleos indirectos.
5. **Gobierno argentino**: este equipo se manejará con un informe sobre la futura contaminación del río Uruguay y su incidencia en la calidad de vida de las poblaciones argentinas vecinas a Fray Bentos. También contarán con información sobre las plantas de celulosa que funcionan en la Argentina.
6. **Central Sindical Uruguaya**: este equipo contará con un informe sobre actual desocupación en el departamento de Río Negro y sobre la cantidad de puestos de trabajo (directos e indirectos) que habrán de crearse con la planta de celulosa. También manejará legislación vigente en el país sobre la posibilidad o no de exigir solamente la contratación de personal uruguayo para la obra, así como el control del estricto cumplimiento de las leyes laborales y aportes patronales.

INFORMACIÓN EXTRA

Se ponen a disposición de todos los equipos una serie de informes obtenidos en Internet sobre los siguientes temas:

- Audiencia pública realizada en Fray Bentos con representantes de la empresa, organizaciones ambientalistas y población en general.
- Nivel de contaminación con cloro que producen otras plantas de celulosa en el mundo.
- Datos sobre enfermedades en lugares cercanos a plantas de celulosa.
- Informe y gráficas sobre la recientemente comprobada muerte de cisnes de cuello negro en Valdivia (Chile), muy cerca de una planta de celulosa.
- Informe estadístico sobre incidencia económico - financiera del funcionamiento de la planta en la economía local y nacional.
- Estimación de los empleos que podrían perderse en rubros como: pesca artesanal, actividades turísticas y actividades agrícolas.

EL PAPEL DEL DOCENTE: PREGUNTAS PARA ORIENTAR

Es conveniente que -en forma previa al debate- el docente haga llegar a los alumnos una serie de preguntas que puedan ayudar a una reflexión colectiva sobre el problema. La idea es que las preguntas también apunten a que cada equipo pueda cuestionar las posiciones que les tocó defender. Sugerimos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué la empresa elige ese lugar para instalar la planta de celulosa y no otro?
2. El gobierno argentino, ¿estaría en contra del funcionamiento de esta planta si se instalara en la otra margen del río?.
3. ¿Existen emprendimientos (fábricas, plantas, industrias) que no contaminen el ambiente?
4. La empresa, ¿podría instalarse con una planta de celulosa con estas características en algún país del Primer Mundo?.
5. La población de Fray Bentos, ¿ha evaluado el hecho muy probable de que cientos de familias de desocupados se trasladen al cinturón suburbano de la ciudad?.
6. ¿Es cierto que el sistema Kraft-ECF que utiliza la empresa Botnia para la elaboración de la pulpa de celulosa, está prohibido en Europa?.

Palabras clave: enfoque CTS para estadística

BIBLIOGRAFÍA

Gordillo , M. y López, J.A. (2000) “Acercando la ciencia a la sociedad: la perspectiva CTS y su implantación educativa”, en Medina,M. (coord.) Perspectivas y retos de Ciencia, Tecnología, Naturaleza y Cultura. El Siglo XXI, Barcelona, Anthropos.

López, J.A (1997): “Ciencia y tecnología como formas de conflicto social” en: Amborgi, A. (ed) Filosofía de la ciencia: el giro naturalista, Palma, Universidad de las Islas Baleares, 1999.

Sutz, J. (1998) “Ciencia, tecnología y sociedad: argumentos y elementos para una innovación curricular”, en: OEI, Revista Iberoamericana de educación, Ciencia, tecnología y sociedad ante la educación, 18 Septiembre-Diciembre, pp145-169.

LA CONJETURA EN GEOMETRÍA DINÁMICA A PARTIR DEL *ARBELOS* DE ARQUÍMEDES

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay.
filomate@adinet.com.uy – almamat@adinet.com.uy
Campo de investigación: Formación de profesores – Métodos de demostración – Pensamiento geométrico; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

Trabajando en un ambiente de Geometría Dinámica y a partir de actividades que involucran al arbelos *de Arquímedes se busca explicitar la formulación de conjeturas y elaborar demostraciones que den cuenta de las conjeturas formuladas, poniendo de relieve la diversidad de resultados obtenidos así como la riqueza de los caminos tomados.*

Palabras clave: Prueba, demostración, Geometría Dinámica.

Introducción

El fracaso en la enseñanza de la demostración, el reconocimiento de que la actividad de demostrar debe tener en cuenta los motivos de los propios estudiantes y la aparición de programas computacionales de Geometría Dinámica han llevado a buscar alternativas para su enseñanza y aprendizaje. (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000)
Hoy en día los *Standards and Principles for School Mathematics* (NCTM, 2000) promueven "aprender a razonar y construir demostraciones como parte de la comprensión matemática para que todos los estudiantes

- reconozcan los razonamientos y las demostraciones como partes esenciales y poderosas de las matemáticas;
- hagan e investiguen conjeturas matemáticas;
- desarrollen y evalúen argumentos matemáticos y demostraciones;
- seleccionen y usen varios tipos de razonamiento y métodos de demostración."

Marco teórico

Asumimos que "Crear las condiciones que permitan restaurar dentro del aprendizaje en situación escolar el significado original de la demostración es una cuestión importante para la didáctica de las matemáticas. Pensamos que uno de los medios para lograrlo consiste concretamente en situar de nuevo la demostración en una práctica social, en un debate en el que esté en juego el valor de verdad de una aserción. Para esto es necesario que los partenaires se pongan de acuerdo sobre las reglas del debate, es decir, sobre la construcción y aceptación de un sistema común de validación. Pensamos que, una vez colocados en este tipo de situación, los alumnos podrán más fácilmente reconstruir y apropiarse del sistema de validación específico de las matemáticas." (Balacheff y Laborde, 1998, págs. 268-269)
Balacheff concibe *prueba* como una explicación cuyo fin es establecer la veracidad de un enunciado y que es reconocida y aceptada por un colectivo. Ésta puede evolucionar o cambiar con el tiempo y puede ser aceptada por un colectivo y no por otro. *Demostración* es una prueba con una forma particular: es una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de los enunciados mencionados.

Balacheff identifica dos categorías de demostraciones, las 'pragmáticas', basadas en el uso de ejemplos, en una acción o en mostrar algo, y las 'intelectuales', basadas en formulaciones abstractas de las propiedades involucradas y en sus relaciones. En las pragmáticas distingue *empirismo ingenuo* (asegurar la validez de un resultado basándose para su verificación en algunos casos) y *experiencia crucial* (basa la validez de un resultado en la verificación de un caso especialmente elegido). Entre las intelectuales *ejemplo genérico* (la justificación se basa en operaciones o transformaciones realizadas sobre un ejemplo que es considerado como representante de una clase. Las operaciones o transformaciones se hacen sobre un ejemplo pero entendiendo que se podrían hacer sobre cualquier elemento de la clase) y *experiencia mental* (las razones que fundamentan la validez de la proposición se basan en un análisis de las propiedades de los objetos en juego. Estas propiedades no pueden ser testificadas por medio de sus representantes sino que deben ser formuladas en su generalidad).

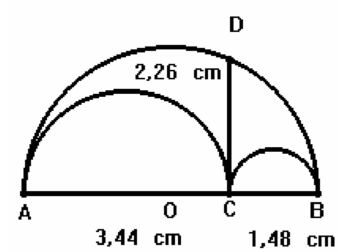
Objetivo, metodología de trabajo y actividades planteadas

El taller se planteó como objetivo introducir a los participantes –estudiantes cursando Geometría I, de la especialidad Matemática del Instituto de Profesores Artigas– en el trabajo en un ambiente de Geometría Dinámica (GD), aprovechando las posibilidades que brinda la GD para hacer mediciones, construcciones de tablas, cálculos..., para formular y reformular conjeturas, y finalmente elaborar argumentos que contribuyan a la demostración de dichas conjeturas, comparando y analizando las distintas formulaciones que elaboren los participantes. Trabajaron en parejas, siendo responsabilidad de cada pareja la formulación de conjeturas respecto a las situaciones que se les planteaban en ambiente dinámico (usando *The Geometer's Sketchpad*) y la elaboración de una prueba. Aquí el compromiso es arriesgar conjeturas para inmediatamente ponerlas a prueba, aceptando el desafío de equivocarse como también el placer de encontrar argumentos propios que agreguen claridad y comprensión y no solo certeza. Cada pareja escribe sus conjeturas y pruebas en una hoja que se es entregada al finalizar. Los docentes, observadores privilegiados, toman nota y preguntan acerca de las formas de proceder de cada pareja, así como orientan en torno al manejo del software. Las distintas pruebas se colectivizan a la clase, exponiendo cada pareja su trabajo y contestando preguntas que surgen en el transcurso de su exposición.

En el *Libro de los Lemas*, obra de Arquímedes (287 a. C. + 75 = 212 a. C.) compuesta por quince proposiciones referidas a cuestiones de geometría elemental, aparecen tres (4, 5 y 6) donde interviene el *arbelos* o cuchillo de zapatero: zona limitada por tres semicircunferencias tangentes de diámetros AB, AC, CB, donde C pertenece al segmento AB e incluidas en un mismo semiplano. El *arbelos* tiene una serie de propiedades cuyas demostraciones pueden ser hechas recurriendo solamente a conceptos manejados en Bachillerato: ángulos inscriptos, teorema de Pitágoras, semejanzas. Las actividades planteadas giran en torno al estudio del *arbelos*.

Reportamos aquí lo trabajado frente a la Actividad 1:

¿Están relacionadas de alguna manera las medidas de los segmentos AC, CB y CD?



Lo trabajado por los estudiantes

La formulación de conjeturas. Las primeras observaciones que surgen hacen referencia a casos particulares:
– Si C coincide con O entonces los tres segmentos son iguales.
– Si C pertenece al segmento OB entonces se cumple que $CB < CD < CA$.
– Si C pertenece al segmento OB entonces $AC - CD = CD - CB$.
Esta conjetura es descartada al hacer mediciones con *The Geometer's Sketchpad*.
– $AC \times CB = CD^2$
La conjetura surge a partir de la constatación hecha por una pareja de participantes que hicieron las mediciones respectivas y 'verificaron' la proposición arrastrando C en el segmento AB.
Cada uno de los participantes hace sus propias mediciones: la certeza del resultado es aceptada por todos los participantes.

La elaboración de pruebas. La cuestión que se presenta en este momento es ¿por qué se cumple $AC \times CB = CD^2$?
Empieza ahora la búsqueda de una demostración.
Al igual que en la formulación de conjeturas las primeras aproximaciones sólo son válidas en casos particulares:
– Si $C = O$ es cierta, dice un participante.
– Si $C = A$ o si $C = B$ también porque ambos miembros son cero, afirma otro participante.
– Tendremos que asumir que CD es perpendicular a AB.
¿Y si C no está en las posiciones anteriores?
Ahora los participantes trabajan con lápiz y papel, haciendo alguna observación esporádica en la pantalla.

Primera prueba
Una pareja de profesores que trabajan juntos observan que el triángulo OCD es rectángulo por lo que:
$OD^2 = OC^2 + CD^2$.
Como $OD = AB/2$ y $OC + CB = AB/2 \rightarrow OC = AB/2 - CB = (AB - 2 \times CB)/2$
Sustituyendo tienen $(AB/2)^2 = [(AB - 2 \times CB)/2]^2 + CD^2$
$AB^2/4 = CD^2 + AB^2/4 - AB \times CB + CB^2$
$AB \times CB - CB^2 = CD^2$
$CB \times (AB - CB) = CD^2$
$CB \times AC = CD^2$

Segunda prueba
En ABD: $AB^2 = AD^2 + BD^2$
También en ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2$
en BCD: $BD^2 = CB^2 + CD^2$
y $AB = AC + CB$
Sustituyendo en la primera igualdad:
$(AC + CB)^2 = (AC^2 + CD^2) + (CB^2 + CD^2)$
$AC^2 + 2 \times AC \times CB + CB^2 = AC^2 + 2 \times CD^2 + CB^2$
$2 \times AC \times CB = 2 \times CD^2$
$AC \times CB = CD^2$

Tercera prueba.
Los triángulos ACD y DCB son semejantes por lo que $AC/CD = DC/CB \rightarrow AC \times CB = CD^2$.

Cuarta prueba.
Usando el teorema de la altura.

Quinta prueba.
Usando potencia de un punto respecto de una circunferencia.

La reflexión sobre las pruebas elaboradas. Generalmente la presentación de un resultado matemático termina cuando se llega al final de la demostración, cuando se ha verificado dicho resultado.
En el taller hemos propuesto a los participantes explicitar los conceptos y resultados que intervienen en cada demostración, rescatar las conexiones que establece cada demostración con conceptos anteriores.

Primera prueba.
Se centra la atención en el triángulo OCD que es rectángulo,
por el teorema de Pitágoras tenemos que $OD^2 = OC^2 + CD^2$.
De los tres segmentos involucrados en esta igualdad solo CD interviene en la proposición que queremos demostrar por lo que buscamos ahora hacer intervenir a los segmentos AC y CB. Para ello sustituimos OD por AB/2 y a OC por AB/2 – CB, donde el segmento AB = AC + CB. Lo que siguió fueron simplificaciones.

Segunda prueba.
Se tienen en cuenta tres triángulos rectángulos: ACD y BCD los son por ser CD perpendicular a AB, ADB lo es por pertenecer D a la semicircunferencia de diámetro AB.
Haciendo uso del teorema de Pitágoras en este último tenemos:
$AB^2 = AD^2 + BD^2$.
Sustituimos AD^2 y BD^2 por las sumas de cuadrados obtenidas haciendo uso del teorema de Pitágoras en ACD y BCD: $AD^2 = AC^2 + CD^2$ y $BD^2 = CB^2 + CD^2$.
A continuación se desarrollan los cuadrados y se simplifica.

Tercera prueba.
En esta demostración se atiende un aspecto que no había aparecido en las demostraciones anteriores: la semejanza de los triángulos ACD y DCB.

Cuarta prueba.
Aquellos participantes que tenían presente el teorema de la altura no hicieron más que constatar que estaban en las condiciones que pedía la hipótesis de dicho teorema: ABD rectángulo y CD altura.
Obsérvese que la tercer demostración es una demostración del teorema de la altura.

Quinta prueba.
Nuevamente aquí se apela a un resultado matemático ya establecido y lo que se hace es constatar que se está en las condiciones requeridas en la hipótesis de dicho resultado.
Si por un punto P se trazan dos secantes AA’ y BB’ a una circunferencia se cumple que

PA × PA' = PB × PB'. Algunos participantes, que no conocían la proposición de Steiner, se ponen a trabajar en una demostración para ella.

Conclusiones

Todas las parejas fueron capaces de formular conjeturas, para ello hicieron uso de la capacidad de *arrastre* del ambiente dinámico permitiendo reformularlas o confirmarlas. Las actividades planteadas hicieron que los estudiantes se involucraran en el trabajo matemático y el papel de los docentes estuvo en aclarar dudas acerca del manejo del software usado así como escuchar los planteos de los estudiantes y en algunos casos indagar acerca de los caminos que estaban tomando algunos trabajos de las distintas parejas. Las parejas de estudiantes también fueron capaces de elaborar pruebas que en su mayoría fueron demostraciones. Según la distinción de Balacheff las pruebas construidas (en su gran mayoría) fueron experiencias mentales.

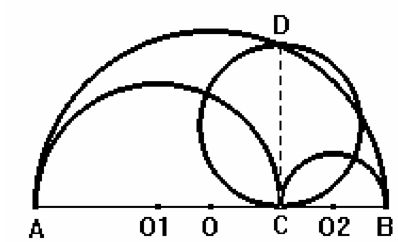
De las otras actividades propuestas

Con una dinámica similar a la expuesta anteriormente se trabajó en torno a las relaciones que siguen, también referidas al *arbelos*. Ofrecemos posibles pruebas que fueron elaboradas por las parejas y acordadas por la clase.

- ***La proposición 4 del Libro de los Lemas***

El área del arbelos es igual al área del círculo de diámetro CD donde CD es perpendicular a AB y D pertenece a la semicircunferencia de diámetro AB.

$O_1A = r_1$ y $O_2B = r_2$.
Los triángulos (ACD) y (DCB) son semejantes →
→ $CD^2 = AC \times CB \to CD = \sqrt{(2r_1 2r_2)} = 2\sqrt{(r_1 r_2)} \to$
área del circulo de diámetro CD = $\pi r_1 r_2$.
Área del arbelos = $\pi(r_1 + r_2)^2/2 - \pi r_1^2/2 - \pi r_2^2/2 = \pi r_1 r_2$.



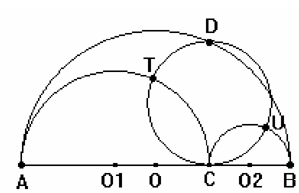
- ***Arco AC + arco CB = arco AB.***

Arco AC + arco CB = $\pi r_1 + \pi r_2 = \pi(r_1 + r_2)$ = arco AB

Si T y U son los respectivos puntos de intersección de la circunferencia de diámetro CD con las semicircunferencias de diámetros AC y CB se cumple:

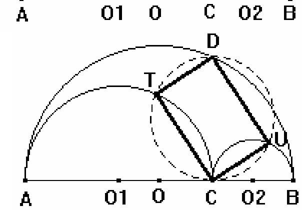
- ***A, T, D y B, U, D están alineados.***

Los ángulos inscriptos ATC y CTD son rectos
por abarcar los diámetros AC y CD respectivamente.
Idem. con B, U, D.



- ***(CUDT) es rectángulo.***

(CUDT) es paralelogramo (CU//TD, CT//UD) con ángulos rectos → (CUDT) es rectángulo.



Otra formulación de la mima conjetura:

Los segmentos TU y CD son iguales y se bisecan.

Referencias

Bankoff, L. (1994). The Marvelous Arbelos. En R. Guy and R. Woodrow (Eds.), *The Lighter Side of Mathematics*, pp. 247-253. U.S.A.: MAA.

De Villiers, M. (1998). The Future of Secondary School Geometry. *La lettre de la Preuve*: mars-avril.

http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98

Hadas, N. ; Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 127-150.

Heath, T. L. (1953). Book of Lemmas. En T. L. Heath (Ed.), *The Works of Archimedes*, pp. 301-318. U.S.A.: Dover.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* (Software). U.S.A.: Key Curriculum Press.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 25-53.

NCTM (2000). *Standards and Principles for School Mathematics.* U.S.A.: NCTM.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Mario Dalcín – Verónica Molfino
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay.
filomate@adinet.com.uy – veromol@adinet.com.uy
Campo de investigación: Formación de profesores; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen
Se reporta aquí un minicurso en el que participaron profesores de matemática de Enseñanza Media. Trabajando en un ambiente de Geometría Dinámica se aborda la resolución de problemas que involucran distintas áreas de la matemática: geometría métrica, cálculo diferencial, geometría analítica, álgebra, y que permiten poner de manifiesto la pertinencia y relevancia –así como señalar sus peculiaridades- del ambiente dinámico en la construcción del conocimiento matemático por parte de los participantes y a su vez discutir su papel en el trabajo con estudiantes.

Introducción

Las reformas de los planes de estudio de matemática que se han ido dando en los últimos años coinciden en señalar la relevancia de usar tecnología en el aprendizaje de la matemática. El amplio desarrollo y difusión de tecnología, en especial de calculadoras gráficas y de programas de Geometría Dinámica (GD), no sólo ha producido cambios en el tipo de tareas a plantear a los estudiantes sino también en el papel que deberán asumir profesores y estudiantes a lo largo del desarrollo de la clase.

Marco teórico

La forma de funcionamiento del ambiente dinámico "proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción. En otras palabras, una propiedad geométrica 'es un invariante perceptual'." (Balacheff, 2000) Esto implica un desfio: Si la demostración es vista sólo como verificación de algo que mediante la GD resulta obviamente cierto, es claro que no habrá ningún incentivo en generar una demostración deductiva. Es aquí donde debemos tener presente otras funciones de la demostración: explicación, descubrimiento, comunicación, sistematización, desafío intelectual. (De Villiers, 1993) La convicción de la certeza de una proposición, que bien puede ser facilitada por el análisis de algunos ejemplos y contraejemplos mediante el uso de GD, puede ser el inicio de la búsqueda de una explicación, de aclarar el por qué. (Dreyfus y Hadas, 1996)

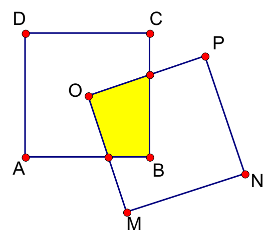
Objetivos y metodología de trabajo

En el presente minicurso participaron dieciocho docentes de matemática de Enseñanza Media y que se realizó en el marco de actividades de extensión del Instituto de Profesores Artigas, y constó de cuatro instancias de dos horas de duración. Tuvo como objetivo introducir a los participantes en el manejo y uso de un software de GD (*The Geometer's Sketchpad*) en la resolución de problemas y su fundamentación. Los problemas trabajados contemplan distintas áreas de la matemática (geometría métrica, álgebra, geometría analítica, cálculo infinitesimal) presentes en la Enseñanza Media. Los profesores participantes trabajaron en parejas y frente a cada actividad (diez en total) tuvieron que generar un modelo dinámico que diera cuenta de la situación planteada, formular una conjetura y luego elaborar una demostración que al finalizar se entregaba por escrito a los impartidores del mincurso. Al finalizar cada actividad se colectivizaban las distintas formas de generar el modelo dinámico así como las demostraciones elaboradas por las distintas parejas. Quienes dictábamos el minicurso hicimos una presentación inicial de las herramientas básicas del software y de su manejo. Durante las actividades orientábamos a los docentes en el uso del software así como tomábamos nota de aspectos que nos parecían relevantes en cuanto al proceder de los docentes.

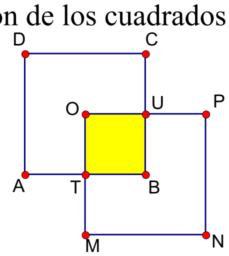
Algunos resultados
Reportamos a continuación lo producido por el colectivo de docentes en torno a tres de las actividades.

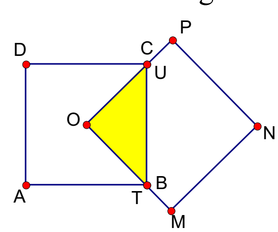
Actividad 1: Cuadrados superpuestos
El cuadrado ABCD tiene centro O. El cuadrado OMNP es igual al anterior, su vértice O es fijo y los restantes móviles. ¿Cuándo el área de la zona en que dichos cuadrados se superponen es mínima?

Un primer desafío para los participantes es hacer una construcción en *The Geometer's Sketchpad* que corresponda a la situación planteada. Las construcciones en GD necesariamente implican la elaboración de una estrategia previa que tenga en cuenta por un lado las características del software y por otro las necesidades del problema a resolver.

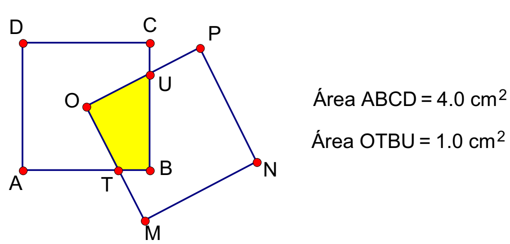


Una vez hecha la construcción se puede *arrastrar* el cuadrado OMNP y percibir en pantalla que en algunas posiciones especiales el área de la zona resultante de la superposición de los cuadrados es l/4 del área de los cuadrados originales.

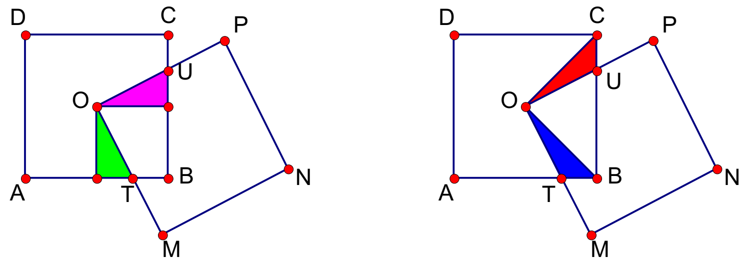




¿Habrá alguna posición donde dicha área sea menor?
Podemos ahora hallar el área tanto de la zona que queremos minimizar como del cuadrado original. Observamos que a pesar de hacer variar el segundo cuadrado las áreas se mantienen constantes.



¡Pero entonces el área de la zona de superposición de los cuadrados es constante!
Surge ahora la necesidad de encontrar una explicación para esta sorpresa. Ya tenemos una demostración para dos posiciones particulares. ¿Podremos construir un argumento que de cuenta de la situación general?
Presentamos dos posibles demostraciones visuales que surgieron en el minicurso:

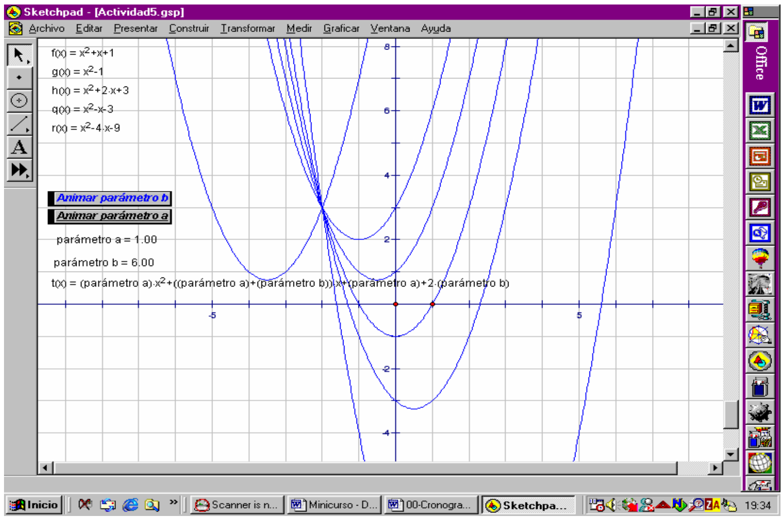


Actividad 2: Familias de funciones cuadráticas
Examine las cinco funciones de la familia A.
(a) Puede pensar en más funciones que, en su opinión, pertenezcan a la misma familia?
(b) Puede encontrar una relación común entre los coeficientes de esta familia de funciones?
(c) Puede conjeturar una relación entre los gráficos de esta familia de funciones?
(d) Chequee su conjetura graficando las cinco funciones en los mismos ejes con Sketchpad. ¿Qué observa?
(e) ¿Puede demostrar su conjetura?

Familia A	Familia B	Familia C	Familia D
$y = x^2 + x + 1$	$y = 2x^2 + 2x + 2$	$y = -x^2 - x - 1$	$y = -4x^2 - 4x - 4$
$y = x^2 - 1$	$y = 2x^2 + 3x + 4$	$y = -x^2 + x + 3$	$y = -4x^2 - 3x - 2$
$y = x^2 + 2x + 3$	$y = 2x^2 + x$	$y = -x^2 + 1$	$y = -4x^2 + 4$
$y = x^2 - x - 3$	$y = 2x^2 - 2$	$y = -x^2 - 2x - 3$	$y = -4x^2 - 2$
$y = x^2 - 4x - 9$	$y = 2x^2 + 5x + 8$	$y = -x^2 - 3x - 5$	$y = -4x^2 - 5x - 6$

Los participantes iniciaron el trabajo representando gráficamente cada una de las funciones cuadráticas que componen cada familia. A partir de lo observado en los gráficos conjeturan que todas las parábolas de la familia A pasan por el punto de coordenadas (–2,3). ¿Cómo probarlo? Hay parejas que sustituyen los valores –2 y 3 en cada una de las ecuaciones de las parábolas; otras optan por hallar los puntos de intersección de dos de las parábolas obteniendo como solución el punto (–2,3) y a continuación proceden como las parejas anteriores. Surge la observación –hecha a partir de la tabla entregada– que todas las parábolas de la familia A tienen coeficiente principal 1. Algunas parejas afirman que todas las funciones cuadráticas son de la forma $y = 1.x^2 + (1 + b)x + (1 + 2b)$ siendo b un parámetro que toma distintos valores según el caso (0, -1, 1, -2, -5 respectivamente). Dicha conjetura es puesta a prueba en *Sketchpad* creando una familia de funciones cuadráticas dependientes de un parámetro, graficándola y animando el parámetro, lo que permite observar en pantalla una familia de funciones cuadráticas pasando por el punto (–2,3). Nuevamente se plantea la cuestión de cómo demostrarlo. Se resuelve indagar si el punto (–2,3) verifica la ecuación $y = 1.x^2 + (1 + b)x + (1 + 2b)$ para todo valor del parámetro b. La respuesta obtenida es afirmativa.

Un trabajo similar se hace con las familias B, C y D. ¿Habrá una expresión que de cuenta de las cuatro familias a la vez? Se pone así en marcha un nuevo trabajo de búsqueda, formulación de conjeturas, verificación de dichas conjeturas en ambiente dinámico, y reformulación de conjeturas (en caso de que no superaran la verificación empírica en *Sketchpad*) o la búsqueda de una demostración matemática. Se llega a la conclusión que todas las familias responden a una expresión del tipo $y = a.x^2 + (a + b)x + (a + 2b)$ siendo a y b parámetros.



Actividad 3: Familias de rectas

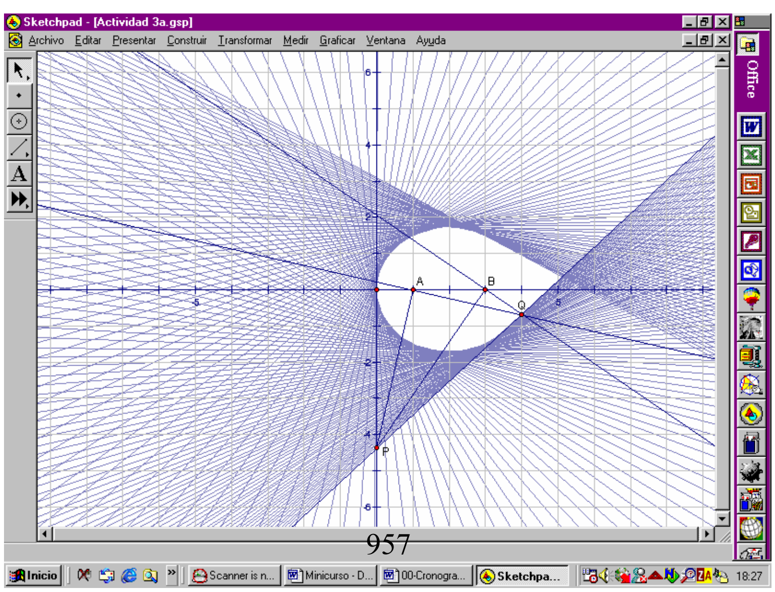
(a) Se consideran A(1,0), B(3,0) y P variable en el eje y. (a) $\perp$ (AP) por A, (b) $\perp$ (BP) por B, (a) $\cap$ (b) = {Q}.

i) Estudiar las rectas (PQ).

ii) (s) $\perp$ (AP) por P. Estudiar las rectas (s).

iii) ¿Y si B(-3,0)?

Luego de construir en *Sketchpad* un modelo que diera cuenta de la situación planteada se activó la traza de la recta PQ y animó el punto P, pudiendo observar en pantalla el comportamiento de dichas rectas:



Las preguntas más frecuentes que se hicieron las parejas de profesores: ¿Envuelven dichas rectas una elipse? ¿Una circunferencia tal vez?
Para salir de dudas se hizo necesario recurrir a la geometría analítica. Trabajando ahora en lápiz y papel asignan las coordenadas (0,k) al punto P y a partir de dicho parámetro k hallan las coordenadas (4,3/k) para el punto Q. La recta PQ tiene ecuación $(3 - k^2)x - 4ky + 4k^2 = 0$. Ordenando dicha ecuación en el parámetro k se tiene: $(4 - x)k^2 - 4yk + 3x = 0$. Al hacer cero el discriminante de esta ecuación se tiene: $(-4y)^2 - 4(4 - x)(3x) = 0$, equivalente a $3x^2 - 12x + 4y^2 = 0$. Queda claro ahora que no se trata de una circunferencia sino de una elipse. ¿Cuáles son sus vértices y sus focos? Observando la animación dinámica los vértices del eje mayor son (0,0) y (4,0). ¿Cómo verificarlo analíticamente? Se resuelve transformar la ecuación obtenida y expresarla en la forma $(x - 2)^2 /4 + y^2 /3 = 1$. Su centro es (2,0), los vértices sobre el eje mayor son los previstos, y se pueden hallar los vértices sobre el eje menor para los que no se tenía mayor información salvo que sus ordenadas tomaban valores entre 3/2 y 2 o entre –3/2 y –2): son $(2,\sqrt{3})$ y $(2, -\sqrt{3})$.
En la parte ii) de la actividad se siguió un tratamiento similar al de la parte i).
La parte iii) permitió, sin tener que volver a hacer una construcción sino simplemente cambiando las coordenadas del punto B en el archivo dinámico creado previamente, observar el comportamiento de las rectas PQ en la nueva situación. Se conjeturó que envolvían una parábola y se elaboró una demostración para ello.

(b) Estudiar el comportamiento de las rectas

$$(a_m): (m + 1)x + (3m - 2)y + 2m = 0$$
$$(b_m): (m^2 - 1)x - 2my + (1 + m^2) = 0$$

Estamos frente a familias de rectas que dependen de un parámetro de primer o segundo grado. Se nos presenta ahora la situación inversa a la vista anteriormente. *Sketchpad* permite graficar funciones que dependen de uno o más parámetros. ¿Pasarán las rectas por un punto fijo al variar el parámetro? ¿Serán todas paralelas? ¿Ni paralelas ni concurrentes? ¿Para todo punto del plano encontraremos una recta de cada familia? ¿En qué puntos si y en cuáles no? Una aproximación a las respuestas de estas cuestiones la podremos obtener analizando el gráfico de cada familia de rectas a medida que hacemos variar el parámetro. Se hace imprescindible trabajar en lápiz y papel a la hora de buscar una explicación para lo observado.

Conclusiones

Al finalizar el minicurso los participantes valoraron como muy positivo haber participado en el mismo (para muchos era la primera vez que trabajaban en un ambiente dinámico), al cual nunca se habían acercado por considerarse inoperantes en cuestiones informáticas o porque en algunos intentos se habían visto imposibilitados de comprender el funcionamiento de las herramientas básicas del software.
Todas las parejas fueron capaces de construir archivos dinámicos que dieran cuenta de las situaciones planteadas en las actividades. El trabajo en un ambiente de GD permitió a los participantes experimentar y examinar relaciones matemáticas desde diversos ángulos y perspectivas. El uso de este tipo de recursos posibilitó que los profesores pudieran visualizar el problema de varias maneras mediante representaciones que incluyeron el uso de mediciones (de distancias, áreas o ángulos), tablas, funciones, familias de funciones y sus gráficos.
El trabajo en un ambiente dinámico se mostró fructífero a la hora de formular conjeturas facilitando el descartar una conjetura por falsa o posibilitando el paso a un trabajo en

lápiz y papel en busca de la elaboración de una demostración que explicara la conjetura formulada.

Referencias

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, pp. 93-108. Barcelona, España: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon, 26*, pp. 15-30.

Dreyfus, T. y Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28 (1)*, pp. 1-5.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* (Software). U.S.A.: Key Curriculum Press.

ALME 2005

Clame
Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa