Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 20
Año 2007

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 20

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA.
VOLUMEN 20

Editor:
Cecilia Rita Crespo Crespo / Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Editores Asociados:
Patricia Lestón, Teresa Cristina Ochoviet, Carlos Oropeza Legorreta

Diseño de portada:
Patricia Sánchez Aguilar

ISBN 978970 - 9971 - 13 - 2

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
(CLAME)
www.clame.org.mx

Consejo Directivo (2004-2008)

Gustavo Martínez Sierra	Presidente	*presidencia@clame.org.mx*
Germán Beitía	Secretario	*secretario@clame.org.mx*
Joaquín Padovani	Tesorero	*tesorero@clame.org.mx*
Juan Raúl Delgado Rubí	Vocal Caribe	*vocal_caribe@clame.org.mx*
Edison de Faria	Vocal Centroamérica	*vocal_centroamerica@clame.org.mx*
Gisela Montiel Espinosa	Vocal Norteamérica	*vocal_norteamerica@clame.org.mx*
Cecilia Crespo Crespo	Vocal Sudamérica	*vocal_sudamerica@clame.org.mx*

Consejo Consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta

Comisión de admisión

Gabriela Buendía
Eugenio Carlos
Sandra Castillo

Comisión de Promoción Académica

Javier Lezama
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Uldarico Malaspina

Comité Internacional de Relme

Leonora Díaz Moreno
Gustavo Bermúdez
Olga Pérez González
Hugo Parra

Comité Científico de Evaluación

Tabla de contenidos

CATEGORÍA 1: Análisis del currículum y propuestas para la enseñanza de las matemáticas 1

Conflictos cognitivos que emergen en la resolución de problemas relativos al límite
Noé Miranda Valle, Catalina Navarro Sandoval, Elika Sugey Maldonado Mejía 3

Dificultades en la interpretación geométrica de algunos conceptos en álgebra lineal
Carlos Oropeza L., Javier Lezama A. 9

Las secuencias didácticas con enfoque constructivista: El caso de la función valor absoluto
María Guadalupe Ordaz Arjona 15

Desarrollo de la dimensión emocional y cambio en el auto-concepto matemático a través de resolución de problemas
José Daniel Martínez González 21

La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo docente
Silvia Elena Ibarra Olmos; Lorena Fernández Sesma 26

Resolución de problemas antiguos que involucran al Teorema de Pitágoras
Mario Dalcín, Mónica Olave 31

Un informe sobre el significado personal logrado en el tema intervalos de confianza por alumnos de una facultad de ciencias veterinarias
Teresita E.Terán, Mercedes Anido de López 37

Algunas inconsistencias en el sistema axiomático deductivo de los Elementos de Euclides y sus implicaciones en el aprendizaje de la geometría
Marco Antonio Morales Salmerón, Santiago Ramiro Velázquez Bustamante 43

Visión absolutista del principio de identidad en el currículo escolar de matemáticas
Andrea L. López Pineda, Beatriz Moreno Carrillo 49

Cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto
Vicenç Font 55

El conocimiento de los estilos de aprendizaje como estrategia para un aprendizaje autónomo
Ana María Craveri, María del Carmen Spengler 61

La importancia de la visualización geométrica como estrategia de análisis
Héctor E.Rubio Scola, Roberto López, Mercedes Anido 67

El uso de computadora y cañón para el desarrollo del entendimiento matemático de fracciones en 4° de primaria
Iliana Miriam López Jarquín, Simón Mochón Cohen 73

La argumentación y enseñanza del teorema fundamental del cálculo en profesores de bachillerato
Juan Carlos Ponce Campuzano 79

Una ingeniería didáctica como estrategia de diseño de unidades curriculares
Ileana Pluss 84

Dificultades en el aprendizaje de matemática. Obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de dependencia e independencia lineal
Mónica Caserio, Martha Guzmán, Ana María Vozzi 91

Análisis de los esquemas de traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la lógica proposicional
Angelino Feliciano Morales, José Luis Ramírez Alcántara 96

La centración en problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional
Greivin Ramírez Arce, Esteban Ballestero Alfaro 102

La lógica dialéctica y el cálculo diferencial
Rafael Jiménez Martínez 108

La enseñanza de la modelación en clase de física y de matemáticas
Ruth Rodríguez Gallegos 114

La modelación matemática en la solución de problemas con apoyo de ecuaciones diferenciales de primer orden
Jorge Ávila Arciniega, Emma Antonia Jáuregui Medina, Elena Nesterova 120

El cambio de variable: ¿un proceso matemático o un artificio de la matemática?
Ramón Flores Hernández 126

El aprendizaje del tema "transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos" con apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario
Emma Antonia Jáuregui Medina, Jorge Ávila Arciniega, Elena Dmitrievna Nesterova 132

Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior
Dámasa Martínez Martínez, Aida María Torres Alfonso, Andrés Tellería Rodríguez, Lázaro Dibut Toledo 138

Nociones matemáticas y desarrollo de procesos cognitivos de alumnos [6, 8] con percepción auditiva diferenciada
Ignacio Garnica Dovala, Hilda Eneyda González Ortiz 144

Ecuaciones de segundo grado: su historia
Mario Dalcín, Mónica Olave 150

Ecuaciones de primer grado: su historia
Mario Dalcín, Mónica Olave 156

Grupo de estudos curriculares de educação matemática - GECEM
Carmen Teresa Kaiber; Claudia Lisete Oliveira Groenwald 162

Investigando e renovando a prática escolar em matemática
Carmen Teresa Kaiber, Claudia Lisete Oliveira Groenwald 168

La extrapolación en ingeniería en alimentos
María del Carmen Valderrama Bravo, Juan Alfonso Oaxaca Luna, Julio Moisés Sánchez Barrera, Carlos Rondero Guerrero 174

Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria
María Patricia Flores Marroquín 180

Lugares geométricos: ¿cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría?
Verónica Molfino, Greisy Winicki-Landman, Javier Lezama Andalón 186

Construcción colegiada y aplicación de un examen criterial alineado con el currículo para evaluar a gran escala un curso de cálculo diferencial
José Alvaro Encinas Bringas, Ruth Rivera Castellón, Maximiliano De Las Fuentes Lara 192

La construcción de la recta tangente en puntos de inflexión: Un método alternativo en la articulación de saberes
Oleksandr Karelin, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko 198

Problemas en el desarrollo de habilidades lectomatemáticas
José Octavio Camelo Romero, Ricardo Ulloa Azpeitia 204

Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago de cálculo
Estelita García, Eddie Aparicio 210

Una caracterización de las clases de cálculo en el área de ciencias
Erika García, Eddie Aparicio 216

El programa de la disciplina matemática para la carrera de ingeniería forestal en Cuba
María del Carmen Acuña Salcedo, Madelén Garófalo Novo, Ignacio Estévez Valdés, Domingo Pimienta Barquín 222

Solución de ecuaciones de grado superior mediante estrategias de aprendizaje basado en problemas y el uso de objetos de aprendizaje
Ricardo Ulloa Azpeitia, Ana Luisa Estrada Esquivel 228

Tratamiento didáctico de las funciones reales de una variable: proceso de modelación
Elsa Caridad Ramírez García 234

Desarrollo y formación de habilidades en la asignatura de estadística en contexto de universalización de la enseñanza
Raúl Báez Olazábal, Doris Prieto Valdés, Irma Gonzáles Jiménez, Raúl Báez Prieto 240

La resolución de problemas y el uso de técnicas estadísticas en el contexto de la carrera de ingeniería mecánica
Raúl Báez Olazábal, Doris Prieto Valdés, Raul Báez Prieto, Edry García Cisneros 246

La habilidad procesar datos. Consideraciones metodológicas para su desarrollo en el noveno grado de la secundaria básica
Ricardo Sánchez Casanova, Olga Lidia Pérez González, Fermín Hurtado Curbelo 252

¿Pueden los estudiantes usar la función como medio de expresión en el lenguaje matemático?
Ramón Blanco Sánchez, Alexia Nardín Anarela, Yosbel Morales Olivera 257

Metodología para la impartición de tópicos de estadística y probabilidades en la enseñanza preuniversitaria en Cuba
Larisa Zamora Matamoros, Isabel Alonso Berenguer 263

Ingeniería didáctica referida al concepto de fracción
Yaneth Ríos García 269

La representación geométrica desde la perspectiva de la tranferencias de registros
María Lourdes Rodríguez González, Louremy Ricardo Rodríguez, Cila Mola Reyes 275

Un modelo matematico del contenido de planes de estudio universitarios
José Manuel Ruiz Socarras, Gaspar Barreto Argilagos, Ramón Blanco Sánchez 281

Resolución de problemas con utilización de conocimientos del mundo real
Marger da Conceição Ventura Viana, Marcos Paulo Freitas Gomes 287

Realidades e desafios da educação matemática para os ticunas da comunidade do Umariaçu – Tabatinga/Amazonas
Lucélida de Fátima Maia da Costa, José Camilo Ramos de Souza 293

Comprensión de las ideas de covariancia, correlación y regresión en estudiantes de nivel superior
Ignacio Delgado Escobar; Ana María Ojeda Salazar 299

Utilizando la estadística como herramienta para el análisis de la situación sociocultural, y laboral de alumnos pertenecientes al nivel polimodal de escuelas técnicas, de la provincia de tucumán y de sus respectivas familias
Mario Avila, Ana Ibañez, Hilda Motok, Juan Carlos Pérez, Graciela Abraham, Mabel Rodriguez Anido, Norma Campos, Marta Ronveaux, Carolina García 305

Acciones para el desarrollo de las habilidades para el aprendizaje en estadística una propuesta en la carrera de bibliotecología y ciencias de la información
Doris Prieto Valdés, Raúl. Báez Olazábal, Dominica Legañoa Ferrá, Irma Gonzáles Jiménez, Raúl Báez Prieto 311

Matemática con literatura
Irene Zapico, Silvia Tajeyan 316

CATEGORÍA 2: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional 323

La RELME a sus veinte años
Ricardo Cantoral 325

Principales tendencias que se revelan en los trabajos presentados en las RELME
Luis Campistrous 332

Profesores de matemáticas y sus concepciones: el caso de los parámetros de la parábola
Mario Sánchez Aguilar 341

Formación de profesores. diversas concepciones que afectan el quehacer docente y competencias iniciales de profesores del nivel medio superior
Rosa María Farfán Márquez, Leticia Sosa Guerrero 347

El cálculo escolar universitario. un estudio de su problemática en una facultad de ciencias
Eddie Aparicio 353

La motivación y el uso de estrategias de aprendizaje en estudiantes universitarios
Liliana Milevicich, Alejandro Lois 359

Los sistemas de representación de Z en futuros profesores de matemática
Parra S. Hugo 365

Los docentes como evaluadores de una instancia de evaluación docente
Mercedes Anido, Héctor E. Rubio Scola 370

La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores
Vicenç Font, Juan D. Godino 376

Las matemáticas básicas: una experiencia en la Universidad Autónoma de Tamaulipas
Evelia Reséndiz Balderas, Ramón Llanos Portales, Jorge Loredo Osti, Griselda Hdz. C. 382

Las explicaciones de los profesores del nivel medio superior. un estudio de la semejanza como objeto de enseñanza aprendizaje
Hermes Nolasco Hesiquio, Santiago R. Velázquez Bustamante 388

Coherencias cognitivas vs matemáticas en el estudio del cambio
Leonora Díaz Moreno 394

Los métodos en la enseñanza de la matemática. una experiencia en el contexto histórico-cultural de los alumnos de la carrera de educación básica y de educación media
Carmen Evarista Matías Pérez, Lesly A.Mejía R. 400

Educación virtual usando tecnología de redes para la formación a distancia, de profesores de matemáticas
Gamboa Hinojosa Jesús, Ávila Godoy Ramiro 406

Una investigación sobre competencias docentes
Mercedes Anido de López, Martha Elena Guzmán 412

CATEGORÍA 3: Consideración de aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar 419

Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones
Nancy Janeth Calvillo Guevara, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza 421

Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas
Angeles Alejandra Ordóñez Morales, Gabriela Buendía Abalos 427

Estudio de lo periódico en diferentes contextos: identificación y uso de la unidad de análisis
Rosa Isela Vázquez Camacho, Gabriela Buendía Abalos 432

Uso de las ideas matemáticas y científicas de los incas, en la enseñanza - aprendizaje de la geometría
Enrique Huapaya Gómez, César E. Salas Valverde 438

¿Cómo en el ejercicio de la práctica de modelación de un sistema de resortes se construyen modelos multilineales?
María Esther Magali Mendez Guevara, Jaime L. Arrieta Vera 444

Gráfica de la función logaritmo: una discusión entre los acercamientos escolares tradicionales y la construcción geométrica de Agnesi (1748)
Renata Ivonne López Sánchez, Marcela Ferrari Escolá 450

La algoritmia; una práctica social de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales
Magdalena Rivera Abrajan, Jaime Arrieta Vera 456

La noción de variable. Un estado del arte
Enrique Javier Gómez Otero, Crisólogo Dolores Flores 461

Clasificación de la matematización de la economía desde un punto de vista socioepistemológico
Saúl Ezequiel Ramos Cancino y Germán Muñoz Ortega 467

Las prácticas de modelación de los estudiantes ante la problemática de la contaminación del Río de la Sabana
Arrieta Jaime, Carbajal Héctor, Díaz Josué, Galicia Adriana, Landa Lorena, Mancilla Víctor, Ricardo Medina, Ernesto Miranda 473

Usos de las gráficas y sus repercusiones en el aprendizaje de la matemática
Crisólogo Dolores Flores 479

Formas básicas de graficación y su relación con situaciones de movimiento
Claudia Flores Estrada 485

La medición de la absorción de luz de soluciones químicas, una práctica social de ingenieros bioquímicos
Galicia Adriana, Arrieta Jaime, Landa Lorena 490

Una red de modelos y la construcción de los logaritmos
Marcela Ferrari Escola, Rosa Maria Farfán Márquez 496

Sobre la vida escolar de la raíz cuadrada en el nivel básico
Domingo de Guzmán Lorenzo Rosario, Maria Patricia Colín Uribe 502

La emergencia de los logaritmos como herramienta para facilitar cálculos
Marisol Hernández Sánchez, Marcela Ferrari Escolá 507

El uso de las gráficas en la confrontación entre la continuidad euleriana y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales de segundo orden
Fidel Morales Couoh; Francisco Cordero Osorio 513

Categorías de uso de las gráficas en ingeniería
Alba Gabriela Lara Medina, Francisco Cordero Osorio 519

El uso de las gráficas en la mecánica de fluidos. El caso de la derivada
Teresa Guadalupe Parra Fuentes, Francisco Cordero Osorio 525

La construcción social de saberes matemáticos. El caso del tratamiento de la información
Santiago Ramiro Velázquez 531

Un estudio sobre la construcción social de la noción de promedio en un contexto probabilística
Allan Takeshi De la Cruz Oliva 536

El reconocimiento de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios académicos y no académicos
Cecilia Crespo Crespo 542

Demostraciones matemáticas: un recorrido a través de la historia desde una visión socioepistemológica
Cecilia Crespo Crespo 548

Aspectos numéricos y gráficos de la derivada de orden superior
Ricardo Cantoral Uriza, Mario Sánchez Aguilar, Juan Gabriel Molina Zavaleta 554

Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica. Resultados
Luz María Minguer Allec, Javier Lezama Andalón 560

La modelación matemática en el contexto de ingeniería civil a través de la interpolación y la predicción
Hipólito Hernández Pérez, Germán Muñoz Ortega, Gabriela Buendía Abalos 567

Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: la transición *grados $\rightarrow$ radianes $\rightarrow$ reales*
Claudia Leticia Méndez Bello, Gustavo Martínez Sierra, Elika Sugey Maldonado Mejía 573

Análisis socioepistemológico de los procesos de matematización de la predicción en la administración industrial
Eduardo Ortiz Hernández, Germán Muñoz Ortega 579

La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores a 360º y sus funciones trigonométricas: un estudio en el nivel medio superior
Jorge Martínez Tecolapa, Gustavo Martínez Sierra 585

Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría
Gisela Montiel Espinosa 590

Las series numéricas infinitas en la india en los siglos VI al XVI
Alejandro Miguel Rosas Mendoza 596

Los procesos de convención matemática y la inclusión de las funciones trigonométricas en el marco del análisis euleriano
Gustavo Martínez Sierra 602

CATEGORÍA 4: Uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas 609

Retos y desafíos ante las puertas de la tecnología
Juana Acosta Ganém 611

El juego utilizando calculadora graficadora como medio para la enseñanza de las ecuaciones paramétricas
Ruth Rivera Castellón, Maximiliano De Las Fuentes Lara, José Alvaro Encinas Bringas 617

Propuesta de una estrategia para la enseñanza de tópicos de computación a estudiantes de licenciatura en matemática
Jorge Rey Díaz Silvera, Larisa Zamora Matamoros 623

Campo de dirección. Método de las isoclinas, en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden
Pedro Castañeda Porras, Arelys Quintero Silverio, Aura Matilde Moreno Fierro 629

Experiencia en el uso del asistente matemático derive, en la solución de problemas físicos y/o geométricos
Pedro Castañeda Porras, Arelys Quintero Silverio, Pablo R. Chávez Hernández 635

El ordenador como recurso didáctico en la resolución de problemas
Liliana Milevicich, Alejandro Lois 641

UNIVERSIMAT, entorno para la comprensión de la matemática en el proceso de universalización de la educación superior
Andrés Tellería Rodríguez, Dámasa Martínez Martínez, Aida María Torres Alfonso, Angel Aljadis Díaz Peña, Yuniesky Carralero Cuellar 647

Entornos virtuales para el logro de comprensión de objetos matemáticos
Aída María Torres Alfonso, Dámasa Martínez Martínez, Andrés Tellería Rodríguez 652

Estrategias para el aprendizaje significativo en matemática
Liliana Milevicich, Alejandro Lois 659

Objetos para aprendizaje que integran un ambiente virtual
Rafael Pantoja Rangel, Ricardo Ulloa Azpeitia 665

Diseño de un curso en línea de ecuaciones diferenciales y su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes
Edgar Gilberto Añorve Solano, Elena Dmitrievna Nesterova 671

El laboratorio de computación para la enseñanza de la matemática. Una forma constructiva para el aprendizaje
Rafael Jiménez M, Rosa Vázquez C, Milagros Gutiérrez Á. 677

Visualizando conceptos de la geometría moderna con el apoyo del software Cabrí
María del Pilar Rosado Ocaña 683

La enseñanza de la probabilidad y estadística usando Statgraphics
José Guadalupe Torres Morales, Rosario del Pilar Gibert Delgado 689

Funciones con Derive... A distancia: categorización y análisis de errores matemáticos
Mercedes Anido, Susana Marchisio, Patricia Có, Sandra Mansilla, Marisa

Piraíno, Mónica del Sastre, Ana Sadagorsky, Graciela Paván, Erica Panella 695

Una propuesta generadora de aprendizaje autónomo
Mabel Medina, Héctor Rubio Scola, H. Mercedes Anido 700

La comprensión del concepto de variable a través del trabajo con la hoja electrónica de cálculo
Alejandro Olea Díaz 706

Impacto del uso de calculadoras avanzadas en la formación estadística de estudiantes de ingeniería
Enrique Hugues Galindo, Maricela Armenta Castro, Gerardo Gutiérrez Flores, Manuel Alfredo Urrea Bernal 712

Interpolación y modelado de curvas
Edison De Faria Campos 718

Dos enfoques para medir la relación entre actitudes hacia las matemáticas y aprovechamiento matemático: La experiencia mexicana con EMAT
José Gabriel Sánchez, Sonia Ursini 724

Pensamiento algorítmico, tecnología y aprendizaje de la matemática numérica
Eugenio Carlos Rodríguez 730

Diseño de software para la enseñanza del conteo en educación preescolar
Patricia Martínez, Marina Kriscautzky 736

Las prácticas de modelación virtual
César López Godoy, Marisol Juárez Calderón, Jaime L. Arrieta Vera 741

El uso de la calculadora graficadora en la preparación matemática de los estudiantes para el ingreso a la universidad
Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Pablo Gómez Fuentes, Nelson Hernández Reyes 747

Sistema de enseñanza/aprendizaje inteligente para grafos
Natalia Martínez Sánchez, Gheisa Ferreira Lorenzo, Zoila Zenaida García Valdivia, Maikel León Espinosa 751

Una didáctica para el tratamiento de las situaciones de aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la escuela
Celia Rizo Cabrera, Luis Campistrous Pérez 757

Algunas consideraciones sobre los problemas matemáticos aplicados a las asignaturas modelación mecánica y física
Alexia Nardín Anarela, Nereida Pupo Cintras, Máximo Montes de Oca Paredes 763

Presentación

El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Alme), es publicada anualmente por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), en cumplimiento de sus propósitos de posibilitar el intercambio y difusión entre colegas del área de la matemática educativa con la finalidad de orientar acciones en beneficio de los sistemas escolares de América Latina.

El Alme tiene carácter de publicación periódica y si bien los artículos que la integran provienen de trabajos que fueron previamente expuestos en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme), son presentados en forma de artículos y sometidos posteriormente a dicha reunión, a la evaluación rigurosa de pares especialistas en dicho campo.

Esta publicación se compone de trabajos en los que docentes e investigadores latinoamericanos de matemática educativa exponen sus experiencias, propuestas e investigaciones, mostrando los productos de una comunidad activa de creciente profesionalización y fortalecimiento de esta disciplina. De esta manera, se trata de una tarea que se plantea año tras año el objetivo de lograr difundir mediante una publicación de nivel académico, el estado del arte en materia de docencia e investigación en el campo de la matemática educativa en Latinoamérica.

En este caso, las exposiciones tuvieron lugar durante *Relme 20*, llevada a cabo en Camagüey (Cuba) durante 2006. El Comité Editor y Comisión Académica del *Alme 20* estuvo formado por colegas de distintos países latinoamericanos que colaboraron en dicha edición.

Los trabajos han sido organizados según cuatro categorías:

- Categoría 1: Análisis del Currículum y Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas.
- Categoría 2: El Pensamiento del Profesor, sus Prácticas y Elementos para su Formación.
- Categoría 3: Consideración de Aspectos Socioepistemológicos en el Análisis y Rediseño del Discurso Matemático Escolar.
- Categoría 4: Uso de la Tecnología en el Proceso de Aprendizaje de las Matemáticas.

Los miembros del Comité Editor y Comisión Académica del Alme 20, agradecemos a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos. Pusimos nuestra mayor atención en la constitución de este documento y nos sentimos orgullosos de haber podido participar en él prestando este servicio académico.

Agradecemos a los árbitros por su contribución solidaria y profesional, como asimismo y de manera especial a todos los colegas que de manera generosa y entusiasta nos regalaron su tiempo, inteligencia y creatividad para la realización de este proyecto.

Comisión Académica del
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 2007.
Mayo 2007

CATEGORÍA 1:

Análisis del currículum y propuestas para la enseñanza de las matemáticas

CONFLICTOS COGNITIVOS QUE EMERGEN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RELATIVOS AL LÍMITE

Noé Miranda Valle, Catalina Navarro Sandoval y Elika Sugey Maldonado Mejía
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
citlaltona@hotmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx, elikamm@gmail.com
Campos de investigación: resolución de problemas. Nivel educativo: superior
Palabras clave: conflictos cognitivos, problemas, límite

Resumen
En la presente investigación, se muestran algunos resultados sobre conflictos cognitivos que emergen en la resolución de problemas que involucran la noción de límite. Con la intención de detectar qué conflictos cognitivos emergen en el proceso o intento de resolución de dos problemas en particular; uno de ellos es una paradoja, éste en el sentido de Northrop (2002); y el otro, un problema que involucra el concepto de límite.
La aplicación de los problemas se desarrolló con estudiantes de nivel superior de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Antecedentes

Dentro de los antecedentes se cuenta con la propuesta de Flores (2004) que sugiere emplear paradojas para provocar conflictos cognitivos en profesores de matemáticas en formación, quienes deben compartir una visión epistemológica constructivista de la matemática, y para lo cual se debe romper con la visión unidimensional de la misma a partir del paradigma de la reflexión en la acción. Una investigación fue realizada por Movshovitz y Hadass (1990), quienes consideran que para la formación de los profesores-estudiantes se deben integrar contenidos de matemáticas, psicología y pedagogía, para ello plantearon una paradoja relacionada con la demostración de la irracionalidad del número 2, observando que la actitud predominante fue de desesperación y angustia por detectar o no el error. Otra investigación es la de Ramírez (2004) que da a conocer las distintas reacciones que provocaron algunas paradojas planteadas a profesores de matemáticas y física, sobresaliendo su reacción reflexiva en la que expresaron su deseo de mayor análisis para la resolución, creyendo que estaban mal planteadas o que había algún error en ellas.
La investigación que combina el concepto de límite y paradoja es la de Sacristán (2003), en la que se trabajó procesos infinitos en un ambiente de exploración computacional con el fin de ayudar a los estudiantes a experimentar diversos contextos y construir diversas representaciones externas del concepto e interactuar con ellas. Particularmente, exploró algunas sucesiones y series infinitas mediante figuras geométricas recursivas, específicamente, la Curva de Koch que condujo a los estudiantes a una paradoja: El perímetro infinito está formado por segmentos de longitud cero, al decir: la longitud de cada segmento era dada por la fórmula $\frac{1}{3^n}$, un valor que se aproxima a cero a medida que *n* crece. Otra investigación que se consideró es la de Hitt (2003) que muestra los obstáculos de aprendizaje del límite y continuidad de funciones, que en el caso del límite se menciona que los obstáculos están en la palabra "límite" y "tiende hacia", destacando que "el límite de la función no es alcanzado".
Por lo anterior, se plantea como problema de investigación qué conflictos cognitivos emergen en el proceso o intento de resolución de dos problemas relativos al concepto de límite.

Conflictos cognitivos

La historia muestra que las paradojas del infinito promovieron reflexiones profundas en relación a los conceptos matemáticos, que llevaron a conclusiones más satisfactorias, a definiciones más precisas y rigurosas, resolviendo el problema causado por el infinito potencial y el infinito actual. Sin embargo, la matemática escolar sigue enfrentando diferentes dificultades entre la intuición y lo formal, como ejemplo se muestra la siguiente afirmación: "Una función constante $f(x)=k$ no tiene límite". ¿Por qué? Porque "no satisface" la siguiente definición: Sea a un número real contenido en un intervalo abierto y sea f una función definida en todo el intervalo (cerrado), excepto posiblemente en a, y sea L un número real. Entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L si x se elige suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$). Ya que si se aplica la definición se observa que hay "un absurdo" o una imposibilidad para responder la pregunta: ¿a qué valor L puede acercarse una función constante si x se elige lo suficientemente cercano a a? "Contradicciones" como esta inciden en la falta de una explicación satisfactoria e intuitiva, lo cual constituye un conflicto cognitivo, hecho que fue obtenido o corroborado con tres estudiantes en una experiencia de clase. Las respuestas emitidas constituyeron un factor más para proseguir la búsqueda de otros conflictos cognitivos. Entendiendo que un conflicto cognitivo es un estado de desequilibrio que surge cuando una concepción que tiene un individuo entre en conflicto con alguna otra concepción que lleva el mismo individuo, o bien con el ambiente externo, según Aguilar y Oktac (2004); es decir, un conflicto cognitivo es un estado de desequilibrio psíquico de un sujeto, un estado de contradicciones existentes entre las imágenes del concepto propias del estudiante y el concepto en sí (el concepto científico). Un conflicto cognitivo es creado en forma consciente por el docente y no necesariamente es provocado por la cuestión epistemológica del concepto. Para resolver un conflicto cognitivo es necesario tomar consciencia de su existencia, es decir, interiorizar la situación conflictiva, que demanda una modificación de los esquemas mentales y cambio de las imágenes del concepto. Mientras no ocurra esa interiorización o toma de conciencia de la existencia del conflicto no se hará algo por parte del sujeto para superarlo y por tanto, no se produce la equilibración y el aprendizaje. Sin embargo, Duit y Treagust (1998) señalan que los conflictos cognitivos no necesariamente producen cambios conceptuales o desarrollo cognitivo, pues existen ciertos factores o causas que inhiben ese cambio o desarrollo, entre ellos son:

- a) Los estudiantes son, frecuentemente, incapaces de comprender la nueva teoría porque sus concepciones previas proporcionan una interpretación esquemática;
- b) Las nuevas concepciones no resultan inteligibles y plausibles para los estudiantes;
- c) Los estudiantes son incapaces de comprender los nuevos puntos de vista porque no poseen suficientes 'conocimientos previos';
- d) Sin una cierta cantidad de conocimientos previos, los argumentos a favor de las nuevas concepciones no pueden ser comprendidas;
- e) Los estudiantes comprenden una nueva teoría, pero no creen en ella.

Finalmente, los conflictos cognitivos se clasifican (por Duit y Treagust) en tres clases primarias:

1) Conflictos entre predicciones de los estudiantes y el resultado del experimento;
2) Conflictos entre las ideas de los estudiantes y las de los profesores;
3) conflictos entre las ideas de los estudiantes.

Descripción de los problemas

Previo al desarrollo de la investigación se realizó un estudio del concepto de límite, para tener mayor conocimiento sobre el tema, en tres aspectos: epistemológico, didáctico y cognitivo.
En el aspecto epistemológico se encontró, entre otros, que Zenón de Elea (495-435 a. C.) con sus paradojas evocó el concepto de límite; D'Alembert (1717-1783) llamaba a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin dejar nunca a coincidir con ella) (Boyer, 2001). Weierstrass (1815-1897), fue quien formalizó el concepto mediante la definición conocida actualmente como épsilon-delta, $\varepsilon - \delta$. Dentro de este aspecto Cornú (1991) señala los obstáculos epistemológicos siguientes: El fracaso de la unión entre geometría y aritmética, tal como ocurre en el caso del cálculo del área del círculo; la noción de lo infinitamente grande e infinitamente pequeño; el aspecto metafísico de la noción de límite; y ¿el límite es alcanzado o no?
Dentro del aspecto didáctico se encontró que el concepto, presenta dificultades u obstáculos debido a su naturaleza, al currículo y a los métodos de enseñanza del profesor (D' Amore, 2005). En la revisión de planes y programas de estudio del nivel medio superior de esta universidad, se encontró que para las preparatorias se tiene el libro de texto: Matemáticas V (Calculo Diferencial), donde se expone una de las paradojas de Zenón (Fernández, 2005; Hitt, 2003); mientras que en la licenciatura no se expone ninguna para formar el concepto de límite y su definición, sino solamente en el tratamiento de las series infinitas de dos textos bibliográficos.
En el aspecto cognitivo Sierpinska (1985, citado en Cantoral, et al, 2000) presenta obstáculos de aprendizaje, tales como: la persona rehúsa admitir que el paso al límite es una operación matemática, la dificultad de eliminar el problema del infinito al tomar tantos términos como sean necesarios, se fija más la atención en funciones monótonas, y se usa más el lenguaje natural que símbolos usuales en el paso al límite.
Como resultado del anterior análisis se eligieron dos problemas con características geométricas que involucran el concepto de límite mediante procesos infinitos y la situación límite. Los estudiantes que participaron en esta investigación son de nivel superior de esta Unidad Académica, mismos que ya habían cursado Cálculo Diferencial e Integral I y Geometría Euclidiana. Los problemas fueron planteados a manera de proposición con sus respectivas de figuras geométricas y son los siguientes:

1. No existe ningún polígono regular inscrito en un círculo, o circunscrito al mismo, de $n \geq 3$, $n \in \mathrm{N}$, lados cuya área sea igual al del círculo, i.e., πr^2.
2. Las semicircunferencias, cuyos diámetros son los $n \geq 3$ lados del polígono regular inscrito tienen como límite a la circunferencia que circunscribe a ese polígono, o sea, $2 \pi r$.

El primer problema es una afirmación verdadera, pues no se indica que n "tiende al infinito" y cuando se indica esa operación entonces se dice que el área del círculo es el límite del área de polígonos regulares inscritos y circunscritos.
El segundo es una afirmación falsa, ya que es una paradoja en el sentido de Northrop (2002), donde tanto la observación (mirada) como la intuición fallan. Los diámetros de las semicircunferencias son polígonos regulares inscritos, P_n, en la circunferencia cuyo límite es

ella misma; mientras que la longitud de las *n*-semicircunferencias es $C_n = \dfrac{\pi P_n}{2}$, y al pasar al límite se tiene, $\lim\limits_{n \to \infty} C_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\pi P_n}{2} = \dfrac{\pi(2\pi r)}{2} = \pi^2 r$.

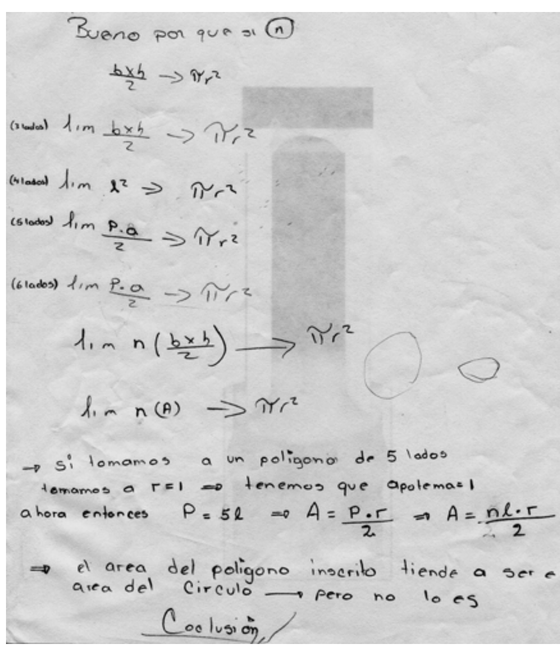
La solución de los dos problemas exige el dominio de conceptos de geometría y trigonometría, tales como: el ángulo central de un círculo; razones trigonométricas; fórmula del área de un triángulo, la fórmula de la circunferencia $C = 2\pi$ r como límite del perímetro de un polígono regular inscrito de n lados, P_n, cuando n tiende al infinito, es decir, $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = 2\pi r$; y la razón de la circunferencia con respecto a su radio es la misma cualquiera que sea el tamaño de la circunferencia, i. e., $\dfrac{c}{2r} = \pi$.

En ambos casos, en un primer momento se les indicó emitir un juicio, en forma individual e intuitiva, diciendo si la afirmación era falsa o verdadera. En un segundo momento se organizó a los estudiantes en equipos de tres integrantes para que discutieran sus respuestas anteriores y posteriormente mostraran las respuestas a la que llegarían en equipo.

Resultados

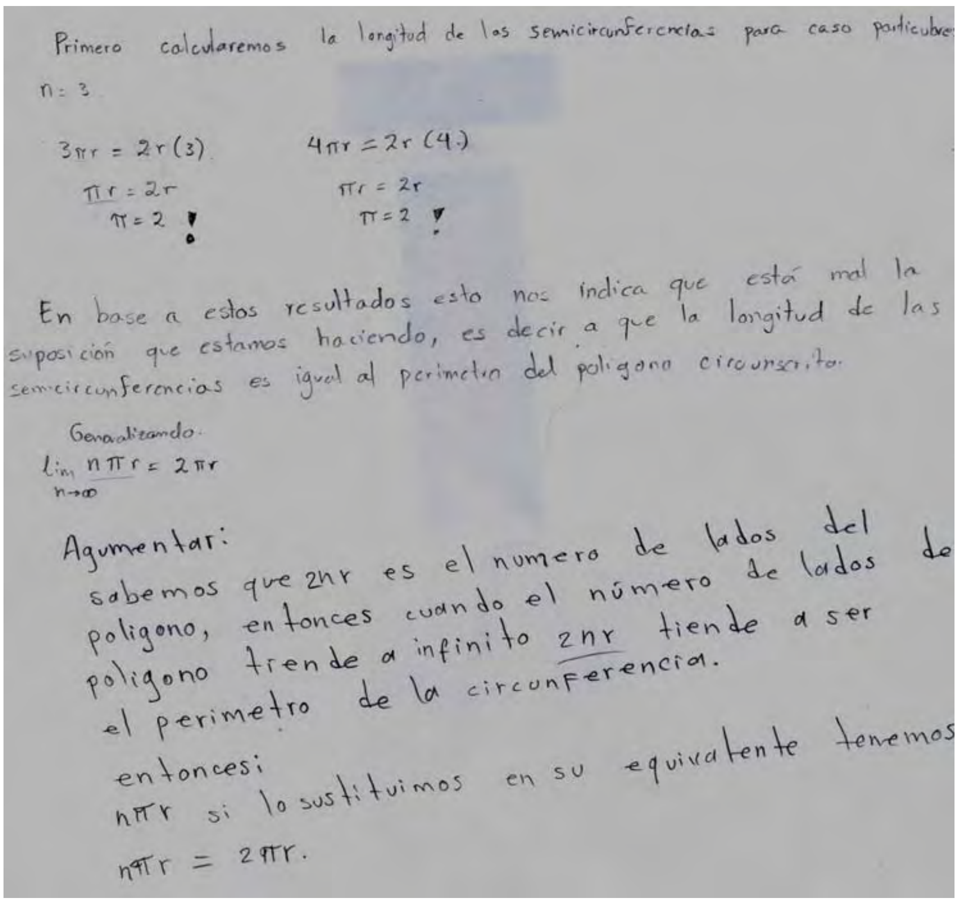
En la resolución del primer problema participaron trece estudiantes, de los cuales siete respondieron que la afirmación era verdadera, es decir, n no puede tender a $+\infty$, pues n es un número natural; seis respondieron que era falsa, interpretando el área del círculo como límite de áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, ignorando que el número de lados de dichos polígonos es $n \geq 3$, donde $n \in \mathrm{N}$, o sea, dieron el paso al límite: n tiende a $+\infty$, por lo que, las respuestas fueron intuitivas en el sentido de Fischbein (1978, 1987).

En el segundo momento, discutieron sus respuestas individuales, de donde surgió una propuesta de solución, de todos y cada uno de los equipos, entre las cuales se muestra la siguiente:



Donde se observa que la frase "tiende a" lo manejan como aproximación, el límite no se alcanza, tal como lo definió D'Alembert, y efectivamente, no operan adecuadamente con el límite. Su idea entra en conflicto con la idea matemática que consiste en mostrar claramente que su respuesta es correcta. Además, al calcular el límite del "área" $A = \frac{nlr}{2}$ cuando $n \to +\infty$ el "área es infinita". Otros, insistieron en que el límite es πr^2 sin poder mostrarlo, y sólo el equipo cuatro pudo mostrar este resultado.

En la resolución del segundo participaron doce estudiantes, de los cuales once respondieron que la afirmación era verdadera, pues es fija la idea: la respuesta intuitiva debe coincidir siempre con la respuesta formal o matemática. Tomaron la idea de solución del equipo cuatro que mostró la respuesta matemática en el problema anterior. A continuación mostramos una realización:


Primero calcularemos la longitud de las semicircunferencias para caso particular

$n = 3$

$3\pi r = 2r(3)$ $\quad$ $4\pi r = 2r(4)$

$\pi r = 2r$ $\quad$ $\pi r = 2r$

$\pi = 2$! $\quad$ $\pi = 2$!

En base a estos resultados esto nos indica que está mal la suposición que estamos haciendo, es decir a que la longitud de las semicircunferencias es igual al perimetro del poligono circunscrito.

Generalizando.

$\lim_{n\to\infty} n\pi r = 2\pi r$

Agumentar:

sabemos que $2nr$ es el numero de lados del poligono, entonces cuando el número de lados de poligono tiende a infinito $2nr$ tiende a ser el perimetro de la circunferencia.

entonces:

$n\pi r$ si lo sustituimos en su equivalente tenemos

$n\pi r = 2\pi r$.

Como se observa, se obtuvo la contradicción de $2 = \pi$ y creen que hay un error en la suposición, y pese a ello se generalizó y se obtuvo $n = 2$. Pero la mayoría, simplemente dio una respuesta puramente intuitiva, que en este caso no coincide con la matemática. Este es otro conflicto encontrado, por no tener en cuenta que $\frac{c}{2r} = \pi$ siempre es la misma cualquiera que sea el tamaño de la circunferencia.

Conclusiones

Las conclusiones son resultado de todo el trabajo realizado, entre ellas, son: la enseñanza tradicional procede a introducir el concepto de límite mediante funciones y sucesiones monótonas, generalmente; no introduce el concepto de límite mediante problemas de carácter geométrico; tampoco emplea paradojas relativas al concepto, por considerarlas como exclusivas de la comunidad matemática; si un estudiante no logra resolver el problema planteado, sea paradoja o no, tiene dos opciones en su proceder posterior, por lo menos:

a) ser más consciente de sus disposiciones de los conocimientos matemáticos y de sus limitaciones, por lo que para eliminarlas necesitará investigar y estudiar con detenimiento ciertos aspectos.

b) bloquearse y fortalecer la idea de que la matemática es difícil, por lo que hay que renunciar a ella o resignarse a aceptar su existencia como teoría.

Sin más ánimo de profundización o de investigación. Por lo que se sugiere incorporar las paradojas en el sistema de enseñanza, pues son un medio de construcción o reconstrucción del conocimiento, según muestra la historia.

Referencias bibliográficas

Aguilar, P. y Oktaç A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Relime* 7(2), 117-143.

Boyer, C. (2001). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento matemático.* México: Trillas.

D' Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales* de la Didáctica de la Matemática. México: Clame-Reverté.

Fernández, J. et al. (2005). *Matemáticas V. Cálculo Diferencial.* Libro de texto de bachillerato. Guerrero: UAG-Gobierno del Estado.

Fischbein, E. (1978). '*Intuition in Mathematics Education', Osnabrϋcker Schriftenzϋr Mathematik 1, 148-176*.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An educational approach*. Netherlands: Klumer Academic Publishers.

Flores, P. (2004). Paradojas matemáticas para la formación de profesores (Mathematical paradoxes for teachers education). *Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, SUMA No. 31. P. 27.*

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE.

Northrop, E. (2002). *Paradojas matemáticas.* México: Limusa.

Ramírez, J. (2004). Los profesores ante problemas paradójicos: una invitación a la reflexión. En *Resúmenes de la 18ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. 2004.

Sacristán, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp.262-279). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE.

DIFICULTADES EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNOS CONCEPTOS EN ÁLGEBRA LINEAL

Carlos Oropeza L., Javier Lezama A.
UNAM, CICATA-I.P.N. (México)
carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com

Campo de investigación: pensamiento matemático avanzado, Nivel educativo: superior
Palabras clave: dependencia lineal, independencia lineal, representaciones geométricas

Resumen
En esta exploración se reportan algunas dificultades relacionadas con la interpretación geométrica de los polinomios de segundo grado en el concepto de dependencia e independencia lineal. La naturaleza abstracta de la asignatura de Álgebra Lineal, provoca dificultades en el entendimiento de los conceptos que ésta aborda y como una cuestión importante ligada a la percepción espacial que no sólo se reduce a la geometría, se trata de la visualización en matemáticas. En este trabajo se presenta propuesta una alternativa para que los estudiantes puedan hacer uso de las representaciones geométricas con la intención de aportar ciertos rasgos de claridad en el entendimiento del concepto referido, una vez que se acepte usar el isomorfismo para representar las funciones polinomiales de orden *n* como una representación de vectores en el espacio R^{n+1}.

Introducción

La Matemática Educativa se ha ocupado del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza en el nivel universitario por más de 30 años. Ha intentado mejorar nuestra comprensión de las dificultades que los alumnos encuentran al aprender matemáticas y las disfunciones del sistema didáctico; también ha intentado encontrar vías que permitan superar tales dificultades. La enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en las carreras ingeniería presentan múltiples dificultades, razón por la cual se han promovido reflexiones profundas en torno a la búsqueda de presentaciones diferentes del tema en cuestión. Es común que en la enseñanza convencional del álgebra lineal, la mayor parte de conceptos se presentan como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. Los problemas asociados se resuelven usando la definición formal junto con argumentos derivados de la lógica. Esto hace que muchos estudiantes perciban que la materia es demasiado abstracta y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en la realidad.
Los orígenes teóricos del estudio, sobre los que se basa este documento, consisten en la comprensión de que una reforma educativa referente a la enseñanza de las matemáticas no puede tener lugar en ausencia de una noción de los procesos de pensamiento del alumno. Aunado a la reconocida complejidad intrínseca de las matemáticas, aparece la dimensión cognoscitiva de la didáctica que es particularmente relevante (Balacheff, 1990). Entre los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal, están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto como por ejemplo el cero que puede representar un vector, un escalar o un espacio vectorial, y que los libros de texto hacen uso indistinto de estas diferentes formas de interpretación; y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. O bien, como señala Sierpinska (1996) el alumno se encuentra, entonces, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales.

Una posición pragmática a seguir podría ser la de que no se usen varias representaciones de un objeto matemático, pero, como lo señala Duval (1993): *...las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias. En efecto, los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción, o por la experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados "reales" o "físicos"* (pág.38). Las representaciones semióticas juegan un papel fundamental en la actividad matemática. Continuando con estas ideas, tenemos en consecuencia que la aprensión de los objetos matemáticos y obliga a la interacción de diferentes representaciones semióticas.
Hemos dividido el presente trabajo en dos partes, la primera relativa a las dificultades que hay en la articulación de diferentes sistemas semióticos de representación del concepto de función. La segunda trata sobre errores en el uso de tales sistemas y repercusiones en la enseñanza, a través de análisis de casos. En lo que sigue utilizaremos el sistema semiótico de representación en el sentido que lo utiliza Duval.
Suponemos que el aprendizaje no es visto como aislado en un vació cognoscitivo, sino dentro de un contexto sociocultural (Vygotsky, 1962); por lo tanto, en una visión constructivista del pensamiento (Von Glasersfeld, 1987) la cognición del que aprende, mientras sea personal y de interés individual, es también vista enfáticamente como que tiene lugar en un ambiente de aprendizaje. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una formula algebraica, una grafica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. Generalmente, se considera a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para volverlas visibles o accesibles a otros. Ahora bien, este punto de vista es engañoso. Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, si no que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.
A partir de lo dicho anteriormente nos proponemos explorar:

- El uso de las representaciones geométricas con la intención de que los estudiantes puedan incorporarlas en la comprensión del tema en estudio.
- La noción que tienen los estudiantes del concepto de dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado expresados como espacios vectoriales.

Contenido de la experiencia

Definición: Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2,.....,v_k\}$ de un espacio vectorial V es LINEALMENTE DEPENDIENTE si existen escalares c_1, $c_2....,c_k$, al menos uno de los cuales no sea 0, tales que:
$c_1v_1 + c_2v_2+.....+ c_kv_k = 0$
Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se dice que es LINEALMENTE INDEPENDIENTE. (Grossman, 2005).
Por otra parte, centramos nuestra atención en el hecho de que se puede establecer un isomorfismo, entre el conjunto de polinomios P_n con el espacio vectorial R^{n+1}, este hecho requirió de estudio en cuanto a la definición formal de esta idea. A continuación se muestran las conclusiones del establecimiento de dicha idea:

Como $f : ax^2 + bx + c \to [a,b,c]$ es lineal y biyectiva, se deduce que $\boldsymbol{f : P_n \to R^{n+1}}$ es isomorfa y entonces se dice que los espacios vectoriales $\boldsymbol{P_n}$ y $\boldsymbol{R^{n+1}}$ son isomorfos.

Tomando como fundamento la consideración anterior se construyó una experiencia en la cual el punto central consiste en manipular una serie de polinomios de segundo grado, parte de la puesta en escena de la actividad puede apreciarse en las siguientes dos figuras.
En la primera de ellas, se puede apreciar que el grupo de estudiantes reportan una tendencia por relacionar los puntos de intersección entre las parábolas analizadas y el concepto de dependencia e independencia lineal de las mismas. También se puede apreciar que esta idea los conduce a plantear otros sistemas distintos, en donde en particular este equipo de estudiantes hace la propuesta de un conjunto de polinomios que los conduce en su solución a una inconsistencia a la cual no pudieron darle una interpretación en su significado.

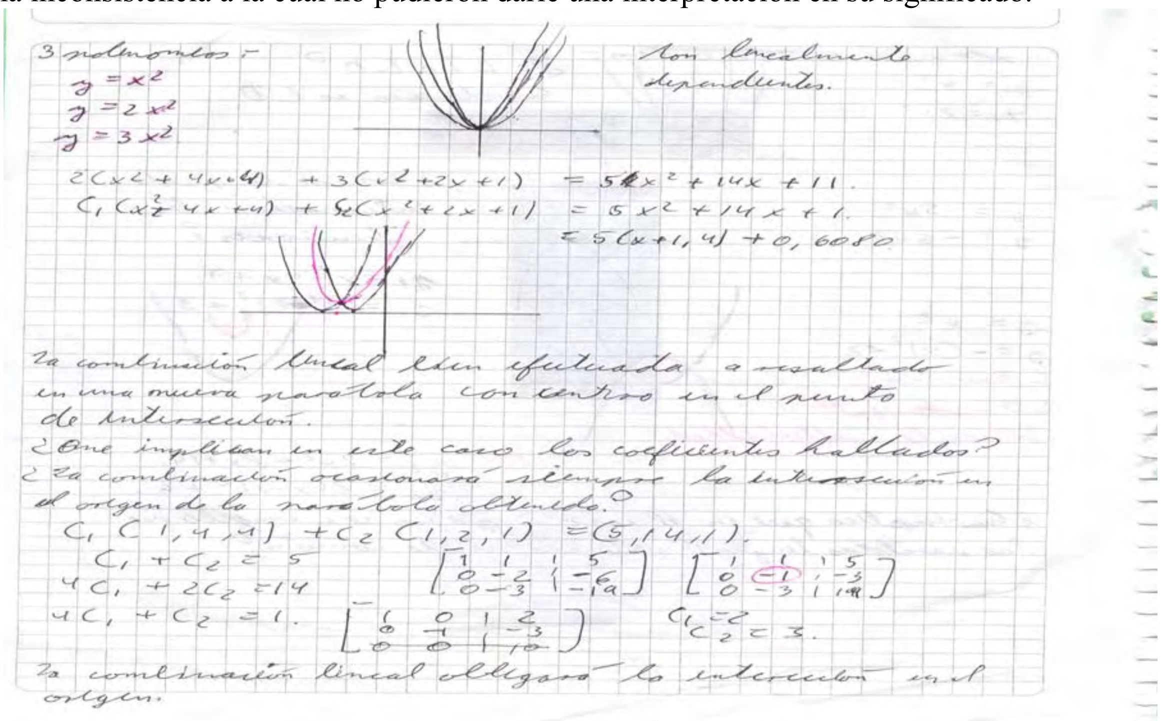


Figura 1

En la segunda figura, podemos apreciar como el grupo de estudiantes (del mismo equipo), inicia una extensión de su idea inicial que proponen como interpretación geométrica de los polinomios de segundo grado, misma que tiene que ver con las intersecciones de las parábolas que grafican. Cabe precisar que se mantienen en esa idea hasta la parte de retroalimentación de la actividad, a pesar de que en su reporte (figura 2) se encuentran indicios del rompimiento de esta idea tal como se puede observar en la última de la gráficas que dibujan y que justamente se alcanza en el momento de la exposición del material por parte de los equipos.

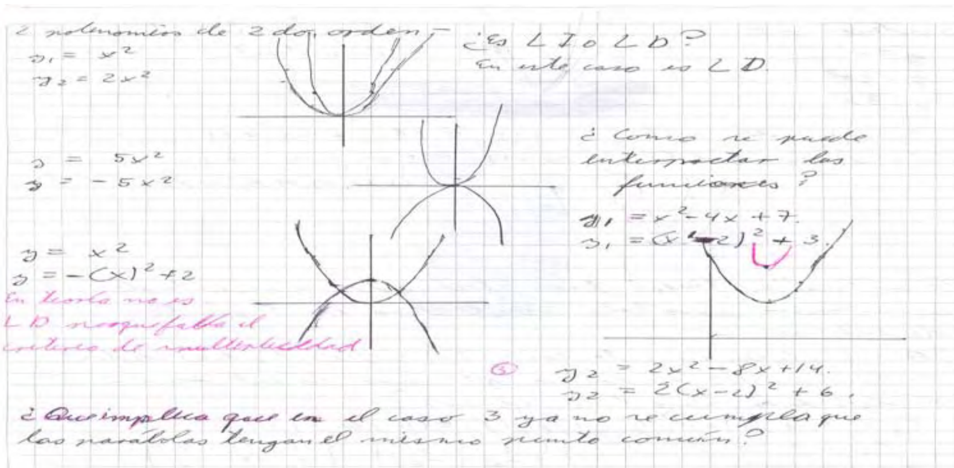


Figura 2

El diseño de las actividades ha experimentado ciertas modificaciones, tal es el caso de la utilización del software matemático usado como instrumento verificador de resultados. Una pequeña muestra de ello se presenta a continuación.
Los siguientes ejemplos han sido resueltos con la ayuda de las librerías de Maple versión 9.5.
Se tienen dos polinomios x^2-2x-3 y $-x^2+6x-9$ en los cuales se debe determinar si son linealmente dependientes o independientes.

>restart:with(linalg):

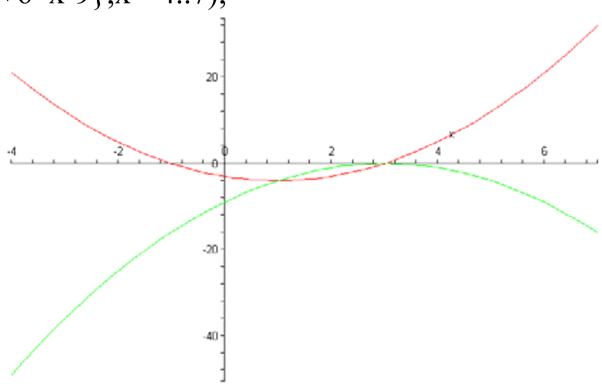
- a:=<<1,-2,-3>|<-1, 6,-9>>:
- sol:=<<0,0,0>>:
- gaussjord(<a|sol>);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sintaxis de Maple

En el resultado obtenido se observa que el conjunto de polinomios son linealmente independientes, ya que en la solución del sistema de ecuaciones los escalares son igual a cero. En su gráfica correspondiente se puede apreciar que a pesar de que las parábolas comparten una raíz son linealmente independientes.

>plot({x^2-2*x-3,-x^2+6*x-9},x=-4..7);



Ahora se presenta un segundo ejemplo analizado, en el cual se hace uso del isomorfismo. La actividad consiste en estudiar tres polinomios de segundo grado linealmente dependientes: -$2x^2+x$, x^2-4x, $8x^2-7x$.

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b := [0,\ 0,\ 0] \qquad soluciones = \left[\frac{25}{7}\_t_1,\ \ \frac{6}{7}\_t_1,\ \ \_t_1\right]$$

Estableciendo los polinomios de estudio -2x²+x, x²-4x, 8x²-7x como vectores, se tiene:

- V_1:=<0, 1,-2>;
- V_2:=<0,-4,1>;
- V_3:=<0,-7,8>;

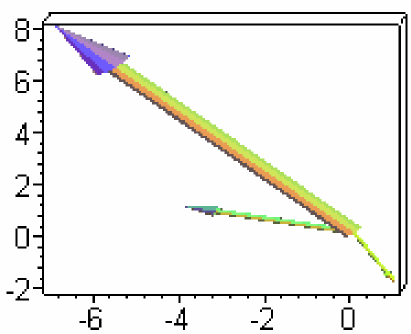
$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

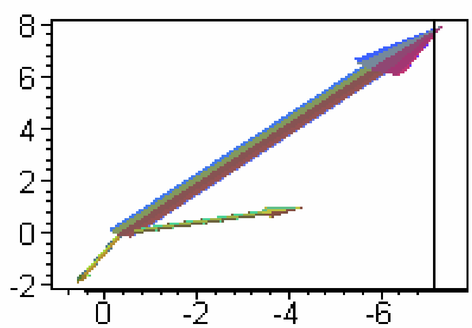
De la ecuación de la forma general obtenemos que: $c_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$c_1 = \frac{25}{7} \qquad c_2 = -\frac{6}{7}$$

$$c_3 = 0$$





Como podemos observar los vectores se encuentran contenidos en un plano y por tanto en R^3 son linealmente dependientes. También podemos observar, que los resultados obtenidos son los mismos, es decir, que en este apartado puede ayudar a identificar la equivalencia que se establece al hacer uso de un análisis polinomial con respecto a usar un análisis vectorial en tercera dimensión.

Conclusiones

Algunas de las reflexiones que nos ha proporcionado la puesta en escena de las actividades mostradas son las siguientes:

La mayoría de los equipos participantes aceptan con naturalidad y con poca dificultad trabajar en el ambiente geométrico ya que según sus comentarios, afirman que el manejo gráfico de las parábolas lo han utilizado en varios cursos previos a la experiencia.

La actividad provoca el rompimiento de la idea inicial de los estudiantes en relación al concepto de la dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado, la cual interpretan como intersección o no de las raíces en las graficas de las parábolas que se analizan.
El uso de la representación como vectores libres en el plano tridimensional de los polinomios de segundo grado (en algunos grupos de trabajo), provoca conflicto para interpretar la dependencia e independencia lineal; esto se debe a la poca práctica que algunos estudiantes tienen en el manejo de representaciones en tres dimensiones. Sin embargo, para los equipos que sí cuentan con experiencia suficiente para graficar vectores en tercera dimensión, este hecho les permite trabajar con menor dificultad.
Hacer uso del isomorfismo entre los polinomios de segundo grado y los vectores en el espacio R^3, podría proporcionar una estrategia que favorezca el entendimiento del concepto de la dependencia e independencia lineal.
El reconocimiento de utilizar el software matemático como un instrumento verificador de resultados tanto analíticos como geométricos, sólo provoca en algunos grupos de estudiantes la inquietud por extender su estudio a un mayor número de ejemplos.

Referencias bibliograficas

Balacheff, N. (1990). Perspectivas futuras para la investigacion en la psicología de la educación en matemáticas. En el Grupo Internacional Kilpatrick J., Nesher P., para la psicología de la educación en matemáticas. *Matemáticas y Cognición: Una síntesis de investigacion por le Grupo Internacional para la psicología de la educación en matemáticas.* Capítulo 7, págs.135-148. Cambridge University Press, Reino Unido.

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: I' Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, págs. 235-253.

Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal*. D.F., México: Mc Graw-Hill.

Piaget J. (1968). *La formation du symbole chez I' enfant*. Nauchâtel, Delachaux & Niestlè.

Sierpinska, A. (1996). Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra. *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, Central Michigan University.

Vigotsky, L. (1962). *Thought and Lenguaje* (Traducción de Hanfmann y Vakar). Cambridge: M.I.T. Press.

Von Glasersfeld, E. (1987). Aprendizaje como una actividad constructiva. C. Janvier (Ed.) *Problemas en la representación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS CON ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA: EL CASO DE LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

María Guadalupe Ordaz Arjona
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
oarjona@uady.mx

Campo de investigación: gráfica y funciones. Nivel educativo: superior
Palabras clave: secuencia didáctica, constructivismo, función, valor absoluto

Resumen
El presente escrito reporta los resultados de una investigación desarrollada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) con el propósito de valorar la utilidad del uso de una secuencia didáctica basada en un enfoque constructivista, para conducir a los alumnos a la construcción del concepto de función valor absoluto.

Introducción

Tradicionalmente, se ha considerado que el éxito en la enseñanza de las matemáticas depende de un profesor ejemplar, suponiendo que el aprendizaje de los alumnos depende únicamente de la atención que presten a la exposición del profesor, del dominio que éste tenga del contenido del curso, así como de sus habilidades docentes.

Cantoral et al (2000) señalan que una creencia ampliamente difundida respecto a la relación entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas supone una relación de transferencia simple de la enseñanza hacia el aprendizaje, el alumno "graba" lo que se le comunica por medio de la enseñanza, pero las investigaciones contemporáneas demuestran lo inexacto de este punto de vista y hacen evidente que los alumnos construyen regularmente conocimientos que no forman parte del discurso de la enseñanza y resultan con frecuencia inadecuados e incluso erróneos desde el punto de vista matemático.

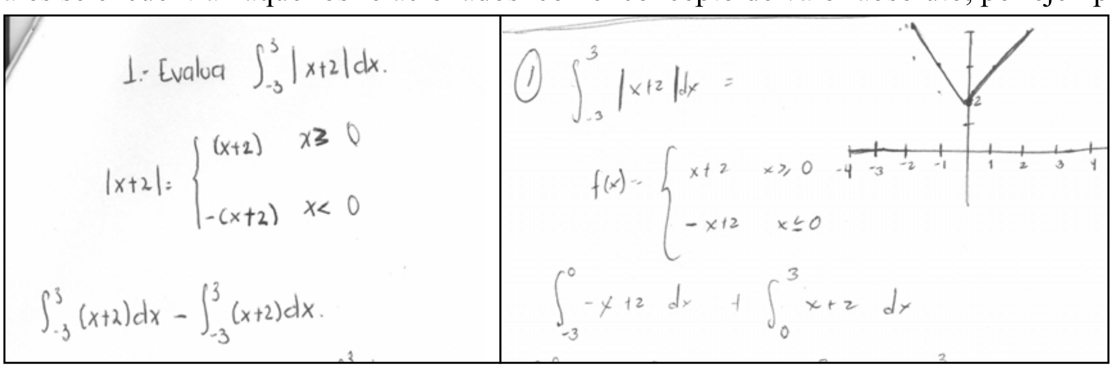
Hoy en día emergen concepciones que consideran la actividad matemática en un sentido más amplio, según las cuales, toda actividad humana depende de una enorme variedad de restricciones de naturaleza cultural, histórica e institucional. Factores como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos o de representación desempeñan un papel fundamental en la conformación de las ideas matemáticas entre los estudiantes. Desde esta perspectiva nuestra forma de aprender matemáticas es el resultado de construcciones sucesivas, cuyo objetivo es garantizar el éxito de nuestra actuación ante una cierta situación. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza, según el cual el maestro enseña y el alumno aprende. El papel del profesor en esta perspectiva es mucho más activo; sobre él recae mucho más la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje; enseñar debe ahora consistir en crear las condiciones que produzcan la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, mientras que para el estudiante, aprender debe implicar involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento.

La problemática

El actual plan de estudios de las escuelas preparatorias de la Universidad Autónoma de Yucatán, propone el uso de un nuevo paradigma bajo el cual, el estudiante de matemáticas debe construir nuevos conocimientos a partir de otros previos, y que dichos conocimientos sean significativos y no sólo memorísticos. Sin embargo, al entrar en marcha dicho plan de estudios, los profesores se encuentran con la falta de las herramientas adecuadas para conducir a sus alumnos a lograr este objetivo. Es así que nuestro énfasis está en el diseño de actividades adecuadas para favorecer el aprendizaje significativo de los estudiantes, mediante acciones que le permitan analizar, conjeturar, construir su propio conocimiento.

Por otra parte, si abordamos la problemática de la enseñanza de la matemática y particularmente del concepto de función, tenemos que es un de los más difíciles tanto para enseñar como para aprender y que su enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado los argumentos visuales (Cantoral, Montiel 2001).

La problemática que se aborda en esta investigación tiene su origen en situaciones de precálculo y cálculo, propiamente en el nivel medio superior y superior. En la enseñanza en ambos niveles, la noción de función valor absoluto resulta esencial para las definiciones de conceptos fundamentales referentes al cálculo diferencial e integral. Sin embargo, la mayoría de las veces en su estudio, únicamente se enumeran las propiedades de éste, sin preocuparse por el uso de situaciones de enseñanza que permitan la asimilación del concepto por parte de los estudiantes y aún alumnos que han ingresado a una licenciatura del área de matemáticas, muestran no haber comprendido el concepto de "función valor absoluto", lo cual en un principio pareciera no ser un problema, pero que a la larga se ve reflejado en Cálculo que es una de las asignaturas con mayor índice de reprobación, aún a nivel superior, como lo reportan Ávila y Aparicio (2006), ya que al pedir evaluar $\int_{-3}^{3} |x+2|\, dx$, a estudiantes que han cursado tres cursos de cálculo de nivel superior, cometen errores de tipo conceptual, entre los cuales se encuentran aquellos relacionados con el concepto de valor absoluto, por ejemplo:



Consideraciones metodológicas

Nuestra investigación se basó en el empleo de la metodología de la investigación cualitativa y entre las actividades desarrolladas, destacamos:

Una prueba diagnóstica denominada *test precurso*, aplicada a 20 estudiantes y cuyo objetivo era determinar si los estudiantes tenían los requisitos previos principalmente de álgebra, además de explorar sobre sus conocimientos en relación al concepto de función valor absoluto y los errores cometidos por los alumnos que se deban a la falta de comprensión de dicho concepto.

Con base en la prueba diagnóstica que da muestra de los mismos errores reportados en (Aparicio, Ávila 2006), se *diseñó una secuencia didáctica*, entendiendo ésta como un conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas con grados crecientes de complejidad para la consecución de ciertos objetivos. Las secuencias deben estar diseñadas de manera tal que permitan al estudiante tener acercamientos iniciales al contenido y avanzar paulatinamente a niveles más amplios de comprensión y generalización.

La secuencia didáctica elaborada en este trabajo pretende llevar al alumno a construir la definición de función valor absoluto, así como propiciar que transite libremente por los registros de representación gráfico y analítico, con énfasis en el análisis de las gráficas, se consideraron tanto para el diseño como en la implementación de la secuencia aspectos constructivistas como son: partir del nivel de desarrollo del alumno, posibilitar que los alumnos realicen aprendizajes significativos por si solos y procurar que los alumnos modifiquen sus esquemas de conocimiento; teniendo en cuenta además, que en la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial; no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje" (Moreno, 1992). La secuencia didáctica consta de seis actividades diseñadas mediante preguntas que permitan al alumno conjeturar ideas relacionadas con el concepto de función valor absoluto. La esencia para la realización de dicha secuencia fue el análisis de las rectas $y = x - c$ y $y = -(x - c)$ y la intersección de las mismas. Dichos análisis se hace con el apoyo del software graphmatica, que permitió visualizar el comportamiento de las gráficas de las funciones, se consideró el uso del mismo, sabiendo que la tecnología es un medio entre el estudiante y desarrollo de pensamientos matemáticos y tiene la capacidad de ofrecernos medios alternativos de expresión matemática (Moreno, 1992).

En *la implementación de la secuencia didáctica* intervinieron tres aspectos: la puesta en escena de la secuencia, los estudiantes que participaron en la misma y la dinámica que se utilizó para llevar a efecto la secuencia. A continuación se explica en que consistió cada uno de estos elementos.

La puesta en escena de la secuencia tuvo lugar en la ciudad de Mérida, en las instalaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, en una sala de cómputo, equipada con computadoras para cada alumno y una para el profesor, 2 videocámaras, videoproyector, aire acondicionado, etc. Participaron seis estudiantes los cuáles eran recién egresados de bachillerato y admitidos a la Facultad de Matemáticas para cursar las carreras de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, Actuaría y Ciencias de la Computación, éstos conformaron dos equipos de trabajo, uno de ellos era aquellos estudiantes que en el test precurso no respondieron correctamente ninguna cuestión del apartado correspondiente a la función valor absoluto y que al entrevistarnos decían no haberlo abordado en el bachillerato, los otros tres estudiantes, reconocían haberlo visto en bachillerato, y que al entrevistarlos a pesar de haber respondido correctamente al menos dos reactivos no supieron dar una justificación aceptable al porqué de su respuesta.

La secuencia didáctica se abordó mediante un taller con duración de 4 sesiones de una hora treinta minutos cada una, en cada sesión del mismo, los estudiantes fueron quienes trabajaron la mayor parte del tiempo, la resolución de cada actividad constaba de dos etapas, en la

primera los estudiantes la abordaban individualmente y en la segunda en equipo. A cada estudiante se le proporcionó hojas de trabajo que corresponden a las actividades de que consta la secuencia, los estudiantes respondieron a los cuestionamientos que se les hacía en cada actividad apoyándose en el software graficador, posteriormente se trabajó la actividad en equipo, se les pidió que discutan sus resultados de cada actividad y llegaron a una conclusión plasmando sus resultados en una hoja de trabajo por equipo.
Después de la resolución individual y la discusión en equipo, se llevó a cabo la discusión del desarrollo de la misma con todo el grupo integrando los resultados para después formalizar la idea o concepto objeto de estudio. Después de cierto número de actividades, se le propondrá al alumno otra en la cuál deberá generalizar la definición de valor absoluto funciones de la forma $y = |x - c|$ donde c es un número real cualquiera, esta actividad con el propósito de llevarlos al desequilibrio, posteriormente se les proporciona una actividad en la que pueden confrontar las respuestas dadas en la actividad anterior, así como ver diferentes casos que le permitan la acomodación y finalmente se les pide generalizar, no sólo a funciones de la forma $y = |x - c|$ sino $y = |ax - c|$ cuando $a \neq 1$.
Una vez concluido el taller, se les aplicó una prueba denominada *test postcurso* el cual tenía como propósito evaluar el avance de los estudiantes después de cursar el taller, así como valorar el impacto de la secuencia didáctica con enfoque constructivista.

Resultados

Los resultados del test postcurso muestran que hubo una mejora del 95 % respecto a los resultados obtenidos en el test precurso en lo que respecta al concepto de función valor absoluto, sin embargo, esto no es suficiente para dar una conclusión, por lo cual, una vez efectuada la puesta en escena, se procedió al análisis de los datos: las actividades efectuadas por los estudiantes, los videos, grabaciones y notas.
Para dar lectura a los datos se acudió al análisis a priori, para tratar lo hipotético, y al análisis a posteriori, para tratar lo que realmente hicieron los estudiantes, y finalmente se confrontaron ambos análisis. Como ejemplo, mostraremos las respuestas de uno de los estudiantes en donde se muestra su avance al resolver cada una de las actividades:

Actividad 1

$$\textbf{abs } x = \begin{cases} \text{Es aquella que nos permite} \\ \text{encontrar valores para las} \\ \text{abcisas.} \end{cases}$$

Actividad 2

$$\textbf{abs } (x-1) = \begin{cases} \text{Como aquella que al restarle 1} \\ \text{Se corre un valor con respecto a x} \end{cases}$$

Actividad 3

$$\textbf{abs } (x+2) = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -(x+2), & x > -2 \end{cases}$$

Actividad 4

$$\textbf{abs } (x-c) = \begin{cases} x-c, & x \\ -(x-c), & \end{cases}$$

Actividad 5

Después de analizar diversos casos particulares correctamente, no da respuesta alguna. **S**in embargo como equipo responden correctamente:

$$abs\,(x - c) = \begin{cases} x - c, & x \geq c \\ -(x - c), & x < c \end{cases}$$

Actividad 6

$$abs\,(ax - b) = \begin{cases} \cancel{a \geq b}\ \ ax - b, & x \geq b \\ -(ax - b), & x < b \end{cases}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, la investigación muestra gran avance en cada uno de los estudiantes, tanto para los que no habían abordado dicho concepto en bachillerato como los que si reconocían haberlo abordado y recordaban la definición.

Como lo señala la teoría de Asimilación de Ausubel, el alumno aprende significativamente cuando es capaz de relacionar las nuevas ideas con algún aspecto esencial de su estructura cognitiva, al respecto, nos pudimos percatar, que varios de los problemas presentados por los alumnos, son debidos a la falta de comprensión del concepto de función, lo cual no se consideró como requisito en el test precurso, pero que consideramos es de suma importancia para comprender el caso particular de la función valor absoluto.

Se pudo observar que hubo aprendizaje significativo por parte del alumno, pues aunque al final de la actividad aún presenta algunas dificultades para definir la función, al interactuar con el software y las gráficas de las funciones, el alumno logra atribuir significado a lo que está realizando, pudiendo transitar por más de un registro de representación del concepto en cuestión, además de que logra observar las transformaciones que sufre la función $f(x) = |x|$ cuando es afectado por un parámetro, en este caso "c", esto es, al considerar $f(x) = |x - c|$.

Nos pudimos percatar que las respuestas dadas por el alumno al resolver la actividad individualmente, varían notablemente respecto a las presentadas después de discutir con sus compañeros, el desarrollo alcanzado por el alumno individualmente, lo que cada alumno fue capaz hacer solo, puede compararse con el desarrollo potencial del mismo, observando que aquello que no fue capaz de hacer por si mismo, le fue posible hacerlo con ayuda de sus compañeros, lo cual mostró su desarrollo potencial.

En general, podemos decir que se logró que los alumnos discutan, reflexionen, conjeturen, así como convenir en una respuesta, muestran cierto progreso a medida que se van enfrentando a las actividades, logran generalizar la definición para cualquier valor real, recurren a las gráficas antes de dar una respuesta, lo cual muestra que se logró cierto avance respecto a que no sea lo algebraico quien domine.

Sin embargo, los alumnos siguen presentando problemas que aparentemente son de notación pero que se deben entre otras cosas a problemas más importantes como son los debidos al dominio del concepto de función, a pesar de dar respuestas correctas, sus argumentaciones muestran que es necesario hacer un análisis más profundo de los factores que lo llevan a cometer los errores, no sólo en el concepto de función sino en otros conceptos propios del Cálculo, además de que al hacer la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori, concluimos entre otras cosas que la secuencia debe ser rediseñada en base a un análisis de los factores que influyen en los estudiantes y los llevan a cometer esos errores conceptuales, pero que en sí, las secuencias didácticas sin son una herramienta útil, tanto para profesores como para estudiantes en lo referente al logro de aprendizajes significativos y a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Ávila, E. (2006). Un estudio de las dificultades que presentan estudiantes en el área de cálculo. En *Memorias del V Encuentro de Investigación Educativa*. Mérida, Yucatán, México.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Prentice-Hall.

Moreno, L. (1992). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. Madrid, España: Síntesis.

DESARROLLO DE LA DIMENSIÓN EMOCIONAL Y CAMBIO EN EL AUTO-CONCEPTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

José Daniel Martínez González
jmartinez@cinvestav.mx

Campo de investigación: factores afectivos. Nivel educativo: básico
Palabras clave: dominio afectivo, resolución de problemas, auto-concepto y rendimiento matemático

Resumen
Esta investigación tiene como interés central dilucidar si alumnos de secundaria pueden lograr, mediante el trabajo en un taller extracurricular de resolución de problemas, competencias emocionales como la toma de conciencia y control de sus emociones, que les permita cambiar de manera positiva su auto-concepto matemático. La información obtenida del trabajo experimental aún se encuentra en proceso de análisis, sin embargo, los resultados preliminares muestran que el gusto y el nivel de auto-confianza como descriptores del auto-concepto matemático son buenos predictores del rendimiento matemático.

Introducción

Este documento muestra el análisis de los resultados de la aplicación del primer instrumento metodológico en la investigación que se lleva a cabo con estudiantes de tercer grado de educación media básica. El estudio se realiza en el marco de un taller extracurricular de resolución de problemas, y pretende afirmar que los sujetos que logran desarrollar competencias emocionales como la autoconciencia y el autocontrol de sus emociones; cambian de manera positiva su auto-concepto matemático.
Las preguntas de investigación son las siguientes:

- ¿Qué áreas de competencia emocional desarrollan los estudiantes a través del trabajo en el club de resolución de problemas?
- ¿El desarrollo de competencias emocionales genera en los estudiantes cambios significativos acerca de su auto-concepto como resolutores de problemas y como estudiantes de matemáticas?

Marco Teórico

En la resolución de problemas interviene una gama de aspectos cognitivos y metacognitivos. Estos aspectos son los más estudiados en el ámbito de la investigación en Matemática Educativa, pero no son los únicos susceptibles de estudio; se están dejando de lado los aspectos afectivos. Posiblemente esto se deba a la idea de que las matemáticas son algo puramente intelectual, donde el comportamiento relativo a las emociones no juega un papel esencial (Gómez-Chacón, 2003).
En los procesos metacognitivos que se desarrollan para resolver un problema, un estudiante resiste ciertas emociones. Entonces, los aspectos afectivos y en particular las emociones juegan un papel esencial en la resolución de un problema, sin embargo, poco se han estudiado de manera sistemática aspectos sicológicos que relacionan a las matemáticas con los alumnos como las actitudes, las creencias, las emociones, los valores, el estilo atribucional, apreciaciones, gustos, preferencias, sentimientos, temperamento y estilo de aprendizaje (Sánchez, 2005).

El desarrollo del *meta-afecto*, –como la toma de conciencia que el sujeto hace de sus propias emociones (observar, identificar y nombrar emociones)–, constituye la habilidad fundamental que da paso al control, la organización y utilización inteligente de esos impulsos (Gómez-Chacón, 2003). La adquisición de estas competencias (desarrollo de la dimensión emocional) le permitirá al sujeto superar los bloqueos cognitivos en la resolución de un problema que le provocan reacciones emocionales desfavorables (interacción afecto-cognición).

Por otra parte, las creencias relacionadas con el auto-concepto, la auto-confianza y el gusto son una de las componentes de conocimiento subjetivo implícito del individuo (basado en la experiencia) sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, tienen una fuerte estabilidad y están compuestas por elementos afectivos, evaluativos y sociales. Estas creencias en relación con las matemáticas tienen una marcada componente afectiva en los estudiantes y se consideran un *predictor* del rendimiento matemático (Bermejo, 1996; Gómez-Chacón, 1997).

Así, el entrenamiento en la resolución de problemas que pone atención en los aspectos afectivos y en la interacción afecto-cognición, puede constituirse como un plan emergente con el propósito de elevar el nivel de auto-concepto matemático de los estudiantes.

En cuanto a la relación entre la dimensión afectiva y emocional y la influencia que ésta ejerce en el aprendizaje de las matemáticas, fundamentalmente en la resolución de problemas, Guerrero y Blanco (Blanco, Gil & Guerrero, 2005) han diseñado un *programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, inspirado en el modelo de resolución de problemas de Polya (2000), partiendo de la hipótesis de que las creencias, las actitudes, los pensamientos y las emociones explican una gran parte del resultado y rendimiento en matemáticas, siendo sus principales objetivos resolver problemas de matemáticas, adiestrar al alumno en el afrontamiento de situaciones de ansiedad y manejar emociones.

A partir de esta revisión, considero que tanto los aspectos afectivos como los cognitivos y sobre todo, la regulación de la interacción de ambos, son factores de éxito en el desempeño escolar en matemáticas. Además, el desarrollo de la dimensión emocional de los alumnos influye en su sistema de creencias. A la vez, éstas inciden directamente en el autoconcepto que los alumnos tienen como resolutores de problemas y como estudiantes de matemáticas. La investigación se llevará a cabo a partir de esta perspectiva teórica.

Aspectos metodológicos

La investigación se llevó a cabo con 10 estudiantes de 3er grado (14-15 años) del turno vespertino de una secundaria técnica (educación media básica) en el estado de Jalisco, México. Tuvo una duración de 12 sesiones de dos horas cada una. Se realizó en el marco de un taller extracurricular de resolución de problemas, en el que los alumnos asistieron tres veces por semana antes de su entrada normal a clases.

La metodología es de corte cualitativo. Los instrumentos utilizados fueron: cuestionario inicial; entrevista y observación participante durante el trabajo experimental y cuestionario final, tal como se muestra en el siguiente esquema:

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Observación participante y</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">DURANTE ELTRABAJO EXPERIMENTAL</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">CUESTIONARIO
INICIAL</td><td colspan="3">12 Sesiones de enseñanza</td><td rowspan="2">CUESTIONARIO
FINAL</td></tr>
<tr><td>ENTREVISTA
Sesión 3</td><td>ENTREVISTA
Sesión 6</td><td>ENTREVISTA
Sesión 10</td></tr>
</table>

Cuestionario inicial. Permitió medir el nivel de Auto-concepto matemático de los alumnos antes del trabajo experimental. Se aplicó a un grupo de 27 estudiantes de 3er grado de secundaria, con el propósito primordial de seleccionar a 10 sujetos susceptibles de estudio. Esta selección se hizo a través de la categorización de los sujetos según la relación: *Auto-concepto Matemático (ACM) – Rendimiento Matemático (RM)*.

Esta categorización *ACM – RM* es posible de la siguiente manera; en cuanto al auto-concepto matemático que tienen los sujetos, el cuestionario permitió catalogarlos en uno de los niveles bajo, regular y alto. Así mismo, los estudiantes se catalogaron de acuerdo a los promedios de calificación en matemáticas como altos, regulares o bajos en el nivel de rendimiento matemático.

Así, considerando el binomio *ACM – RM*, los sujetos se ubicaron en una de las siguientes categorías: BB, BR, BA, RB, RR, RA, AB, AR y AA. (p. ej. BA significa que el estudiante resultó Bajo en *ACM* y Alto en *RM*)

Este cuestionario se basó en la Escala Actitudes hacia las Matemáticas y Matemáticas y Matemáticas Enseñadas con Computadora (AMMEC), que Ursini et al. (2004) elaboró y validó para la identificación de género y actitudes hacia las matemáticas enseñadas con computadora. Esta escala se divide en sub-escalas, de las cuales se tomaron dos para formar el Cuestionario ACM; una referida al Gusto por las matemáticas, que consta de 11 preguntas y otra, de 6 preguntas, relacionadas a la Auto-confianza y auto-eficacia en matemáticas.

Entrevista. Los diez sujetos seleccionados fueron entrevistados y video-grabados en tres ocasiones a lo largo del trabajo experimental, en la tercera, la sexta y la décima sesiones. Las entrevistas tuvieron una doble funcionalidad: como recolector de datos identificando, constatando y especificando los cambios y la evolución de los procesos meta-afectivos desarrollados por los sujetos; y como parte del mismo proceso de autoconciencia y utilización de las emociones a través de la reconstrucción de los procesos de solución. De manera cualitativa, las entrevistas complementaron la instrucción afectiva en el taller.

Las entrevistas se basaron en la reconstrucción del proceso de solución de los problemas, considerando los cambios cognitivos aparentes para identificar a través de ellos las reacciones emocionales del sujeto.

Observaciones. La triangulación de observaciones durante las sesiones de enseñanza significó otro instrumento que permitió interpretar cualitativamente los resultados de las entrevistas y del cuestionario.

Cuestionario Final. En la sesión final se aplicó nuevamente el Cuestionario ACM con el propósito de contrastar los resultados respecto del Auto-concepto matemático de los sujetos antes y después del trabajo experimental.

Análisis de resultados

A continuación se muestra la categorización *Auto-concepto Matemático (ACM) – Rendimiento Matemático (RM) de los* 27 estudiantes a partir de la aplicación inicial del cuestionario ACM:

SUJETO	ACM	RM	CATEGORÍA ACM – RM
G	A	R	AR
AA	A	A	AA
T	A	A	AA
K	A	A	AA
L	A	A	AA
J	A	A	AA
O	A	R	AR
Q	R	A	RA
U	A	R	AR
P	R	A	RA
C	A	R	AR
H	R	R	RR
V	R	R	RR
R	R	A	RA
I	R	R	RR
Z	R	R	RR
B	R	R	RR
S	B	A	BA
A	R	B	RB
F	B	A	BA
E	B	R	BR
N	B	R	BR
Y	B	R	BR
M	R	B	RB
X	B	A	BA
W	B	B	BB
D	B	B	BB

La tabla anterior permite ver que 10 alumnos (casi 2 de cada 5) se ubican entre las primeras cuatro categorías *ACM – RM*: BB, BR, BA y RB. En las categorías RR, RA, AR y AA, que en general pueden considerarse de regulares a altas, se ubican los demás sujetos. En cada categoría RR, RA y AA se ubican 4 sujetos y ningún estudiante aparece en la categoría AB.

A partir de la aplicación del cuestionario, se seleccionaron los diez alumnos ubicados en las categorías BB, BR, BA y RB, los cuales se presentan en la tabla de abajo, indicando la categoría ACM – RM, y el resultado de cada sub-escala.

SUJETO	ACM – RM	ACM	GUSTO	AUTO CONFIANZA
W-JORGE	BB	B	B	B
D-BRUNO	BB	B	B	B
E-IVÁN	BR	B	R	B
N-EDGAR	BR	B	R	B
Y-ROSARIO	BR	B	B	R
F-RAQUEL	BA	B	B	R
S-JOSUE	BA	B	R	B
X-ANDREA	BA	B	B	B
M-ÁNGELA	RB	R	R	R
A-JESSICA	RB	R	R	R

La categoría BB, se eligió por que reúne los niveles más bajos en ambos aspectos. BR, BA y RB, se eligieron precisamente por la contrariedad que suponen los niveles en ambos aspectos.
Se dejaron de lado AA y RR porque aunque con el cuestionario final podría verificarse un aumento o disminución en el nivel de Auto-concepto matemático, el hecho de que en casi todos los casos, las sub-escalas se correspondan con el rendimiento matemático (p. ej. AA resultó A en las dos sub-escalas), nos remite a la idea original de que el gusto y el nivel de auto-confianza en matemáticas son buenos predictores del rendimiento matemático.
Por último, RA y AR no se estudiaron porque, aunque no siempre se corresponden las sub-escalas en el nivel de auto-concepto, y no obstante que éste tampoco se corresponde con el nivel de rendimiento matemático, lo cierto es que los sujetos de esas categorías, se ubicaron cerca de los límites de las categorías RR o AA en ambos casos.

Referencias bibliográficas

Bermejo V., (1996). *Enseñar a comprender las matemáticas*. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la Instrucción 1*. Madrid: Síntesis. 256–279.

Blanco, L. J. & Gil, N. & Guerrero, E. (2005). *El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos*. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Junio, 2, 15–32.

Gómez-Chacón I. (1997). Procesos de aprendizaje en Matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las Matemáticas. Tesis Doctoral sin publicar, Universidad Complutense de Madrid, España.

Gómez-Chacón I. (2003). *La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2), 225–247.

Polya G. (2000). *Cómo plantear y resolver problemas. V*igésimo cuarta reimpresión de la primera edición en español (1965). Traducción al español a cargo de Julián Zagazagoitia, Editorial Trillas, México, de la segunda edición en inglés: *"How to solve it"* publicado por Achor Books, USA.

Sánchez, J. (2005). Estilo atribucional en el éxito de la comprensión de conceptos matemáticos: un estudio longitudinal en estudiantes de la carrera de Psicología. Tesis Doctoral sin publicar. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Orendain M., Sánchez, G. & Ursini, S. (2004). Validación y confiabilidad de una escala de Actitudes hacia las Matemáticas y hacia las matemáticas Enseñadas con Computadora. Educación Matemática, Diciembre, vol. 16, núm. 3, 59–78.

LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL BACHILLERATO. RESULTADOS DE UN PROYECTO DE DESARROLLO DOCENTE

Silvia Elena Ibarra Olmos; Lorena Fernández Sesma
Universidad de Sonora. (México)
sibarra@gauss.mat.uson.mx; fesl670131@hotmail.com
Campo de investigación: pensamiento algebraico. Nivel educativo: medio
Palabras clave: registros de representación semiótica

Resumen
Se presenta un reporte sobre el diseño, experimentación y evaluación de una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza de la función cuadrática en el primer año del bachillerato. Tomando como marco teórico los sistemas de representación semiótica de Raymond Duval, las actividades se diseñaron con el objetivo de promover en los estudiantes los reconocimientos, tratamientos y conversiones del objeto matemático seleccionado en los registros de representación gráfico, tabular y algebraico, empleando como mediador el lenguaje materno. La puesta en escena se trabajó bajo una estrategia de enseñanza que promoviera en el alumno un constante conflicto cognitivo que lo indujera al razonamiento, análisis y solución de situaciones problemáticas.

Antecedentes

Recientes evaluaciones en el ámbito nacional e internacional muestran que la educación matemática en nuestro país no está alcanzando sus metas. Como ejemplo de lo anterior tenemos los resultados publicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), respecto a la prueba de matemáticas aplicada el 2004 en secundaria. Se encontró que un 51.1% de los alumnos no alcanzan a dominar satisfactoriamente los conocimientos y habilidades básicos que establecen los programas oficiales (Velasco 2006). Para dicha prueba, se definieron seis habilidades medibles relacionadas con la resolución de problemas: operar, medir, comunicar, imaginar, generalizar e inferir. La prueba fue de opción múltiple, y se aplicó un mismo examen a los tres grados de secundaria, ya que expertos del INEE consideraron que en los tres grados se imparten aspectos comunes de la disciplina (Martínez, 2004). En otra publicación del INEE, respecto a los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) , aplicada el año 2003 a estudiantes de 15 años en 41 países, se encontró que México ocupó el lugar número 35 en la evaluación de matemáticas (Martínez, 2003).
En vista de lo anterior, consideramos que es necesario que se convierta en meta de investigación en matemática educativa la búsqueda de alternativas de enseñanza que propicien que nuestros estudiantes alcancen aprendizajes significativos, además de romper con los viejos paradigmas que señalan a la matemática como la disciplina más difícil y atemorizante que se enseña en las escuelas.
Por otro lado, consideramos que el desarrollo que Matemática Educativa tiene en el mundo, y particularmente en México, nos permite encontrar resultados potentes y atractivos, susceptibles de enriquecer el trabajo docente, como es el caso de la teoría de las representaciones semióticas.
Ubicando esta situación en el nivel educativo en el cual desarrollamos nuestra actividad profesional, decidimos desarrollar una propuesta de desarrollo docente que ofreciera una alternativa de enseñanza para la clase de matemáticas en el bachillerato. El objeto matemático

seleccionado fue el de las funciones cuadráticas, escogido por diversas razones; entre ellas está el de su amplia utilización en otras ramas del conocimiento.

Marco teórico

Establecemos que las estrategias de enseñanza para las matemáticas deben estar diseñadas con el propósito de promover en el estudiante un constante conflicto cognitivo que lo induzca al razonamiento, análisis y reflexión de situaciones, así como a la búsqueda y aplicación de estrategias que lo ayuden a solucionar situaciones problemáticas. La capacidad de tomar decisiones propias por parte del estudiante, y saber interpretar correctamente el significado de las soluciones obtenidas, debe ser otro objetivo en el diseño de estrategias de enseñanza.
Según las teorías de Raymond Duval (Duval, 1993), para cada objeto es posible definir distintos sistemas de signos y reglas que lo simbolizan y facilitan su comprensión y aprendizaje. Dichos sistemas se constituyen como representaciones semióticas del objeto, donde un conjunto de signos se identifican las como *unidades significantes* del sistema, mientras que las reglas que lo rigen ordenan las asociaciones entre que pueden realizarse los signos. Sin embargo, Duval puntualiza que no se debe confundir el objeto con sus representaciones, ya que esto a la larga puede convertirse en un obstáculo cognitivo para quienes lo estudian. Por el contrario, el saber diferenciar entre el objeto y sus representaciones se constituye como un punto estratégico para el aprendizaje, ya que las representaciones son necesarias tanto para fines de comunicación de los objetos, como para la actividad cognitiva del pensamiento que lleva a la compresión de los mismos. Es decir, los procesos de la *Semiosis* (aprehensión o producción de una representación semiótica) y de la *Noesis* (aprehensión o construcción conceptual de un objeto) son inseparables.
Por otro lado, toda representación semiótica es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa, por lo que la coordinación de varios registros de representación resulta fundamental para una asimilación conceptual de un objeto. Aún más, de acuerdo con lo establecido por Duval, para que un sistema semiótico pueda ser considerado como un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la *semiosis*, las cuales son:

1. La formación de una representación identificable como imagen de un registro dado
2. El tratamiento de una representación
3. La conversión de una representación

Así pues, la propuesta consiste, como ya se señaló antes, en una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza de la función cuadrática, contemplando el estudio del objeto matemático en los sistemas de representación antes mencionados. Con lo anterior se pretende facilitar la observación global y la caracterización de objeto, además de permitir un mayor número de tratamientos que pueden realizarse dependiendo del tipo de representación en la cual esté siendo estudiado. Se tiene la convicción de que un alumno construye un conocimiento más completo de un objeto matemático, cuando es capaz de identificarlo, caracterizarlo y hacer tratamientos a dicho objeto en varios registros de representación semiótica, y aún más, cuando puede realizar conversiones del mismo de un registro de representación a otro.

Diseño y experimentación

La experimentación del proyecto se dividió en dos fases, un estudio piloto y la puesta en escena del diseño final de la secuencia didáctica. En ambas fases se trabajó con grupos de 15 de álgebra de primer año de bachillerato, organizados en equipos de a lo más cuatro personas y en sesiones de 50 minutos, utilizando un cuadernillo de trabajo con las actividades propuestas. La conducción del proceso de aprendizaje estuvo a cargo de una de las responsables del diseño, quien a su vez era la maestra titular del grupo.

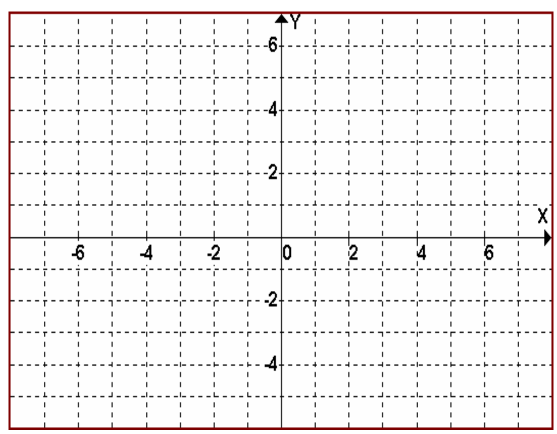
Con la intención de evaluar el grado de efectividad de nuestra secuencia como herramienta en la enseñanza de la función cuadrática, se diseñó un cuestionario con ocho actividades similares a las que se incluyeron en el diseño didáctico, las cuales debieron ser contestadas en forma individual por los alumnos a quienes no se impuso límite de tiempo para realizar la tarea. En el cuestionario se engloban los distintos contenidos y habilidades que se esperaba fueran desarrollados por los alumnos mediante las diferentes actividades.

Posteriormente se les realizó una entrevista en la que expusieron las estrategias que siguieron para ejecutar las tareas que les fueron planteadas vía el cuestionario; el propósito de las entrevistas fue profundizar en la información escrita con la que se contaba. Se llevó una bitácora del trabajo realizado por los estudiantes en cada sesión, así como de la evaluación y las entrevistas, mediante registros escritos y video grabados.

Algunas de actividades que se incluyeron en la secuencia didáctica y en el cuestionario de la evaluación, así como el tipo de conocimientos que se pretende enseñar mediante ellos, se presentan a continuación.

1. Te voy a pedir que utilices el siguiente plano cartesiano y traces las parábolas cuyas características describo a continuación:

   A) La parábola 1 tiene su vértice en (-3,4), su ordenada al origen en (0,-5), y tiene dos intersecciones con el eje horizontal, una en (-5,0) y la otra en (-1,0).
   B) La parábola 2 tiene su vértice en el punto (5,0), su ordenada al origen se encuentra en (0,5) y tiene una intersección en el eje horizontal en (5,0).
   C) La parábola 3 tiene su vértice en (3,3), su ordenada al origen en (0,4) y no tiene intersecciones con el eje horizontal.

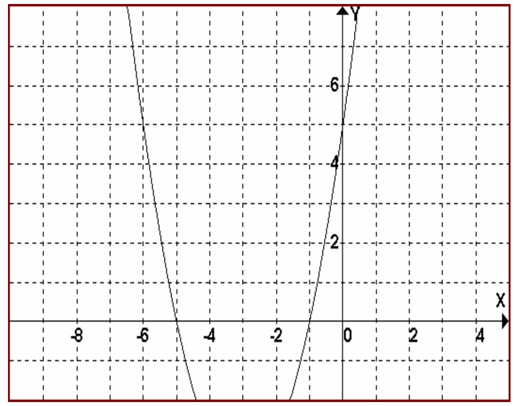


Con esta actividad, se pretende examinar el desarrollo de *conocimientos disciplinarios,* en el alumno, es decir aquellos que están relacionados directamente con la matemática y que son necesarios para iniciar el estudio de la función cuadrática. Entre dichos contenidos se pueden mencionar, conocimiento de técnicas de factorización, productos notables, trazo y ubicación de puntos en el plano cartesiano, leyes de los signos, leyes de los exponentes y orden de los números de acuerdo con la recta numérica (enteros, fracciones comunes, decimales, positivos y negativos). Por supuesto en esta clasificación se incluye el conocimiento referente a la función que se estudiará mediante la secuencia de actividades.

Entre dichos conocimientos podemos mencionar:

1. Reconocimiento de la parábola como la gráfica de una función cuadrática,
2. Construcción de la gráfica a partir de la identificación de algunos de sus puntos, principales, atendiendo las propiedades de concavidad y simetría de la parábola, y trazo de puntos en el plano cartesiano

2. Construye la expresión algebraica de la función representada por la gráfica en el siguiente plano cartesiano.



Con la actividad se pretende evaluar contenidos *disciplinarios y habilidades cognitivas* como los siguientes:

1. Se espera que los alumnos se vean en la necesidad de convertir la función del registro gráfico al tabular,
2. En el registro tabular, los alumnos se encontrarán con el problema de que no hay suficientes datos para realizar tratamientos, mediante el método de segundas diferencias para encontrar las coordenadas de los puntos que no contiene la gráfica y que son necesarios para encontrar la expresión algebraica.
3. Por lo tanto será necesario que el alumno entre en el terreno de las conjeturas y suponga los datos que le hacen falta. Específicamente se tienen que suponer las coordenadas del vértice y los puntos anterior y posterior a él,
4. Una vez propuestos los puntos que hacen falta, se espera que se realice la conversión del registro tabular al algebraico.
5. En el registro algebraico será necesario realizar tratamientos a la expresión simbólica para encontrar el parámetro "*a*" y finalmente obtener la expresión canónica de la función.
6. Por último se espera que los alumnos comprueben que tanto los datos supuestos, como la expresión algebraica encontrada, son correctos.

Reflexiones finales

Del análisis realizado con los registros escritos por los equipos de estudiantes en los cuadernillos de trabajo, así como de las video grabaciones de las sesiones de clases y de las entrevistas individuales, se concluyó que los alumnos afrontaron la secuencia de actividades poniendo en juego sus conocimientos y habilidades, hasta lograr la institucionalización local del nuevo conocimiento que iban construyendo. Con esta forma de trabajo se observó en los estudiantes una mayor confianza al exponer sus ideas ante grupos pequeños de compañeros, además favoreció la cooperación entre los integrantes de los equipos durante la ejecución de las tareas. También se observó una mayor disponibilidad por parte de los estudiantes a defender las conclusiones a las que habían llegado con sus equipos de trabajo, cuando se realizaban discusiones grupales para institucionalizar el conocimiento estudiado.

La actuación de los equipos participantes en general fue buena, al demostrar capacidad para realizar tratamientos a la función cuadrática en los distintos registros de representación.

Además de utilizar satisfactoriamente el conocimiento de diversos contenidos básicos del álgebra, como herramientas en la resolución de las actividades de la secuencia.
En lo que respecta a los procesos de conversión entre distintos registros de representación, se llevaron a cabo eficientemente siempre y cuando en cada registro de salida existiera la información necesaria para realizar dichas transformaciones. Es decir, en el registro de salida, debían estar presentes todas las unidades significantes que aprendieron a correlacionar con las unidades significantes del registro de llegada. En caso de faltar alguna de dichas unidades, el proceso de conversión entre registros no se llevó a cabo por algunos equipos.
Se encontró que nuestro diseño potenció en los alumnos la caracterización del objeto matemático en los registros de representación gráfico, tabular y algebraico, logrando una buena identificación de las unidades significantes de cada registro, así como una buena relación de las mismas al momento de llevar a cabo tratamientos internos a la función.
Algunos estudiantes no sólo realizaron tratamientos con el propósito de responder lo que les pedían algunas actividades, también los utilizaron como herramientas para la obtención de datos que no incluían las actividades que resolvieron y que les eran necesarios para lograr la resolución de las mismas. Estos estudiantes también realizaron tratamientos para validar sus propios resultados y los datos que habían supuesto cuando trabajaron con las actividades del cuestionario de evaluación.
Otro aspecto que es importante destacar es el hecho de que los estudiantes, pusieron en igualdad de importancia el aprendizaje de las tres formas de representación de la cuadrática y no se enfocaron hacia la representación algebraica de la función como sucede en las clases tradicionales.
Observaciones como las anteriores nos hacen tener una actitud positiva respecto a la posibilidad de continuar con esta línea de trabajo, profundizando en lo que ya se ha hecho y retomando otros contenidos matemáticos del álgebra en el bachillerato.

Referencias bibliográficas

Bagni, G. (2004). Una secuencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 0* 7 (1), *5 -23.*

Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiótique et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives*. (pp. 37 –65). Strasbourg, France: IREM.

Duval, R. (1999) *Semiosis y el Pensamiento humano*. *Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.

Velasco J. M. (2006). *Instituto Nacional para Evaluación de la Educación.* [Documento de www]. URL http://www.inee.edu.mx/

Martínez F. (2004) *¿Qué resultados obtuvieron las entidades federativas en las pruebas nacionales de comprensión lectora y matemáticas?* [Documento de www] URL http://multimedia.ilce.edu.mx/inee/publicaciones1.2htm

Martínez F. (2003). *Resultado de la prueba PISA, elementos para su interpretación.* [Documento de www] URL: http://multimedia.ilce.edu.mx/inee/pdlf/pisaplus.pdf

Segura, S. M. (2004). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 0* 7 (1), 49-78.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ANTIGUOS QUE INVOLUCRAN AL TEOREMA DE PITÁGORAS

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas. (Uruguay)
filomate@adinet.com.uy, matemoni@adinet.com.uy
Campo de investigación: formación de profesores, pensamiento geométrico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: problemas, teorema de Pitágoras

Resumen
Se comparan la forma original de resolución y las resoluciones dadas por estudiantes de primer año de profesorado de matemática a problemas pertenecientes a distintas culturas antiguas (babilónica, egipcia, china, hindú, árabe) cuya resolución implica el conocimiento de la relación pitagórica.

Introducción

La relación entre los lados de un triángulo rectángulo aparece entre los primeros resultados matemáticos de distintos pueblos. No hay pruebas de que las culturas antiguas –babilónica, egipcia, china, hindú, árabe– conocieran una demostración deductiva del teorema de Pitágoras salvo para algunos casos particulares como el del triángulo rectángulo isósceles o el de lados 3, 4 y 5. El desconocimiento de una demostración que abarcara a todos los triángulos rectángulos no impidió que el resultado fuera usado para plantear y resolver problemas del más variado tipo.

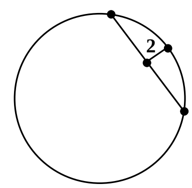
Objetivos y método de trabajo

Los problemas antiguos que implican un conocimiento del teorema de Pitágoras por parte de las culturas que los plantearon y resolvieron, están enunciados y resueltos con valores específicos. Planteamos algunos de dichos problemas a dieciocho estudiantes de primer año del profesorado de matemática del Instituto de Profesores Artigas (18 – 20 años) buscando por un lado conocer las estrategias de resolución de los mismos por parte de los estudiantes, y por otro dar a conocer los procedimientos y herramientas usados originalmente por las culturas que plantearon los problemas. La dinámica de trabajo fue la siguiente: se trabajó en grupos de no más de cinco integrantes que deberían discutir las tareas propuestas, llegar a un consenso y entregar un reporte de común acuerdo. Esto permitirá que los estudiantes expresen lo que piensan acerca de la forma de resolución de los problemas, que refuten la opinión de sus compañeros con sus argumentos lo que permite el desarrollo del pensamiento en general y particularmente el pensamiento matemático. Esto puede favorecer el desarrollo del pensamiento crítico ya que permite que se den alternativas de solución a algún problema y que argumentando en base a ello se favorezca el desarrollo intelectual de los estudiantes. El favorecer la diversidad de miradas que pueden hacerse de los conocimientos y sus relaciones con los conocimientos previos, lleva a que los conocimientos adquiridos con anterioridad puedan ir formando cierta estructura conceptual cada vez más robusta y funcional.
Se propone un problema y se les solicita que, una vez resuelto, expliciten los conocimientos y herramientas que utilizaron en su resolución. Una vez culminada esta etapa, se les presenta la solución dada por quienes plantearon el problema originalmente y se les pide que interpreten

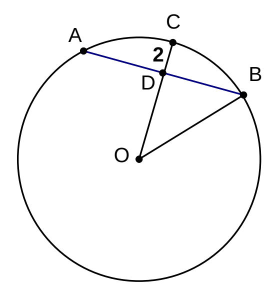
dicha solución y que identifiquen conocimientos y herramientas supuestamente utilizadas de acuerdo a la interpretación realizada.
Se hace una puesta en común en donde se presentan y comparan las conclusiones de los diferentes grupos en torno a sus propias resoluciones así como a las resoluciones dadas por los antiguos. De las seis actividades trabajadas se reportan las actividades 1 y 3.

La experiencia

Actividad 1
El primer problema planteado, que figura en una tablilla babilónica de alrededor de 2600 años a. C., dice:
Sesenta es la circunferencia, dos es la flecha.
Hallar la cuerda.



La totalidad de los equipos, luego de discutir y asumir que la flecha es perpendicular a la cuerda en su punto medio, halla en primer lugar el diámetro de la circunferencia, luego el radio, la distancia del centro de la circunferencia al punto medio de la cuerda y por último usan el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos cuyos vértices son: el centro de la circunferencia, un extremo de la cuerda y el punto medio de la cuerda.
A grandes rasgos, los cálculos realizados fueron:
diámetro = 60 / π = 60 / 3,14 = 19,10.
radio = 9,55
DO = 7,55
DB = $\sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{9{,}55^2 - 7{,}55^2} =$
$= \sqrt{91{,}20 - 57{,}06} = \sqrt{34{,}12} = 5{,}84$
AB = 2.DB = 11,68.



Las propiedades que reconocen haber aplicado:

- Relación entre el diámetro y la circunferencia
- La perpendicular a una cuerda por su punto medio pasa por el centro de la circunferencia
- El teorema de Pitágoras

Junto al problema en la tablilla babilónica figura la forma de resolverlo:
El doble de dos es cuatro. Quite cuatro a veinte, obtiene dieciséis. El cuadrado de veinte es cuatrocientos; el cuadrado de dieciséis es doscientos cincuenta y seis. Quite doscientos cincuenta y seis de cuatrocientos: obtiene ciento cuarenta y cuatro. Halle la raíz cuadrada de ciento cuarenta y cuatro. Doce, la raíz cuadrada, es la cuerda.
Tal es el procedimiento.
Todos los equipos interpretaron que se estaba trabajando en un triángulo rectángulo de hipotenusa 20 y un cateto 16, pero en general al no reconocer de dónde provenía el 20 no supieron como relacionarlo con la restante información. Sólo uno de los grupos, uno de cuyos integrantes sabía que en algunas culturas antiguas se usaba 3 como valor de pi, interpretó el 20 como diámetro de la circunferencia y pudo interpretar la solución dada por los babilonios

Una de las preguntas que surgió fue la de ¿cómo interpretar la diferencia entre el resultado obtenido por ellos (11,68) y la respuesta babilónica (12)?

La explicación estuvo a cargo del grupo antes mencionado: los babilonios, como algunos otros pueblos, utilizaron para π el valor aproximado 3. Por lo tanto si "sesenta es la circunferencia" el veinte que aparece en la resolución del problema puede ser el diámetro.

Otra interrogante: ¿Cómo interpretar el dieciséis, que se obtiene de restar cuatro? El mismo grupo explica que posiblemente razones de simetría los hayan llevado a obtener la figura que indican y de allí, utilizando la relación que liga a los lados de un triángulo rectángulo, se siga que la longitud de la cuerda buscada se obtenga mediante

Longitud de la cuerda = $\sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$

que coincide con los pasos indicados en la tablilla.

Aceptando esta interpretación, ¿qué propiedades reconocían los babilónicos?

- ♦ Que ángulos inscriptos en una semicircunferencia son rectos.
- ♦ Congruencia de los dos triángulos simétricos.
- ♦ Teorema de Pitágoras en el caso del triángulo 12, 16, 20, variante del triángulo de lados 3, 4, 5.

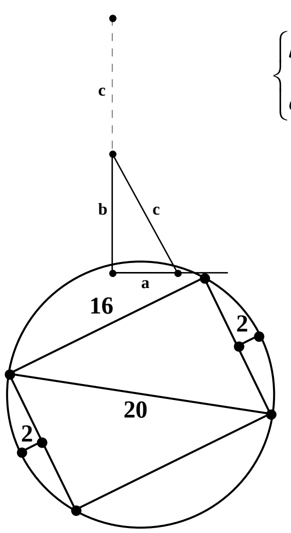
Actividad 3

En *Aritmética en Nueve Secciones*, libro chino del siglo II a. C. que tuvo una importancia considerable para el desarrollo de la matemática china aparece el siguiente problema (citado en Eves, 1995):

Hay un bambú de 10 chih de alto, cuyo extremo superior al romperse toca el suelo a 3 chih de la base del tronco.

¿A qué altura se produjo la rotura?

Todos los grupos pudieron resolver el problema salvo uno de ellos, que si bien planteó un sistema de ecuaciones no lo pudo resolver por no ser este lineal.



$$\begin{cases} b + c = 10 \\ c^2 = b^2 + 9 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{91}{20}$$

折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘即折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之
高數也
去根三尺
去根如勾折處
如股折梢如弦
通長如股弦和
股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股弦較乘股弦
和如股弦和而一正除得股弦較以減股弦和餘二段

La solución que acompaña al problema chino es la siguiente:
Tomar el cuadrado de la distancia desde la base del bambú hasta el punto en el que su parte superior toca el suelo, y dividir esa cantidad por la longitud del bambú. Restar el resultado de la longitud del bambú y dividir por 2 la diferencia que se obtiene. Esto nos da la altura de la rotura.
Al momento de comparar el resultado que habían obtenido con el dado por los chinos se dieron cuenta que la solución dada por estos no solo hacía referencia al caso particular sino a una situación más general que luego de una serie de idas y vueltas vieron que podría expresarse como:

$$b = \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{a^2}{b+c}\right)$$

Lo primero que hicieron todos los grupos fue verificar si la solución china coincidía con la obtenida previamente por ellos.
Para los valores del problema b + c = 10 y a = 3, de donde $b = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{9}{10}\right) = \frac{91}{20}$.
Ante la pregunta por parte de los docentes acerca de si la solución china al problema era válida para otros valores, la mayoría de los estudiantes manifiestan que sí basándose en que fue correcta para los valores del problema. Hacen una extensión inductiva basándose en un solo caso. Se les hace notar el tipo de razonamiento que habían empleado y se les plantea buscar algún fundamento matemático para la solución general china.
Las explicaciones que se obtuvieron por parte de los equipos fueron las siguientes:
i) Generalizaron a partir de lo trabajado por ellos en el caso particular de la siguiente manera:

$a^2 + b^2 = c^2$
$b + c = k \quad \rightarrow \quad c = k - b$

$a^2 + b^2 = (k - b)^2$
$a^2 + b^2 = k^2 - 2kb + b^2$

$$b = \frac{k^2 - a^2}{2k}$$

$$b = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b+c)}$$

$$b = \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{a^2}{b+c}\right)$$

ii) Transforman algebraicamente la solución china, lo que los llevó a la relación pitagórica.

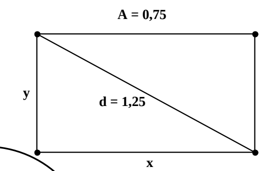
$$b = \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{a^2}{b+c}\right)$$

$2b(b + c) = (b + c)^2 - a^2$

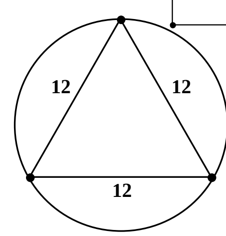
$2b^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$
$b^2 + a^2 = c^2$

Otros problemas trabajados

Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero de culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia del agujero se produjo la captura?
(Problema indio) (Gheverghese, 1996)
Hallar la longitud y la anchura de la figura (rectángulo), dadas su área 0,75 y diagonal 1,25.
(Problema babilonio cercano al 1000 a. C.) (Perero, 1994)



Hallar el área de un círculo que circunscribe un triángulo equilátero de lado 12.
(Problema egipcio de aproximadamente el año 150 d. C.) (Boyer, 1986)



A ambas orillas de un río hay dos árboles, uno frente al otro. Uno de los árboles tienen una altura de 20 codos, el otro de 30 codos. La distancia entre sus troncos es de 50 codos. En la cima de cada árbol hay un pájaro. De pronto, los dos pájaros ven un pez que aparece en la superficie del agua entre los dos árboles y se lanzan para alcanzarlo. Lo alcanzan al mismo tiempo.
¿A qué distancia del tronco de los árboles apareció el pez?
(Problema árabe) (Perero, 1994)

A modo de reflexión final

Los problemas aquí reportados así como sus resoluciones muestran que es posible enfrentar a los estudiantes a problemas tomados de la historia de la matemática. Su resolución habilitó la discusión acerca de la diversidad de procedimientos –actuales como antiguos–, así como de conocimientos puestos en juego en cada resolución. Al comparar los distintos métodos de resolución y las formas de transmitirlos se pudo redimensionar las herramientas algebraicas disponibles hoy en día frente a la forma retórica en que aparecen las soluciones de muchos problemas antiguos. También sirvió para tomar conciencia de cómo las formas de validar resultados matemáticos ha ido cambiando a través del tiempo: lo que hoy puede ser mirado como un argumento no riguroso, fue aceptado por otras culturas como tal. Esta visión puede ayudar al estudiante de profesorado de matemática a entender sus propias dificultades al momento de decidir cuando un argumento matemático es válido. La tarea de interpretar las producciones de los antiguos contribuye a la futura labor docente de interpretación de las producciones de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Aaboe, A. (1984). *Episódios da história antiga da matemática*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas I*. México: Siglo XXI.

CONICET (1986). *Geometría. Su enseñanza*. Argentina: Prociencia-Conicet.

Dunham, W. (1995). *El universo de las matemáticas*. España: Pirámide.

Eves, H. (1985). *Estudio de las Geometrías*. Tomo 1. México: Uteha.

Eves, H. (1995). *Introducáo á História da Matemática*. Brasil: Editora da Unicamp.

Fernández Fernández, S. (2001). La historia de las matemáticas en el aula. *UNO*, nº 26, Historia de las matemáticas, págs. 9-27.

Gheverghese, G. (1996). La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. España: Pirámide.

Mankiewicz, R. (2000). Historia de las matemáticas. Argentina: Paidós.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática*. Volumen 1. España: Gedisa.

Swetz, F. (1995). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson y V. Katz (Eds.), *Learn from the masters*, págs. 25-38.

UN INFORME SOBRE EL SIGNIFICADO PERSONAL LOGRADO EN EL TEMA INTERVALOS DE CONFIANZA POR ALUMNOS DE UNA FACULTAD DE CIENCIAS VETERINARIAS

Teresita E.Terán, Mercedes Anido de López
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. UNR. (Argentina)
teresitateran@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: superior
Palabras clave: intervalo de confianza, prácticas, dificultades, comprensión

Resumen
En este trabajo se analiza el Significado Personal Logrado (SPL) (Godino y Batanero, 1994) por alumnos de un 1º curso de Estadística en el tema Intervalos de Confianza de una Facultad de Ciencias Veterinarias. En el marco de esta teoría, se trata de conjeturar por medio de la observación de clases prácticas la presencia de distintos elementos de significado: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos, que son reveladores de la comprensión del tema. Se considera que el trabajo en clase es más espontáneo puesto que no existe la presión de una situación de examen.
Siguiendo el registro de observación de Callejo (1996) se concluye que el elemento de significado cuya posesión presenta mayor dificultad a los alumnos es el validativo, hecho que se corrobora con el análisis del Significado Personal Evaluado (SPE).

El problema de investigación y marco teórico

Este trabajo forma parte de una investigación cuyo objetivo es indagar el significado del concepto de Intervalos de Confianza para alumnos de un primer curso de Estadística en la Universidad Nacional de Rosario. En el marco de la teoría de Godino (1999) se trata de conjeturar por medio de la observación de los alumnos en las clases prácticas, la presencia de distintos elementos de significado: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos, que se consideran reveladores de la comprensión del tema.
Los objetos matemáticos, en nuestro caso los intervalos de confianza emergen de la actividad de resolución de problemas
Godino y Batanero (1994) introducen dos tipos de entidades primarias: prácticas significativas y significado de un objeto para los cuales postulan dos dimensiones interdependientes: personal e institucional y proporcionan elementos teóricos de análisis, entre ellos el Significado Institucional de Referencia (SIR), sistema de prácticas construido a partir de los textos universitarios recomendados y de nuestra propia experiencia en la aplicación y en la enseñanza de la Estadística; el Significado Personal Logrado (SPL), sistema de prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida, esto es, todas aquellas prácticas y ejercicios realizados por el alumno y que están de acuerdo con el SIR y el Significado Personal Evaluado (SPE) que da cuenta del sistema de prácticas expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
Una práctica es significativa para una persona o para una institución si desempeña una función en la resolución del problema o si es útil para comunicar, validar o extender la solución a otros problemas.
En la construcción del significado y la comprensión sobre un objeto matemático (concepto, procedimiento, proposición, etc.) intervienen diversos tipos de objetos:

- Los problemas y situaciones de donde surge dicho objeto.

- Las expresiones del lenguaje, gráficos, manipulativos y cualquier otra representación del mismo.
- Sus definiciones, propiedades, y relaciones con otros objetos.
- Las acciones y procedimientos para resolver problemas y operar con el objeto.
- Los argumentos que damos para probar las propiedades o validar las soluciones a los problemas.

Elementos de significado

Godino (2002), define los siguientes tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática y que llamaremos *tipos de elementos de significado* y facilitan su análisis:
Extensivos: las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto (situaciones-problemas, aplicaciones), de donde se induce y hacia donde se aplica la noción de Intervalo de Confianza y su contexto.
Ostensivos: representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos); en ellas se incluyen en general las entidades lingüísticas/notacionales, por ejemplo, la notación de los Intervalos de Confianza, la notación de las distintas distribuciones que se utilizan , las gráficas de la función de densidad de dichas distribuciones, etc.
Actuativos: procedimientos y estrategias para resolver los problemas (procedimientos, algoritmos, operaciones), se ponen de manifiesto, por ejemplo a través de los diversos procedimientos que se realizan cuando se efectúa una representación gráfica o una simulación.
Intensivos: propiedades características y relaciones con otras entidades: definiciones, teoremas y proposiciones (conceptos, proposiciones), como por ejemplo, las ideas de estadístico, parámetro, población o muestra en relación a los intervalos de confianza.
Validativos: tipos de argumentaciones para validar proposiciones (demostraciones, comprobaciones, justificaciones).

Descripción del estudio

Como nuestra investigación se centra en el significado de los Intervalos de Confianza para los alumnos universitarios, unas de las preguntas que nos formulamos es ¿cuál es la comprensión de los alumnos en el tema en un primer curso de Estadística en la Universidad? ¿Qué elementos de significado se revelan en la observación de clases? Para contestar estas preguntas debemos partir de la definición de Significado Personal Logrado (SPL).
Para indagar sobre el SPL se han analizado prácticas realizadas en clase por los alumnos de la cátedra Bioestadística de segundo año de la Facultad de Ciencias Veterinarias de la Universidad Nacional de Rosario, durante el primer cuatrimestre del año 2005, siguiendo el criterio de Tauber (2001). Las clases son teórico-prácticas, en cada clase se desarrolla la teoría partiendo de ejemplos motivadores, y luego se presentan problemas relacionados con situaciones específicas de la carrera. Los alumnos disponen antes de cada clase de un apunte que sintetiza los contenidos teóricos sustento de la práctica a desarrollar. Si bien las prácticas se desarrollan en forma individual, al concluir el tiempo asignado a la resolución de un problema, la profesora resuelve el problema en pizarra buscando seguir por medio de

preguntas, una puesta en común del proceso de resolución. Los alumnos autocorrigen su trabajo.
En cuanto a las técnicas de observación empleadas, Vergnaud (1980) considera que se debe admitir que "la investigación en didáctica persigue, entre otras cosas, establecer hechos didácticos. Se trata de hechos que intervienen en la clase, a lo largo del proceso de transmisión, de apropiación y de construcción de los conocimientos". Estos hechos conciernen a las conductas de los alumnos, frente al saber que se pretende transmitir.
Se considera que el trabajo en clase es más espontáneo puesto que no existe la presión de una situación de examen, se observaron clases y se analizaron las prácticas resueltas por los alumnos.
El criterio de registro de las observaciones que se ha seguido se enmarca en el registro de observación no participante propuesto por Callejo (1996). Siguiendo la metodología de evaluación propuesta por este autor se ha analizado el trabajo de cinco o seis alumnos por clase. Para mostrar el criterio con que se han consignado los comportamientos reveladores de los distintos elementos de significado, se analizan los aspectos destacados de la clase observada y se presenta una copia escaneada de una de las resoluciones realizadas por alumnos, con su correspondiente estudio sobre la presencia de elementos de significado.

Registro de observación de prácticas realizadas por los alumnos

- Aspectos salientes de la clase presenciada.

En esta clase se desarrollaron tres problemas, uno de los cuales fue extraído de la Revista de Medicina Veterinaria Vol.79. Este problema requiere, además de la construcción de un intervalo de confianza para *p*, la determinación del tamaño muestral en función del error de estimación.
Se presenta el problema a ser analizado.

PROBLEMA PRESENTADO POR EL PROFESOR PARA SER RESUELTO EN CLASE

Los siguientes datos corresponden a enfermedades cardíacas encontradas en una muestra de 1132 perros con diferentes pesos.

Peso en Kg.	Endocardiopatías	Miocardiopatías
Menos de 15 kilos	700	83
15 kilos o más	149	200

a) Calcular un intervalo de confianza para la proporción de caninos con miocardiopatías en la población

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra si se puede aumentar el error de la estimación en un 20%?

Los elementos de significado que requiere la comprensión y resolución del problema están presentes en los siguientes puntos:
a) ▪ elementos extensivos: están presentes en el análisis de donde surge el problema;

▪ elementos intensivos: definición de parámetro y estimador, intervalo de confianza para una proporción, distribución de probabilidad normal;
▪ elementos actuativos: cálculo del intervalo;
▪ elementos ostensivos: simbología adecuada para los estimadores y los parámetros, expresión del intervalo y valor adecuado de la tabla normal.
b) ▪ elementos intensivos: deducción del tamaño muestral;
▪ elementos actuativos: cálculo numérico de *n*.
A continuación se muestra una copia escaneada de la resolución de este problema realizada por un alumno.

Resolución de un alumno

a – $p = 283/1132 = 0{,}25$ $\qquad pq = 0{,}1875$

$$p - z\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \hat{p} \leq p + z\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$0{,}25 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1875}{1132}} \leq \hat{p} \leq 0{,}25 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1875}{1132}}$$

$$0{,}224 \leq \hat{p} \leq 0{,}275$$

b – $1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1875}{1132}} \cdot 0{,}20 = 0{,}005$

$$n = \frac{0{,}1875 \cdot 1{,}96^2}{0{,}005} = 144.$$

Se observa en la resolución de este alumno que confunde parámetros y estimadores (elementos intensivos y ostensivos).
En el segundo renglón muestra no poseer los elementos intensivos que vinculan el concepto de Probabilidad con el de Intervalos de Confianza y en consecuencia, no pone en juego adecuadamente los elementos ostensivos relacionados con una correcta expresión de la probabilidad asociada al intervalo.
En el penúltimo renglón muestra deficiencias en el logro de elementos actuativos (no calcula correctamente).
Registro de observación correspondiente al comportamiento de cinco alumnos durante el desarrollo de la clase frente a la presentación del problema y análisis de los elementos de significado puestos en juego:

Aspectos considerados	Descripción de los comportamientos de los alumnos		Alumnos									
			1		2		3		4		5	
			Si	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Comprensión del problema	Reconoce la incógnita, los datos y las condiciones que relacionan esos datos	Ost		X		X		X	X		X	
		Int		X		X		X	X			X
Estrategias y procedimientos correctos en la resolución del problema	Selecciona una estrategia para resolver el problema	Int		X		X		X	X			X
	Recopila los elementos necesarios para aplicar la estrategia elegida	Ext		X	X		X		X			X
		Ost		X		X	X		X		X	
Conocimientos necesarios en la resolución del problema	Moviliza los conocimientos ya adquiridos	Int		X	X			X	X			X
Los resultados y las soluciones en la resolución del problema	Realiza los cálculos necesarios	Act		X		X	X			X	X	
	Interpreta los resultados(*)	Val	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(*) Este problema no tiene ítems referidos a su interpretación. No intervienen elementos validativos

En el momento curricular correspondiente a la práctica de Intervalos de Confianza se observaron los trabajos de los alumnos en el aula resolviendo las situaciones problemáticas presentadas por el profesor.

Siguiendo el criterio de registro que presenta Callejo (1996) se analizó la producción escrita de 5 alumnos por clase. De toda esta producción como muestra del significado personal logrado se podría concluir que los alumnos que asisten a clase (la asistencia no es obligatoria) ponen de manifiesto, en general la posesión de elementos de significado intensivos, extensivos, ostensivos y actuativos.

Si consideramos ahora el comportamiento de los alumnos de todo el curso, la siguiente tabla indica el porcentaje promedio en relación a los tres problemas en cuanto a la posesión de cada elemento de significado.

Elementos de significado personal logrado	Porcentaje de posesión
Intensivos	72,22 %
Extensivos	86,66%
Ostensivos	68,3 %
Actuativos	83,33%
Validativos	44 %

Conclusiones

Del análisis de las observaciones realizadas conjuntamente con el resultado de las evaluaciones en la indagación del SPL, surge que el elemento de significado cuya posesión presenta mayor dificultad a los alumnos es el validativo, asociado a ítems que proponen algún tipo de evaluación, argumentación o elaboración personal. Esto indicaría una falta de capacidad de reflexión vinculada con la predominancia y mecanización en la resolución de problemas. En un análisis posterior en relación con los procesos de metacognición se estudió a través de una encuesta la proporción de alumnos que dicen no tener problemas en la evaluación de los distintos ítems que comprenden las dificultades más comunes observadas (elementos de significado) y se los comparó con las calificaciones obtenidas en cada ítem de la evaluación, a través de un análisis estadístico (coeficiente de asociación y χ^2). Se concluye que alumnos que no fundamentan su propia actuación, creen poseer el conocimiento. El alumno no alcanza a llegar a un trabajo de síntesis y evaluación del proceso-producto, ni a un espacio que invite a la reflexión del propio alumno y lo forme en la necesidad de justificar los procedimientos.

Estos resultados indicarían la necesidad de profundizar en términos cualitativos el estudio del proceso de aprendizaje de la validación en clase.

Precisamente un ejemplo de cómo las actividades que se usan regularmente podrían ser aprovechadas para enseñar a validar se tiene en el problema propuesto analizado. En el mismo, el profesor podría haber incluido un ítem solicitando la interpretación del intervalo en los términos del problema y además en el punto b) explicar la relación entre el tamaño muestral y el error de estimación.

Referencias bibliográficas

Callejo, M. L. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, pp. 53-63.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 196-212). Valladolid.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*. Vol. 22(2/3).

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 14(3), 325-355. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Sorbías, R. (2001). Enfermedades cardíacas en perros adultos. *Revista de Medicina Veterinaria.* Vol. 79,50-52

Tauber, L. (2001). La construcción del significado de la distribución normal en un curso de análisis de datos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Vergnaud, G. (1980). Problemática y Metodología de la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Segundo Seminario de Investigaciones Psicopedagógicas sobre Métodos de Observación y Análisis de los Procesos Educativos*. pp. 31-42. Barcelona.

ALGUNAS INCONSISTENCIAS EN EL SISTEMA AXIOMÁTICO DEDUCTIVO DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES Y SUS IMPLICACIONES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA*

Marco Antonio Morales Salmerón, Santiago Ramiro Velázquez Bustamante
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
myr_1812@yahoo.com.mx, sramiro@prodigy.net.mx
Campo de investigación: pensamiento Geométrico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: Elementos de Euclides, fallas lógicas, fundamentos, aprendizaje, geometría

Resumen
Este trabajo consiste en una investigación en proceso que analiza algunas problemáticas del sistema axiomático de Euclides y su impacto en el aprendizaje de la geometría. Enfocamos la atención en la superposición, la vaguedad de algunas definiciones, las imprecisiones de otras y las suposiciones inconscientes o tácitas que se utilizan en algunas demostraciones, (Kline, 1972; Hernández, 2001). Pretendemos mirar el estudio que al respecto hacen investigadores en este campo y como están presentes estos aspectos en las prácticas de profesores y estudiantes de licenciatura en su afán de aprender geometría.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la edad antigua y media estuvo basada en los Elementos de Euclides y siguió vigente como texto básico, en muchos lugares hasta bien avanzado el siglo XIX, a finales de éste y principios del siglo XX ocurrieron cambios importantes en la concepción de las matemáticas. Motivados por la aparición de las geometrías no euclídeas y por la influencia de nuevos modos de tratamiento del infinito matemático en la teoría de conjuntos de Cantor. Los matemáticos tuvieron que ocuparse más intensamente que nunca de establecer las bases de esta ciencia. Los fundamentos han sido sometidos a una severa observación, provocando una crisis.

La necesidad de fundamentar la geometría, viene dada por la preocupación de sistematizar la exposición que se hace en los Elementos y de eliminar algunos "defectos" de la exposición euclidea (Kline, 1972; Hernández, 2001). Entonces tenemos que los Elementos de Euclides en la actualidad no resolverían satisfactoriamente el problema de demostrar en geometría, porque el número de definiciones, axiomas, postulados que sirven como base para una demostración rigurosa de todos y cada uno de los teoremas que aparecen en los Elementos es insuficiente y algunas demostraciones presentan suposiciones tácitas.

Para poder corregir estas fallas lógicas tuvieron que pasar más de dos mil años, en donde se sintió la necesidad de un tratamiento postulacional verdaderamente satisfactorio de la geometría euclidiana. Todas las suposiciones encubiertas, o tácitas, tenían que indagarse y había que proponer un conjunto lógicamente aceptable de postulados fundamentales para la materia en forma clara e inequívoca.

Dicha organización de la geometría euclidiana fue realizada primero en 1882 por el matemático alemán Moritz Pasch, su objetivo principal era clarificar los cimientos teóricos de la geometría entendida siempre como ciencia del espacio físico, para esto él hace una distinción entre definición explícita e implícita, mientras que Euclides intentó una clase de definición explícita de los términos punto, recta y plano, en tanto Pasch aceptó éstos como primitivos o irreducibles en su desarrollo de la geometría euclidiana; después Peano en 1889

* El titulo actual de la investigación es "Aspectos relevantes el sistema axiomático de los Elementos de Euclides y sus implicaciones en el aprendizaje de la geometría".

dio un nuevo desarrollo postulacional de la geometría euclidiana, la obra de Peano es principalmente una traducción del tratado de Pasch en la notación de una lógica simbólica que Peano introdujo al mundo matemático. Posteriormente Mario Pieri, empleó en 1899 en un estudio de la geometría euclidiana un enfoque muy distinto del de sus predecesores ya que él consideró que la materia de su estudio era un agregado de elementos indefinidos llamados "puntos" y un concepto indefinido de "movimiento" al cual propone cinco postulados el cual indican el importante papel asignado al concepto de movimiento. Y el moderno tratamiento postulacional de la geometría euclidiana que ha recibido la aceptación más amplia se debe al eminente matemático alemán David Hilbert, que en 1899 propone bajo el titulo "Grundlagen der geometrie", menciona los cinco grupos de axiomas donde se sustenta la geometría, los cuales son:

- ✓ Axiomas de enlace.
- ✓ Axiomas de orden.
- ✓ Axiomas de paralelismo. (Axiomas de Euclides)
- ✓ Axiomas de congruencia.
- ✓ Axiomas de continuidad. (Axioma de Arquímedes)

Como pudimos observar la organización de los Elementos da fe de precisión conceptual y de refinamiento en la exposición y de la demostración. Aún así, existen muchos presupuestos del trabajo geométrico que no son identificados, porque la actividad del geómetra griego estaba guiada todavía fuertemente por las ideas intuitivas, ligadas a las figuras dibujadas, que desempeñaban un papel central en la demostración. Así por ejemplo, en las primeras proposiciones del Libro 1 las figuras se trasladan o se superponen, una operación que actualmente se introduce por medio de *axiomas de congruencia*. De la misma manera, la existencia de puntos de intersección entre las figuras elementales, la recta y el círculo, se deduce de la observación de la figura que acompaña a la demostración, mientras hoy en día (¡aunque pueda parecer sorprendente!) para garantizar tal existencia se introducen *postulados de continuidad*.

Una etapa que no debemos pasar por alto es donde la geometría sufre un destierro curricular en todos los niveles educativos, y éste en parte se debe a la evolución del tratamiento postulacional ya anteriormente mencionado y además al movimiento que Nicolás Bourbaki produjo al dar a conocer su obra que tiene como titulo *Éléments de mathématique*, en donde la exposición es puramente formal y deja de lado los aspectos que se muestran en los Elementos. Además la obra de Bourbaki tuvo mucha influencia en la forma de abordar y exponer la matemática en los textos y en la enseñanza de los años 1950 y 1960. Esta forma bourbakista de exposición, sólo permite en sus procedimientos partir de axiomas bien explícitamente establecidos, sin apelar en ningún momento a los contenidos intuitivos y prácticos que dan su motivación a las construcciones matemáticas, era considerado el único modo admisible para la exposición matemática y, lo que ha sido más dañino, para la enseñanza misma a todos los niveles, incluida la enseñanza secundaria, y aún en muchos casos, la primaria. Como consecuencia de lo anterior la enseñanza secundaría y primaria fue invadida por la corriente llamada "matemática moderna", con su proliferación de la teoría de conjuntos y con el *destierro de la geometría* de corte más clásico, sustituido por nociones bastante inoperantes y aburridas de álgebra abstracta.

Como se puede observar el desarrollo del tratamiento postulacional de la geometría a representado mucho esfuerzo y tiempo por parte de los matemáticos interesados en esta disciplina, pero cuando esta evolución del tratamiento postulacional es llevado a la escuela posiblemente muchos profesores no le presta la importancia que debiera tener y soslayan esta parte de historia de la geometría, que forma parte de la crisis de fundamentación que tuvo la matemática y de que los estudiantes de matemáticas deben de conocer. Entonces es cuando nos surgen las siguientes interrogantes ¿cuáles serian las implicaciones que se tendría en la enseñanza de la geometría sino se tomara en cuenta esta evolución del tratamiento postulacional? ¿La manera en que se trabaja la geometría en la licenciatura de matemáticas, permite al alumno visualizar y detectar los aspectos relevantes del sistema axiomático deductivo de los Elementos de Euclides? Por lo que en el presente trabajo de investigación tiene por objetivo *analizar los aspectos relevantes en el sistema axiomático de los Elementos de Euclides y sus implicaciones en la enseñanza de la geometría.*

Marco teórico

Al convertir una representación en otra, en el esquema conceptual asociado a un concepto matemático, no siempre hay consistencia y se puede producir situaciones de congruencia o de incongruencias. En el tema de inconsistencia probablemente sepamos muy poco sobre ellas y sobre su rol en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pero es importante reconocerlas en nuestros alumnos para intentar emprender con ellas un camino hacia un pensamiento más consistente en nuestros estudiantes (Garbin, 2005).

Queremos resaltar aquí el trabajo que realizó Tirosh (1990), quién clasificó las ideas inconsistentes y expuso los posibles orígenes de éstas. Tirosh aumenta esta clasificación ofreciendo otros tipos de ideas inconsistentes, de particular importancia para la instrucción:

- *a)* inconsistencias directas e indirectas;
- *b)* validez matemática de las proposiciones;
- *c)* inconsistencias externas e internas;
- *d)* consciencia de los estudiantes de sus inconsistencias.

En particular resulta interesante lo que Tirosh sugiere, y es el de mirar las razones de las inconsistencias en tres áreas diferentes:

LA MENTE

- a) Pueden entrar en conflicto el conocimiento y las creencias.
- b) Puede haber discrepancia entre el aprendizaje formal, intuitivo y el conocimiento algorítmico.
- c) Puede haber discrepancia entre el esquema conceptual y la definición del concepto.
- d) La naturaleza del contexto en que es adquirido el conocimiento puede ser origen de inconsistencias.
- e) La resistencia al cambio conceptual.
- f) La percepción de la matemática que tiene el estudiante.
- g) La compleja relación que existe entre la matemática y el mundo físico.

LA MATEMÁTICA: NATURALEZA RELATIVA

Un alumno puede comprender insuficientemente la naturaleza relativa de la matemática, ya que hay campos de la misma en que un determinado problema no tiene solución mientras que en otros sí. Puede traer como resultado operaciones inconsistentes dentro del sistema en que se esta trabajando.

EL MENSAJE

a) El lenguaje. La matemática debe ser enseñada, comunicada: por tanto es necesario formar u lenguaje matemático que permita tal actividad.

b) El currículo. La presentación de un tema en el currículo matemático es una causa principal de inconsistencias en la estructura matemática de los estudiantes.
c) Instrucción. Se piensa que probablemente ciertas estrategias didácticas crean más inconsistencias que otras en la mente del estudiante.

Medios empleados para identificar los aspectos relevantes

Para la exploración de las prácticas de profesores y estudiantes se estructura una situación de aprendizaje, conformada con seis actividades cuatro de ellas son proposiciones[†] de los Elementos de Euclides, la quinta es un ejemplo claro de cuando se realiza una suposición tácita y donde se observa claramente que se contradice un conocimiento ya establecido. La última actividad tiene como propósito observar el sentido que el alumno o el profesor le asigna a la demostración y la utilidad como herramienta para el desarrollo de su vida profesional. A continuación se presentan la actividad uno y la cinco.

1. Analiza el siguiente problema y contesta las preguntas que se hacen al final.

Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

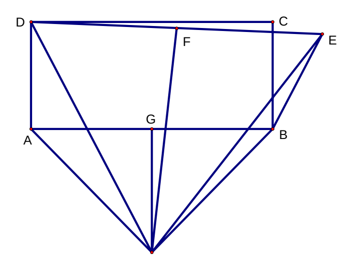
Sea AB la recta finita dada. Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.

Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo $B\Gamma\Delta$ [Post. 3], y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo $A\Gamma\mathrm{E}$ [Post. 3], y a partir del punto Γ donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas $\Gamma A, \Gamma B$ hasta los puntos A, B [Post. 1]. Y puesto que el punto A es el centro del círculo $\Gamma\Delta B$, $A\Gamma$ es igual a AB [Def. 15]; puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo $\Gamma A\mathrm{E}$, $B\Gamma$ es igual a BA [Def. 15]; pero se ha demostrado que ΓA es igual a AB; por tanto, cada una de las (rectas) ΓA, ΓB es igual a AB. Ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí [N. C. 1]; por tanto, ΓA es también igual a ΓB; luego las tres ΓA, AB, ΓB son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo $AB\Gamma$ es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita dada AB. (Que es) lo que había que hacer.

- ¿El problema ya lo habías visto y analizado anteriormente, en que asignaturas? Menciona tu experiencia.
- ¿Qué opinas del problema y su demostración?
- ¿Identificas algún aspecto relevante o especial en este problema? Explícalo.
- Crees que con los datos[‡] que se te presentaron, esta bien justificada la demostración. ¿Por qué?
- ¿Cuáles son las Definiciones, Postulados, Nociones Comunes o Proposición que te garantiza que los círculos se corten?

5. En una experiencia que tuvieron alumnos con su maestro en una clase de geometría se llegó a la conclusión de *que "un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso"* y el profesor le presentaba su demostración.



[†] Las proposiciones (proposición, libro) que utilizamos para esta exploración son: (1, I), (4, I), (29, I), (31, I)
[‡] Los datos que se le dan a los alumnos, son las 23 definiciones, 5 postulados, 8 Nociones comunes y 4 proposiciones, los cuales fueron extraídos de los Elementos de Euclides.

Demostración

Sea ABCD un rectángulo. Trácese la recta BE exterior al rectángulo y de longitud igual a BC y, por tanto, a AD. Trácense las mediatrices de DE y AB; como son perpendiculares a rectas no paralelas, deben cortarse en un punto, P. Trácense AP, BP, DP, EP. Entonces, PA = PB y PD = PE (un punto de la mediatriz de un segmento recto equidista de los extremos de éste). Además, por construcción, AD = BE. Por consiguiente, los triángulos APD y BPE son congruentes, puesto que los tres lados de uno son iguales a los tres del otro. De aquí que el ángulo DAP=ángulo EBP. Pero el ángulo BAP = ángulo ABP, puesto que estos ángulos son los ángulos en la base del triángulo isósceles ABP. Por sustracción se deduce ahora que el ángulo recto DAB = ángulo obtuso EBA.

- ¿Cuáles son los teoremas o proposiciones que se utilizan en esta demostración?
- ¿Identificas el error de la demostración? Explícala.
- ¿Cuáles son los datos que hacen que exista un error en la demostración?
- ¿Cuáles son los teoremas o proposiciones que crees que deberían usarse en esta demostración?

Algunos resultados

Como se mencionó al principio esta es una investigación que se encuentra en proceso, sin embargo ya se han realizado experimentaciones con alumnos del quinto semestre de licenciatura en matemáticas (área matemática educativa), en la cual participaron 17 estudiantes. A continuación presentamos los resultados obtenidos de la primera actividad, en donde el aspecto relevante a detectar es una suposición tácita que hay en la demostración y éste se debe a que en los datos no existe ningún postulado, definición y nociones comunes que garantice que los círculos se corten. Para poder observar que si los alumnos detectan este aspecto nos basamos en las dos últimas preguntas que en el apartado anterior mencionamos; los resultados fueron los siguientes:

- Ocho alumnos mencionaron que la demostración estaba bien justificada, porque cada argumentación estaba sustentada por las definiciones, postulados y nociones comunes.
- Cinco alumnos dijeron que la demostración no estaba bien justificada, las explicaciones que ellos dieron fueron las siguientes:
    - Porque no se explica en la demostración el por qué el triángulo resultante es equilátero.
    - Dos alumnos mencionan que faltan datos para que la demostración sea correcta, pero no proponen cuales deberían ser estos.
    - Mencionan que la utilización de variables (letras griegas) los confundían.
    - Uno menciona que falta decir por qué se intersecan las circunferencias en dos puntos.
- Cuatro alumnos no respondieron

Con respecto a la última pregunta del por qué los círculos se cortan, las respuestas fueron las siguientes:

- De acuerdo a los datos las definiciones 8, 10, 15 y 17; los postulados 1 y 3; la noción común 1, son las argumentaciones más utilizadas seis alumnos para garantizar dicha intersección.

- Seis alumnos no respondieron.
- Dos mencionan que ninguna definición, postulado y noción común que vienen en los datos garantiza dicha intersección.
- Los tres restantes mencionan lo siguiente:
    - Argumenta, puesto que el diámetro de cada círculo que se encuentra sobre la misma recta definida por dos puntos, es mayor que la distancia entre esos dos puntos.
    - Ya que ambas circunferencia tienen el mismo radio en común.
    - No conozco que haya una definición, postulado o Noción común que garantice esto, pero repito todo depende de la distancia del segmento y utilizar cada extremo del segmento para trazar los círculos y recomendar que el radio de estos círculos sea más grande que el punto medio de este segmento, o la suma de los dos radios sea igual o mayor que el segmento.

Como podemos observar la mayoría de los alumnos no detectan la suposición tácita que se hace en la demostración. Porque de los cinco que mencionan que la demostración no esta bien justificada, solo uno aclara que hace falta la intersección de los círculos, pero al pasar a la siguiente pregunta que dice ¿Cuáles son las Definiciones, Postulados, Nociones Comunes o Proposición que te garantiza que los círculos se corten? Este se contradice porque el garantiza esta intersección con el postulado 3. Por otra parte queremos resaltar, que en esta misma pregunta un alumno enuncia lo que es un teorema para la continuidad en circunferencias, el cual dice "Sean ω_1 y ω_2 circunferencias contenidas en un mismo plano, de centros respectivos O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 (con $r_1 \leq r_2$). Entonces:

- Si $r_2 - r_1 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ entonces ω_1 y ω_2 tienen dos puntos en común
- Si $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ entonces ω_1 y ω_2 tienen un único punto en común, al igual que sus círculos, …"

Además pensamos aplicar estas actividades a grupos de primer año de la licenciatura en matemáticas el cual se encuentran en el curso de Geometría plana y trigonometría, para poder observar si el contexto en que es adquirido el conocimiento puede ser origen de inconsistencias o no.

Referencias bibliográficas

Euclides (1991). *Elementos de Euclides*. Madrid, España: Gredos.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. D.F. México: UTEHA.

Ferreirós, J. (2004). Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904. *La Gaceta de la RSME*, Vol.7.2, Págs. 449-467.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime Vol. 8, Núm. 2, pp. 169-193.

Hernández, L. (2001). Sobre los principios fundamentales de la geometría comentarios sobre los Elementos. Disponible en: http://www.euclides.org/menu/articles/aarticle1.htm

Kline, M. (1972). El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días tomo 1. Madrid, España: Alianza Editorial.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 12, 111-129.

VISIÓN ABSOLUTISTA DEL PRINCIPIO DE IDENTIDAD EN EL CURRÍCULO ESCOLAR DE MATEMÁTICAS

Andrea L. López Pineda, Beatriz Moreno Carrillo
Fac. Psicología UAQ, COBAQ Plantel 17. (México)
allopine@uaq.mx, betthy_moreno@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento algebraico. Nivel educativo: medio
Palabras clave: absolutismo, principio de identidad, bachillerato

Resumen
El presente trabajo indaga, a través de un cuestionario, la interpretación por parte de 40 estudiantes de bachillerato, referida al principio de identidad en expresiones algebraicas y figuras geométricas básicas, los resultados se analizan a la luz de las aproximaciones filosóficas absolutista y falibilista, mostrando una tensión entre las interpretaciones de los estudiantes y la concepción absolutista subyacente en el currículo escolar.

Introducción

El área de matemáticas, no obstante ser de gran importancia en la formación de los estudiantes, es también fuente de los principales obstáculos para desempeñarse adecuadamente desde el punto de vista académico. Es una de las materias con mayor índice de reprobación, igualmente constituye una de las principales causas por las cuales muchos niños y jóvenes abandonan sus estudios. Así mismo es una materia generalmente temida y rechazada por la mayoría de los estudiantes. Lo anterior implica que muchos jóvenes elijan una carrera que no requiera dichos contenidos.

Ante esta problemática los programas de investigación en educación matemática se han enfocado particularmente a encontrar los mecanismos, la metodología que permita a los estudiantes acceder a dicho conocimiento. Sin embargo estos programas dan por hecho que el contenido matemático incluido en las propuestas curriculares, es un contenido establecido con un alto nivel de certidumbre y por lo mismo incuestionable, impidiendo formular cualquier cuestionamiento referido a la naturaleza de la propia matemática como fuente de dificultad para su aprendizaje.

En este trabajo proponemos dirigir la mirada hacia un aspecto que pocas veces se trabaja en la investigación educativa en el área de matemáticas y que se refiere a la cuestionabilidad de los contenidos incluidos en el currículo escolar de matemáticas. Un punto esencial para reflexionar alude a la infalibilidad de los principios lógicos (identidad $A = A$, no contradicción $A \neq$ no A y tercero excluido) como parte fundamental de la construcción del saber matemático. Por ello se presenta un panorama general sobre las diferentes concepciones acerca de la naturaleza de la matemática, como un primer punto, el cual nos permitirá un acercamiento a la lectura de las interpretaciones de los estudiantes a expresiones algebraicas básicas y relacionadas con figuras geométricas elementales.

Posturas en Filosofía de las Matemáticas

Los programas de investigación en educación matemática tienen entre otros objetivos, la búsqueda de estrategias o nuevas metodologías que puedan favorecer el aprendizaje de las matemáticas escolares. Ello implica, aún cuando no se explicite, una posición filosófica con respecto a la perspectiva que se tenga de la naturaleza de las matemáticas.

Existen varias posiciones dentro de la filosofía de las matemáticas, sin embargo, en las clasificaciones que se mencionan con mayor frecuencia destacan dos perspectivas. Una de las cuales es la absolutista, (Ernest, 1998) o fundacionalista, también denominado programa euclideano, en el cual se incluyen aproximaciones tales como la de los intuicionistas, logicistas y formalistas. Otra postura afín es la monológica que tiene aspectos en común con las nombradas también posiciones modernas, y se argumenta, derivan de una filosofía cartesiana y kantiana. Por otra parte, el segundo enfoque designado posmoderno, incluye perspectivas como el socio-constructivismo - influenciado por la filosofía del lenguaje de Wittgenstein-, ésta incide en programas de investigación en educación matemática como en el humanismo, la etnomatemática y la educación crítica de la matemática.

A continuación exponemos de manera muy sintética dichas aproximaciones: La perspectiva absolutista, de acuerdo a Ernest (1994) se fundamenta en las siguientes tesis: 1) El conocimiento matemático parte de verdades indudables 2) La deducciones completamente fiables se logran considerando premisas explícitas, es decir, se puede lograr deducciones enteramente fiables a partir de premisas explícitas; y por último 3) tiene como ideal alcanzar un conocimiento matemático establecido a partir de pruebas impecables, esto es, las propiedades lógicas de las pruebas matemáticas son suficientes para establecer el conocimiento matemático, sin necesidad de mediación humana o de aspectos sociales. Esta postura, expresa Ernest, tiene un carácter eminentemente monológico, y está fundada en la racionalidad cartesiana y el modernismo. De manera particular la perspectiva monológica argumenta que no es necesario el diálogo, conversación o dialéctica en la generación del conocimiento matemático ya que éste surge a partir de cimientos firmes y únicos, los cuales lo fundamentan.

Por otra parte el fundacionalismo, siguiendo a Ernest, incluye las escuelas logicista, formalista e intuicionista, movimientos muy populares en la primera mitad del siglo XX, éstos, toman como fundamento el paradigma euclidiano aspirando a la reconstrucción de una estructura racional de un pensamiento indubitable. Sin embargo, esta aspiración no fue lograda dada la imposibilidad implícita en sus objetivos y por las aportaciones de los propios matemáticos que mostraron las restricciones generadas por este paradigma.

En lo que respecta a las posturas denominadas modernas, generadas particularmente a partir de la filosofía de Descartes y Kant, se puede afirmar que la característica sobresaliente de éstas es el papel preponderante de la razón para acceder al conocimiento. La razón entonces se constituye como la base única que sostiene de manera irrefutable la verdad del conocimiento. Esta propuesta sostiene y a su vez consolida los principios lógicos aristotélicos (identidad, no contradicción y tercero excluido).

Es a partir del siglo XX cuando aparecen posiciones que ponen en tela de juicio las perspectivas absolutistas, fundacionalistas y modernas de la matemática, las cuales hicieron factible el surgimiento de nuevas aproximaciones referentes a la naturaleza y modo de proceder de la matemática, como la posmoderna, cuasi empiricista o falibilista y las dialógicas.

La aproximación posmoderna, niega la existencia de verdades absolutas y la racionalidad como fuente del conocimiento y por lo tanto cuestiona la objetividad. Esta versión posmoderna asume que el saber matemático es un producto social, refuta la lógica aristotélica dando lugar a otras lógicas como la difusa, la cual muestra de manera más aproximada la forma de pensar de los seres humanos (Moslehian, 2004). El trabajo de Wittgenstein y Lakatos ha sido fundamental en el desarrollo de esta postura.

En esa misma línea la visión cuasi-empiricista o falibilista admite la creación de la matemática a partir de la experiencia práctica y situada socialmente, por ello se puede afirmar que el conocimiento matemático es situado, falible, dependiente de la cultura y los individuos que la conforman. La manera de validar dicho conocimiento, así como los métodos empleados dependerán de la ubicación cultural, social e histórica.
Coincidiendo con estas visiones la postura dialógica (Ernest, 1994) afirma que la comprensión es una actividad fundamentalmente textual, simbólica; la clase sustancial de conceptos y contenidos matemáticos se han constituido a través de la participación dialógica o dialéctica de sus creadores, por último considera que la metodología de las matemáticas puede ser tomadas en cuenta de una manera explícita y constitutivamente dialéctica.
En las aproximaciones señaladas anteriormente, el papel que juega la axiomatización –en la cual están implícitos los principios lógicos aristotélicos marca una diferencia considerable entre las posturas modernas y posmodernas, absolutistas y falibilistas,
En el despliegue del contenido matemático escolar, los principios derivados de la lógica aristotélica, generalmente quedan implícitos e incuestionables. Pareciera ser así que la visión absolutista es la que subyace en el currículo de matemáticas en los niveles básico, básico medio y medio superior.

Planteamiento del problema

En este trabajo se indaga sobre las interpretaciones de estudiantes de bachillerato acerca de cómo asumen el principio de identidad (A = A) dentro de contenidos algebraicos elementales y figuras geométricas básicas a fin de identificar si existe una correspondencia entre las interpretaciones hechas por los jóvenes y las posturas filosóficas descritas anteriormente.
Se plantea tal cuestionamiento porque consideramos que uno de los principales obstáculos en el aprendizaje de la matemáticas lo constituye la dificultad que tienen los estudiantes para pensar estrictamente con una lógica bivalente, forma de pensar requerido para desarrollar los contenidos en esta asignatura.
En matemáticas se necesita de manera esencial que se admitan sin más, los principios lógicos, y las normas para trabajar en esta disciplina obedecen a dichos lineamientos, sin embargo, como se ha mostrado en las diferentes perspectivas filosóficas, estos principios no son del todo incuestionables, antes bien son principios establecidos en un momento determinado de la historia de la humanidad
Los jóvenes pueden pensar la realidad y su entorno de múltiples maneras, y por consiguiente no todas se encausarían en una dirección, ellos intentarían darle sentido a partir de su propia experiencia, sin embargo, una petición de principio es abandonar cualquier forma de proceder y de pensar que no sea lógica.

Materiales y Método

Para lograr dicho objetivo se llevaron a cabo reuniones –cinco sesiones de una hora cada una-, con un grupo de estudiantes de bachillerato de cuarto semestre, en las cuales se discutieron algunos aspectos sobre los principios lógicos, fundamentalmente el principio de identidad. Al término de estas pláticas se aplicó un cuestionario – que incluía 11 reactivos- para indagar las posibles interpretaciones de un grupo de 40 estudiantes sobre dicho *principio en expresiones algebraicas elementales. Dos ejemplos del tipo de reactivos propuestos fueron:*

- ♦ Dibuja dos ejemplos que correspondan a cada una de las siguientes expresiones:

  1 = 1

  x = x

  x = y

- ♦ Señala el número de valores (1,2,3,4...∞) que pueda tener la letra en la siguiente expresión. Justifica tu respuesta 3 + a + a + a = a + 10

Posteriormente, al inicio del siguiente ciclo escolar -quinto semestre- se aplicó un segundo cuestionario referido a la interpretación de este mismo principio en figuras geométricas básicas. Un ejemplo de reactivos para este cuestionario fue el siguiente:
A continuación se presenta una serie de figuras y a su derecha un conjunto de expresiones, tacha el inciso o incisos que correspondan a la figura, puedes marcar una o más opciones. Proporciona la justificación.

a) 1 = 1
b) 1
c) x = x
d) x = y
e) 0tra (Escríbela)

¿Por qué?

- ♦ se presentó una línea recta, un triángulo equilátero, dos círculos iguales y un cuadrado y rectángulo

Análisis de resultados

Los resultados obtenidos en el primer cuestionario señalan la dificultad por parte de los estudiantes para reconocer la identidad en las expresiones x = x y 1 = 1 ya que sólo un 3% de los estudiantes alude a la identidad, mientras que la igualdad es reconocida como tal en un 94%. En la expresión x = y, en términos canónicos pudiera interpretarse como igualdad o como relación funcional. Sin embargo los estudiantes la interpretan más como una similitud o relación que como una igualdad en un 72%, donde x y y se asumen como dos cosas diferentes que comparten alguna similitud, categoría, clase o tienen alguna relación.
Por otra parte en expresiones como 3 + a + a + a = a + 10 un 5.5% de los estudiantes considera que la literal puede asumir diferentes valores en dicha expresión, lo que muestra la dificultad para identificar la identidad correspondiente a la literal a, asimismo encontramos en 38 estudiantes, (97%) la imposibilidad de discriminar cuando la literal se refiere a número generalizado, incógnita o en relación funcional.
En términos generales, se podría afirmar que el principio de identidad no parece ser lo más evidente en las expresiones algebraicas, la interpretación más común se refiere a la igualdad. Cuando la variable se presenta en varias ocasiones en una expresión es más evidente que el principio de identidad se ignora, pues le asignan valores diferentes.
Con respecto al segundo cuestionario, las respuestas para la línea recta muestran que el 60% (25 estudiantes) marcan como única respuesta la unidad, sin embargo no hacen referencia a una identidad. El 12% da 1=1 y 1, que pudiera interpretarse como igualdad e identidad, pero no lo explicitan.

En relación al triángulo el 43% (18 estudiantes) marca como respuesta única la unidad, el 14% (6 estudiantes) da respuesta distintas como 1+1+1, x=3, x ≠ x=x, 3=1, esta última respuesta, según aclaraciones dadas por el estudiante se refería a que los tres lados dan como resultado un triángulo, lo cuál tiene sentido para el estudiante, sin embargo rompe con la formalización matemática.
Para la igualdad entre los círculos 43% (18 estudiantes) dan dos respuestas 1=1 y x=x, indicando que puede ser una igualdad entre la unidad y cualquier valor. El 17% marca sólo x=x que indicaría que los círculos pueden tomar cualquier valor.
Ante la presencia de la figura del cuadrado igualado al rectángulo, el 63% da como respuesta x=y, justificada por una diferencia de tamaño entre las figuras e interpretan el signo de igualdad como una relación de cuadriláteros. Sólo un estudiante marca que x≠ y porque son de diferente tamaño.
Parece que los estudiantes identifican más fácilmente la forma de la figura y sus lados que las relaciones de igualdad o identidad.
Cabe señalar que la forma de proceder en la enseñanza de las matemáticas generalmente pasa por alto las múltiples interpretaciones de los estudiantes, asimismo, tanto en el discurso del profesor como en los contenidos incluidos en los programas textos y apuntes, la diferencia entre igualdad e identidad pocas veces se aborda, por ello, cabría preguntarse el por qué de tal omisión. Pareciera ser, que se asume que los estudiantes han introyectado el principio de identidad sin mayor cuestionamiento y además con la flexibilidad suficiente para moverse entre identidad e igualdad en función del contexto en donde se encuentre.

Conclusiones

Considerando lo anterior, se puede afirmar que en el proceso educativo se esperaría una aceptación tácita de los principios lógicos aristotélicos que subyacen en la práctica docente en matemáticas, no obstante los estudiantes muestran múltiples interpretaciones, alejándose así de la convención propia de esta área del saber.
Por lo tanto consideramos que existiría una tensión entre los programas, el discurso del profesor y los textos de matemáticas que parecen mostrar una visión absolutista y las interpretaciones de los jóvenes que se comprenderían desde una postura falibilista y posmoderna.
Reconocer las posibilidades de sentido mostradas por los estudiantes con respecto al contenido matemático, nos permitiría abrir espacios de trabajo y reflexión para comprender la dificultad generalizada en esta asignatura en los ámbitos educativos. Asimismo daría pauta a otras perspectivas referentes al trabajo en el aula.
Por último cabe preguntarse si el pensamiento lógico bivalente es el medio por el cuál la enseñanza debe continuar.

Referencias bibliográficas

Alemán, A. (2001). *Lógica, matemáticas y realidad*. Edit. Tecnos. España.
Bishop, A. J. (1996). International Handbook of Mathematics Education, 827-876. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

Brown, T. Towards a Hermeneutical Understanding of Mathematics and mathematical Learning. en *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*. Edited by Paul Ernest. The Falmer Press. London.

Ernest, P. (1994). The Dialogical Nature of mathematics., en *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*. Paul Ernest. The Falmer Press.

Ernest, P. (1996). The nature of mathematics and teaching, en *Philosophy of Mathematics and Education Journal*. No. 9, November, 1996.

Ernest, P. (2004) What is the Philosophy of Mathematics Education?. En *Philosophy of Mathematics and Education Journal*. No. 18, October 2004.

Gascón, J., Bosch, M. y Bolea, Pilar (2001) ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? En *Educación Matemática*. Vol. 13.No. 3.Diciembre, 2001. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics really?* Oxford University Press.

Lerman, S. y otros (2002). Developing Theories of Mathematics Education Research: The ESM Story. En *Educational Studies in Mathematics*. 51: pp.23-40. Kluwer Academic Publisher.

Moslehian, M. S. Posmodern View of Humanistic Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. No. 18 October 2004.

Sierpinska, A y Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education en Bishop, A. J. *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

Skovsmose y Nielsen. (1996). Critical Mathematics Education. En Bishop, A. J. *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

CUATRO INSTRUMENTOS DE CONOCIMIENTO QUE COMPARTEN UN AIRE DE FAMILIA: PARTICULAR-GENERAL, REPRESENTACIÓN, METÁFORA Y CONTEXTO[§]

Vicenç Font
Universitat de Barcelona. (España)
vfont@ub.edu
Campo de investigación: epistemología
Palabras clave: representación, contexto, metáfora, generalización

Resumen
El objetivo de este trabajo es reflexionar conjuntamente sobre cuatro de los aspectos más característicos de la actividad matemática y de la emergencia de sus objetos: la dualidad extensivo-intensivo (particular-general), la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización, los cuales son *instrumentos de conocimiento* que comparten un mismo aire de familia (en el sentido de que, de alguna manera, hacen intervenir la relación A es B). En los cuatro casos, podemos observar la existencia de "entidades vicariales o subrogatorias". Es decir, de un primer tipo de entidades que se utilizan para comprender un segundo tipo de entidades, a partir de las acciones que realizamos sobre las primeras (las cuales se pueden considerar, al menos en algún aspecto, diferentes de las segundas).

Introducción

Buena parte de las dificultades observadas en el aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con aspectos característicos de la actividad matemática como son: (1) el hecho de que los objetos matemáticos se presentan siempre por medio de sus representaciones o (2) que en el razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general, es necesario pasar por lo particular. La importancia de estos aspectos ha sido observada por ilustres pensadores. Valga, a modo de ejemplo, la siguiente frase de Peirce:

El matemático se esfuerza por construir el esquema o diagrama de tal modo que en cualquier situación posible pueda admitirse la existencia de algo muy parecido y a lo cual puede aplicarse la descripción hipotética contenida en la tesis del teorema; y también se esfuerza por construirlo de tal modo que no contenga otras características que puedan influir en el razonamiento. Una de las cuestiones que tendremos que considerar es la siguiente: *¿cómo puede ser que aunque el razonamiento se basa en el estudio de un esquema particular resulte al mismo tiempo necesario, es decir, aplicable a todos los casos posibles?*» (Peirce. "The Essence of Mathematics", *CP* 4. 228-243)

Los dos aspectos acabados de comentar tienen una característica en común, que no es otra que el carácter subrogatorio o vicarial que podemos observar en ambos casos. Las representaciones están en lugar de los objetos y lo "particular" en lugar de lo "general" (o viceversa). En ambos casos podemos observar la existencia de un primer tipo de entidades que se utilizan para comprender un segundo tipo de entidades, a partir de las acciones que realizamos sobre las primeras (las cuales se consideran, al menos en algún aspecto, diferentes de las segundas). Esta característica de usar entidades "vicariales" o "subrogatorias" está presente, aunque no exactamente de la misma manera, en otros aspectos que también son muy importantes en la actividad matemática. Nos referimos, además de la representación y de la dualidad particular-general, a la metáfora y a la contextualización, entre otros. Estos cuatro aspectos, esenciales en la actividad matemática, de alguna manera hacen intervenir la relación

[§] Este trabajo se ha elaborado en el marco del proyecto I+D: MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC.

A es *B*, y, por tanto, se pueden considerar como *instrumentos de conocimiento* que comparten un aire de familia (Wittgenstein, 1953).
Muchas de las dificultades observadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con el hecho de que los objetos matemáticos institucionales presentan una complejidad de naturaleza intrínsecamente matemática, la cual está íntimamente relacionada con esta "familia de instrumentos de conocimiento". Dicha complejidad se puede describir en términos "ontosemióticos". Es decir, en términos de las entidades intervinientes y de las relaciones que se establecen entre ellas.
La estrecha relación entre estos cuatro instrumentos de conocimiento y su presencia conjunta se puede observar en muchas de las tareas propuestas a los alumnos. Por este motivo, consideramos conveniente reflexionar primero sobre un episodio de clase en el que se puede observar la relación entre ellos (apartado 2). A continuación, en el apartado 3, se justifica que estos cuatro instrumentos de conocimiento comparten un aire de familia y, por último, en el apartado 4 se presentan algunas consideraciones finales.

Un episodio de clase como contexto de reflexión

A continuación se describe un episodio de clase (Font, 2005) que será utilizado como contexto de reflexión. Se trata de un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato del sistema educativo español (17 años) como parte de un proceso de estudio de la derivada, y dos respuestas correctas de estudiantes al apartado c). En este episodio podemos observar la presencia de los cuatro aspectos sobre los cuales nos proponemos reflexionar (la dualidad extensivo-intensivo, la representación, la metáfora y el contexto).
Cuestionario
En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:
a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

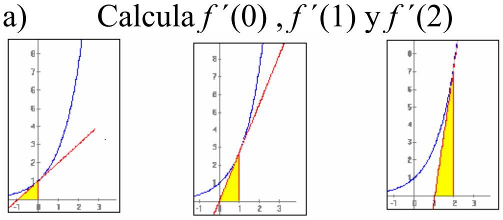


Figura 1

b) Calcula $f'(a)$

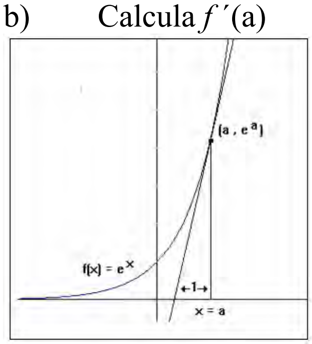


Figura 2

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.
Respuestas al apartado c):

ALEX

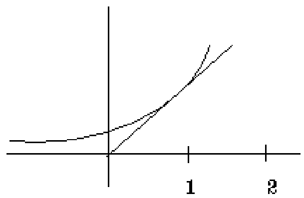


Figura 3

Todas las subtangentes de la función $f(x) = e^x$ son 1, como el desplazamiento vertical es e^x y la derivada de la función es la pendiente de la recta tangente, la fórmula será

$$f(x) = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal} = \frac{e^x}{1} = e^x$$

ROCÍO

$$f'(x) = \frac{f(x)}{sub\tan gente} \; ; \; es\, f(x) = e^x \; ; \; f'(x) = \frac{e^x}{1} = e^x$$

Si observamos los tres apartados del cuestionario anterior (cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e*) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "*a*" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo particular a lo general ha estado muy presente en el diseño del cuestionario.

Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes (tienen una longitud igual a 1). Este software dinámico estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica" (Font y Acevedo, 2003).

En el cuestionario, por una parte, podemos observar que hay representaciones que la literatura describe como externas (gráficas, expresiones simbólicas, etc.). Por otra parte, la diferencia entre las respuestas de los alumnos permite suponer la existencia de representaciones, consideradas normalmente como internas, que están relacionadas con las distintas respuestas de cada alumno.

Con relación al contexto, se observa que se trata de una tarea que suele recibir diferentes tipos de calificativos: "situación intra matemática", "situación de contexto matemático", "situación descontextualizada", etc. Por otra parte, el episodio que se describe forma parte de una larga secuencia de actividades que comienza con la "emergencia" del objeto "función exponencial" a partir del estudio de diferentes situaciones de contexto extra matemático (desintegración de una sustancia radioactiva, etc.).

La importancia que tiene la metáfora en la comprensión de los alumnos cada vez se considera más relevante en la investigación en Educación Matemática. La metáfora es muy importante para estructurar la comprensión de los alumnos, como se puede observar en el siguiente episodio descrito en Bolite Frant, Acevedo y Font (2005):

"A este alumno se le pidió que comentara verbalmente los pasos previos (dominio; cortes con los ejes; asíntotas y comportamiento en el infinito; estudio de máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento; estudio de puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad) y la construcción de la gráfica de su examen. Tanto la gráfica como los pasos previos de su respuesta en el examen eran correctos.

Si bien en su respuesta escrita no se detectó ninguna metáfora, éstas fueron omnipresentes en su explicación verbal de cómo había construido la gráfica. Por ejemplo, a la pregunta

¿Puedes decirme cuándo la función será creciente y cuándo decreciente? el alumno había contestado correctamente señalando con el dedo los intervalos y diciendo aquí crece porque sube y aquí decrece porque baja)

Entrevistador: ¿Puedes decirme ahora cuándo la función será creciente y cuándo decreciente? [(mientras pone el papel en el que el alumno ha dibujado la gráfica de la función en posición horizontal].
Alumno D: (Duda durante unos segundos) ¿No le entiendo, quiere decir que ha cambiado los *ejes?*

Entrevistador: No, no he cambiado los ejes, siguen siendo los mismos.
Alumno D: Esta es decreciente porque baja y esta es creciente porque sube, esta otra es decreciente porque baja y esta creciente porque sube. [Duda durante unos segundos y con el dedo señala la parte de la curva señalada con una flecha fina como creciente y la señalada con una flecha gruesa como decreciente]

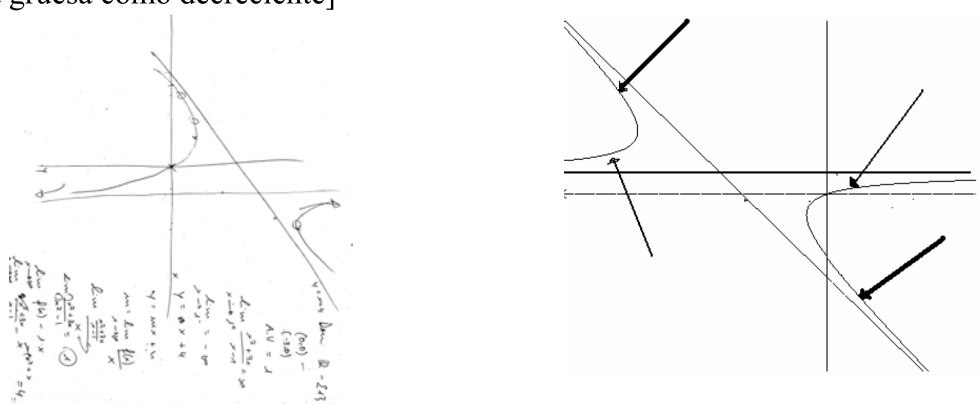


Figura 4

Una familia de instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia
Si consideramos la estructura *A* es *B* como una línea difusa (figura 5), en un extremo podemos situar claramente la relación de subcategorización (extensivo-intensivo) y en el otro extremo la metáfora consciente y creativa. La representación, entendida como instrumento de conocimiento, se sitúa en una posición intermedia:

- Extensivo / intensivo (Subcategorización)

El elemento *A* cumple las condiciones que cumplen todos los elementos de *B*. (Podemos conocer *A* a partir de conocer *B* y viceversa)

- Representación

Aplicación de la teoría o las ideas de un sistema *B* en otro sistema *A*, para poder utilizar el aparato teórico o conceptual de *B* como instrumento de análisis de *A*.

- Metáfora (p.e, la gráfica es la traza de un punto que se mueve sobre al gráfica)

Estructuramos el campo de conocimientos *A* (gráfica) en términos de la estructura que tiene *B* (experiencias sobre el movimiento). (conocemos *A* en términos de *B*):

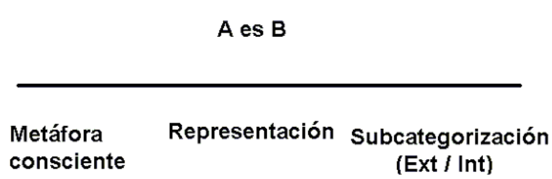


Figura 5

A continuación vamos a considerar una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjunto de puntos que son solución de una ecuación y comentaremos el proceso que convierte esta metáfora en una subcategorización (extensivo-intensivo). De entrada, la curva geométrica para Descartes es la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla es trasmitido por las diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Por ejemplo:

- Una circunferencia *es* la curva geométrica que se obtiene a partir de la traza que deja la punta del compás.

En este caso actúa la dualidad extensivo-intensivo (*A* es *B*), es decir *A* (una circunferencia concreta) es un elemento de la clase *B* (curvas que se obtienen a partir de la traza que deja la punta del compás). En este caso actúa una metáfora fosilizada (las curvas son trazas de puntos que se mueven sujetos a determinadas condiciones). Dicho de otra manera, la metáfora fosilizada se ha transformado en la dualidad extensivo-intensivo.

Descartes en la Geometría introduce una de las metáforas más creativas de la historia de las matemáticas:

- La circunferencia que se obtiene al trazar la punta del compás *es* el "conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$"[**]

Se trata de una metáfora creativa que permite entender la clase *B* desde otro punto de vista (*B* es *B'*, o *B* ~ *B'*, o *B* c *B'*). Gracias a esta metáfora, podemos estructurar nuestro conocimiento de las curvas de la geometría sintética en términos de nuestro conocimiento del álgebra. Con el paso del tiempo se considera que lo que hacemos es representar las curvas de la geometría sintética por medio de ecuaciones:

- La expresión $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se considera como la *representación* de una circunferencia.

Este proceso se cierra con el olvido de *B*. Es decir, *A* es *B* pasa a un segundo plano o incluso *A* es *B* se sustituye completamente por *A* es *B'*. De esta manera, con el paso del tiempo *A* es *B'* se convierte en una metáfora fosilizada que se interpreta en términos de extensivo e intensivo.

- Una circunferencia *es* el conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (o simplemente una circunferencia *es* una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$).

Tal como muestra el ejemplo de la geometría analítica se trata de un proceso complejo que, por otra parte, puede llegar a necesitar mucho tiempo. Se trata de un proceso que conlleva que un objeto (la circunferencia en este caso) que "vivía" en un determinado programa de investigación (la geometría sintética) pasa a "vivir" también en otro programa de investigación (la geometría analítica).

En este último párrafo de manera implícita hemos estado considerando el "contexto", entendido este de manera ecológica. Con relación al término contexto, hay básicamente dos usos (Ramos y Font, 2006) uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el otro consiste en enmarcarlo en el entorno. En el primer caso, se trata de ver que la situación problema cae dentro del campo de aplicación de un objeto matemático. En el segundo caso, se trata de un "uso" que vamos a llamar, metafóricamente, "ecológico". Este uso ecológico queda claro cuando se dice, por ejemplo,

[**] Descartes utiliza el término "círculo" y una ecuación del tipo $y^2 = lx - x^2$

que el contexto del gorila es la selva. Ahora bien, puesto que el contexto del gorila también puede ser el zoológico, podemos entender que hay un uso ecológico del término contexto que permite situar el objeto matemático en diferentes "lugares", por ejemplo, diferentes instituciones (universidad, secundaria, etc.). Estos "lugares" no tienen porque ser sólo instituciones, pueden ser también, por ejemplo, diferentes programas de investigación o diferentes "juegos del lenguaje".

El uso del contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático se observa claramente en los procesos de instrucción en los que se proponen situaciones-problema extra matemáticas pensadas para la emergencia de nuevos objetos matemáticos. En los procesos de descontextualización a partir de contextos extra matemáticos se sigue el siguiente proceso: se parte de una situación de contexto extra matemático *S*, que podemos poner en relación ® con la situación *S'*, la cual, a su vez, se considera como un caso particular del objeto matemático *OM* (*S´* es *OM*). La relación *R*, que permite relacionar *S* con *S'*, puede ser de muchos tipos diferentes, ahora bien, en todos los casos se suele terminar considerando *R* como una relación de representación, entendida ésta en términos de instrumento de conocimiento (*S'* es una representación de *S*).

Consideración final

Puesto que la dualidad particular-general, la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización son instrumentos de conocimiento que comparten un mismo aire de familia, por el hecho de usar "entidades subrogatorias", consideramos importante para la Educación Matemática investigar conjuntamente su función en la emergencia de los objetos matemáticos como resultado de los procesos de instrucción. Incluso cuando el foco de atención es uno sólo de ellos conviene hacerse la siguiente pregunta: ¿cómo se vincula el instrumento de conocimiento que nos interesa con los otros?

Referencias bibliográficas

Bolite Frant, J., Acevedo, J. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41-54.

Font, V. (2005), Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21, 3, 405-418.

Peirce, C.S. 1965. *Collected papers*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535-556.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

EL CONOCIMIENTO DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE COMO ESTRATEGIA PARA UN APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Ana María Craveri, María del Carmen Spengler
Facultad de Ciencias. Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario. FCE y E de la UNR. (Argentina)
craveri@arnet.com.ar, mariaspengler@gmail.com
Campo de investigación: metodologías de enseñanza. Nivel educativo: superior
Palabras clave: estilos de aprendizaje, semipresencial, TiC's

Resumen
Este trabajo es la primera fase de una investigación cuyo objetivo es analizar una modalidad de enseñanza semipresencial, en temas de Matemática Básica Universitaria, y su relación con los Estilos de Aprendizaje según la concepción de Honey, Alonso y Gallego. A partir de una observación orientada de las actitudes puestas en práctica por los alumnos al resolver problemas relativos a temas de Álgebra Lineal en el Laboratorio de Informática, se trata de describir el trabajo de los mismos con el objetivo de detectar características predominantes, propias de los cuatro estilos de aprendizaje: Activo, Reflexivo, Teórico y Pragmático e indagar sobre las posibilidades de utilización de la herramienta computacional para fortalecer los procesos de experimentación, reflexión, abstracción y aplicación propios de un aprendizaje significativo de la Matemática.

Introducción y justificación de la investigación

La Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (UNR), establece en la currícula del primer año, común a las Carreras de: Contador Público, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración, el desarrollo de dos cursos de Matemática: Matemática I que abarca temas de Álgebra y Geometría Analítica y Matemática II que comprende el desarrollo de Análisis Matemático en una y varias variables. A partir de la reforma del Plan de Estudios en el año 2003, estos cursos de matemática se dictan en forma cuatrimestral y son la base de cursos subsiguientes como los de Matemática III, Matemática para Economistas I y II entre otros.
La necesidad de lograr un aprendizaje eficiente en cursos numerosos de alumnos y en los cortos espacios de tiempo asignados a esta ciencia en el currículum, nos ha llevado a una propuesta concreta y práctica de acción docente que tiene en cuenta, por un lado el crecimiento del número de estudiantes que tienen conocimientos de computación y que están acostumbrados a utilizar recursos informáticos por lo que sería interesante capitalizar este conocimiento para facilitar el aprendizaje. En este sentido, una Modalidad de Enseñanza Semipresencial que incorpore la herramienta computacional como herramienta cognitiva podría rescatar los aspectos positivos tanto de la Educación Tradicional Presencial como de la Educación a Distancia, combinando estrategias de una y de otra, intentando desarrollar un aprendizaje autónomo, y a la vez colaborativo, centrado en el alumno, que promueva el "Aprender a Aprender".
Por otro lado, en lo que se refiere específicamente al aprendizaje de la Matemática, se investiga la relación entre los conceptos de Polya (1975) y de Schoenfeld (1992) relativos a los procesos de construcción del conocimiento matemático que genera la resolución de un problema, con un aspecto muy concreto dentro de la problemática del Aprendizaje: Los Estilos de Aprendizaje, en la concepción de Alonso, Gallego y Honey (1999). Al respecto, Kolb (1984), Honey y Mumford (1986) trabajaron sobre el aprendizaje para identificar la gama de diferencias individuales. Observaron que la mayor parte de los estudiantes, con ciertas características, tienden a responder bien ante ciertos recursos especialmente seleccionados.

Surge así el concepto mismo de Estilo de Aprendizaje que no es común para todos los autores y es definido de forma muy variada en las distintas investigaciones.
Keefe (1982) propone: los "Estilos de aprendizaje" son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los alumnos perciben interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje
Tomamos de Alonso, Gallego y Honey (1999), la descripción de Peter Honey y Alan Munford (1986) de los Estilos de Aprendizaje que en forma sintética podríamos caracterizar en la siguiente forma:
*Estilo Activo: Las personas que tienen predominancia en Estilo Activo se implican plenamente en nuevas experiencias. Son de mente abierta y acometen con entusiasmo las tareas nuevas.
*Estilo Reflexivo: A los reflexivos les gusta considerar las experiencias y observarlas desde diferentes perspectivas. Son personas que gustan considerar todas las alternativas posibles antes de realizar un movimiento.
*Estilo Teórico: Los teóricos adaptan e integran las observaciones dentro de teorías lógicas. Enfocan los problemas de forma vertical escalonada por etapas lógicas. Tienden a ser perfeccionistas integran los hechos en teorías coherentes.
*Estilo Pragmático: El punto fuerte de las personas con predominancia en Estilo Pragmático es la aplicación práctica de las ideas.
Esta categorización teórica, de acuerdo a nuestra experiencia de 10 años de trabajo con distintos softwares matemáticos (DERIVE, BASILE Y MATLAB), es compatible con los resultados de la observación del trabajo de los alumnos en el Laboratorio, en una relación de dos alumnos por máquina. En este ambiente es posible observar distintas modalidades de trabajo:
*Grupos de Alumnos que apenas se ingresa al programa, comienzan a aplicar las sentencias a distintas situaciones, más allá del ejercicio propuesto. Interactúan con el computador con rapidez y casi con avidez.
*Grupos de alumnos que aguardan con pasividad frente a la pantalla del computador que el docente concluya las indicaciones para realizar el trabajo. Consultan frecuentemente al docente, siguen las instrucciones, dialogan con su compañero.
*Un tercer grupo que, ante una respuesta imprevista en la pantalla, buscan llegar a una explicación de la respuesta del computador recurriendo al material teórico o al análisis de otros ejemplos sobre el tema tratando de generalizar en una propiedad teórica alguna conclusión extraída de situaciones particulares.
*Por último, notamos alumnos que, ante la presentación de un nuevo concepto, sólo se entusiasman en el momento en el que el docente plantea alguna situación de la vida real vinculada con el mismo.
En esta observación orientada, de las modalidades de trabajo en el Laboratorio se evidencian, desde una perspectiva cualitativa con metodología observacional, lo que Honey -Alonso categorizan como "estilos de aprendizaje: activo, reflexivo teórico y pragmático"

Problema de investigación

¿Es posible integrar en la Educación Matemática Universitaria Tradicional algunas estrategias de la Educación a Distancia, para facilitar un aprendizaje autónomo, teniendo en cuenta los Estilos de Aprendizaje e intereses de los alumnos con incorporación de TiyC's?

Objetivo

Observar las distintas formas de trabajo de los alumnos en una tutoría realizada en el Laboratorio de Informática, resolviendo problemas de Álgebra Lineal con la asistencia del computador para:
*Detectar características predominantes, observables en el trabajo en el laboratorio, propias de los cuatro estilos de aprendizaje: Activo, Reflexivo, Teórico y Pragmático.
*Indagar sobre las posibilidades de utilización de la herramienta computacional para fortalecer los procesos de experimentación, reflexión, abstracción y aplicación propios de un aprendizaje significativo de la Matemática.

Metodología investigadora

La investigación cualitativa es muy útil en indagaciones iniciales del problema, dado que este tipo de investigación puede producir descripciones profundas e interesantes del fenómeno, identificar variables relevantes y generar hipótesis acerca de posibles relaciones entre ellas (Biddle y Anderson, 1986). La investigación cuantitativa, seguidamente, puede aportar mediciones rigurosas de algunas variables y probar la presencia de las supuestas relaciones.
¿Qué recaudos deben contemplarse para dar valor científico a una investigación de naturaleza eminentemente cualitativa?
Al respecto Lincoln y Guba (1989) indican que los criterios convencionales utilizados para convencer a la audiencia (incluyendo uno mismo) del valor de los estudios cuantitativos, difieren de los criterios usados en los estudios de carácter cualitativo.
La palabra en inglés "trustworthiness" resume el criterio de confianza en un estudio cualitativo. En la discusión de este criterio intervienen aspectos como credibilidad, transferencia, dependencia y confirmación del estudio. Estos aspectos pueden considerarse, respectivamente, alternativos a los usados por el paradigma cuantitativo: validez interna, validez externa, confiabilidad y objetividad. (Santos Trigo, 1996).
**CREDIBILIDAD* Este aspecto se refiere al grado en que los resultados obtenidos en el estudio presentan o revelan las ideas de los sujetos en estudios. Una estrategia importante aquí es el uso de la triangulación de la información. (Santos Trigo, 1996).
**TRANSFERENCIA* Este criterio se refiere a la aplicabilidad del estudio en otros contextos o lugares. Una forma de alcanzar este criterio es proveyendo una descripción comprensiva del estudio. Esta descripción puede guiar a otros investigadores a diseñar estudios similares y contrastar los posibles resultados. (Santos Trigo, 1996).
**DEPENDENCIA:* La naturaleza de los datos y los procedimientos empleados en el estudio determinan la dependencia del mismo. Aquí los estudios similares desempeñan un papel importante en la selección de los instrumentos y sus usos.(Santos Trigo, 1996).
**CONFIRMACIÓN:* Cualquier persona en el campo de la Educación Matemática con cierta familiaridad en el área de estudio debe estar de acuerdo con la naturaleza de los resultados. Si algún desacuerdo mayor surgiera, entonces el investigador debe clarificar y proveer suficientes bases para soportar tal resultado. (Santos Trigo, 1996)
El ambiente de aprendizaje donde se desarrolla esta experiencia, es un Laboratorio de Computación de la FCE y E de la UNR. en el que se dispone de 12 a 15 computadoras para el trabajo en grupos de 2 alumnos por ordenador durante módulos de 2hs. semanales con un

docente que actúa como observador participante. El trabajo consiste en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación relativos a Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales considerados disparadores de situaciones de acción, reflexión, abstracción y aplicación, que están contenidos en una guía de trabajos prácticos, utilizando el software DERIVE. El docente, que actúa como observador participante, es el mismo que les ha impartido las clases teóricas sobre estos temas Además del docente están presentes dos auxiliares de la Cátedra de Matemática I que actúan como observadores no participantes colaborando con el registro de las observaciones en sus respectivos Diarios de Campo.
Antes de comenzar la Observación, se realizó una planificación adecuada que delimitara claramente el tipo de datos que se obtendrían mediante ella; que definiera los objetivos posibles de cubrir y que precisara el modo de registrar y sistematizar los datos –cabe mencionar nuevamente que la observación estuvo guiada por los tipos de estilos de aprendizaje caracterizados por Honey-Alonso en sus investigaciones con alumnos universitarios españoles. Los diálogos que se exponen en este trabajo provienen de algunas de las desgrabaciones seleccionadas de los registros de doce horas de laboratorio.
A partir de esta observación orientada de las modalidades de trabajo en el Laboratorio, en forma casi natural, se evidencian ya en esta etapa lo que Honey -Alonso definen como 'estilos de aprendizaje'. Nos preguntamos: *¿Qué relación observable hay entre el 'aprendizaje de la Matemática' en el Laboratorio y las características propias de los 'Estilos de Aprendizaje'?*
La posición epistemológica de Polya (1975) respecto al proceso de construcción del conocimiento matemático que genera la resolución de un problema enfatiza:
*La búsqueda de datos (Estilo Activo).
*La relación con otros problemas (Estilo Reflexivo)
*El conocimiento de propiedades y capacidad de búsqueda de modelos abstractos (Estilo Teórico).
*La ejecución y extensión del problema original en otros contextos (Estilo Pragmático).
Encontramos también una vinculación a observar entre los Estilos de Aprendizaje que se ponen en juego y las situaciones didácticas categorizadas por Brousseau (1989).
**Situaciones adidácticas de investigación o de acción* (individual o en grupo), donde el alumno actúa, anticipa, formula hipótesis, las prueba;
**Situaciones adidácticas de formulación*, confrontación de problemas, puesta a prueba (eventualmente un regreso al trabajo individual con restricciones diferentes).
**Situaciones adidácticas de validación*, que requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por lo tanto explicaciones de las teorías relacionadas y los medios que subyacen en los procesos de demostración.
**Situaciones adidácticas de institucionalización*, donde el nuevo conocimiento es enfocado por primera vez como instrumento explícito que permite la resolución del problema.
Vemos una relación directa entre los Estilos de Aprendizaje que caracteriza Alonso y las características de cada situación adidáctica que nos indica Brousseau. Por ejemplo, la predominancia de situaciones adidácticas de acción en el trabajo del alumno sería también un indicador de su estilo activo de aprender.

Algunos resultados de la observación

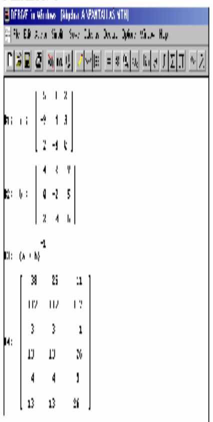
1) Las pantallas 1 y 2 y los diálogos correspondientes son algunas de las que se generan a partir del siguiente problema:

Problema Nº1

Siendo A y B matrices de orden n analizar con ejemplos, si son verdaderas o falsas cada una de las afirmaciones siguientes, demostrándolas en caso afirmativo y dando un contraejemplo en caso contrario.
a) Si A y B son invertibles, entonces A+B también lo es
b) Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es y resulta:
$(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$
c) Si A es invertible, entonces αA *también lo es cualquiera que sea* $\alpha \varepsilon R$
d) $\forall A \ \varepsilon M_n$ *(conjunto de matrices de orden n)* $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$

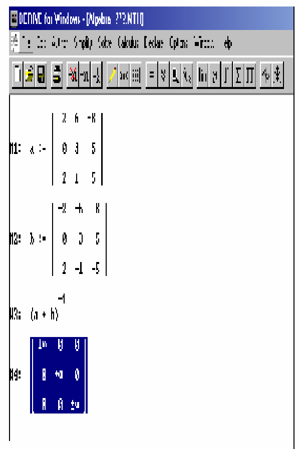
Se trascriben los diálogos entre Alumno 9 y Alumno10 durante la resolución del Problema Nº 1 punto *a) Si A y B son invertibles, entonces A+B también lo es*
(El Alumno10 es quien toma la iniciativa del manejo del teclado)

Pantalla Nº1



Alumno 9: Nos dio la inversa de la suma.
Alumno 9: Profesora si nos da que existe la inversa de la suma ¿hay que demostrarlo?
Docente: Piensen si hay alguna situación en donde no exista la inversa de la suma así se ahorran los intentos de demostración.
Alumno 9: ¡AH ¡ ¿y si ponemos dos matrices opuestas? (Acción

Pantalla Nº2



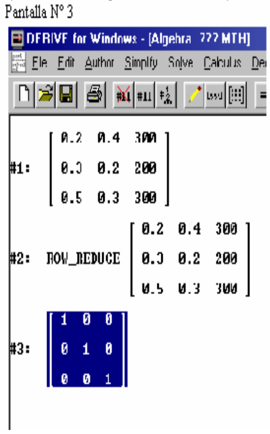
Alumno 10: Nos da algo raro
Alumno 9: Claro porque la suma es la matriz nula y no tiene inversa (Reflexión)
Alumno 10: Entonces éste es un ejemplo de que no vale (Justificación)
Docente: el contraejemplo que justifica la no existencia de la propiedad mencionada

2) La pantalla numerada 3 se ha escogido por el comentario del Alumno 14 que se considera una actitud predominantemente pragmática
Problema Nº 2
....
c) Un productor elabora dos productos A y B. Cada unidad de dichos productos requiere las siguientes cantidades de horas de trabajo, en los departamentos de maquinado, armado y pintura:

Producto	*Maquinado*	*Armado*	*Pintura*
A	*0.2*	*0.3*	*0.5*
B	*0.4*	*0.2*	*0.3*

El tiempo disponible, por semana, en cada uno de los sectores es el siguientes:
300 hs/hombre en maquinado
200 hs/hombre en armado
300 hs/hombre en pintura
Determinar la cantidad de unidades de producto A y de producto B que pueden fabricarse utilizando todo el tiempo disponible en los tres sectores.

(El Alumno 13 es quien está en el teclado)
Pantalla Nº 3



Alumno 13: Nos da incompatible, este sistema no tiene solución
Alumno 14: pero algo hay que producir, ¿y si cambiamc alguna ecuación? (Aplicación)
Alumno 13: ¿cuál?
Alumno 14: Vamos a ver. Profesora ¿no podemos cambiar algunas de las horas/hombre disponibles para que tenga solución? Reflexión, Aplicación)
Docente: sí por supuesto. Aclaren en el *diskette* que el sistema es incompatible y que van a indagar alguna alternativa para poder elaborar los productos.

Conclusiones

La curiosidad que suscita el uso de la computadora unido el impacto visual que provocan las imágenes de la pantalla actúan, en principio, como fuente de motivación para los alumnos; quienes comienzan, mediante la manipulación y exploración de las funciones del ordenador, a familiarizarse tanto con los contenidos procedimentales necesarios para el correcto uso del software, como con los contenidos actitudinales y conceptuales de la materia.

Algunos alumnos utilizan la modalidad de indagación por prueba y error, constantemente, como forma personal de llegar a las soluciones, otros aguardan con pasividad frente a la pantalla del computador que el docente concluya las indicaciones para realizar el trabajo, consultan frecuentemente al docente y son cuidadosos en seguir las instrucciones, no ponen demasiado entusiasmo en trabajar con el teclado y cuando lo hacen son cautos, precisos y difícilmente llegan a situaciones de error. También se observan algunos alumnos que ante una respuesta imprevista en la pantalla buscan llegar a una explicación de la respuesta del computador recurriendo al material teórico o al análisis de otros ejemplos sobre el tema y quedan satisfechos cuando logran generalizar en una propiedad teórica alguna conclusión extraída de situaciones particulares. Otros alumnos frente a problemas que requieren un cierto grado de abstracción, sólo se entusiasman en el momento en el que detectan en la guía de problemas los que vinculan claramente los conceptos matemáticos a situaciones de la realidad. En la resolución de los problemas presentados se han puesto en evidencia los distintos mecanismos alumnos puestos en práctica por los alumnos. Es notable cómo los alumnos predominantemente activos adoptan estrategias diferenciadas de aquellos predominantemente reflexivos o teóricos, y cómo los alumnos con predominancia pragmática se interesan en la aplicación a situaciones reales.

Referencias bibliográficas

Alonso, C. M. y Gallego, D. J. (2000). *La informática en la práctica docente.* Madrid: UNED.

Alonso, C.M., Gallego, D.J. y Honey, P (1999). *Los Estilos de Aprendizaj*e. Bilbao: Ediciones Mensajeros.

Biddle, B. J. y Anderson, D. S (1986) Theory, methods, knowledge, and research on teaching: En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). Nueva York: Macmillan.

Brousseau, G (1989). *Fundamentos de Didáctica de las Matemáticas.* Zaragoza: Universidad Zaragoza

Honey, P y Mumford, A. (1986). Th*e Manual of Learning Opportunities.* Maidenhead, Berkshire: P. Honey, Ardingly House.

Keefe, J. W. (1982). *Assessing Student Learning Styles. An overview.* Michigan: Ann Arbor

Kolb, D. (1984). *Experiential Learning: Experience as the source of Learning and Development*. New Jersey: Prentice Hall.

Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1989). *Naturalistic inquiery. En Fetterman, D.M. Qualitative approaches to education: the silent scientific revolution.* New York: Praeger

Polya, G. (1975). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Santos Trigo, L. M. (1996). *Perspectivas en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Schoenfeld, A. (1992). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas.* Buenos Aires: OMA.

LA IMPORTANCIA DE LA VISUALIZACIÓN GEOMÉTRICA COMO ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

Héctor E.Rubio Scola, Roberto López, Mercedes Anido
Universidad Tecnológica Nacional. Fac. Regional Rosario. (Argentina)
FCEE, FCEIA, CIUNR, Universidad Nacional de Rosario. (Argentina)
erubio@fceia.unr.edu.ar

Campo de investigación: pensamiento geométrico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: pensamiento visual, modelización geométrica, poliedros, programación lineal

Resumen
En este trabajo se pone en evidencia la importancia de las representaciones visuales como modelizadoras de problemas en áreas de aplicación como serían los problemas de ingeniería. En una aplicación al problema de detección de fallas en sistemas dinámicos, se presenta una metodología para la separación de poliedros de gran tamaño. Utilizando técnicas de programación lineal, se relacionan cientos o miles de variables, formando sistemas de ecuaciones lineales ralos. Se ejemplifica así, la necesidad de los referentes geométricos en la formación básica. Se muestra en un ejemplo concreto, la importancia del pensamiento visual en la formación básica de la ingeniería y su utilización en una modelización que utiliza formas tridimensionales visualizables.

El problema didáctico

En la resolución de problemas de Ingeniería, como en general en todo proceso creativo, no basta la aplicación cuidadosa de reglas; se necesita educar la capacidad de análisis, síntesis y correlación así como una intuición bien desarrollada. Como nuestra percepción es prioritariamente visual, el apoyo continuo en lo visual está muy presente en, en particular en las tareas de modelización matemática de problemas de ingeniería.
A pesar de la gran riqueza de los contenidos visuales, intuitivos y geométricos que están constantemente presentes en el mecanismo mental, ya sea para presentar un tema, demostrar un teorema o resolver un problema real; en general, no se aprovechan lo suficiente las "visualizaciones geométricas" como estrategia de análisis.
Esta carencia en la formación básica se ha agravado en los últimos años donde por la urgencia en la introducción de otros contenidos se han reducido en las actualizaciones curriculares las horas asignadas ya sea a la Geometría Analítica y/o a la Geometría Descriptiva. Surge así la necesidad de resaltar la importancia de la formación de un pensamiento visual para la resolución de problemas.

Objetivo

En este trabajo se busca hacer un aporte a la toma de conciencia de la importancia de la representación visual en la modelización matemática de problemas y presentar un ejemplo de una estrategia de análisis.
Se presenta un problema de aplicación a la Ingeniería donde la representación geométrica es herramienta simplificadora y el hilo conductor de una modelización matemática constituida por sistemas ralos de cientos o miles de inecuaciones lineales deducidas a partir de las herramientas de la Geometría Analítica, el Álgebra Lineal y la Programación Lineal .Los sucesivos pasos del proceso del cálculo son interpretados por poliedros.

Marco teórico: el modelo matemático como representación del objeto físico

Desarrollar el pensamiento visual y favorecer las habilidades de visualización son dos objetivos claves en la educación geométrica en el profesional de la ingeniería.

Para la enseñanza de la matemática se trata de buscar variados accesos representacionales; una escritura, una notación, un símbolo, representan un objeto matemático: un número, una función, un vector. Lo mismo los trazos y las figuras representan objetos matemáticos: un segmento, un punto, un círculo. Jamás se debe confundir a los objetos matemáticos con su representación (Duval, 1999).

La distinción entre un objeto y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. No obstante, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias porque , los objetos matemáticos no son directamente accesibles desde la percepción o a partir de una experiencia intuitiva inmediata, como lo son los objetos comúnmente señalados como "reales" o "'físicos".

Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, con sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento; una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento y juegan un papel primordial para el desarrollo de las representaciones mentales ya que éste depende de una interiorización de las representaciones semióticas, del mismo modo que las imágenes mentales son una interiorización de las percepciones (Duval, 1999).

McGee (1979) define la visualización espacial como aquellas tareas que implican la habilidad mental de manipular, rotar, torcer o invertir gráficos de objetos presentados como estímulo visual. Kersh y Cook (1979), extienden esta definición a la transformación mental de un objeto.

Connor y Serbin (1980) reportan que las habilidades de visualización espacial contribuyen significativamente en los logros del aprendizaje de la Matemática.

Estos últimos autores trabajaron con dos Test: "Paper Folding Test" y "Card Rotation Test"..

Los mismos miden las habilidades de visualización espacial que son necesarias para que mentalmente el estudiante mueva, rote o altere partes de las representaciones gráficas de las funciones matemáticas.

Estos estudios han reportado positivas correlaciones entre las habilidades espaciales y desempeño matemático. Tartre (1990) ha establecido que la habilidad espacial puede ser un indicador general más de una particular forma de organización, a través de la cual una nueva información es ligada a estructuras de conocimientos previos para ayudar a que tenga sentido el nuevo conocimiento.

Fennema (1975) ha establecido que la visualización espacial está lógicamente relacionada a la Matemática. Fennema y Tartre (1985) sugieren que una baja habilidad de visualización espacial puede ser un índice de debilidad para resolución de problemas matemáticos en las mujeres más que en los varones.

Estudios en Tecnología Computacional y Educación Matemática han confirmado los efectos positivos de las calculadoras graficadoras en el salón de clase.

Ruthven (1990) dice que el acceso a la información tecnológica puede ser una importante influencia en el interés y acercamiento a la matemática y en los logros de los estudiantes.

Las experiencias acumuladas durante quince años en nuestro proyecto "La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales" (Anido et al, 2000), muestran que la instrucción matemática con tecnología computacional puede tener un impacto positivo en los resultados de los aprendizajes.

En la modelización del problema que se presenta a continuación tenemos distintos registros: uno relativo al Cálculo (sistemas de ecuaciones diferenciales lineales) otro relativo a los poliedros (Matemática Combinatoria y Geometría Descriptiva). En cada uno de ellos se trabaja hasta llegar a una solución. De la relación final entre los mismo dependerá la interpretación de esa solución y para ello veremos la importancia del registro visual que deriva de la proyección del poliedro inicial.

La representación geométrica en la interpretación y solución de un problema

En la aplicación al problema de detección de fallas en sistemas dinámicos, se presenta una metodología para la separación de poliedros de gran tamaño. Utilizando técnicas de programación lineal, se relacionan cientos o miles de variables, formando sistemas de ecuaciones lineales ralos. Suponemos que los comportamientos normales y fallados de un proceso pueden ser modelados por dos sistemas lineales. Sus variables se mueven dentro de dos poliedros: uno para el sistema fallado y el otro para el sistema en funcionamiento normal. Una buena interpretación de estos dominios es necesaria para comprender algunos problemas que se presentan en el comportamiento de estos sistemas con gran número de variables.

A través de una señal de test que pone en evidencia la falla, se logra que los poliedros sean disjuntos, obteniendo un hiperplano separador, que resuelve el problema de la separación de los dos subespacios diferentes que contienen las trayectorias de ambos sistemas. En el ejemplo que se presenta, el software SCILAB (Bunks et al, 1999) permite proyectar el problema y visualizarlo en pantalla, facilitando una representación para análisis global. No se presentan en detalla la metodología de cálculo para su completo análisis nos remitimos a Rubio Scola et al (2003).

En esta filosofía, Rubio Scola et al (2003) busca construir explícitamente una señal que garantice, cuando esto sea posible, la detección de la falla en un intervalo de tiempo finito dado. Ha desarrollado también un test simple de detección de falla cuando la señal de test está aplicada. Este último problema lleva a una modelización geométrica con poliedros que constituyen la representación de sistemas de inecuaciones ralas de gran tamaño. A continuación describiremos el proceso que se sigue para verificar el buen funcionamiento del sistema.

Periódicamente, durante la operación normal del sistema, una señal de test predeterminada, es inyectada en un período finito de tiempo. Esta señal permite mediante un filtro, detectar la falla. La periodicidad de la utilización de la señal de falla quedará fijada por un plan de confiabilidad también predeterminado.

El problema que se considera en este trabajo tiene en total dos etapas de cálculo. La primera es encontrar una señal de test tal que las posibles entradas y salidas del sistema normal sea disjunto de las posibles entradas y salidas del sistema en falla. La segunda es, para una señal test dada, reconocer si el sistema se encuentra en falla o no.

Los poliedros se pueden considerar como representaciones geométricas de sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Se presentan a continuación los sistemas de ecuaciones e inecuaciones que corresponden a las situaciones de funcionamiento normal y en estado de falla respectivamente. Uno representado por las ecuaciones e inecuaciones ((1) (2)), con i = s “sistema normal”. Otro que representa al sistema con una falla determinada i = f, “sistema fallado”.

$x_i(k+1) = A_i(k)x_i(k) + B_i(k)u(k) + b_i(k) + M_i(k)\nu_i(k)$ $y(k) = C_i(k)x_i(k) + D_i(k)u(k) + d_i(k) + N_i(k)\nu_i(k)$ (1) con $k = 0,\dots,(N-1)$

v es la señal test, u e y, son las entradas y las salidas que se miden "on-line". A, B, C, D, M, N, b y d son matrices y vectores con dimensiones apropiadas que dependen de v(k). La secuencia $\nu_i(k)$ es desconocida y representa las perturbaciones, ruidos y entradas no medibles. La perturbación $\nu_i(k)$ y la entrada u satisfacen las siguientes condiciones:

$R_{\nu i}(k)u_i(k) \leq p_{ui}(k)$

$R_{ui}(k)\nu_i(k) \leq p_{\nu i}(k)$ (2)

donde $R_{\nu i}(k)$, $R_{ui}(k)$, $p_{\nu i}(k)$, $p_{\nu i}(k)$ son vectores y matrices dadas con dimensiones, también apropiadas que dependen de v(k). La única hipótesis que establecemos es que $R_{\nu i}(k)$, $R_{ui}(k)$ sean tales que las ecuaciones anteriores sean consistentes.

Tenemos entonces un prisma de sección poligonal de altura no acotada correspondiente al sistema normal ((1), (2)) i = s y otro prisma de sección poligonal de altura no acotada correspondiente al sistema fallado i = f:

$F_i w = p_i$

$E_i w \leq q_i$ (3)

Donde $w = (x_i(0), y(0), u(0), \nu_i(0), \ldots\ldots\ldots\, x_i(N\text{-}1), y(N\text{-}1), u(N\text{-}1), \nu_i(N\text{-}1))$,

La idea

Para una perfecta detección de la falla se debe verificar que los poliedros que representan los conjuntos solución de los sistemas (3) i = s, f no tengan puntos de intersección, vale decir el siguiente sistema que constituido con todas las ecuaciones e inecuaciones consideradas sea incompatible. Es decir que este nuevo sistema

$F\,\xi = p$

$E\,\xi \leq q$ (4)

con $F = [F'_s, F'_f]'$, $E = [E'_s, E'_f]'$, $p = [p'_s, p'_f]'$ y $q = [q'_s, q'_f]'$ no tiene que tener solución.

La falla que se busca detectar queda en evidencia cuando, por adecuadas perturbaciones (señal de test u), el sistema fallado puede ser separado del sistema normal. Geométricamente equivale a buscar una intersección vacía entre los dos poliedros que respectivamente representan al "sistema normal" y al "sistema fallado". Esto nos permitirá hablar de un poliedro "sano" y de un poliedro "enfermo".

A los fines de la detección del funcionamiento del sistema en un punto preciso, en el funcionamiento online, lo que habría que determinar es a que poliedro pertenece. Dado que la verificación continua de los sistemas (3) i = s, f exige un gran trabajo operacional (con el consiguiente gasto de tiempo). Se puede facilitar el problema determinando un hiperplano separador de los dos poliedros convexos. Una vez conocido, sólo se necesita saber, de que lado del hiperplano, se encuentra el punto de funcionamiento del test.

La existencia de ese hiperplano queda garantizada por la teoría clásica de poliedros ya que, siempre existe un hiperplano separador de dos poliedros convexos disjuntos.

El punto de funcionamiento del sistema que queremos analizar pertenecerá alguno de los poliedros, por lo tanto estará contenido en alguno de los dos semiespacios, determinados por el hiperplano separador.

Considerando ahora, un semiespacio normal y un semiespacio fallado, se llama semiespacio nomal al que contiene al poliedro que representa al sistema con funcinamiento normal y semiespacio fallado al que contiene al poliedro que representa al sistema fallado.

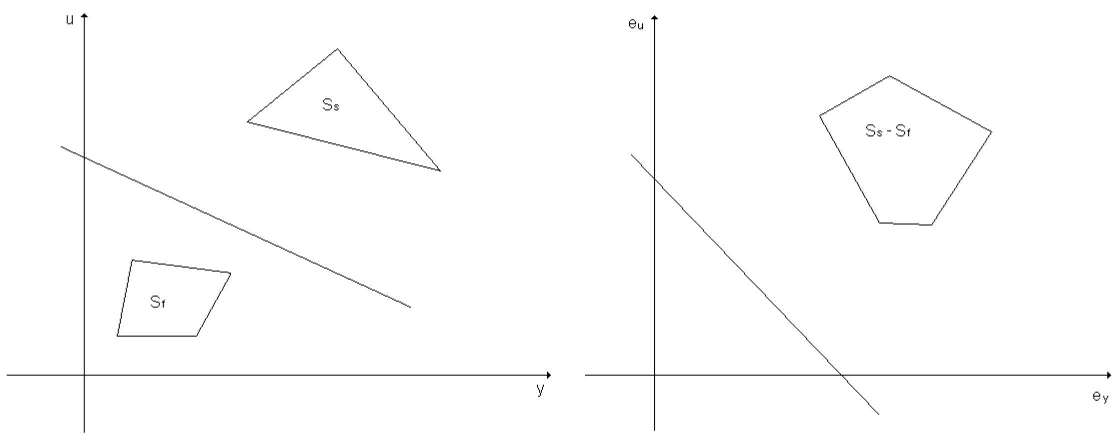
El problema de determinación del funcionamiento del sistema o sea de la pertenencia o no pertenencia al "poliedro enfermo" se reduce ahora la verificación de una sola inecuación lineal por el punto en cuestión.

Con el objeto de simplificar aún mas la modelización, se observa, que si se considera el conjunto diferencia S_s - S_f de los dos poliedros , la no existencia de puntos de intersección entre S_s y S_f es equivalente a la no pertenencia del origen de coordenadas al conjunto diferencia S_s - S_f . Por otra parte la teoría de poliedros clásica nos garantiza que el conjunto diferencia de dos poliedros convexos es otro poliedro convexo. Se trata de conseguir un hiperplano que separe al origen del poliedro diferencia. La existencia del hiperplano queda demostrada por una propiedad que se puede enunciar formalmente por el siguiente lema

LEMA Sea S_s y S_f dos poliedros convexos no vacíos. Entonces existe un hiperplano separador de S_s y S_f si y sólo si el poliedro convexo S_s - S_f no contiene al 0, vale decir existe un hiperplano que separa el 0 y el poliedro convexo S_s - S_f .

Su demostración se puede encontrar en Rockafellar (1972).

Se puede, pues, realizar una nueva simplificación analizando la representación del problema a través de determinadas direcciones de proyección por métodos de Álgebra Lineal como se ejemplifica en las siguientes figuras



Luego el problema se reducirá a determinar analíticamente la ecuación del hiperplano: ($e_u = h\, e_y + d$) o sea los coeficientes de las variables o componentes del vector normal *h* y el término independiente *d.*

Una estrategia para obtener un hiperplano separador basada en la optimización

En este último punto hemos utilizado recursos de Programación Lineal y Álgebra Lineal que permiten operar en grandes dimensiones. No obstante el análisis y determinación del hiperplano puede ser hecho utilizando sólo los recursos de Computación Gráfica que nos brinda un toolbox de poliedros que brinda directamente la gráfica de la proyección del "poliedro diferencia". Por simple visualización del conjunto diferencia, cuya disyunción con el cero nos garantiza la separación de los sistemas normal y fallado, se establece la existencia de un hiperplano separador. Las pendientes posibles, también se obtienen por la visualización gráfica de pendientes de caras convenientemente elegidas. Se muestran dos gráficos que ilustran posibles situaciones.

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado el enfoque geométrico de un problema donde convergen campos conceptuales relativos a la Teoría de Control, Matemática Combinatoria, Algebra Lineal que se integran en una modelización basada en las propiedades de los poliedros y sus

representaciones algebraicas. Las distintas etapas del razonamiento muestran la riqueza de esas propiedades como herramientas del ingeniero.
La visualización de este modelo matemático como recurso de análisis, es formativa en sí misma y facilita la compresión global de una modelización más abstracta. El interés de problemas de este tipo, es dar significación geométrica a recursos de cálculo numérico que si bien tienen su fundamento en conceptos teóricos del análisis matricial, son utilizados en forma totalmente mecánica en distintos campos de aplicación, sobre todo a partir del advenimiento de los formidables programas computacionales de cálculo simbólico y gráfico. Los problemas toman así un significado y esto, si bien no reemplaza a las demostraciones rigurosas, a las que se puede recurrir en las fuentes apropiadas, es una guía correcta y valiosa para el análisis, interpretación y validación de sus soluciones.
Se ha mostrado en un ejemplo concreto, la importancia del pensamiento visual en la formación básica de la ingeniería y su utilización en una modelización que utiliza formas tridimensionales visualizables.
Se cumple el objetivo de ejemplificar, la necesidad de los referentes geométricos en la formación básica.

Referencias bibliográficas

Anido, M., Rubio Scola, H. (2000) Un programa sobre el uso de herramientas C.A.S. en el aprendizaje de la matemática básica en las universidades nacionales de la provincia de Santa Fe, *Revista Lecturas Matemáticas*, *21*(1), 67-77.

Bunks, C., Chancelier, J.P., Delebecque, F., Gomez, C. (Editor), Goursat, M.; Nikoukhah, R., Steer, S. (1999). *Engineering and scientific computing with Scilab*. United Kingdom: Birkhauser.

Connor, J.M., Sebin, L. A. (1980). *Matehematics, visual ability, and sex roles.* Washington, D.C., USA: National Institute of Education (DHEW).

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Vale.

Fennema, E., Tartre, L., (1985) *The use of spatial visualization in mathematic by boys and girls.* Journal for Research in Mathematics Education. 16(3), 184-206.

Fennema, E., (1975). Spatial Ability, Mathematics, and the Sexes, in E. Fennema (Ed.), *Mathematics Learning: What Research Says About Sex Differences*, Columbus, OH, ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kersh, M. E., Cook, K. H. (1979). *Improving mathematics ability and attitude, a manual* Seattle, WA, USA: Mathematics Learning Institute,: University of Washington.

McGee, M. G.(1979). *Human spatial abilities*: *Sources of sex differences.* New York, USA: Praeger publishers.

Nikoukhah, R. (1998). Guaranted active failure detection and isolation for linear dynamical systems. *IEEE –AC*. *34*(11), 1345-1358.

Rockafellar R. T. (1972). *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.

Rubio Scola, H. E., Nikoukhah, R., Delebecque, F. (2003) Failure Detection Filter Design: a Linear Programming Approach. *Applied Mathematics and Computer Science*, *13* (4), 515-526.

Ruthven, K.(1990) The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. Educational Studies in Mathematics 21, 431-450.

Tartre L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving, *Journal for Research in Mathematics Education 21*(1),47-60.

Vasquez, J. L.(1991), The efect of the calculator on student achievement in graphing linear functions. Doctoral dissertation, University of Florida, 1990. Dissertation Abstracts International.

EL USO DE COMPUTADORA Y CAÑÓN PARA EL DESARROLLO DEL ENTENDIMIENTO MATEMÁTICO DE FRACCIONES EN 4° DE PRIMARIA

Iliana Miriam López Jarquín, Simón Mochón Cohen
CINVESTAV. (México)
kmlopez@cinvestav.mx

Campo de investigación: números racionales y proporcionalidad. Nivel educativo: básico
Palabras clave: entendimiento matemático, cambio cognitivo, interacción grupal, propuesta didáctico-tecnológica

Resumen

En este documento se describe una investigación llevada a cabo dentro del proyecto Enseñanza de las Matemáticas con Computadora y Cañón en las aulas de Primaria (EMACC-PRIM) el cual pretende indagar los cambios que son propiciados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de una computadora y cañón en el salón de clases. La investigación se centra en el proceso de entendimiento conceptual de alumnos de 4° grado de primaria así como en la interacción establecida al realizar actividades didácticas que implican nociones de fracciones con una intervención mediador del profesor. Los resultados muestran que los alumnos adquieren imágenes visuales del contenido que guían su pensamiento, en algunos casos, a la notación de propiedades o la elaboración de generalizaciones.

Introducción

La enseñanza de los números fraccionarios representa una de las tareas más difíciles en la educación primaria porque al estar dotados de una estructura conceptual compleja adquiere diversos significados dependiendo de la situación en donde se presente, por ello generalmente se tiende a relegar las nociones que necesitan los alumnos para darle sentido a las fracciones y se plantea prematuramente el uso del lenguaje convencional y los algoritmos.

Tal situación se retoma en la presente investigación que parte de la consideración de que la utilización de la nueva tecnología, como lo es la computadora será un recurso de apoyo para mejorar las condiciones didácticas que permitan el desarrollo de nociones de fracciones en un grupo de 4° grado ya que de acuerdo al Plan y Programas de Educación Primaria (1993), es a partir del segundo ciclo - 3° y 4°- dónde se introduce este contenido. Un punto clave considerado es el desarrollo de la autonomía intelectual del estudiante reflejada en la interacción y discusión de maestro y alumnos, considerando la explicación y justificación de soluciones diferentes como un objeto de reflexión; asimismo se pone atención en la forma en que el maestro aplica y dirige las actividades diseñadas y las diversas situaciones que surjan en la clase.

Para ello se establecen las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son las interpretaciones cognitivas que realizan los alumnos de cuarto grado en la desarrollo de actividades didácticas de fracciones diseñadas para su uso con computadora y cañón?
- ¿Cómo influencia el trabajo grupal en un ambiente de discusión e interacción en el desarrollo conceptual de los alumnos?

Marco Teórico

El estudio se enfoca en los siguientes aspectos que están íntimamente relacionados, ya que cada uno influencia al otro: a) los cambios cognitivos de los alumnos, b) el contenido conceptual de las actividades y c) la interacción y discusión generada entre los estudiantes en el trabajo con la propuesta didáctico-tecnológica.

a) Para el primer aspecto el análisis se basa en las categorías del crecimiento del entendimiento matemático formuladas por Piere y Kieren (1994). Aunque los autores dan una lista de ocho niveles, se consideraron sólo los primeros cinco ya que son los que se adecuan al nivel educativo en el que se desarrolla la investigación:

I) Conocimiento Primitivo. Lo que los alumnos pueden hacer inicialmente. Es el punto de partida para el desarrollo de un entendimiento matemático particular, suponiendo que el concepto no ha sido previamente formado.

II) Formando una Imagen. Cuando el alumno hace algo para darse idea del concepto enlazando la acción. Manejo de actividades concretas.

III) Teniendo una Imagen. No hay necesidad de enlazar acciones concretas para identificar el concepto matemático.

IV) Notando Propiedades. Cuando el alumno utiliza y combina aspectos de una imagen para construir contextos específicos o propiedades relevantes.

V) Formalizando. Cuando el alumno abstrae un método o cualidad común. Generaliza.

b) El contenido conceptual de las actividades se sustenta en el análisis y clasificación de los números fraccionarios de Kieren (1988) quien afirma que la expresión simbólica *a/b* puede modelar cuatro significados o ideas matemáticas: medida, cociente, operador multiplicativo y razón, agrega un quinto significado la relación parte-todo, pero señala que éste se puede encontrar presente en los otro cuatro significados, al identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondientes. Asimismo menciona dos mecanismos usados en el desarrollo de los cinco significados del número racional: partición y equivalencia. La acción de partición entendida como una equidivisión de una cantidad en un número dado de partes y la equivalencia en el sentido de identidad o "de lo mismo" son centrales para la generación y la aplicación del conocimiento del número racional.

La fracción como medida. En la recta numérica, a la fracción a/b se le asocia un punto situado sobre ella, donde cada segmento unidad se divide en "b" partes (o en un múltiplo de b) congruentes, de las que se toma "a".

La fracción como cociente. Bajo esta interpretación se asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro (división indicada a/b), o bien, dividir una cantidad en un número de partes dadas.

La fracción como operador multiplicativo. Bajo esta interpretación, las fracciones son vistas en el papel de transformaciones, es decir "…algo que actúa sobre una situación (estado) y modifica". Aquí se concibe a la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa.

La fracción como razón. En la interpretación de las fracciones como razón, la fracción aparece como razón de una proporción.

La fracción como relación parte-todo. La interpretación de las fracciones como relación parte-todo se produce cuando un todo se divide en partes iguales. La fracción (propia) indica la relación existente entre el todo, que recibe el nombre de unidad, y el número de partes que se consideran de dicha unidad.

Desarrollar el concepto de fracción con todas sus relaciones e interpretaciones en el ámbito escolar conlleva un proceso a largo plazo. Esto es, cuando se tenga en mente desarrollar en los alumnos secuencias de enseñanza-aprendizaje de las nociones de fracciones y sus interpretaciones, hay que tener presente las muchas interpretaciones, y el proceso de aprendizaje a largo plazo.

c) La interacción de los estudiantes se analiza en base a algunas nociones de la teoría de Vigotsky adaptadas al ambiente escolar descritas en el trabajo de Newman, Griffin y Cole (1995) quienes centran su atención en el cambio cognitivo, considerando que desde la perspectiva de un aprendizaje mediado por la computadora se puede identificar una diversidad de interacciones educativas cuando el diseño e implementación de situaciones se realizan en y desde la perspectiva de interacciones que tienen lugar en la ZDP (zona de desarrollo próximo) y favorecen los procesos de apropiación.

Vygotsky (1978) define la Zona de Desarrollo Próximo como "la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz" (p.86); o dicho en términos de Newman Griffin y Cole (1995), *"*es la situación (en la interacción entre profesor y niño) en la que pueden surgir nuevas comprensiones,…puede observarse [*la ZDP*] cuando dos o más personas, de experiencia desigual, realizan una tarea conjuntamente" (p.61).

Así, se considera la propuesta tecnológico-didáctica como una herramienta cultural que puede propiciar diversas interacciones en el aula a partir de las cuales se promueve el cambio cognitivo de los alumnos. Las interacciones del alumno con las actividades en la computadora, con el profesor y con sus compañeros son fundamentales dentro de la perspectiva educativa de Vygotsky. Aquí, el papel del profesor es ir descubriendo el nivel de entendimiento matemático de los alumnos e impulsarlos al siguiente nivel formando una "zona de desarrollo próximo", caracterizándola como un espacio dinámico, en constante proceso de cambio con la propia interacción.

Aspectos metodológicos

La investigación se desarrolló en dos fases. En la primera, la investigación se llevó a cabo durante los meses de abril, mayo y junio del 2005 en una escuela primaria del norte de la ciudad de México en donde el investigador lleva a cabo las actividades diseñadas en las que se implementa el experimento didáctico.

En la segunda, llevada a cabo durante los meses noviembre y diciembre del 2005 en una escuela primaria pública del oeste de la Ciudad de México, el maestro titular del grupo elegido desarrolla las actividades y el investigador toma el papel de observador. Cada una de las etapas consistió en los siguientes pasos:

1.- Entrevista inicial a seis alumnos en base a una guía de 6 tareas referentes a nociones de fracciones que se corresponden con las actividades didácticas que fueron presentadas en la pantalla, para la obtención de información e identificación del nivel de entendimiento matemático en el que se encuentran originariamente.

2.- Implementación de las sesiones de enseñanza del proyecto EMACC-PRIM. Las primeras dos sesiones con el objetivo familiarizar al estudiante con el manejo del ratón. Las otras seis sesiones consistieron en el desarrollo de actividades didácticas centradas en el tema de fracciones. Las actividades planteadas presentan una flexibilidad para realizar tareas acordes a las características del grupo, resaltando la importancia de la interacción grupal para el análisis, discusión y justificación de soluciones como estrategia para el logro de un nivel

superior de entendimiento matemático. En la segunda etapa se explicó el proyecto al maestro de grupo para que posteriormente llevara a cabo las actividades.
Cada sesión se audiograbó y fue observada por alguno de los otros integrantes del equipo del proyecto EMACC-PRIM. Asimismo se hizo un análisis después de cada sesión para reestructurar y hacer los cambios que se consideraron pertinentes de acuerdo a lo observado en el desarrollo de la clase.
3.- Entrevista final a los mismos estudiantes utilizando la guía de tareas inicial después de haber implementado el programa de actividades con la finalidad de compararla con la entrevista inicial y poder determinar las transformaciones en el nivel de entendimiento de los alumnos y el cambio cognitivo que tuvieron como consecuencia de la enseñanza.
La validación del estudio se llevó a cabo a través de la triangulación de los instrumentos metodológicos y mediante el control cruzado de observaciones realizadas por el equipo de investigadores del proyecto EMACC-PRIM en el desarrollo del tratamiento didáctico experimental.

Resultados

Inicialmente, los alumnos mostraron algunas tendencias referentes a la conceptualización de las fracciones tales como no identificar la fracción como representación de una cantidad sino que la descomponen en los números que la integran, mantener la idea de que pueden operar con las fracciones como lo hacen con los números naturales, entre otras; asimismo se advirtió que la tarea de mayor dificultad para los alumnos fue la referida al manejo de fracciones en situaciones discretas.
Los resultados muestran cambios cognitivos de los alumnos a través de la adquisición de imágenes que guiaron su pensamiento y un incremento paulatino en el intercambio y discusión de ideas. En las entrevistas finales, los alumnos se referían a las imágenes de las actividades desarrolladas para sustentar sus respuestas.

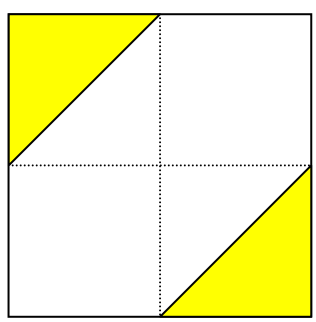


Figura 1. Diagrama de la tarea 1 para la entrevista

Un ejemplo de lo mencionado anteriormente se muestra en las respuestas a la primera tarea de la entrevista, la cual refiere al significado de la fracción como una relación parte-todo en un plano continuo (fig.1). Ian, en la entrevista inicial expresó respecto a cada una de las partes que componían el cuadrado sombreado en dos de sus octavos *"estoy pensando si es un tercio porque creo que es menor que un cuarto"* (interpretación errónea ya que le confiriere el orden de los números enteros); en la entrevista final además de resolver correctamente la tarea, señaló que *"entre más grande es el número* (del denominador) *más chica es la cantidad"*. Esto indica un avance al nivel de Formalización.

En la entrevista inicial, Martín atendió al número de partes iluminadas, y a las que estaban en blanco que se formaban con la división auxiliar sin tomar en cuenta el tamaño de cada una de ellas *"son dos cuartos porque dos están pintados y cuartos porque cuatro están sin pintar"*. En la entrevista final ya toma en cuenta el tamaño de las partes y su relación con el entero *"es un cuarto porque si lo juntamos hace un cuadro y cada cuadro es un cuarto porque cabe cuatro veces"*, con ello se notó un avance al nivel III) Teniendo una imagen.
Gabriela, en la entrevista inicial, toma en cuenta que al designar una fracción las partes consideradas deben ser del mismo tamaño y a partir de ello hace consideraciones en relación a las partes iluminadas y a las que no lo están para definir la numeración tanto en el numerador como en el denominador, aunque la idea que tiene respecto al denominador no es correcta, por lo que se sitúa en el nivel II) Formando una imagen, esto se puede apreciar en la justificación de su respuesta *"es un tercio porque si juntamos los dos triángulos hacen un cuadrado pintado y sobran tres que no están pintados"*.
En la entrevista final, ya toma en cuenta el total de partes en que está dividida la unidad para designar el denominador, "hay cuatro partes iguales, es un cuarto porque tiene cuatro partes y hay dos pintadas pero cada una es la mitad de cada parte y si las juntas hay una parte pintada", con ello se notó un avance al nivel III) Teniendo una imagen.
Durante el desarrollo de las actividades se observaron algunos procesos de la interacción entre alumnos, referidos al surgimiento de puntos de vista similares o contrastantes que fueron discutidos hasta llegar a un acuerdo en el cual los mismos alumnos validaban la estrategia considerada o argumentaban el por qué de su rechazo.

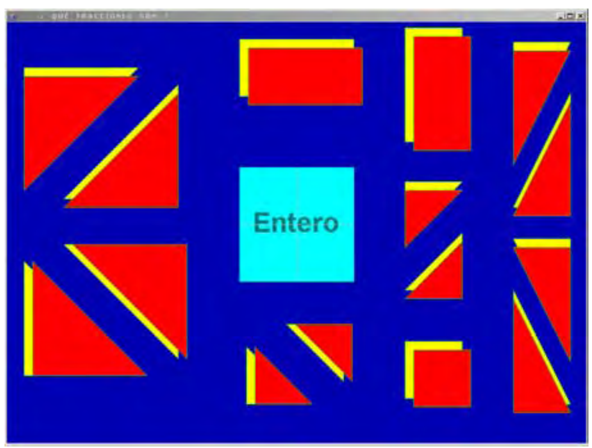


Figura 2. Pantalla "Fracciones Cuadrado"

En la pantalla "Fracciones Cuadrado" la discusión se manifestó en la noción de equivalencia y su significado, como ideas surgieron: *"es lo doble"* (refiriéndose a la cantidad en los números), *"es otra fracción pero es lo mismo";* una vez discutido y realizando diversos casos en la pantalla, los alumnos indicaron que equivalencia era *"lo mismo pero representado con otra fracción"*. Asimismo se presentaron casos en donde diferían de la opinión de un compañero y explicaban su estrategia: *"no me resultó igual que a Fernando porque él dice que falta ¼ y yo creo que falta ⅛ porque solo está el hueco de un triangulito y para que fuera ¼ tendrían que ser 2 triangulitos o un cuadro"*.

Conclusiones

Con lo anterior se puede apreciar que las dificultades que los alumnos presentan al enfrentarse a las fracciones en el ámbito escolar se refieren generalmente a la aplicación de su conocimiento existente de los números enteros, a la determinación incorrecta de la unidad de referencia y a la predominancia de modelos continuos en la enseñanza de las fracciones.
La puesta en marcha de la propuesta didáctica representó un escenario favorable donde se manifestaron las estrategias realizadas por los alumnos al tratar de dar sentido y significado a la noción de fracción que se planteó en cada una de las pantallas.
Los alumnos se vieron en la necesidad de recurrir a elementos concretos como fuente para la construcción del entendimiento matemático, así el apoyo visual que representan las actividades desarrolladas en la pantalla, resultó una herramienta significativa para el entendimiento matemático de los conceptos de fracciones trabajados ya que permitió a los alumnos hacer representaciones mentales de ellos. Con ello, se advirtió que los alumnos enriquecieron sus ideas conceptuales modificándolas o sustituyéndolas.
Por las características y naturaleza de las actividades diseñadas en la propuesta, éstas fueron atractivas y novedosas para los alumnos, de acuerdo a sus opiniones y forma de trabajo, el uso de la computadora y cañón les pareció un recurso más atractivo que el uso exclusivo del libro o del pizarrón ya que posibilitó la exploración de casos diversos haciendo los movimientos requeridos en el desarrollo de sus procedimientos dada la ventaja de arrastrar figuras para añadir o suprimir elementos o superponerlos en la comprobación del número de veces que determinada fracción cabía en el entero.
Una consideración importante de este método de enseñanza es que ayuda al maestro a poner más atención en el proceso de pensamiento de sus alumnos. Se obtuvo evidencia de que se puede llegar a buenos resultados si se sigue una secuencia didáctica congruente con los propósitos de la propuesta que incluya distintas formas de intervención de los miembros del grupo tales como la discusión a nivel colectivo en donde los alumnos expongan y defiendan sus puntos de vista y validen mediante argumentaciones las respuestas de sus compañeros, la consideración de lo que los alumnos dicen para hacer reformulaciones que enriquezcan el tema, el planteamiento de nuevos problemas por parte de los alumnos y en general involucrarse en la reflexión del quehacer educativo para fomentar el desarrollo del entendimiento matemático en los alumnos.

Referencias bibliográfícas

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newman, D., Griffin, P. & Cole, M. (1995).Capítulo IV. Conceptos para analizar el cambio cognitivo. *La zona de construcción del conocimiento*, Morata, Madrid. 76-90

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and How can we represent it? *Educational Studies in Mathematics,* 26, 165-190

Secretaría de Educación Pública (1993). Plan y programas de estudio. Educación Básica. Primaria. México: SEP.

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind and Society: The development of higher psychological processes* (pp. 79-119). Cambridge, MA. Harvard University Press.

LA ARGUMENTACIÓN Y ENSEÑANZA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO EN PROFESORES DE BACHILLERATO

Juan Carlos Ponce Campuzano
Centro de Investigación y Estudios Avanzados. (México)
sososees@yahoo.com.mx
Campo de investigación: pensamiento matemático avanzado. Nivel educativo: superior
Palabras clave: cálculo, antiderivada, argumentación

Resumen
En el presente trabajo se hace una revisión del Teorema Fundamental del Cálculo, poniendo énfasis en su argumentación. Además, se presenta una discusión en torno a la relación entre los símbolos $\int f(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx$. Debido a que varía la manera como se presenta el Teorema, pues a veces se introduce primero la derivada y después se define la integral indefinida simplemente como la inversa de la derivada; se propone una investigación acerca de documentar si los profesores cuentan con los suficientes elementos para poder presentar en orden lógico y coherente los contenidos e ideas centrales del Cálculo Diferencial e Integral, en particular, del Teorema Fundamental.

El cálculo diferencial y el cálculo integral no se consideran como dos temas independientes el uno del otro. Sabemos que la noción de integración fue bastante bien desarrollada antes de Newton y Leibniz. Fue a mediados del siglo XVII, poco después de que Newton y Leibniz desarrollaran toda la estructura conceptual del cálculo diferencial, que Isaac Barrow reconoció la relación básica entre el cálculo diferencial y el cálculo integral. Tal relación viene dada por el Teorema Fundamental del Cálculo:

Si $F(x)=\int_a^x f(t)dt, a \le x \le b$ y si $f(x)$ es continua y monótona para $a \le x \le b$, entonces $F'(x)=f(x)$ (Toeplitz, 1967).

En otras palabras, la derivada de $F(x)$ es la función bajo el signo integral, es decir, el integrando; o en otras palabras, la integral definida considerada como una función de su límite superior, resuelve el problema inverso de encontrar una función cuya derivada es la función dada $f(x)$. El gran logro de Leibniz y Newton fue haber reconocido y explotado por primera vez este teorema.

Desde un punto de vista intuitivo la demostración es relativamente sencilla. Depende de la interpretación geométrica de la integral $F(x)$ como un área, pues si se considerase a $F(x)$ como una gráfica y a $F'(x)$, su derivada, como la pendiente, tendríamos dificultad para hacer la demostración. La diferencia $F(x_1)-F(x)$ es el área entre x y x_1; y ésta área está entre los valores $(x_1-x)m$ y $(x_1-x)M$, es decir

$(x_1-x)m \le F(x_1)-F(x) \le (x_1-x)M$,

donde *M* y *m* son los valores mayor y menor de $f(u)$ respectivamente en el intervalo entre x y x_1, ya que estos dos productos son las áreas de rectángulos tales que el primero, $(x_1-x)m$, queda incluido dentro del área bajo la curva y el segundo, $(x_1-x)M$, incluye el área bajo la curva. Por lo que

$$m \le \frac{F(x_1) - F(x)}{(x_1 - x)} \le M \ .$$

Suponiendo que la función $f(u)$ es continua, de tal manera que si x_1 se aproxima a x entonces tanto *M* como *m* se aproximan a $f(x)$. Así que tenemos

$$F'(x) = \lim_{x \to x_1} \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x} = f(x).$$

Intuitivamente esto expresa que la razón de cambio del área bajo la curva $y = f(x)$ conforme *x* crece es igual a la altura de la curva en el punto *x.* Existe un Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, no menos importante que el primero, pero que encierra la misma idea. Para ello es preciso saber qué es una primitiva.
Las funciones $G(x)$ para las cuales $G'(x) = f(x)$, se les llama *funciones primitivas*. Así que la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \le x \le b$ es una primitiva de $f(x)$. Se dice "una" función primitiva y no "la" función primitiva, ya que es claro que si $G(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ entonces $H(x) = G(x) + c$, con c una constante, es también una función primitiva, pues $H'(x) = G'(x)$. Una afirmación inversa también es cierta: *Dos funciones primitivas,* $G(x)$ y $H(x)$, pueden diferir sólo por una constante. Pues la diferencia $U(x) = G(x) - H(x)$ tiene por derivada $U'(x) = G'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$, y por lo tanto es constante, debido a que una función representada en todas partes por una gráfica horizontal debe ser constante.
Esto nos conduce al Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, para encontrar el valor de una integral entre *a* y *b* siempre que conozcamos la función primitiva $G(x)$ de $f(x)$. De acuerdo con el Primer Teorema

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es también una función primitiva de $f(x)$ y por tanto $F(x) = G(x) + c$, siendo c una constante. La constante queda determinada por lo siguiente; $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, lo cual da $0 = G(a) + c$, de manera que $c = -G(a)$. Entonces la integral definida entre los límites *a* y *x* será $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$, o bien si escribimos *b* en lugar de *x*,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a),$$

independientemente de la función primitiva particular que se haya escogido. En otras palabras: Para evaluar la integral definida $\int_a^b f(x)d$ sólo se debe hallar una función $G(x)$ tal que $G'(x) = f(x)$ y luego obtener la diferencia $G(b) - G(a)$.
Hasta aquí hemos mencionado los dos Teoremas Fundamentales del Cálculo, y se ha dado una argumentación de cada uno de ellos. Sin embargo, se puede dar una prueba más rigurosa si así se desea, pues consideramos que en la enseñanza, en particular del cálculo, juega un papel importante la "prueba matemática" para la construcción de conocimiento. El papel de la prueba en el salón es diferente que su papel en la investigación. En la investigación su papel

es convencer. En el salón, convencer no es un problema, su papel es explicar. La prueba matemática puede convencer y el convencer puede explicar (Hersh, 1993, p.396).
Es importante que los profesores de matemáticas tengan un claro manejo del significado de prueba, pues da pauta para que puedan construir conocimiento matemático. Cuando se pide hacer una prueba a estudiantes, al escribirla pueden mostrar procesos de pensamiento; permite además, observar cómo un estudiante llega a una conclusión en particular. Como mencionan Hanna & Jahnke (1996), el potencial más significante de la prueba en la educación matemática es la comunicación de la interpretación matemática.
Asimismo, podemos considerar otro tipo de funciones que tiene la prueba; por ejemplo, Hanna (2000) menciona que la prueba en matemáticas funciona como:

1. *Verificación* (que tiene que ver con la verdad de una declaración)
2. *Explicación* (para dar claridad del porque es verdad)
3. *Sistematización* (la organización de varios resultados dentro de un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas)
4. *Descubrimiento* (invención de nuevos resultados)
5. *Comunicación* (de conocimiento matemático)
6. *Construcción* de una teoría empírica
7. *Exploración* del significado de una definición
8. *Incorporación* de un hecho bien conocido dentro de un marco de trabajo y de esta manera observarlo desde una nueva perspectiva

Muchos estudiantes creen que la verificación de un teorema general con un ejemplo específico o quizá muchos ejemplos, es una prueba suficiente. Otros creen que una prueba de un teorema es válida si y sólo si, sigue un formato tradicional, tal como el de "pruebas a dos columnas", que se enseña en geometría de preparatoria. Los estudiantes con esas deficiencias no pueden construir una prueba válida ya que no están seguros de lo que es una prueba válida (Weber, 2001, p. 102).
Aunque existe una semejanza aparente, el símbolo $\int f(x)dx$ es conceptualmente distinto del símbolo de integración $\int_a^b f(x)dx$. Los dos han sido originados por procesos completamente distintos: la diferenciación y la integración. Sin embargo, como estos procesos están relacionados por los teoremas fundamentales del Cálculo, hay relaciones entre ambos símbolos. El Primer Teorema Fundamental indica que cada integral indefinida de *f* es también una primitiva de *f*. Por lo cual, en $\int f(x)dx = P(x) + C$, se puede sustituir *P(x)* por $\int_c^x f(t)dt$ donde *x* es un cierto límite inferior y resulta:

$$\int f(x)dx = \int_c^x f(t)dt + C .$$

Esto indica que se puede considerar el símbolo $\int f(x)dx$ como representante de una integral indefinida de *f*, más una constante.
El Segundo Teorema Fundamental, expresa que para cada primitiva *P* de *f* y cada constante *C*, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[P(x)+C\right]\Big|_a^b .$$

Si se sustituye $P(x)+C$ por $\int f(x)dx$, esta fórmula se puede escribir en la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b .$$

Las dos fórmulas anteriores, se pueden considerar como una expresión simbólica de los teoremas primero y segundo fundamentales del Cálculo.

Debido a una larga tradición, muchos tratados de Cálculo consideran el símbolo $\int f(x)dx$ como representante de una "integral indefinida" y no de una función primitiva o antiderivada. Esto está justificado, en parte, por la ecuación $\int f(x)dx = \int_c^x f(t)dt + C$, que dice que el símbolo $\int f(x)dx$ es, además de una constante aditiva C, una integral indefinida de f. Por la misma razón, muchos formularios de Matemática contienen extensas listas de fórmulas llamadas "tablas de integrales indefinidas" siendo en realidad tablas de funciones primitivas. Para distinguir el símbolo $\int f(x)dx$ de $\int_a^b f(x)dx$ el último se denomina integral definida.

Puesto que el Segundo Teorema Fundamental reduce el problema de la integración al de buscar primitivas, la expresión "técnica de integración" se refiere al estudio de un método sistemático para hallar primitivas. Cuando se pide la "integral" $\int f(x)dx$ se ha de entender que lo que se desea es la primitiva más general (Apostol, 1998, p. 258).

Comentarios finales

Una propuesta de investigación sería, documentar si los profesores cuentan con los suficientes elementos para poder presentar en orden lógico y coherente los contenidos e ideas centrales del Cálculo Diferencial e Integral; así como tener un buen manejo de la prueba; en particular, del Teorema Fundamental de Cálculo. Ya que, por ejemplo, en los libros de Cálculo, la forma en que presentan el Teorema Fundamental del Cálculo varía, pues algunos introducen primero la derivada y después definen la integral indefinida simplemente como la inversa de la derivada, diciendo que G(x) es una integral indefinida de $f(x)$ si $G'(x) = f(x)$. De esta manera el procedimiento combina la diferenciación con la palabra "integral". Sólo después se introduce la noción de la "integral definida" como un área o como el límite de una suma, sin poner énfasis en que la palabra "integral" significa ahora algo totalmente diferente. En otros libros se presenta primero la integral y después la derivada para posteriormente hacer notar la relación que hay entre esos dos conceptos.

El hecho en que los libros elementales de Cálculo Diferencial e Integral el concepto de integral indefinida esté supeditada al de la derivada, seguramente hace pensar a profesores y alumnos que primero debe estudiarse la derivada y después la integral. Este orden de estudio obedece a cuestiones prácticas o quizá didácticas. Además, el profesor debe ser capaz de dar una argumentación adecuada cuando los estudiantes le cuestionen acerca de la validez del Teorema Fundamental del Cálculo.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. M. (1998). *Calculus. Vol. I.* México: Editorial Reverté.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 877-908.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics.* 44, 5-23.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics.* 24, 389-399.

Judson, T. W. & Nishimori, T. (2005). Concepts and skill in high school calculus: An examination of a special case in Japan and the United Sates. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 36, No. 1, 24-43.

Toeplitz, O. (1967). *The Calculus: A genetic approach.* Unites States of America. The University of Chicago Press.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics.* 38, 101-119.

UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO ESTRATEGIA DE DISEÑO DE UNIDADES CURRICULARES

Ileana Pluss
Universidad Nacional de Rosario-Fac.de Ciencias Económicas y Estadística. (Argentina)
ipluss@cablenet.com.ar
Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: superior
Palabras clave: ingeniería didáctica, derivada, enfoque geométrico

Resumen
El trabajo que se presenta se enmarca en estudios didácticos e investigaciones sobre los procesos de aprendizaje de unidades curriculares, especialmente diseñadas y construidas como material de apoyo para la enseñanza de tópicos específicos, seleccionados por su valor conceptual en los programas de la llamada Matemática Básica en Facultades donde el carácter de esta ciencia es preponderantemente instrumental. El tema a tratar es "Derivada" y se desarrolla a partir de problemas de velocidad y su correspondiente interpretación geométrica. Se presenta el desarrollo de las fases de una Ingeniería Didáctica correspondientes a los "análisis preliminares" y a "la concepción y los análisis a priori" que define Artigue. En un trabajo predictivo se han determinado algunos obstáculos que caracteriza la teoría de Brousseau.

Justificación del tema y objetivo del trabajo

Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivada y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo conceptual del Análisis y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de la matemática. (Artigue y otros, 1995). Esto está reforzado por la propia experiencia docente y nos ha llevado a elegir especialmente el tema "Derivada" por:

➢ Su valor conceptual	Siguiendo el lenguaje de Douady, se nutre en los "cuadros" de la Física, la Geometría, el Álgebra, la Geometría Analítica, el Análisis Matemático.
➢ Su valor formativo	Estimula a reflexionar sobre los cambios continuos que caracterizan a las magnitudes de cualquier área de interés y sobre cómo cuantificar dichos cambios.
➢ El razonamiento lógico que exige	Implica, entre otras cosas, manejar simultáneamente límite y continuidad de funciones, recta secante y recta tangente a una curva.
➢ Su estímulo a un pensamiento visual	Va más allá de una simple visualización, exige operaciones de relación provocadas por dicha visualización.

Es pues el objetivo del trabajo, facilitar la comprensión del "concepto de derivada".

Marco metodológico de la investigación

"La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación se ubica en el registro de los estudios de casos, cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori" (Artigue, 1995)

La Ingeniería Didáctica incorpora una visión propia del aprendizaje de la matemática; si bien parte de una concepción constructivista del aprendizaje, se distingue dentro de este tipo de teorías por su modo de incorporar la relación entre el alumno y el saber. Los contenidos son el

fundamento sobre el cual se van a desarrollar, de manera jerarquizada, las estructuras mentales. El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber, con el fin de optimizar su control y su reproducción.
Los contenidos matemáticos toman especial importancia, ya que no se pueden separar la concepción de la Matemática como Ciencia de su propio proceso de estudio.
En el diseño de la Ingeniería Didáctica al cual nos adherimos (Artigue 1995 y otros), se realizará la distinción temporal en un proceso de cuatro fases:

- "análisis preliminar"
- "concepción y análisis a priori"
- "desarrollo de una experiencia"
- "análisis a posteriori y evaluación"

En este trabajo, se abordarán solo las dos primeras fases referidas al diseño del material didáctico, que implican una indagación epistemológica y una propuesta didáctica.
Análisis preliminar que ha guiado al diseño de esta unidad
Comprende en general:

- Una dimensión epistemológica
- Una dimensión cognitiva
- Una dimensión didáctica

Dimensión epistemológica

Nuestro diseño se basa sobre la validez matemática del conocimiento geométrico obtenido por visualización, y sobre la importancia de las operaciones de relación provocadas por dicha visualización.

Dimensión cognitiva

En nuestro diseño la planificación de la enseñanza del tema Derivada está basada en la localización de los obstáculos. Para Brousseau (1983) un obstáculo es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y fuera de dicho dominio puede ser fuente de errores y dificultades. La localización de los obstáculos inherentes al conocimiento de un tema, es esencial para la planificación de su enseñanza. En su determinación interviene la experiencia del docente y su interés en saber porqué el alumno comete los errores.
Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan:
Suele haber cierta unanimidad en que los obstáculos se manifiestan mediante errores reproducibles, con cierta coherencia interna (no se trata de errores impredecibles y arbitrarios), persistentes (siguen apareciendo después de que el sujeto haya rechazado conscientemente el modelo defectuoso) resistentes (muy difíciles de modificar) y relativamente universales. En el caso de los que tienen origen epistemológico, se postula rastrear además en la génesis histórica de los conceptos en cuestión (p. 224) .
En nuestro caso, la definición de función puede ser un obstáculo epistemológico para la comprensión del concepto de derivada de una función; el alumno debe vincular una función que tiene un determinado dominio y una relación dada por una ley estática, con otra función derivada de la misma, que representa los cambios continuos que se producen en la primera función.

Dimensión didáctica

Nuestro diseño está centrado en la actividad del alumno. Las actividades que se proponen motivan el surgimiento de situaciones de exploración, formulación y validación generadas en el interés del alumno.

Esta dimensión está condicionada por la cantidad de alumnos donde se realizará la experiencia, lo cual confiere una gran importancia al diseño del material que deberá ayudar a un aprendizaje autónomo.

Concepción y análisis a priori

En esta etapa el "investigador diseñador" toma decisiones en cuanto a la elección de los contenidos . En nuestro diseño, esta elección se expone en los siguientes objetivos:

1- Educar al alumno en una lectura completa y cuidadosa de un problema.

2- Traducir al lenguaje matemático la velocidad promedio de un objeto en movimiento en un intervalo de tiempo.

3- Interpretar problemas que se modelizan por medio de una función.

4- Identificar la tasa de variación instantánea de una función en un punto con el límite del cociente incremental en dicho punto.

5- Identificar la derivada de una función en el punto x con la tasa o coeficiente de variación instantánea de dicha función en x.

6- Interpretar gráficamente la derivada de una función en un punto.

7- Comprender la necesidad de la continuidad de una función f en un punto x para que exista la derivada de f en x.

8- Diferenciar la condición necesaria de la condición de no suficiencia de la continuidad de una función f en un punto x para que f sea derivable en x.

En la selección de los contenidos teóricos se decide definir derivada de una función

Prospectiva

El "análisis preliminar" y "la concepción y los análisis a priori" presentados preparan el terreno para que, luego de la observación del desarrollo y de los resultados, se realice la confrontación de los análisis a priori y a posteriori y se puedan así validar las predicciones de aparición de situaciones adidácticas (Brousseau, 1986) que caracterizan el aprendizaje de un conocimiento matemático.

A continuación presentamos una secuencia de problemas - "selecciones didácticas" (Artigue 1995) – como eje que conduce y da significado a la definición de derivada.

a) Un problema interesante y una referencia histórica

Una planta vegetal crece en forma continua con velocidad variable a medida que transcurre el tiempo, puede detener su crecimiento en algún momento y luego volver a crecer. Podríamos preguntarnos: ¿la velocidad promedio de crecimiento es la misma entre los tres y seis meses de plantada que en el lapso transcurrido desde que fue plantada hasta que alcanzó los tres meses? ¿cuál es la velocidad instantánea con que la planta crece en el momento que se cumple exactamente un mes de haber sido plantada?

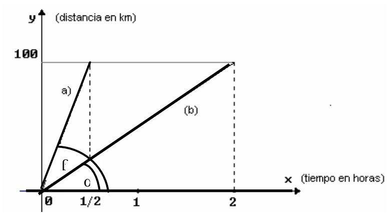
En una referencia histórica, nos encontramos en el siglo XVII con dos problemas aparentemente inconexos que contribuyeron al origen de la idea central de Cálculo Diferencial, que es el concepto de "derivada". Dichos problemas son:

- la velocidad instantánea de un objeto en movimiento
- la recta tangente a una curva en un punto dado de la misma.

Ya podemos estar planteándonos algunas preguntas:

¿Qué entendemos por velocidad instantánea de un objeto en movimiento? ¿Es posible calcularla? ¿Qué se entiende por recta tangente a una curva? ¿Cómo puede relacionarse un problema geométrico con la velocidad instantánea de un móvil?

b) Problema 1:



.

En la figura se describe el movimiento de dos móviles distintos que recorren la misma distancia (100km) con *velocidades* distintas y *constantes* durante todo el trayecto

- ¿Podemos deducir gráficamente cuál de los dos móviles es más veloz?
- Teniendo en cuenta la definición elemental de velocidad: espacio recorrido *dividido por el tiempo empleado en recorrerlo, ¿podemos calcular cada una y compararlas?*

v_a = 100km / 0,5h = 200km/h v_b = 100km / 2h = 50km/h

- ¿Porqué los movimientos de los dos móviles están representados por segmentos de rectas?

porqué la velocidad de cada móvil es constante, o sea es la misma en cada instante del recorrido y coincide con la pendiente de la recta en cada caso. Lo verificamos:

$$m_a = \operatorname{tg} \beta = \frac{100}{0{,}5} = 200 \quad ; \quad m_b = \operatorname{tg} \alpha = \frac{100}{2} = 50$$

- ¿Cuál es la relación entre la velocidad del móvil y la pendiente de la recta en cada caso?

cuanto mayor es la velocidad del móvil, mayor es la pendiente de la recta que describe su movimiento.

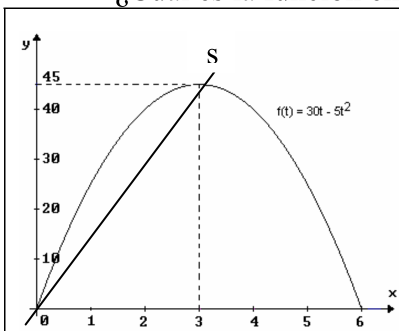
Si la velocidad de un móvil no es constante, obviamente la representación gráfica de la función que vincula el tiempo con la distancia recorrida ya no será un segmento de recta sino una curva y la velocidad no será la misma en cada instante del recorrido.

- Si la velocidad del objeto no es constante, ¿podremos calcular la velocidad promedio del móvil en todo el recorrido o en distintos intervalos de tiempo?
- ¿Se podrá calcular en este caso la velocidad en un instante dado del recorrido?

c) Problema 2:

Supongamos que un jugador de basketball lanza la pelota verticalmente hacia arriba con una determinada velocidad inicial, por ejemplo, sea ésta de 30 metros por segundo. La Física nos dice que la altura alcanzada por la pelota y el tiempo empleado en alcanzar dicha altura están vinculados por la siguiente función: $f(t) = v_0\, t - 5\, t^2$, donde t es el tiempo en segundos , $f(t)$ es la altura en metros, y v_0 es la velocidad inicial.

- ¿Cuál es la función en este caso y cuál es su representación gráfica?



En la representación gráfica de la función f: $[0,6] \to \Re$ / $f(t)=30t- 5t^2$ podemos hacer las siguientes observaciones:

- La pelota sube con velocidad decreciente durante los primeros tres segundos que dura la subida:

. entre $t = 0$ y $t = 1$ la velocidad promedio es:
$[f(1) - f(0)] / (1\text{-}0) = [(25 - 0) / 1]$ m/s = 25 m/s
. entre $t = 1$ y $t = 2$ la velocidad promedio es:
$[f(2) - f(1)] / (2\text{-}1) = [(40 - 25) / 1]$ m/s= 15 m/s
. entre $t = 2$ y $t = 3$ la velocidad promedio es:
$[f(3)\text{-}f(2)] / (3\text{-}2) = [(45 - 40) / 1]$ m/s = 5 m/s

- Alcanza la altura máxima de 45 metros a los 3 segundos de haber sido lanzado.

	➢ En todo el trayecto de subida la velocidad promedio es: [*f*(3) – *f*(0)] / (3-0) = [(45 – 0) / 3] m/s = 15 m/s

Supongamos que nos interesa conocer la velocidad del objeto a los dos segundos de haber sido lanzado. Comencemos calculando la velocidad media o promedio del objeto en intervalos de tiempo anteriores y posteriores a dos, cada vez más cortos a partir de dos, completando el siguiente cuadro:

intervalos de tiempo en segundos	velocidad promedio en m / s
1,9 – 2	[*f*(1,9) – *f*(2)] / (1,9 – 2) = (38,95 – 40) / (-0,1) = 10,5
1,99 – 2	
1,999 – 2	
2 – 2,1	
2 – 2.01	
2 – 2,001	

Si continuamos aplicándole a *t*=2 incrementos positivos o negativos cada vez más pequeños:

➢ ¿podremos suponer que la velocidad promedio tiende a un "valor límite" igual a 10 m/s, siendo ésta la velocidad de la pelota a los dos segundos de haber sido lanzada, es decir en el instante t=2?

Lo verificamos utilizando la definición de límite de una función en un punto:

♦ Simbolizando con "*h*" al incremento aplicado desde el punto 2, la velocidad promedio del objeto en el intervalo (2, 2+*h*) si *h* > 0, o (2+*h*, 2) si *h* < 0 es:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{30\ (2+h)-5\,(2+h)^2-(60\ -\ 20\ )}{h}$$

Aplicando a esta expresión el límite para *h* tendiendo a cero, obtenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{30(2+h)-5(2+h)^2-(60-20)}{h} == \lim_{h\to 0}(10-5h) = 10$$

Queda así comprobada la veracidad de la suposición que habíamos hecho en base a nuestras observaciones:

Este valor límite de la velocidad promedio, 10 m/s, es la velocidad del objeto en el instante *t* = 2 y recibe el nombre de "derivada de la función *f* en el punto *t* = 2".

➢ *¿Cuál es el significado geométrico de la velocidad promedio?*

Interpretemos por ejemplo la velocidad promedio en todo el trayecto de subida: $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{45}{3}=15$ es la pendiente de la recta "s" que pasa por los puntos de coordenadas (0,0) y (3, *f*(3)). O sea que la velocidad promedio en un intervalo de tiempo, es la pendiente de la recta que corta a la gráfica de *f* en los puntos cuyas abscisas son los extremos de dicho intervalo, llamada "recta secante" a la curva en tales puntos.

➢ *Considerando los intervalos del cuadro ¿Qué ocurre con las rectas secantes a la curva cuando nos aproximamos a t=2 por la derecha o por la izquierda?*

Obviamente varían sus posiciones tendiendo a una única posición límite, es decir a una única recta, llamada "recta tangente" a la curva en el punto de coordenadas (2, *f*(2)).

➢ *¿Cuál es entonces el significado geométrico de la velocidad instantánea?*

"La velocidad del objeto en el instante *t*=2, es decir 10, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *t* =2."

Y aquí está entonces la relación entre los dos problemas que mencionamos al comienzo, en la referencia histórica.
Si ahora, en lugar de la función f y el punto t=2 que consideramos en el problema 2, generalizamos nuestro razonamiento pensando en una función f definida en un cierto intervalo y en un punto x_0 interior a dicho intervalo, llegamos a la siguiente definición:

Sea f una función definida por lo menos en un intervalo abierto (a,b) y sea x_0 un punto perteneciente a dicho intervalo. Sea h un incremento positivo o negativo del punto x_0 de modo que $x_0 + h$ pertenezca también al intervalo (a,b).
Formamos el cociente incremental o cociente de diferencias: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$ cuyo numerador y denominador son los incrementos de la variable dependiente y de la variable independiente respectivamente. Este cociente representa la "variación media" de la función f cuando x varía de x_0 a $x_0 + h$.
Luego estudiamos el límite de dicho cociente cuando h tiende a cero. *Si este límite existe y es finito*, entonces se le da el nombre de *derivada de la función f en el punto x_0*, se lo simboliza $f'(x_0)$ y *representa la "variación instantánea" de la función f en el punto x_0:*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \ h \neq 0$$

- ¿Existe siempre la derivada?

En la definición de derivada, el límite del cociente incremental es una indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$, de modo que para que exista derivada esta indeterminación debe poder ser salvada.

- ¿Cómo se interpreta el resultado del siguiente límite: $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0$?
- ¿Cuál es la relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función?

Con la misma metodología que hemos venido aplicando, se orientará al alumno para que pueda responder estas preguntas.

- Si suponemos que en cada punto del (a,b) existe un número real, límite del cociente incremental, y si relacionamos cada punto de ese dominio con el valor del límite correspondiente, ¿qué ha quedado definida?

Se conjetura que por los conocimientos que tienen los alumnos de la definición de función, pueden responder a esta pregunta.

- ¿Cuál es la vinculación entre la función f y su derivada f'?

Análogamente se analizarán las situaciones de no existencia del límite del cociente incremental en algunos puntos del (a,b) y sus interpretaciones geométricas, las cuales obran como fotografías que ayudan al alumno a la construcción del conocimiento.

Conclusiones

Lo que se ha presentado es un análisis preliminar de una Ingeniería Didáctica en el cual las elecciones del profesor han buscado la construcción del concepto de derivada de una función por el análisis de problemas, en una ventana conceptual que se nutre de los cuadros mencionados al comienzo y profundiza la vinculación con el concepto de límite de una función. Los problemas elegidos, creemos que son adecuados para entender el concepto de derivada como tasa de variación instantánea. Creemos que a partir de la aprehensión de ese significado el alumno podrá construir el concepto de derivada.

Agradecimientos
ECO-17 "La ingeniería didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares".

ECO-16 “La elaboración y evaluación de los materiales curriculares para la Matemática Básica de carreras de Ciencias Económicas”.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *El lugar de la didáctica en la formación de profesores.* México. Grupo Editorial Iberoamericano. 7-23

Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericano. 34-56.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Actes de la XXVIII Recontre de la CIEAEM*, Louvain La Nueve, 5-12.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4, 2, 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7,2 , 33-115.

Brousseau, G. (1988). *Los diferentes roles del maestro.* Buenos Aires. U.Q.A.M.

Brousseau, G. (1996). La Didàctique des Mathemàtiques en la formació del professorat*.* *Butlleti de la Societat Catalana de Mathemàtiques*. Vol 11, Nº 1 pág. 33-45.

Chevalard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática.* Editorial ICE-Horsori. 213-225; 277-290.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas.* (4ª ed.) México. International Thomson Editores.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA. OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Mónica Caserio, Martha Guzmán, Ana María Vozzi
UNR.-FCEIA, UTN-FRR. (Argentina)
mbcaserio@yahoo.com.ar , guzmartha@yahoo.com, amvozzi@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: pensamiento algebraico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: errores, aprendizaje significativo, ingeniería didáctica

Resumen
En el marco del proyecto de investigación del que formamos parte: "Dificultades en la enseñanza-aprendizaje de matemática en carreras no matemáticas", ubicamos este trabajo que presentamos como reporte de investigación, ya que da cuenta del diseño de aquellos ciclos que se corresponden con el análisis a priori de una situación de aprendizaje, la recolección de datos en la propia situación y el análisis a posteriori de los resultados. Nos ocupamos en esta etapa del análisis de los errores puestos de manifiesto por los alumnos de 1º año de las carreras de Ingeniería, en relación a un tema específico del Álgebra Lineal, como es Dependencia e Independencia Lineal

Marco teórico

Bajo la concepción que los "errores" no constituyen solamente un obstáculo para el aprendizaje de matemática, sino que, si son previamente detectados y clasificados pueden convertirse en elementos disparadores de un aprendizaje significativo.
En la clasificación de los errores que realiza Socas: I-Errores que tienen su origen en un obstáculo y II-Errores que tienen su origen en ausencia de sentido del concepto, consideramos que tanto en uno como en otro caso hay una gran contribución de los distintos lenguajes y sus correspondientes modos de pensamiento en Álgebra Lineal:
Lenguaje geométrico: el que se usa para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en R^2 y R^3;
Lenguaje aritmético: usado para describir las operaciones entre matrices, soluciones de ecuaciones, etc. y
Lenguaje algebraico: usado para formalizar y simbolizar entes como espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc. (Sierpinska, 1996).
Dando lugar a los siguientes modos de pensamiento
Pensamiento sintético geométrico: Este tipo de pensamiento se da en una persona, por ejemplo, cuando se piensa en las posibles colocaciones de rectas o planos en R^2 o R^3 que representan las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. *Pensamiento aritmético - analítico:* Siguiendo con el ejemplo anterior, si la persona examina el problema en términos de los posibles resultados después de haber reducido la matriz respectiva, se está en el modo de pensamiento aritmético analítico. *Pensamiento analítico estructural:* Cuando se piensa el problema anterior en términos de las propiedades de las matrices invertibles o no invertibles o de los determinantes del sistema.

Diseño de la experiencia

Diseñamos una serie de actividades áulicas que nos proporcionen los elementos de análisis necesarios para elaborar las conclusiones. A partir de ellas, se hará posible el diseño de

nuevas estrategias didácticas que faciliten al alumno la incorporación significativa de los conceptos.
El marco metodológico elegido es el de una investigación activa, por entender que ella se dirige a su aplicación inmediata y no al desarrollo de teorías. Su propósito es el de mejorar la práctica educativa y al mismo tiempo perfeccionar a quienes han de mejorar sus métodos. Apela a los docentes que tienen problemas por resolver y le corresponde comprometer e implicar al docente proporcionándole un camino para el progreso profesional y la mejora del plan de estudios. Por ese sentido, nos ubicamos tanto a nivel didáctico como a nivel de investigación, en el cuadro de la Ingeniería Didáctica, puesto que consideramos que en el contexto de un paradigma cualitativo el "saber a enseñar" y el "caso a investigar " son susceptibles de ser tratados a través de ella. Por otra parte esta posición es compatible con la aproximación cognitiva desarrollada alrededor de los "campos conceptuales" de G. Vergnaud, a la aproximación a través de los "saberes"de J. Chevallard en el área de transposición didáctica y a la aproximación didáctica a través de la teoría de situaciones de G.Brousseau y los obstáculos que clasifica. La metodología de la Ingeniería didáctica se caracteriza, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. En general, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase emplean un enfoque comparativo con evaluación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de los grupos experimentales y grupos de control, mientras que la Ingeniería Didáctica se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es interna, como resultado de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En el contexto de la ingeniería didáctica

Las actividades a desarrollar, en un proceso espiralado, se delinean según las cuatro fases o momentos que describe M.Artigue, en "Ingeniería Didáctica" Los análisis preliminares

1- La concepción y el análisis a priori.
2- Experimentación.
3- Análisis a posteriori.

Para implementar esta etapa de la investigación, que consistió en el desarrollo de la unidad didáctica elegida "Dependencia e independencia lineal", la ejercitación sobre los temas, la evaluación del desarrollo del trabajo áulico y la evaluación final del aprendizaje del mismo, elaboramos guías de trabajos prácticos tomando como base las utilizadas actualmente en los cursos, donde agregamos algunos problemas tendientes a contribuir a una correcta manipulación de los conceptos aprendidos.
Durante las clases los alumnos abordaron la resolución de los problemas trabajando en grupos con la presencia constante de los docentes, en estas instancias se pusieron de manifiesto las dificultades que ellos presentan para la comprensión de los conceptos, tanto desde la abstracción como de su aplicación.
Los errores que cometen los estudiantes, observados tanto en el planteo de los problemas, como en las distintas etapas de la resolución pueden clasificarse primariamente como:
I-Errores que tienen su origen en un obstáculo II-Errores que tienen su origen en ausencia de sentido del concepto.
Entre los del primer tipo, podemos enumerar:

- Identificación de los elementos intervinientes
- Inseguridad en el trabajo algebraico

En los del segundo tipo se encuentran:
- Conceptos previos: linealidad, combinación lineal.
- Generalización de concepciones aprendidas en casos particulares

Ejemplo:

1.- Dados los vectores de R^3 $S = \{\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}\}$

Determinar a) Si forman un conjunto L.I. o L.D.

b) Como consecuencia del ítem a, el vector $\mathbf{u}$ depende linealmente de los restantes vectores de S

c) Existe algún subconjunto de S que sea L.I.? Justifique.

2.- Dados los vectores de R^5 $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{d}; \mathbf{w}\}$

Determinar a) Con los vectores del conjunto escriba la combinación lineal del vector cero

b) Indique para cuales valores de los coeficientes es válida la igualdad planteada en a).

c) Si alguno de los valores encontrados es distinto de cero, que puede decir respecto del conjunto de vectores dado?. Y si son todos nulos?

d) Exprese al vector $\mathbf{b}$ como combinación lineal de los restantes vectores del conjunto.

3.- Dados los polinomios $p_1(x); p_2(x); p_3(x)$

i) Responda los ítem del problema 2, sustituyendo la palabra vector por polinomio.

ii) Obtenga un subconjunto del dado, que sea L.I. Es único? Justifique.

En el primer ejercicio, el abordaje es mayoritariamente geométrico:
- Representan gráficamente los vectores
- Relacionan Dependencia lineal exclusivamente con coplanaridad
- Resuelven en forma geométrica.

En el segundo se evidencian las dificultades relacionadas con la comprensión de los conceptos, a saber:
- Significado de combinación lineal
- Identificación de los coeficientes
- Interpretación de la consigna solicitada en c
- No expresa correctamente la respuesta.

Respecto del tercer problema, observamos que en general, se ponen de manifiesto las dificultades referidas a la generalización de los conceptos:
- Relación entre diferentes entidades matemáticas (vectores-polinomios)
- Tendencia a restringir la consigna (buscan el mayor conjunto L.I.), lo que los lleva a concluir en forma incorrecta.

Durante el desarrollo del trabajo áulico, promovemos la consulta del material bibliográfico, como así también sus apuntes personales. Contrariamente a lo esperado,
en su gran mayoría no representa un facilitador de la tarea, ya que en muchas oportunidades no son capaces de decodificar la información impresa, sino que su hábito es buscar en el libro o sus apuntes sólo las recetas para la resolución de problemas similares. Al no encontrar una situación lo suficientemente parecida, optan por la lectura completa del párrafo, para lo cual recurren permanentemente al docente tratando que éste decodifique lo que está escrito posibilitando así su comprensión.

Comentarios finales

Analizando los errores que habitualmente cometen nuestros alumnos, encontramos algunos factores que pueden avanzar como explicativos de los mismos, estos nos da la posibilidad de reflexionar sobre la necesidad de modificar nuestra propia práctica en pos de la superación de los mismos. En la actualidad, los alumnos llegan a la Universidad con muchas expectativas y muy poca preparación, esta mezcla puede ser explosiva, desembocando en una prematura deserción. Si bien es cierto que en muchas facultades, incluida la nuestra se trabaja seriamente en el ingreso, es también necesario que los docentes de las asignaturas de primer año nos involucremos en esta temática.
Habiendo realizado este trabajo, en forma sistemática y registrando todos los elementos relevantes intentamos proponer algunas alternativas didácticas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Luego de haber detectado los obstáculos, utilizar estrategias pedagógicas tendientes a convertirlos en favorecedores del aprendizaje.
- Diseñar trabajos prácticos a desarrollarse en las aulas, que contemplen los obstáculos detectados promoviendo así su superación.
- Tomar la práctica propuesta por la bibliografía sólo como un “refuerzo” tendiente a mejorar la técnica.

En muchas ocasiones, se sostiene que la práctica es el soporte para el aprendizaje abstracto de la teoría, sin embargo, muchas veces la práctica se convierte en un repertorio de ejercicios o problemas tipo y rutinarios de aplicación de una teoría que no se ha incorporado y que conduce al alumno a engañarse o confundirse sobre sus conocimientos “¿para qué justificar o explicar con un teorema lo que hice bien?”
“*No hay nada tan práctico como una buena teoría” Einstein*. Sin embargo, una de las actitudes que prevalece en nuestros estudiantes es la de ofrecer una gran resistencia al aprendizaje de los fundamentos teóricos en las distintas temáticas abordadas, este hecho se manifiesta en la gran cantidad de alumnos que fracasan en las evaluaciones que contienen aspectos teóricos de los temas a evaluar.

A modo de conclusión

Utilizar la clase tradicional, como un tiempo destinado al desarrollo en velocidad de la gran cantidad de temas del programa, teniendo como finalidad más importante el “avance” y en lo posible la culminación del mismo no contribuye, al menos, en los primeros semestres, a los objetivos de la enseñanza en su más alto nivel, que implica cooperación con el estudiante de modo de ayudarle en ese desarrollo a “pensar”, es necesario despertar entusiasmo, buenos hábitos para aprender, buenas características de juicio crítico, un cabal razonamiento lógico-formal y anhelo por aceptar el desafío que se plantean en diferentes contextos y los nuevos problemas en la vida profesional.

Debemos cambiar la premisa “completar el programa de la asignatura” y ocuparnos de introducir metodologías que ayuden al estudiante a “aprender a aprender”,que posibiliten el aprendizaje significativo de los conceptos, que venzan los obstáculos que se interponen, reconociendo en ellos una oportunidad para la consecución del objetivo principal de la enseñanza en el nivel superior, cual es brindar al estudiante las herramientas necesarias para que pueda convertirse en su propio instructor para toda la vida. La idea no es instalar en el alumno “certezas” sino “dudas” que lo lleven a investigar, consultar, pensar y repensar un concepto, inducirlo en la necesidad de su prueba, demostración y justificación teórica.

En el transcurso de la experiencia, observamos que la comprensión de los conceptos trabajados fue lograda ya que los estudiantes fueron capaces, en su mayoría, de generalizar y transitar del pensamiento geométrico elemental al pensamiento algebraico, logrando así un acercamiento al pensamiento abstracto, imprescindible para la futura aplicación en diversos contextos. Es importante referir que los aprendizajes logrados respecto de la dependencia e independencia lineal facilitaron la comprensión en los temas subsiguientes del Algebra Lineal. Es posible que con estas premisas no logremos el desarrollo completo del programa de la asignatura, pero habremos dotado a nuestros estudiantes de las habilidades necesarias para estudiar en forma autónoma los temas que no se alcancen a desarrollar, así como que puedan abordar otros de su interés en forma independiente y provechosamente.

Se hace necesario, entonces, una reformulación del contrato didáctico, que promueva estas actividades de trabajo áulico. Para ello es imprescindible que los docentes interpretemos correctamente las consignas y cambiemos nuestra actitud adoptando las estrategias que promuevan el aprendizaje significativo de conceptos fundamentales de las asignaturas y generen las habilidades necesarias para el aprendizaje autónomo.

En ello estamos trabajando.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R; Moreno, L. y Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1996) *L´enseignant dans la theorie des situation didactiques*. En Actes De Ville Ecole Et Universite D´Ete Didactiques De Matematyques. Francia: IREM .

Chevallard,I.(1997).La Transposición didáctica. Buenos Aires: AIQUE.G

Diaz Barriga, F. y Hernandez Rojas, G (1997). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: Mc. Graw Hill.

Kilpatrick, J. (1995). *Staking claims*. Nordic studies in mathematics Education.Roskilde University, Dinamarca: IMFUFA.

Saldaña, L.A. (1995).The notions of linear independence/dependence: a conceptual analysis and students difficulties. Tesis de maestría. Concordia Univerisity. Montreal, Quebec, Canadá.

Sierpinska, A.y Hillel, J. (2000). *On some aspects of stundents´thinking in linear algebra.* Research on the teaching and learning of linear algebra conducted at the Concordia University. Montreal Canadá.

Vergnaud, G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*. Recherche en didactique des mathematiques 10 (23) : 133 -170.

ANÁLISIS DE LOS ESQUEMAS DE TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Angelino Feliciano Morales, José Luis Ramírez Alcántara
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
af_morales@hotmail.com, jlram_bcn@yahoo.es
Campo de investigación: modelos mentales. Nivel educativo: superior
Palabras clave: esquema, lógica proposicional, traducción de enunciados, lenguaje natural

Resumen
En los cursos de Lógica, dentro de los programas educativos de Informática y Sistemas Computacionales, se han identificado diversos tipos de problemas, uno de ellos es la traducción de enunciados del Lenguaje Natural (LN) al lenguaje de la Lógica Proposicional (LP). Diversos autores han reportado los problemas que tienen los estudiantes para comprender los conectivos lógicos y las confusiones que surgen al identificarlos. En este artículo se describen los resultados de una investigación que trata de responder a la pregunta: ¿Cuál es el procedimiento o esquema mental que utilizan los estudiantes para traducir un enunciado del LN al lenguaje de la LP? En la investigación se utilizó el concepto de esquema de Efraim Fischbein y se entrevistaron a estudiantes de buen desempeño. Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron dos esquemas para hacer la traducción. Unos priorizando la identificación de las proposiciones y otros priorizando la identificación de los conectivos.

Introducción

Los programas de Informática y Sistemas Computacionales son relativamente jóvenes dentro del sistema educativo mexicano y los problemas que tienen los estudiantes al abordar los cursos de Matemáticas Discretas y Lógica Computacional se han estudiado poco. En la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México se está desarrollando una línea de investigación educativa sobre los problemas de enseñanza-aprendizaje de la Lógica y el presente trabajo se inserta, en particular, en la problemática de la traducción de enunciados del Lenguaje Natural (LN) al lenguaje de la Lógica Proposicional (LP), donde algunos de los reportes de investigación han señalado que los estudiantes de bachillerato y primeros años de licenciatura tienen problemas en la traducción de enunciados (Amor, 1994; Almstrum, 1999).
Las investigaciones reportadas sólo identifican las dificultades que tienen los estudiantes o bien proponen alguna metodología para subsanar estas deficiencias en la enseñanza de la lógica. Con la finalidad de profundizar en la comprensión de la problemática detectada en este trabajo se "analizan los esquemas mentales que tienen los estudiantes de buen desempeño en la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP", utilizando el concepto de esquema de Efraim Fischbein (Fischbein, E. 1999).

Antecedentes

En los cursos de lógica que se imparten en los programas educativos de Informática, Sistemas Computacionales e Ingeniero en Computación, se ha puesto énfasis tanto en el aspecto semántico como en el aspecto sintáctico de la lógica, es decir, se da mayor atención a la evaluación de fórmulas a partir de las tablas de verdad o se privilegia el uso de sistemas de reglas para hacer deducciones. Dichos aspectos se abordan tanto en la parte de Lógica

Proposicional como en la parte de Lógica de Predicados. Si bien estos enfoques son necesarios, se ha puesto poca atención al problema de traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP, aunque existen textos donde se muestran varios ejemplos y se plantean diversos ejercicios sobre el tema.

En particular en los cursos de Lógica Informática que se han impartido en el Programa Educativo de Ingeniero en Computación en la Unidad Académica de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Guerrero, se han identificado diversos problemas en el aprendizaje de la Lógica Proposicional los cuales se han divido en dos grupos:

- ♦ La traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP y
- ♦ La aplicación adecuada de las reglas de inferencia o equivalencia en el proceso deductivo.

En el primer grupo se ha observado que los estudiantes tienen problemas para:

- ➢ Identificar proposiciones simples.
- ➢ Identificar conectivos implícitos
- ➢ Determinar el alcance de los conectivos lógicos.
- ➢ Interpretar algunos vocablos no comunes del LN.

En el segundo grupo el problema fundamental es la identificación de reglas de inferencia o de equivalencia que deben ser aplicadas en el proceso de deducción de una fórmula dada a partir de un conjunto de premisas, así como la falta de estrategias de demostración.

El problema de traducción de enunciados se ha observado a través de diversos cursos, en los cuales ha sido una constante y se ha convertido en un problema nodal. Además se sabe que el LN tiene una riqueza expresiva muy amplia y que no se puede capturar con el lenguaje restringido de la LP, de tal forma que existen varias expresiones del LN que no pueden ser traducidas. La ambigüedad propia del LN y la evolución constante de dicho lenguaje son factores que influyen y hacen del proceso de traducción una labor complicada. Estos hechos hacen del tema, desde el punto de vista educativo, un problema que debe ser abordado con detenimiento y se deben hacer estudios profundos, tanto desde el punto de vista teórico como empírico para comprenderlo mejor.

Estado del arte

A continuación, se describen los trabajos realizados por algunos investigadores sobre la enseñanza de la LP, en los que señalan algunas de las dificultades que tienen los estudiantes para identificar los conectivos lógicos en enunciados del LN.

Estas investigaciones se han clasificado en dos grupos, a partir del enfoque y de los resultados obtenidos:

- ♦ Investigaciones respecto a las dificultades para identificar conectivos lógicos: D'Amore, B. y Plazzí, (1990); Amor, J. A. (1994); August – Rothman, P.,(1998); Almstrum, V. (1999); Selden, J. y Selden, A. (1996).
- ♦ Propuestas para mejorar el proceso enseñanza - aprendizaje de la traducción de enunciados: Ferro, E. y Circolo Didattico di Piossasco, (1991); Juárez, M. y Ramírez, J. L. (1997); Flores, R. B. (1999).

Los trabajos de investigación citados en el primer bloque se caracterizan por describir las dificultades que tienen los estudiantes respecto a la identificación de los conectivos lógicos. Mientras que en el segundo bloque de los trabajos revisados, además de hacer la descripción de los problemas que tienen los estudiantes al realizar la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP, proponen algunas alternativas que deberían tomar en cuenta los docentes, en sus estrategias didácticas, para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Marco teórico de la investigación

Para realizar la investigación fue necesario adaptar la definición de "esquema" propuesta por Efraim Fischbein en su trabajo "Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning" (1999), la cual establece que: esquema es un programa que permite al individuo, "registrar", "procesar", "controlar" e "integrar" mentalmente la información para reaccionar de manera eficiente ante los estímulos del medio ambiente. Además, Fischbein sostiene que estas acciones mentales son siempre de algún modo similares a un programa de computadora, porque consisten en una secuencia de pasos establecidos que conducen hacia un objetivo determinado.

Metodología de la investigación

La metodología que se utilizó en la investigación para identificar los esquemas mentales que utilizan los estudiantes con mejor desempeño en la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP se caracteriza por ser de tipo cualitativo y descriptivo.
Para obtener la información se diseñaron cuestionarios y se realizaron entrevistas. Dichos instrumentos se aplicaron a dos muestras de estudiantes del Programa Educativo Ingeniero en Computación de la Unidad Académica de Ingeniería de la siguiente manera: a la primera se le aplicó el cuestionario y la entrevista un semestre después de haber terminado su curso de Lógica Informática y a la segunda muestra se les aplicó el cuestionario y se entrevistaron inmediatamente al finalizar su curso semestral de la misma asignatura.

Resultados

En este reporte se presenta la información obtenida a través del cuestionario aplicado a los estudiantes de buen desempeño que participaron en la investigación. El cuestionario constó de varias preguntas relativas a la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP. El propósito de la investigación era analizar la forma en que los estudiantes realizan la traducción de enunciados del LN al lenguaje lógico. El resultado del análisis del cuestionario es la identificación de dos subeesquemas mentales respecto a la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP. Estos subesquemas mentales se identificaron en las respuestas que los estudiantes proporcionaron a través del cuestionario al responder la pregunta: ¿cómo realizas la traducción de enunciados?
A continuación se citan las respuestas de dos estudiantes donde se ilustra los esquemas parciales identificados.
El estudiante E_2 pertenece a la primera muestra y sus respuestas son:

1. La traducción la considero sencilla una vez obtenidos los conectores y las proposiciones.
2. Lo que hago es volver a leer el enunciado.
3. Y sólo voy escribiendo las proposiciones y conectores en el orden que el enunciado me indique.

Nota: en las oraciones (1, 2 y 3) se puede apreciar aunque no de forma evidente parte de la secuencia de acciones de un esquema mental respecto a la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP que más adelante se define como (esquema mental tipo A). La oración (2) corresponde a la acción mental registrar la información. La oración (1) se puede ubicar en la acción mental procesar la información. La oración (3) se colocaría en la acción mental integrar la información y respecto a la acción mental controlar la información no se tiene información.

El estudiante E_5 pertenece a la segunda muestra y sus respuestas son:

1. La traducción de enunciados es un poco más fácil una vez que se tienen identificadas las proposiciones y los conectivos.
2. Para hacer la traducción leo nuevamente la frase deteniéndome donde finaliza cada una de las proposiciones que ya tengo definidas.
3. Le pongo el símbolo del conector que ya tengo definido y así hago con toda la frase.
4. Si la frase es corta y sólo usa dos proposiciones no hay gran problema en la traducción.
5. Pero si la frase es larga puede ser que haya más de dos premisas y para irlas uniendo sólo se coloca el conector adecuado dependiendo de lo que digan las palabras que siguen después del punto que separa a las proposiciones

Nota: en las oraciones (1, 2, 3, 5) se observa que existe mayor evidencia de la forma en que el estudiante identifica la secuencia de acciones que tiene el esquema mental respecto a la traducción, el cual se define más adelante como: esquema mental tipo B). La oración (2) se debe ubicar en la acción mental registrar la información. Las oraciones (1 y 3) corresponden a la acción mental procesar la información. Las oraciones (4 y 5) se pueden ubicar en la acción mental integrar la información y con relación a la acción mental controlar la información tampoco se tiene información.

Los subesquemas mentales identificados en el cuestionario se complementan con la información obtenida en las entrevistas en las cuales se obtuvo información a través de dos ejercicios y realizando las siguientes preguntas: ¿Cómo identificas los conectivos lógicos estándar en un enunciado? ¿Cómo identificas los conectivos lógicos implícitos en un enunciado? ¿Cómo identificas las proposiciones simples en un enunciado? ¿Cómo realizas la traducción de un enunciado?

Las respuestas a estas preguntas permiten la identificación de los siguientes esquemas mentales sobre la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP.

Esquema mental tipo A	Esquema mental tipo B
1. Leer el enunciado	1. Leer el enunciado
2. Identificar conectivos	2. Identificar proposiciones
3. Identificar proposiciones	3. Identificar conectivos
4. Asignar variables a las proposiciones	4. Asignar variables a las proposiciones
5. Construir la fórmula bien formada	5. Construir la fórmula bien formada

Conclusiones

Las conclusiones respecto a la identificación de esquemas mentales que tienen los estudiantes con mejor desempeño académico en la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP, se enuncian a continuación:

♦ El resultado del trabajo de investigación muestra una descripción parcial respecto a la identificación de esquemas mentales de traducción conforme a la definición de Efraim Fischbein. Los esquemas mentales utilizados por los estudiantes muestran consistencia con la teoría establecida, porque se identifica una secuencia de pasos en las acciones mentales realizadas en la traducción de enunciado del Lenguaje Natural al lenguaje de la Lógica Proposicional.

♦ El resultado de la investigación permitió identificar dos esquemas mentales sobre la traducción de enunciados. La diferencia entre estos esquemas mentales es que: en el esquema mental tipo A se identifica primero los conectivos lógicos mientras que en el esquema mental tipo B se identifica primero las proposiciones; el resto de las secuencias son las mismas.

♦ La coherencia mostrada entre la definición de esquema adoptada en el marco teórico del presente trabajo y los resultados obtenidos sobre la identificación de esquemas mentales en el trabajo de los estudiantes con buen desempeño en la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP, se considera como una aportación importante de la investigación en el estudio de los problemas en la enseñanza – aprendizaje de la lógica.

Referencias bibliográficas

Amor, J. A. (1994). Sobre un curso de Análisis Lógico. *Educación Matemática Vol.6 No.2*. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica.

Almstrum, V. (1999). The propositional Logic Test as a Diagnostic Tool for Misconceptions About Logical Operations. *Jl. Of Computers in Mathematics and Science Teaching.* 18(3), 205-224.

August-Rothman, P. (1998). Un Rotundo Quizás: La no Universidad de las Matemáticas y la Lógica. En Quesada, J.F. (ed) (1998). *Matemáticas y Lenguajes: Perspectivas Lógica, Semiótica, Social y Computacional*. Sevilla, España. (Capitulo 2: 19-33).

Clark M. J. y col. (1997). Constructing a Schema*:* The case of the Chain Rule. Published: *Journal of Mathematical Behavior, 14*(4), 1997.

Davis, G. E. & Tall, D.O. (2000). What is a Scheme? WWW-page. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002d-davis-schemes.pdf [fecha de consulta: 08-12-2004].

De Vries, D. J. (2001). RUMEC/APOS. Theory Glossary. http://www.analytictech.com/mb870/schema.htm [fecha de consulta:20-03-05].

Domínguez, J. M. y col. (2003). Esquemas de Razonamiento y de Acción de Estudiantes de ESO en la Interpretación de los Cambios Producidos en un Sistema Material. *Enseñanza de las Ciencias*. 2003, v. 21, núm. 2. pp. 199 – 214.

Dubinsky E. y col. (1996). Understanding the Limit Concept: beginning with a Coordinated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior,* 15, 2 (1996) pp. 167-192

D'Amore, B. y Plazzi, P. (1990). La didattica dei connettivi logici: alcune consideración. L'Isegnamento della matematica e delle Siencie integrate, vol. 14, abril 1990, p. 369 – 398.

Ferro, E., Circolo didattico di piossasco (TO), (1991). Sull'Isegnamneto-apprendimento di alcuni connetivi. *L'Isegnamento della matematica e delle Siencie integrate, vol. 14, marzo, p. 260-271.*

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3): 11-50.

Flores, R. (1999). La enseñanza de los conectivos lógicos., Taller de didáctica de la Lógica, *Videoconferencia interactiva*.

Juárez, M. y Ramírez, J. L. (1996). La actividad, teoría viable para apoyar el desarrollo de habilidades en adultos jóvenes. *Memorias del IV Congreso de investigación y desarrollos educativos en el SNIT* p 24.

Selden, J. & Selden, A. (1996). The Role of Logic in the Validation of Mathematical Proofs. *Dimacs Symposium: teaching logic and reasoning in an illogical world* http://dimacs.rutgers.edu/Workshops/Logic/cornellprogram.html]. [fecha de consulta:03-02-05].

LA CENTRACIÓN EN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD BASADOS EN EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Greivin Ramírez Arce, Esteban Ballestero Alfaro
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
greivinra@gmail.com, estebanballestero@yahoo.es
Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad y estadística. Nivel educativo: básico
Palabras clave: equiprobabilidad, centración, razonamiento proporcional

Resumen
Este documento reporta los resultados de un estudio exploratorio aplicado a estudiantes de secundaria que presentan problemas de equiprobabilidad y centración en ejercicios de probabilidad basados en el razonamiento proporcional. Los problemas propuestos a los estudiantes han sido analizados por Green, Papinni, Fischbein y Gazit en investigaciones previas, de esta manera, nuestro aporte consiste en proponer una extensión a los resultados obtenidos por estos autores a partir de marco conceptual SOLO Taxonómico propuesto por Biggs y Collins (1982), que consiste en cinco niveles presentes en el ciclo de aprendizaje de una persona dentro de cada uno de los estadios de Piaget.

Introducción

A través de la historia se han realizado diversas investigaciones de cuestionarios de probabilidad diseñados por Green, Papinni, Fischbein y Gazit (en Cañizares, 1997), y que han sido aplicados a públicos de diferentes niveles. Como parte de los análisis de estos cuestionarios se pudo notar que las dificultades que muestran los estudiantes en temas de probabilidad, llama la atención aquellos casos en los que los estudiantes presentan deficiencias en la resolución de problemas que involucran el pensamiento proporcional, pues como mencionan Garfiel & Ahlgren (1988):

"Una variedad de los estudios sobre desarrollo cognitivo de los estudiantes de nivel medio superior indica que posiblemente la mitad de ellos no podían pensar de acuerdo con el nivel de las operaciones formales. Por ejemplo, no controlan completamente la proporcionalidad".

Lo que quiere decir que a nivel de preparatoria (estudiantes entre 15 y 17 años) se presenta deficiencias en cuanto al pensamiento proporcional, pues exige el desarrollo de operaciones formales. Por ello, presentamos una investigación cualitativa donde queremos confirmar si los fenómenos de centración y equiprobabilidad se manifiestan en un grupo de estudiantes de tercer grado de una escuela pública secundaria, ubicada en el Distrito Federal de México, en el 2004 al resolver problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional.

Con base en el análisis de resultados del informe Green, además de las conclusiones obtenidas por el cuestionario aplicado en años anteriores a estudiantes mexicanos, se presentan los siguientes supuestos:

- Los estudiantes al resolver problemas relacionados con el pensamiento proporcional no toman en cuenta el espacio muestral.
- Los estudiantes presentan deficiencias en el manejo aritmético de relaciones de orden de números racionales.
- Los estudiantes se centran en aspectos del dibujo de la situación, en problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional Para la recolección de datos se aplicó un cuestionario con 13 problemas. De los 25 estudiantes a los que se le aplicó el cuestionario 13 son hombres y 12 son mujeres, el promedio de la edad de las mujeres es de 14.42 años y el de los hombres es de 15,31 años. Además, 15 estudiantes dicen tener conocimientos básicos en probabilidad, cuya edad promedio es de 15,13 años. Cuatro

estudiantes afirman no tener conocimientos previos, y su edad promedio es de 15 años, no obstante, todos han recibido formación básica de probabilidad y razonamiento proporcional como parte del currículo escolar.

Método

El cuestionario que se aplicó consta de 13 problemas de probabilidad que involucran pensamiento proporcional. Las preguntas (problemas) del cuestionario se dividieron en 4 bloques: El bloque 1 lo conforman las preguntas de la 1 a la 4 que son de selección única. El bloque 2 está compuesto por las preguntas de la 7 a la 10 en las que se pide argumentación de sus respuestas. El tercer bloque contempla las preguntas 5, 6,11 y 13 que son de juegos y finalmente la pregunta doce pertenece al bloque 4.

Durante la aplicación del cuestionario, se les pidió a los estudiantes que realizaran todas las anotaciones posibles en el documento, con el fin de acceder a las expresiones de sus estrategias o de técnicas de solución implementadas en cada problema. Los estudiantes contaban con un tiempo aproximado de 40 minutos para resolver la prueba, pero durante la aplicación del cuestionario la mayoría requirieron menos tiempo.

Para analizar las repuestas brindadas por los estudiantes se tomó en cuenta el modelo brindado por Biggs y Collis (1982), *SOLO Taxonómico* (Estructura de los Resultados de Aprendizaje Observados) que consiste en cinco niveles presentes en el ciclo de aprendizaje de una persona dentro de cada uno de los estadios o modos de Piaget. Estos niveles son: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y Abstracto Extendido. Estos autores mencionan que el nivel Abstracto Extendido se presenta en la etapa final de cada estadio del ser humano y que el alcance satisfactorio del mismo hace que el individuo de manera simultánea forme parte de nivel Preestructural del nuevo estadio. Brindan principal importancia a los tres niveles intermedios (Uniestructural, Multiestructural y Relacional) que los clasifican dentro de la etapa destino en el desarrollo de cada estadio.

Al ser la población en estudio jóvenes de secundaria entre 14 y 15 años de edad, según Piaget, éstos estudiantes pertenecen al estadio Formal, aunque menciona que el alcance de este estadio variará con respecto a la formación de cada individuo.

La importancia de este modelo es que puede ser utilizado para evaluar la calidad del aprendizaje o un conjunto de objetivos del currículo. De esta forma, se adapta el modelo SOLO con las características particulares de cada nivel, con el fin de clasificar las respuestas brindadas por los estudiantes.

Nivel	**Características**
Preestructural	- Predomina la noción de probabilidad subjetiva. - Los análisis se basan en la experiencia. - Se consideran los eventos equiprobables
Uniestructural	- Fijan su análisis en un rasgo particular de los objetos del experimento.
Multiestructural	- Toman en cuenta todos los elementos o datos presentes en el problema, pero no son capaces de establecer relaciones entre estos. - Predicen las probabilidades en forma intuitiva de los eventos, pero no logran asignar un valor numérico a esta probabilidad.
Relacional	- Son capaces de calcular la probabilidad de los eventos - Pueden comparar probabilidades estableciendo relaciones de orden
Extensión a los Abstracto	- Toman en cuenta la variación y la incertidumbre.

Tabla 1. Marco conceptual

Resultados y Análisis

Todos los bloques de preguntas formulados en el cuestionario utilizado en esta investigación poseen una dependencia entre sí, que le permite al investigador proveerse de una información detallada, variada y completa que sustenten los resultados obtenidos. Sin embargo, seguidamente se exponen los resultados de tres preguntas que han sido consideradas como las más representativas e ilustrativas para el lector.

Las preguntas que conforman el bloque 3 incorporan algunos elementos que son familiares para los estudiantes producto de su experiencia de vida como la edad, la inteligencia y el sexo, con el fin de determinar si ellos consideran que estas variables influyen directamente en los resultados probabilísticos de fenómenos aleatorios.

En la pregunta 5 , el 16% de la población en estudio mencionó que la edad es un factor fundamental para ganar un juego, de esta manera se muestra que los estudiantes centran su atención en una característica particular del individuo, dejándose influenciar por experiencias adquiridas en la niñez, como por ejemplo cuando juegan con sus hermanos o amigos mayores, pero no perciben que por lo regular los juegos en que ganan los mayores, son aquellos que requieren de una destreza física y no de un fenómeno aleatorio que depende del azar, pero no solo estos estudiantes poseen una concepción errónea, sino que de los 20 estudiantes que contestaron correctamente, tres de ellos proporcionan argumentos inadecuados tales como: “es suerte”, “no van a ver si sacan una blanca o negra” y “por ser más grande tiene mejor pensamiento”, lo que suma un 28% de respuestas incorrectas.

La pregunta 6 representa una situación que frecuentemente la utilizamos para hacer algún tipo de sorteo. En esta pregunta se pretende determinar si los alumnos están contemplando el espacio muestral, centran su atención en el sexo y si además el hecho de que se anoten los nombres de los estudiantes en papeles, se mezclen en un sombrero y el que haya sido el profesor quien realiza la actividad, representan situaciones que de alguna manera el estudiante piense que pueden afectar directa o indirectamente la probabilidad.

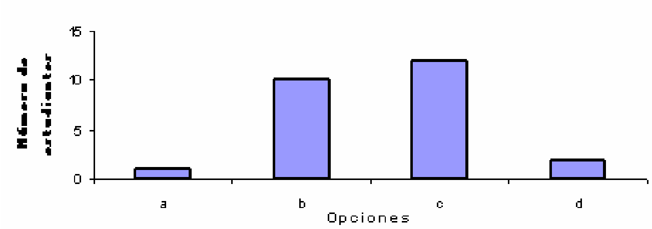
Pregunta 6

Una clase tiene 29 estudiantes de los cuales 13 son chicos y 16 son chicas. Se escribe el nombre de cada estudiante en un trozo de papel. Se colocan los papeles en un sombrero. El profesor toma uno de los papeles sin ver.

Si el profesor pregunta a qué sexo corresponde el nombre del papel, ¿cuál de las siguientes opciones responderías?

a. Es más probable que se trate de un CHICO que de una chica
b. Es más probable que se trate de una CHICA que de un chico
c. Es igual de probable que se trate de una chica que de un chico
d. No lo sé

Gráfico 1.
Respuestas pregunta 6



Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

Interpretación

Se puede notar que 12 estudiantes contestaron incorrectamente al considerar que los eventos son equiprobables, por consiguiente, no contemplaron el espacio muestral. Un estudiante centró su análisis en el sexo al considerar que era más probable que se trate de un chico.

La pregunta 7 posee una intención particular que sugiere al estudiante contemplar el espacio muestral al hacer su análisis. Se puede observar que el número de bolas negras y blancas ha sido modificado entre la caja T y la caja P, pero, sin que esta variación altere la probabilidad de extraer una bola negra de la caja T con respecto a la caja P.

Pregunta 7

Dos cajas contienen bolas negras y blancas de la siguiente manera:

La caja T: 2 negras y 2 blancas

La caja P: 4 negras y 4 blancas

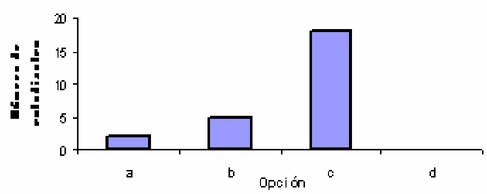
¿Cuál de estas dos cajas (T o P) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola NEGRA?

a. La caja T
b. La caja P
c. La misma posibilidad
d. No lo sé

¿Por qué? ____

Opción correcta: La opción c

Gráfico 2.
Respuestas pregunta 7



Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

Interpretación

Se puede apreciar que dos estudiantes consideraron que la caja donde existe mayor probabilidad de extraer una bola negra es la caja T. Ambos estudiantes argumentaron su elección en el hecho de que hay menos bolas blancas en esta caja, esto permite concluir que su análisis está centrado en las bolas blancas.

Los 5 estudiantes que optaron por la opción b, mostraron un problema de centración en las bolas negras, al fundamentar su decisión en la tesis de que en la caja P hay más bolas negras que en la caja T.

Podría alentarnos la idea de pensar que 18 estudiantes contestaron correctamente, sin embargo, antes de hacer nuestras propias conclusiones, tomemos en cuenta las afirmaciones hechas por tres estudiantes:

- Est 01: En las dos tenemos negras
- Est 06: Por que no vas a estar viendo, puedes sacar una bola blanca o una negra
- Est 08: Por que es la misma, puede ser tanto negra como blanca

Aunque los estudiantes hicieron una buena elección estos tres argumentos muestran que el análisis no es correcto y constituyen la evidencia de que aún persiste en ellos el problema de considerar el evento de extraer una bola negra como un evento equiprobable, que aunque en este caso se cumpla, en sus análisis nunca estuvo presente el considerar el espacio muestral. En las preguntas sobre cajas que se exponen en el cuestionario aplicado, se mantiene un patrón similar donde el número de bolas negras y blancas utilizadas es un número pequeño. La pregunta 9 en particular, aunque no hace uso de cantidades exorbitantes, si utiliza una cantidad que compromete a los estudiantes a buscar una estrategia diferente. Además, se decidió omitir la elaboración de una representación gráfica de las cajas y, con el fin de evidenciar el problema de centración y equiprobabilidad que los estudiantes han venido presentando, intencionalmente se plantea el problema de manera que la caja F a pesar de tener más bolas negras que la caja J, la probabilidad de extraer una bola negra es mayor en esta última.

Pregunta 9

Otras dos cajas también contienen bolas negras y blancas

La caja J: 12 negras y 4 blancas

La caja F: 20 negras y 10 blancas

¿Cuál de estas dos cajas (J o F) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola NEGRA?

a. La caja J

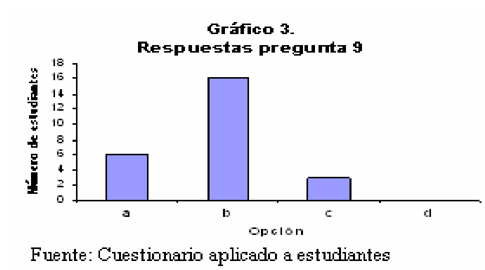
b. La caja F

c. La misma posibilidad

d. No lo sé

¿Por qué? ____

Opción correcta: La opción a



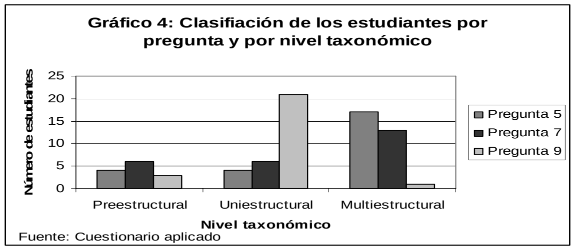
Interpretación

Este ítem muestra un problema fuerte de centración en el rasgo que se pregunta, en este caso las bolas negras. El 64% de los estudiantes (16) están convencidos de que existe mayor posibilidad de extraer una bola negra de la caja F, sustentados en la idea de que esta caja posee más bolas negras que la caja J. De los 6 estudiantes que hicieron la selección correcta, ninguno dio un buen argumento que justificara adecuadamente la solución propuesta al problema, más bien, centraron su análisis en las bolas blancas al considerar la caja J como la caja que menos bolas blancas. Finalmente los restantes 3 estudiantes prefirieron considerar equiprobale el evento de extraer una bola negra. Un dato importante de rescatar es que ninguno de los estudiantes intentó hacer una representación gráfica de las cajas y en ninguna de las 13 preguntas que se planteó en el cuestionario se establecieron las razones de probabilidad correspondientes para hacer las comparaciones pertinentes.

Discusión

Los datos expuestos en la sección anterior, proporcionan un panorama de las deficiencias que los estudiantes de secundaria de este nivel, poseen al tratar de resolver problemas sobre probabilidad que involucren pensamiento proporcional. La siguiente tabla muestra la clasificación de los estudiantes dentro de los diferentes modos propuestos en el modelo Taxonómico SOLO, considerando las destrezas mostradas por los estudiantes en la investigación de acuerdo con la tabla1:

Tabla 2. Clasificación de los estudiantes por pregunta



Interpretación

Se puede apreciar que los estudiantes demostraron no ser capaces de plantear las razones de probabilidad, por lo tanto se estancaron abajo del modo multiestructural. Los mejores estudiantes apenas son capaces de contemplar todos los rasgos particulares de los objetos en estudio dentro de sus análisis y sus conclusiones son asertivas pero sin realizar ningún cálculo. Una cantidad significativa de estudiantes se encuentran apenas en la etapa preestructural y uniestructural, por ejemplo el resultado de la pregunta 9 constituye un importante insumo. La tendencia de los estudiantes a obviar el espacio muestral, centrar sus análisis en un rasgo particular del objeto en estudio o su exceso de confianza en la experiencia, constituyen concepciones erróneas muy marcadas y que se deben erradicar, más desalentadora es esta noticia cuando sabemos que muchos de los estudiantes ya han llevado algún curso sobre probabilidad. Otro elemento importante de resaltar es que en las preguntas que no aparecía una representación gráfica de la situación, los estudiantes no intentaron elaborarlo por su cuenta propia.

Los resultados de esta investigación ofrecen un punto de partida y un reto para los docentes que enseñen probabilidad en la secundaria. Las propuestas didácticas para enseñar probabilidad deben estar orientadas a corregir las concepciones erróneas como la centración, la equiprobabilidad y las creencias basadas en la experiencia, a través de situaciones cotidianas que los encamine hacia desarrollo de competencias no académicas y nuevas formas de razonamiento más científicas y precisas que les permita tomar decisiones asertivas.

Referencias bibliográficas

Biggs, J. y Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. En H. A. H. Rowe (ed). *Intelligence: Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ. USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Cañizares, M. (1997). Influencia del Razonamiento Proporcional y Combinatorio y de Creencias Subjetivas en las Intuiciones Probabilísticas Primarias. Disertación doctorar no publicada, Universidad de Granada, España.

Garfiel, J; Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistic: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Eduacation*. Vol 19, No 1.

Green, D.R. (1988). Children's understanding of randomness: report of a survey of 1600 children age 7-11 years. En R. Davidson & J. Swift (Eds.), *The proceedings of the second international conference of teaching statistics*. Victoria, B.C: University of Victoria.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En Grows D.A (Ed.), *Handbook of research on matemathics teaching and learning*, New York: Macmillan Publishing Company, 465-494.

Agradecemos al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (CINVESTAV) donde se llevó a cabo la investigación y por el apoyo económico. Además, a la Secretaría de Relaciones Exteriores y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de Costa Rica por su apoyo económico (CONICIT).

LA LÓGICA DIALÉCTICA Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Rafael Jiménez Martínez
Facultad de Informática. Universidad de Camagüey. (Cuba)
felojimenez@yahoo.com.mx , rafael.jimenez@reduc.edu.cu
Campo de investigación: epistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: lógica, dialéctica, cálculo

Resumen
La aparición del Cálculo Diferencial fue el resultado de un largo proceso, en el cual influyó decisivamente el desarrollo de otras ciencias, como la Física (Mecánica) y la Astronomía. Estas ciencias planteaban a la Matemática la necesidad de resolver diversos problemas prácticos. Al surgir el Cálculo Diferencial en el Siglo XVIII, es sometido a una crítica encarnizada, que se mantuvo hasta finales del Siglo XIX. En nuestro trabajo haremos un análisis de los aspectos más importantes de este proceso, y sobre la necesidad de desarrollar este análisis a partir de la utilización de los principios de la lógica formal y la lógica dialéctica, y su incidencia en la formación de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial en las carreras de Ingeniería.

La Lógica Dialéctica y el Cálculo Diferencial

La aparición del Cálculo Diferencial fue el resultado de un largo proceso. Para el desarrollo de este proceso, en el Siglo XVII ya se tenían algunas premisas básicas: existencia del álgebra y de técnicas de cálculo; introducción, a partir de los trabajos de Descartes y Fermat, de las matemáticas de las variables y el Método de Coordenadas; conocimiento de las ideas infinitesimales de Arquímedes (método de exhaución); acumulación de métodos empíricos de solución de problemas de cálculo de tangentes, curvaturas, centros de gravedad, valores extremos, etc. En este proceso influyó decisivamente el desarrollo, entre otras ciencias, de la Física (Mecánica) y la Astronomía. Estas ciencias planteaban a la Matemática la necesidad de resolver diversos problemas prácticos. Es así que al surgir el Cálculo Diferencial en el Siglo XVIII, es sometido a una crítica encarnizada. La lucha alrededor de los conceptos fundamentales del cálculo, en particular alrededor del concepto de límite, se mantuvo hasta finales del Siglo XIX. En nuestro trabajo haremos un análisis de los aspectos más importantes de este proceso, y sobre la necesidad de desarrollar este análisis a partir de la utilización de los principios de la lógica formal y la lógica dialéctica, y su incidencia en la formación de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial. Un aspecto básico en el surgimiento del Análisis Matemático lo constituye la creación del Cálculo Diferencial e Integral, el cual surge como una rama de la Matemática, de manera casi simultánea a partir de los trabajos del Matemático y Físico Inglés Isaac Newton (1642-1727) y el Matemático y Filósofo Alemán William Gottfried Leibniz (1646-1716). Describiremos brevemente los aportes de ambos.

Teoría de las fluxiones

En el método de las fluxiones, Newton estudia las magnitudes variables, como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico, y las denomina: *Fluentes*. Todos los fluentes son variables dependientes, y tienen como argumento una variable abstracta, que representa el tiempo. Esta variable fluye uniformemente y con ella se relacionan todos los fluentes.
Posteriormente introduce el análisis de la variación de los fluentes con relación al tiempo, a las que denomina *Fluxiones*. Es decir, que introduce las fluxiones como velocidad de los fluentes. Como las fluxiones son a su vez variables, es decir fluentes, se pueden encontrar las fluxiones de las fluxiones, etc. Si se denota el fluente por y, los símbolos de la primera, segunda, tercera fluxiones, etc., son: $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, etc. Para el cálculo de las velocidades

instantáneas, se requieren variaciones infinitesimales de los fluentes, a los que denomina: *Momentos*. En la Teoría de las Fluxiones, se resuelven dos problemas principales:

1^0 - Determinación de la velocidad del movimiento en un instante dado, según un camino dado (Relación entre las fluxiones, dada la relación entre los fluentes).

2^0 - Determinación del camino recorrido en un instante dado, conocida la velocidad del movimiento (Relación entre los fluentes, dada la relación entre las fluxiones).

El 1er problema representa el problema de la diferenciación de funciones y obtención de las Ecuaciones Diferenciales que permiten expresar fenómenos de la naturaleza.

El 2^0 problema representa el problema de la integración de las Ecuaciones Diferenciales.

Newton obtuvo la mayoría de los resultados de la Teoría de Fluxiones en la década del 60 del Siglo XVII, sin embargo no publicó los trabajos escritos sobre el tema. Incluso, al publicar sus: "Elementos Matemáticos de la Filosofía Natural", publicado en los años 1686-1687, no hace referencia a la Teoría de las Fluxiones, aunque muchos de sus resultados fueron obtenidos a partir de los resultados de esa Teoría.

Cálculo de los diferenciales

Los trabajos de Leibniz reflejan algunas de sus ideas filosóficas. En sus trabajos matemáticos, él se regía sólo por un objetivo: la creación de un método universal de conocimiento científico, llamado por él: La Característica Universal. Según Leibniz, el establecimiento de la Característica Universal y el descubrimiento de las leyes de las nuevas matemáticas resuelven el problema de la demostración científica y elimina las discusiones, pues sólo se requiere producir cálculos. A partir de la solución de problemas de combinatoria, comenzó a trabajar en problemas infinitesimales. A partir de la solución de problemas sobre el trazado de una tangente a una curva, y la utilización del Triángulo de Pascal para su solución, va gradualmente llegando a la idea sobre la posibilidad de sumar las diferencias (dx y dy). Así, paulatinamente, descubre también, al igual que Newton, la relación inversa entre los métodos de trazado de tangentes (es decir, operaciones de diferenciación) y las cuadraturas (es decir, integración). Así el cálculo de Leibniz se formaba, entre otras, de las premisas:

1^0 Resolución de problemas sobre tangentes, el Triángulo de Pascal y el paso gradual de las relaciones entre elementos finitos a arbitrarios y después infinitesimales.

2^0 Problemas inversos de tangentes, sumas de diferencias infinitamente pequeñas, descubrimiento de la inversibilidad mutua entre los problemas diferenciales e integrales.

En sus trabajos, y a partir de sus ideas filosóficas, se esforzó en crear un simbolismo cómodo. Como resultado logra introducir los símbolos dx y dy para los diferenciales, el símbolo $\int$ para las integrales (corrupción de la letra inicial de la palabra *Summa*), e introdujo los términos: diferencial, cálculo diferencial, función, coordenadas, ecuación diferencial, algoritmo y muchos más, así como muchos otros símbolos que también han llegado hasta nuestros días. Leibniz sí publicó sus resultados de manera inmediata, pero no pudo fundamentarlos, aunque mantenía con Newton una correspondencia fluida, y existía, en términos generales, comprensión mutua de sus respectivos trabajos, y reconocimiento sobre la proximidad de sus ideas y deducciones (a pesar de la disputa sobre la prioridad del descubrimiento, que se prolongo incluso después de la muerte de ambos).

Limitaciones de las teorías de Newton y Leibniz

¿Por qué, a pesar de haber obtenido, tanto Newton como Leibniz, resultados de extraordinario valor, pues permitían resolver problemas que ocuparon a los matemáticos durante siglos, no se apresuraron en publicar sus resultados, como en el caso de Newton, o lo hicieron sin una fundamentación adecuada, como en el caso de Leibniz? Existen diversas versiones que intentan explicar este hecho.

José Maza Sancho, de la Universidad de Chile (Maza, 2000), plantea al respecto: *"Entre el descubrimiento de la ley de la gravitación universal y su publicación transcurren mas de dos décadas. ¿Por que Newton dejo pasar veintiún años antes de proclamar el más importante de sus descubrimientos? (...) Un error inicial, cometido en el cálculo debido al valor inexacto del radio terrestre, habría llevado a Newton a abandonar el estudio del problema durante varios anos. Las mediciones geodésicas del abate Picard que llegaron a conocimiento de Newton en una reunión de la Royal Society, le habrían permitido en 1682 corregir sus cálculos y verificar su hipótesis y volver por tanto al problema de la gravitación. (...) esta versión (...) no merece crédito puesto que varias determinaciones bastante exactas del radio terrestre − como las de Snel y de Gunter − estaban en 1666 ya a disposición de Newton. Otra versión pretende que los ataques del insoportable Hooke, que había impugnado algunas conclusiones teóricas de la óptica de Newton y que sin duda reclamaría la paternidad de la ley de la gravitación, habrían descorazonado al ultrasensible y tímido león. Aunque la profunda aversión de Newton a verse envuelto en controversias publicas, explica el atraso de la aparición de muchos de sus escritos, la tardía publicación de su obra maestra tuvo motivos mucho más naturales. Fueron dificultades para solucionar determinados problemas de Cálculo Integral, indispensables pare la formulación definitiva de la ley, las que lo detuvieron. Para dar cuenta del movimiento de una piedra, en caída libre, o de la Luna en su trayectoria, es necesario valorar la atracción total de una esfera homogénea sobre una partícula material situada fuera de ella; cada una de las partículas de la esfera atraerá a la masa de la partícula con una fuerza que variará de una partícula a otra según las distancias y las masas presentes. ¿Cómo sumar esas infinitas acciones para lograr la acción total? Newton logro dominar la dificultad en 1685 demostrando que la esfera actúa sobre la partícula exterior como si toda su masa estuviera concentrada en su centro. La posesión de este teorema, más sencillo y hermoso de lo que el descubridor esperara, le permitió extender su ley, establecida para masas puntuales e irreales, a masas con volúmenes determinados, es decir a los* cuerpos reales".

Antonio J. Durán, en el artículo: *"De cómo se gestó y vino al mundo el cálculo infinitesimal" (Durán, 2000), expresa: "En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, (...). Para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc., que habían ocupado a sus predecesores, bastaba echar a andar estos dos conceptos mediante sus correspondientes reglas de cálculo.(...) El primero en descubrirlo fue Newton, pero su fobia a publicar le hizo guardar casi en secreto su descubrimiento. (...) su primera obra sobre el cálculo "De analyse per aequationes numero terminorum infinitas" (...) fue finalizada en 1669 aunque sólo la publicó en 1711. La segunda obra de Newton sobre el cálculo fue escrita dos años más tarde en 1671 pero esperaría hasta 1737 para ver la luz: !diez años después de su muerte y 66 después de escrita!. Se trata de "De methodis serierum et fluxionum". Una pregunta que casi inmediatamente aflora en la mente es ¿por qué Newton tardó tanto en publicar sus resultados? (...) Newton era consciente de la débil fundamentación lógica de su método de cálculo de fluxiones (...). Este temor también está patente en su obra cumbre: Los Principia, donde optó por un lenguaje geométrico más riguroso −y obscuro− eliminando todo indicio de su cálculo que probablemente usó −se puede encontrar una única mención del mismo en el lema II de la sección II del libro II: la regla para derivar productos(...). Leibniz, más conocido como filósofo, fue el otro inventor del cálculo. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque Leibniz fue* *el primero en publicar el invento. (...) a partir de sumas y diferencias de sucesiones comienza a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales que acabarían en la gestación de su cálculo por el año 1680 y a diferencia de Newton sí lo publica en una de las revistas científico−filosóficas: Acta Eroditorum (...) con el título "Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas". En este artículo de 6 páginas −e incomprensible como él mismo luego reconoce− Leibniz recoge de manera esquemática sin demostraciones y sin ejemplos su cálculo diferencial −"un enigma más que una explicación" dijeron de él los hermanos Bernoulli−. (...)El siguiente artículo de Leibniz se llamó "Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos", también publicado en las Actas Eroditorum en 1686".*

La dialéctica como base para la fundamentación del Cálculo Diferencial

La respuesta a la interrogante sobre la demora en la publicación de los resultados y en la fundamentación, por parte de sus creadores, puede ser la siguiente: la insuficiente fundamentación lógica, tanto de la teoría de las fluxiones de Newton, como de los métodos diferenciales de Leibniz. Ambos trataron de resolver estos problemas dentro de los marcos de la lógica formal: Newton creó el método de las primeras y últimas relaciones (forma primitiva de la teoría de los límites). El método se basa en la consideración de las relaciones "casi - casi nacientes" (primeras relaciones) y las relaciones "casi - casi en desaparición" (últimas relaciones). Leibniz intentó varios procedimientos, entre ellos: tratamiento de los infinitesimales como magnitudes no Arquimedianas, referencias al método de exhaución de Arquímedes, ideas sobre límites no desarrolladas, etc. No obstante, este problema no pudo ser resuelto ni por Newton ni por Leibniz. Sin embargo, el concepto de Límite, esencial en la fundamentación de esta teoría −al cual ambos se aproximaron, lo utilizaron implícitamente, pero no pudieron formular explícitamente− es un concepto no algorítmico, con él no es posible establecer una secuencia de operaciones lógicas que permitan su obtención.

Esta contradicción entre los grandes logros del Cálculo Diferencial e Integral, y la insuficiencia en su fundamentación lógica, le dieron un carácter místico, que perduró durante mucho tiempo. Al respecto, Carlos Marx planteó: "*Así, ellos mismos creían en el carácter misterioso del Cálculo recién descubierto, el cual daba resultados correctos (...) y matemáticamente positivos por una vía incorrecta. De este modo, ellos mismos se mistificaban,…*" (Ribnikov, 1987, p. 232).

En realidad, el problema sólo puede resolverse a partir de la lógica dialéctica, es decir, tomando el objeto de estudio en su desarrollo, en su automovimiento. Por ejemplo, el concepto de Derivada −uno de los conceptos centrales del Cálculo Diferencial e Integral−, puede concebirse como el límite de una sucesión de cocientes, donde el numerador representa la variación de la función, y el denominador representa la variación de la variable independiente. Cada uno de estos cocientes representa la variación media (o promedio) de la función, en el intervalo determinado por la variable independiente. Si analizamos el fenómeno en su movimiento, podemos entonces aplicarle las leyes de la dialéctica: podemos considerar a la Derivada en su unidad dialéctica con cada uno de los cocientes descritos anteriormente, al mismo tiempo como su negación dialéctica, pues los presupone y los supera, ya que mantiene la característica de ser un cociente de incrementos de la función, y adquiere una cualidad que no posee ninguno de ellos: el de ser una variación instantánea. Esta nueva cualidad se alcanza a partir de una acumulación cuantitativa: sucesión de cocientes con intervalos cada vez más pequeños (proceso de paso al límite), la cual da a su vez paso a una nueva acumulación cuantitativa.

Análisis similares pueden realizarse para los demás conceptos básicos del Cálculo. El concepto de límite, y con él la fundamentación lógica del Cálculo Diferencial e Integral, no pudo lograrse hasta el Siglo XIX, con los trabajos de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) mediante sus famosas conferencias, las cuales fueron publicadas en tres libros: "Curso de análisis" (1821); "Resumen de conferencias sobre el cálculo de infinitesimales" (1823) y "Conferencias sobre aplicaciones del análisis a la geometría" (dos tomos: 1826,1828). Estos libros tienen una importancia especial, porque en ellos por primera vez, el Análisis Matemático se construye sobre la teoría de límites. De esta forma, la Ciencia logró una nueva conquista, pues pudo hacer uso nuevamente de la lógica formal, para que, junto con la dialéctica, sirviera como fundamento para esta importante rama de la Matemática.

Asimismo, la fundamentación del concepto de límite permitió solucionar problemas planteados desde la antigüedad, tales como las "paradojas" (Paradoja de Zenón, Aquiles y la tortuga, etc.), que pudieron ser resueltas definitivamente a partir del concepto de Serie.

Incidencia en la Enseñanza de la Matemática

En la enseñanza de la Matemática se presentan dificultades en la formación de los conceptos. En particular en la enseñanza del Cálculo Diferencial se presentan dificultades en la formación de los conceptos básicos: Límite, Derivada, Diferencial.

Estos conceptos es usual que se introduzcan en una Conferencia, en su forma acabada, abstracta, lo cual ocasiona grandes dificultades en su asimilación. La comprensión de la importancia de la dialéctica en la génesis de estos conceptos nos ha permitido concebir clases en las que el alumno pueda apropiarse de la lógica de los conceptos antes de que se estudie su definición. Estas clases contribuyen a que el alumno trabaje en aspectos gráficos, algorítmicos, etc., que incluyen la experimentación en un Laboratorio de Computación.

Por ejemplo, previo a la introducción del concepto de Límite, incluimos clases donde se trabaja en:

- ♦ Estudio de gráficas de funciones, para analizar la tendencia al aproximarse a un punto.
- ♦ Desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico con funciones, cálculo de incrementos de funciones, etc.
- ♦ Cálculo de valores funcionales en puntos próximos a un punto dado.

En particular, en el Laboratorio de Computación, el alumno puede trabajar en dos sentidos:

- ♦ Investigar sobre el comportamiento de una función cuando la variable independiente se aproxima a un valor determinado. (En este sentido sugerimos, entre otros asistentes, el DERIVE, puesto que su graficador posee elementos carentes en otros graficadores, como la posibilidad de cambiar la escala en uno u otro eje, o en ambos (ZOOM), lo que permite que el alumno pueda trabajar en la relación entre la aproximación en el dominio y la aproximación en la imagen, aspecto de gran importancia en la formación de este concepto).
- ♦ Experimentar mediante tablas de valores funcionales sobre la posibilidad de, a partir de una acumulación cuantitativa (selección de valores cada vez menores del incremento), obtener un valor, cualitativamente diferente, en esencia, al valor de la función en el punto al cual se aproxima.

A manera de ejemplo, mostramos algunos de los ejercicios posibles, en los cuales recomendamos la utilización del Tabulador Electrónico EXCEL. (Jiménez, inédito): *Ejercicios Capítulo II.*

Ejercicio. Dadas las siguientes funciones, complete las tablas correspondientes y dé un estimado del comportamiento de la función al aproximarse al valor indicado:

1)

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$				...	?	...			

De manera análoga, previo a la introducción del concepto de Derivada, incluimos clases donde se trabaja en:

- ♦ Cálculo de incrementos de funciones, cocientes de incrementos (razones de cambio), tanto para funciones reales de una variable como para funciones reales de varias variables y funciones vectoriales.
- ♦ Determinación de razones de cambio medias en problemas concretos (Velocidad media, pendiente de rectas secantes a una curva, etc.).
- ♦ Cálculo de límites de razones de cambio medias (casos particulares de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$).

En particular, en el Laboratorio de Computación, el alumno puede experimentar mediante tablas de valores funcionales, en la determinación de razones de cambio medias para valores cada vez más pequeños del incremento. A manera de ejemplo, mostramos algunos de los ejercicios posibles. (Jiménez, inédito): *Ejercicios Capítulo III*.

Ejercicio. Complete las tablas siguientes y dé un estimado del límite correspondiente:

1) $f(x)=3x^2+2x$

$x_0=1$

Δx	0,1	0,01	0,001	...	0	...	-0,001	-0,01	-0,1
$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$				...	?	...			

Después del desarrollo de estas actividades, estamos en condiciones de establecer la definición de Límite, de Derivada, etc., con una mayor comprensión por parte de los estudiantes de la esencia de estos conceptos.

Conclusiones

En este trabajo se muestra como, a pesar de que las leyes de la lógica formal pueden considerarse asimismo como leyes de la Matemática, no puede absolutizarse su uso, pues en ocasiones ellas, por sí solas, no bastan para fundamentar todas las ramas de la Matemática. En particular mostramos cómo, para fundamentar los conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral, que dependen del concepto de Límite, se requiere la utilización de la Lógica Dialéctica, y cómo su comprensión nos ha permitido diseñar el Proceso Docente de forma tal que se produzca una incidencia positiva en la formación de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial.

Referencias bibliográficas

Durán, A. J. (2000). *De cómo se gestó y vino al mundo el cálculo infinitesimal*. Disponible en: http://euler.us.es/~libros/calculo.html

Guetmanova, A, Panov N., Petrov, V. (1986). *Lógica: en forma simple sobre lo complejo*. Moscú: Editorial Progreso.

Guetmanova, A. (1986). *Lógica*. Moscú: Editorial Progreso.

Jiménez M., R. (inédito). Cálculo Diferencial. Texto docente.

Maza S., J. (2000). *Curso Historia de la Astronomía*. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile. Disponible en: http://www.das.uchile.cl/cursos/eh28a.html

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial MIR.

LA ENSEÑANZA DE LA MODELACIÓN EN CLASE DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICAS

Ruth Rodríguez Gallegos
Equipo Informática et Aprendizaje de las Matemáticas (IAM) (Francia – México)
Ruth.Rodriguez@imag.fr
Campo de investigación: modelación matemática. Nivel educativo: medio
Palabras clave: modelación, praxeología, técnica, modelo pseudos -concreto

Resumen
La introducción de nuevos planes de estudio en Francia (2002), muestra la importancia que tiene actualmente la enseñanza y aprendizaje de la modelación, principalmente en disciplinas científicas como Matemáticas y Física. En los programas oficiales y libros del último año de preparatoria se observa la introducción de la noción de ecuación diferencial como objeto de estudio pero también como herramienta para modelar diversas situaciones físicas. En esta investigación, estableceremos un *modelo* del proceso de modelación que constituya una referencia para posteriormente caracterizarlo, desde un punto de vista antropológico, en dos instituciones diferentes: la clase de matemáticas y la clase de física.

Introducción

Esta investigación está motivada por el creciente interés que a nivel mundial, y en particular en Francia, se ha observado en los últimos años de mostrar a los alumnos la utilidad de las Matemáticas en otros dominios de la ciencia.
A nivel mundial el proyecto PISA[††] establece que la cultura matemática es un objetivo de formación del futuro ciudadano del siglo XXI. Esta cultura es definida como "*la capacidad de un individuo a identificar y a comprender el papel jugado por las matemáticas en el mundo*". PISA privilegia los conocimientos y las habilidades de los alumnos para resolver problemas de la vida real ya que fuera del contexto escolar los alumnos serán confrontados a situaciones problemáticas en las cuales deberán hacer uso de sus conocimientos matemáticos. Los nuevos programas oficiales de preparatoria en Francia, puestos en práctica desde el 2002, también destacan el papel de las Matemáticas como disciplina al servicio de otras ciencias. El fin del liceo es la culminación de los estudios secundarios y abre las puertas a los estudios superiores. "*Las carreras en la universidad son naturalmente diversas y ofrece a las matemáticas un lugar variable. Para algunos alumnos, ella será una materia central pero para todos es una herramienta de cálculo y de modelación*" (programa oficial de Matemáticas, p. 64).

La modelación en Matemática Educativa

Una referencia sobre las investigaciones realizadas alrededor de la enseñanza de la resolución de problemas y de la modelación a inicios de los 90's es el trabajo de Blum y Niss (1991). Los autores definen como problema cuando una situación nos conduce a interrogarnos sobre ella y sobre la cual no disponemos de métodos o algoritmos directos para responder a determinadas preguntas. Estos autores distinguen dos tipos de problema: matemáticos y aplicados. Los problemas aplicados, situados desde un inicio en el "*mundo real*" (el resto del mundo fuera de las matemáticas) son de interés en nuestro trabajo El paso entre una situación

[††] Proyecto de los países de la OCDE que estudia, desde 1997, los resultados de los sistemas educativos de 43 países en términos de los conocimientos adquiridos por jóvenes de 15 años en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias.

real hacia la construcción de un modelo matemático es denominado modelación por Blum y Niss en esa época. Esta definición evolucionará en trabajos posteriores. La aparición en foros internacionales, como el Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME) y el Congreso Internacional de la Enseñanza de la Modelación y Aplicaciones (ICTMA)[‡‡], de la modelación como objeto de estudio desde inicios de la década de los 90's hasta nuestros días, es una muestra de la importancia y el interés que ha tomado el tema en la comunidad de Matemática Educativa.

Es importante señalar la existencia del estudio ICMI[§§] 14 "Aplicaciones y Modelación en Matemática Educativa" (Blum, 2002) lanzado, en el 2002, por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI). El estudio tiene como finalidad reflexionar sobre el estado del arte actual de este tema y de proponer direcciones posibles para la práctica y la investigación alrededor de la modelación[***].

Modelo del proceso de modelación

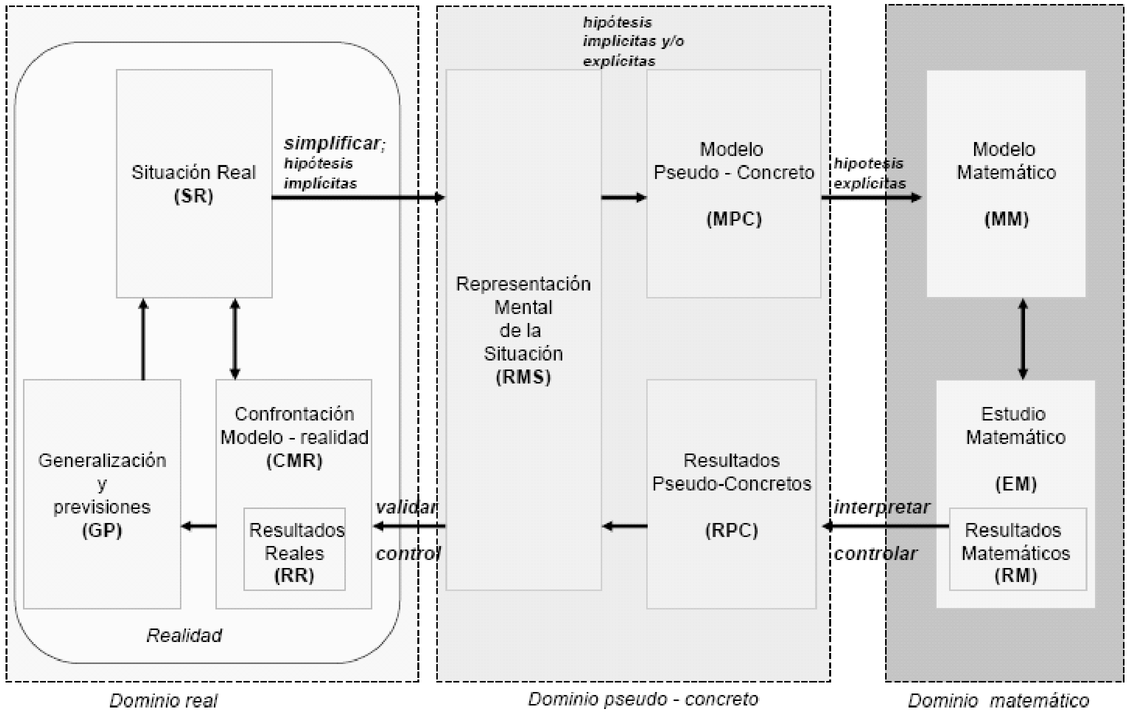
Blum (2002) retoma, en ICMI 14, parte de los elementos teóricos introducidos en su trabajo anterior (Blum y Niss, 1991) pero esta vez precisa que "es común de utilizar el término de modelación matemática en el sentido del proceso completo que consiste a estructurar, modelar, trabajar matemáticamente e interpretar/validar (en ocasiones varias veces)". Un aspecto interesante es la introducción de la etapa de "*modelo real*" como una etapa intermediaria entre la situación real de inicio y el modelo matemático.

Esta misma distinción ya ha sido realizada por Henry (2001) donde este autor distingue la etapa de "*modelo pseudos-concreto*" en la cual una elección de los aspectos pertinentes de la situación inicial con respecto a una pregunta es llevada a cabo, ignorando otros aspectos no relevantes y donde se establecen las primeras hipótesis de manera explícita (la mayor parte del tiempo implícitamente). La existencia de esta etapa intermedia citada por Blum así como por Henry es primordial en nuestro trabajo ya que del punto de vista de la enseñanza permite al alumno pasar gradualmente de una situación abierta (dominio de la realidad) a un modelo matemático preciso (dominio matemático). Otro trabajo importante es el realizado por Borromeo (2006), donde ella propone la incorporación de la etapa de representación mental. Esta es una etapa intermedia entre la situación real y el modelo pseudos concreto. Para Borromeo, en esta etapa es posible describir el tipo de procesos internos con respecto a la imagen mental del individuo durante y después de la lectura de una tarea de modelación relativamente compleja. El objetivo del trabajo de Borromeo es estudiar el proceso de modelación desde una perspectiva cognitiva. A partir de los esquemas de modelación propuestos (Blum 1991 y 2002; Henry, 2001; Borromeo, 2006), estableceremos nuestro modelo del proceso de modelación de referencia para nuestros análisis posteriores. El proceso de modelación de referencia será conformado por 8 etapas las cuales ilustramos a continuación con el siguiente esquema:

[‡‡] Congreso realizado cada dos años desde 1983. Las actas permiten observar una serie de ejemplos de estudios y de contribuciones a este tema en todos los niveles escolares.

[§§] Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, siglas en Inglés).

[***] Una conferencia preliminar fue realizada en Alemania (2004) y el resultado del estudio ICMI 14 está próximo a publicarse. Fecha posible de publicación 28 de noviembre 2006 por la editorial Springer.



Metodología

Nos interesa estudiar el proceso de modelación como objeto de enseñanza así como precisar la manera en la cual este proceso es llevado al sistema escolar, en particular en el último año de estudios en el liceo en Francia. Para ellos realizaremos observaciones en clase de física y matemáticas cuando la noción ecuación diferencial es introducida como una herramienta para modelar diversas situaciones extra-matemáticas.

En términos de Chevallard (1992), consideremos la institución del último año de prepatoria y supongamos que las sub-instituciones Clase de Física y Clase de Matemáticas son diferentes. Establecemos como consecuencia que el tipo de proceso de modelación puesto en práctica en cada una de ellas también lo es. Resta a confirmar o refutar lo anterior gracias a observaciones y análisis realizados.

En un primer tiempo, un primer análisis de programas oficiales nos permitirá escoger el tema adecuado a estudiar con detalle en ambos cursos. En un segundo tiempo, un análisis praxeológico de manuales de clase nos permitirá caracterizar el tipo de modelación que es enseñado en cada una de las sub-instituciones, las etapas (ver esquema) que son más y menos tratadas, así como determinar el tipo de actividades propuestas a los alumnos y el tipo de técnicas enseñadas para llevarlas a cabo.

Elementos teóricos

La teoría de la transposición didáctica desarrollada por Chevallard (1992) evidencia la aparición sistemática de una distancia entre el saber sabio o experto (nuestro modelo de referencia), el saber a enseñar (lo establecido por los programas oficiales) y el saber enseñado (lo que es llevado al aula de clase) a causa de diversas limitaciones del funcionamiento del

sistema de enseñanza. Nos interesa estudiar la transposición de nuestro proceso de modelación de referencia en el ámbito escolar.
En lo que respecta el análisis de manuales para conocer el tipo de actividades propuestas a los alumnos, la noción de praxeología es nuestra herramienta de análisis. Artaud (1997) establece que una praxeología es una respuesta a la cuestión de cómo realizar una determinada tarea aunque en general no es una tarea aislada que aparece sino un tipo de tareas T. Para poder responder a una tarea t del tipo de tareas T habrá que emplear una técnica τ. La justificación de esta técnica es dada por la tecnología θ y ésta a su vez puede ser justificada gracias a la teoría Θ. Se llega así a un modelo praxeológico de la forma $[\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$.

Análisis praxeológico de manuales de matemáticas

El programa oficial de la clase de Matemáticas establece que se mostrará a los alumnos uno o dos ejemplos de esta práctica con situaciones extra-matemáticas que conduzcan al establecimiento de una ecuación diferencial *simple* y donde los alumnos serán guiados en el trabajo de traducción matemática. Los autores del programa afirman la importancia de confrontar a los alumnos al menos una vez al proceso de modelación pero precisan que ninguna competencia será exigida en el examen del *baccalauréat*[†††]. Dos casos son posibles: una ecuación diferencial es propuesta por el enunciado del ejercicio restando al alumno de proponer la familia de las soluciones generales de la misma o una solución aproximada por el método de Euler es requerida. La utilización de la palabra traducción en lugar de modelación implica que el pasaje entre una situación real hacia el establecimiento de un modelo matemático es una traducción de lo que se presenta en el enunciado sin confrontar al alumno a hacer elecciones o establecer hipótesis del fenómeno en cuestión.
Realizando un estudio en términos de praxeologías a los ejercicios no resueltos del capítulo "Ecuaciones Diferenciales" de tres manuales de la clase de Matemáticas, nosotros identificamos, en la introducción de la ecuación diferencial como herramienta de modelación, situaciones extra-matemáticas modeladas por: a) una ecuación diferencial de la forma y'=ay+b con a y b constantes y b) una ecuación diferencial diferente pero que se puede transformar a una de la forma y'=ay+b con a y b constantes.- en este caso todas las indicaciones serán dadas al alumno (programa oficial, confirmado con el análisis de los ejercicios de los manuales).
El tipo de tareas más frecuentemente observadas es la búsqueda de la solución general (T_{SG}) y particular de la ecuación diferencial (T_{SM}). El establecimiento del modelo por los alumnos es poco observado, casi ausente. La transición de los resultados matemáticos (Estudio Matemático) en términos de la situación real (Confrontación Modelo Realidad) es tratada de manera simple con una simple reformulación de términos matemáticos en términos de los objetos reales, sin representar gran dificultad en los alumnos. Las técnica τ_{SG} presente en los manuales para *encontrar* la familia de la solución de una ED de la forma y'=ay+b es la utilización del teorema establecido previamente por el profesor en clase y que afirma que las familia de soluciones son de la forma $Ce^{at} - b/a$; la consigna es de "aprenderse este resultado de memoria". Evidentemente, la justificación de esta técnica θ_{SG}, la demostración del teorema, es dada en clase pero éste no es un conocimiento exigido posteriormente al alumno.

[†††] Examen de fin de año que valida los tres años de liceo a nivel nacional, comúnmente llamado *BAC*.

Análisis de praxeológico de manuales de física

Aplicando la misma metodología para el caso del programa de física, una primera revisión del mismo nos permite ver que el objeto ecuación diferencial (ED) es una herramienta de modelación en tres grandes dominios: la radioactividad, la mecánica y los circuitos eléctricos. Escogiendo como tema de estudio la parte de Electricidad y analizando los ejercicios propuestos en el capítulo "Circuito RC" (resistencia-condensador), donde la carga y descarga de un condensador es estudiada, identificamos tres tareas a realizar con respecto a la modelación:
T_{EED}: Establecimiento de la ecuación diferencial para modelar la variación (en el circuito RC) de la tensión en bornas del condensador u_C en función del tiempo Se parte de una descripción verbal en términos de la física para llegar a una ED de la forma $u_C'+a\ u_C = b$ con a,b constantes.
T_{VSG}: Verificación de que una solución general es solución de la ED establecida. La técnica τ_{VSG} es la substitución (en la ED) de la solución general dada previamente en el enunciado.
T_{SP}: Establecer una solución particular de la ecuación diferencial en términos de los parámetros del circuito, donde las condiciones iniciales a utilizar son normalmente establecidas por los alumnos.
En este caso, señalemos que el establecimiento del modelo por los alumnos en clase de física es importante ya que el proceso de modelación es una práctica cotidiana de los físicos. Por otro lado, se encuentra un tipo de tareas semejante a las observadas en clase de matemáticas para la determinación de una solución general y particular pero en esta ocasión el tipo de técnica que se exige del alumno es la comprobación mediante la substitución en la ecuación previamente establecida por los propios alumnos. La justificación de una tal técnica pertenece más a un dominio matemático y en este caso tampoco observamos una justificación para ésta al interior de la clase de física (en términos de teoría propia a la física).

Conclusión

El proceso de modelación puesto en práctica en clase de física y matemáticas difiere de nuestro esquema de referencia por lo que reconocemos la transposición de este proceso el ámbito escolar. La situación inicial de la gran mayoría de los ejercicios observados en los manuales de ambas clases está situada en un dominio pseudos-concreto ya que ciertas elecciones son ya realizadas y sólo son mencionadas las variables que intervendrán en el modelo matemático final (consecuencia: las etapas de la Representación mental de la situación y de la confrontación Modelo-Situación Real se encuentran también al interior de este dominio). La etapa de Generalización y Previsiones desaparece en situación escolar (en base a nuestras observaciones y análisis realizados reafirmando lo observado en un estudio anterior en Rodríguez (2003). De acuerdo a Henry (2001), esta etapa requiere de conocimientos especializados en el dominio extra-matemático que interviene en la situación lo que podría ser una razón de la dificultad que representaría si esta estuviera totalmente a la carga de los alumnos a este nivel.
El proceso de modelación existente en clase de Matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos a etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual resta significado a la práctica. El Estudio

Matemático del modelo propuesto exige al alumno *tener en mente* la forma general de la solución. La especificación de la solución particular a la situación, siendo las condiciones iniciales dadas en el enunciado, no propone mayor reto a los alumnos. En resumen, el proceso de modelación existente en esta clase es lejano a aquel vivido por los expertos y en términos de la enseñanza no permite al alumno el enfrentarse al acto de modelar de manera completa.
En clase de física, se observa una importancia mayor dada a este proceso de modelación. La etapa de Modelo Matemático es propuesta al alumno en clase y una interacción entre ambas disciplinas (Matemáticas y Física) es fundamental para poder interpretar en términos de los componentes del circuito – resistencia R, capacidad C – los resultados obtenidos matemáticamente. Observamos que en esta disciplina el proceso de modelación vive de manera más cercana a nuestro esquema de referencia y algunas etapas son más tratadas en particular el establecimiento del modelo y de las condiciones iniciales para encontrar una solución particular lo cual permite al alumno un mayor aprendizaje respecto a la modelación en Física.
La búsqueda de una solución general para y'=a y + b en ambas sub-instituciones (T_{SG} y T_{VSG}) da lugar a la existencia de dos técnicas distintas ($\tau_{SG} \neq \tau_{VSG}$), correctas o no, dependiendo de la clase donde la tarea es formulada (contrato didáctico).
El diseño de situaciones que pongan de manifiesto más etapas del procesos de modelación a la responsabilidad de los alumnos es una tarea que se revela primordial para mostrar los alcances y también las limitaciones de este tipo de práctica a alumnos que culminan sus estudios secundarios y para los cuales las Matemáticas serán, seguramente, una ciencia de servicio en su futuro profesional.

Referencias bibliográficas

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la IX Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Houlgate: ARDM et IUFM Caen, Francia.

Blum, W. (2002). ICMI 14: Applications and modelling in mathematics education – Discusión Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1-2), 149-171.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37–68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (2), 86-95.

Bulletin Officiel (2001). Programme de l'Enseignement des Mathématiques en Classe de Terminale Série Scientifique. No. 4 30 Août 2001. 63-71. Francia.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-111. La pensée Sauvage. Francia.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En M. Henry (Ed), *Autour de la modélisation en probabilités*.. (pp.149-159). Besançon, Francia : Commission Inter-IREM Statistiques et Probabilités PUFC.

Rodríguez Gallegos, R. (2003). Le contrat didactique relatif aux équations différentielles comme outils de modélisation en classe de Terminale S. Tesis de maestría no publicada. Université Joseph Fourier, Francia.

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON APOYO DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN[‡‡‡]

Jorge Ávila Arciniega, Emma Antonia Jáuregui Medina, Elena Nesterova
Universidad Autónoma de Nayarit y Universidad de Guadalajara. (México)
javila@ecdif.intranets.com, emma@ecdif.intranets.com, elenan@ccip.udg.mx
Campo de investigación: modelación matemática; Nivel educativo: superior
Palabras clave: Modelación matemática, trabajo colaborativo

Resumen
En el presente trabajo se propone una técnica "generalizada" para resolver problemas, basada en actividades de modelación matemática, con empleo de diferentes sistemas de representación. La experimentación de campo se desarrolló en catorce horas lectivas con catorce alumnos de tercer semestre de la carrera de Ingeniería Química de la UACI – UAN, que trabajaron en equipos. Mediante el análisis de regresión se determinó la correlación positiva entre el desarrollo de la habilidad en los estudiantes para resolver problemas con apoyo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (variable y), y el proceso de modelación basado en la técnica propuesta (variable x). Se detectaron las dificultades principales a las que se enfrentaron los estudiantes durante el proceso de modelación matemática.

Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene un carácter integrador de la matemática. Es importante propiciar la transferencia de estos conocimientos a situaciones relacionadas con áreas de interés del estudiante para que pueda utilizarlos en la solución de problemas que se le presenten durante el ejercicio de su profesión. Hay que centrar la atención en enseñar a resolver los problemas que involucren ecuaciones diferenciales (Judson, 1997).

El estudio se realizó para responder a las preguntas ¿Cómo involucrar los estudiantes en el proceso de modelación matemática y con que tipo de problemas? ¿Cómo proceden los estudiantes para construir un modelo matemático que represente una situación de la realidad, cuando se conocen las condiciones y características de dicha situación y las reglas que gobiernan los cambios que ocurren?

Se realizó la investigación pre-experimental y transversal para determinar la correlación entre la técnica generalizada, basada en acciones de modelación, y el desarrollo de la habilidad de los estudiantes para resolver problemas con apoyo de EDO's de primer orden. El experimento se aplicó al grupo único integrado por catorce estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Química, en el curso de ecuaciones diferenciales que se imparte en la UACI – UAN.

Proceso de modelación

De acuerdo con Mochón (2000), todas las fórmulas, gráficas o tablas que describen de alguna manera el comportamiento de un sistema real, son modelos matemáticos. En este trabajo se tiene interés precisamente en aquellos modelos que involucren ecuaciones diferenciales, específicamente las ordinarias de primer orden.

[‡‡‡] Proyecto de Cuerpo Académico de Matemática educativa, UAN y Cuerpo Académico de Matemática Educativa Avanzada, UdG

Las dificultades de enseñanza y aprendizaje en el proceso de modelación (Klauodatos, 1994, citado por Hernández, 1995), se encuentran fundamentalmente en la fase de matematización, aunque la parte de procesamiento matemático no está exenta de dificultades (Fig. 1).

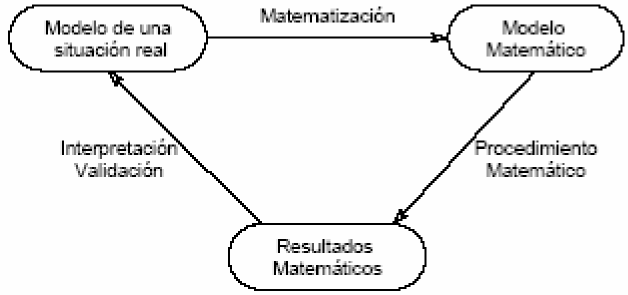


Figura 1. Proceso de modelación matemática.

Según el paradigma de modelación, la resolución de problemas se realiza mediante cuatro estadios (Gascón, 1994):

1. Una situación problemática en la que pueden formularse preguntas y conjeturas, normalmente con poca precisión y en la que se pueden llegar a detectar y formular provisionalmente algunos problemas matemáticos.
2. La definición o delimitación del sistema subyacente a la situación problemática y la elaboración del modelo matemático correspondiente.
3. El trabajo técnico dentro del modelo, la interpretación de este trabajo y sus resultados dentro del sistema modelado.
4. Formulación de problemas nuevos para responder a cuestiones relativas al sistema modelado.

En este trabajo, se propone una técnica "generalizada" para resolver problemas, basada en acciones de modelación distribuida en cuatro etapas, Orientación, Planificación, Realización y Control (Polya, 1965; Shoendfeld, 1992; Nesterova, 2000). A continuación se describe su utilización para resolver un problema de mezclas.

Problema. Un recipiente de 10 galones está lleno de agua pura. Supóngase que se empieza a añadir sal al recipiente a razón de ¼ de libra por minuto (flujo másico). Además, se abre la válvula de salida para retirar ½ de galón por minuto de disolución (flujo volumétrico), y se agrega agua pura para mantenerlo lleno. Si la disolución de agua salada está siempre bien mezclada, ¿Qué cantidad de sal se encuentra en el recipiente en un momento determinado *t*? Calcular la cantidad de sal para a) *t* =1 min., b) *t* =10 min., c) *t* =60 min., d) *t* =1000 min. y e) para *t* muy grande. (Blanchard, Devaney y Hall, 1998, p 33)

Solución:

Orientación. Para entender de qué se trata en el problema es importante identificar la información disponible (qué está dado y qué es necesario encontrar).

Se plantean y responden preguntas: ¿Cuál es la cantidad de sal en el recipiente al inicio del proceso? y ¿cuál al final? ¿De qué manera varía el nivel del líquido en el recipiente? ¿Por qué se hace la aclaración de que la solución está siempre bien mezclada? ¿Se puede agregar la sal de manera "indefinida" al recipiente? La información que se obtiene del enunciado del problema, se expresa y se define en una lista de las cantidades físicas (variables y constantes). Se identifica la variable incógnita.

Las siguientes cantidades constantes durante el proceso:

$F = \frac{1}{4}\frac{lbs}{\min}$ - Flujo másico de sal en la corriente de entrada $\left(\frac{masa}{tiempo}\right)$.

$q = \frac{1}{2}\frac{gal}{\min}$ - Flujo volumétrico de la solución (corriente de salida) $\left(\frac{volumen}{tiempo}\right)$.

$V = 10\ gal.$ - Volumen de la mezcla (volumen ocupado del recipiente en un instante dado).

q_e - Flujo volumétrico del agua en la corriente de entrada para mantener lleno el tanque.

Las magnitudes que cambian son:

$x(t)$ - Masa de sal presente en un momento dado en el recipiente. $x_0 = x(0) = 0\ lbs$

$c(t)$ - Concentración de sal en la corriente de salida (la misma que en el recipiente).

t - Tiempo transcurrido en el proceso

Variable incógnita: contenido de sal en el recipiente $x(t)$.

Planificación de la solución

1. Se hace una breve descripción de las ideas de solución.

La determinación de la cantidad de sal en el recipiente en un momento dado, exige la utilización del principio de conservación de masa; su empleo es básicamente un proceso "contable" en el que se lleva un balance de masa (variable incógnita). Para ese propósito, es conveniente considerar una región del espacio delimitada por una superficie (real o ficticia) denominada "superficie de control" y el volumen comprendido por dicha superficie, como "volumen de control". La cantidad que va a observarse (masa de sal en este caso) se denotará con la letra *x*. La ley de conservación se puede enunciar como sigue:

La cantidad total de x contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_2 debe ser igual a la cantidad total de x contenida dentro del volumen de control en el tiempo t_1, más la cantidad total de x que entra al volumen de control en el intervalo de tiempo t_1 a t_2 en todos los procesos, menos la cantidad total de x que sale del volumen de control en el intervalo de tiempo t_1 a t_2 para todos los procesos:

$$x\big|_{t_2} = x\big|_{t_1} + cantidad\ de\ x\ que\ entra\ en\ (t_1, t_2) - cantidad\ de\ x\ que\ sale\ en\ (t_1, t_2)$$

Se supone que la mezcla es homogénea y que no hay generación de sal (por reacción química) en el recipiente. La concentración de sal en la corriente de salida en un tiempo dado es igual a la existente en cualquier punto del contenedor en ese instante.

2. Se representa el problema mediante dibujos, esquemas o gráficas o alguna otra forma de visualización (Fig. 2).

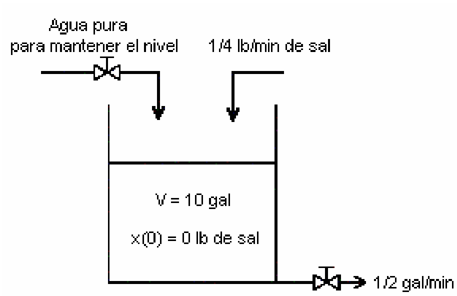


Figura 2. Diagrama de las condiciones del problema

3. Se escriben las variables obtenidas del análisis del problema y se codifican en términos matemáticos.

La concentración de sal en la corriente de salida es la misma que la de la solución que permanece en el tanque: $c(t)=\dfrac{x(t)}{V}$, donde $x(t)$ es masa de sal presente en un momento dado en el recipiente y *V* es volumen de la mezcla (volumen ocupado del recipiente en un instante dado).

Realización de la solución.

1. Se determinan las relaciones entre variables en forma analítica.

De acuerdo al principio de conservación de la masa y si $t_1=t$ y $t_2=t+\Delta t$, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} masa\ en\ el\ recipiente \\ en\ el\ tiempo\ t+\Delta t \\ x(t+\Delta t) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} masa\ en\ el\ recipiente \\ en\ el\ tiempo\ t \\ x(t) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} masa\ que\ entró \\ entre\ t\ y\ t+\Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} F dt \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} masa\ que\ salió \\ entre\ t\ y\ t+\Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} q(t)c(t)dt \end{array}\right\}$$

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\int_t^{t+\Delta t} Fdt-\int_t^{t+\Delta t} q(t)c(t)dt$$

Al aplicar el teorema de valor medio para integrales, en la segunda integral de la expresión anterior, se tiene $x(t+\Delta t)=x(t)+F\Delta t-\overline{qc}\,\Delta t$, donde el guión superior indica que la función es evaluada entre *t* y $t+\Delta t$. Para $\Delta t\to 0$ se obtiene $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=F-q(t)c(t)$, donde el miembro izquierdo representa una derivada de la función $x(t)$. La ecuación diferencial obtenida $\dfrac{dx(t)}{dt}=F-q(t)c(t)$ (1) representa las relaciones entre variables el problema dado.

2. Se construye la secuencia de operaciones (algoritmo) para las relaciones obtenidas:

Paso 1. La sal entra en el recipiente mediante flujo constante $F=\dfrac{1}{4}\dfrac{lbs}{\min}$

Paso 2. El flujo volumétrico de salida es de ½ galón por minuto y su concentración es la misma que la de la disolución en el recipiente. Para un volumen de 10 galones se tiene:

$$q(t)c(t)=q\frac{gal}{\min}\frac{x(t)}{V}\frac{lbs}{gal}=\frac{1}{2}\frac{gal}{\min}\frac{x(t)}{10}\frac{lbs}{gal}=\frac{x(t)}{20}\frac{lbs}{\min}$$

Paso 3. Al sustituir *F* en la ecuación (1) se obtiene: $\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{x(t)}{20}\Rightarrow\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{5-x(t)}{20}$ (2), que es una ecuación diferencial de primer orden con variables separables y se resuelve fácilmente después de separarlas.

Paso 4. Se resuelve la ecuación (2):

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{5-x(t)}{20}\Rightarrow\int\frac{dx}{5-x(t)}=\int\frac{1}{20}dt\Rightarrow-\ln|5-x(t)|=\frac{t}{20}+C\Rightarrow\ln|5-x(t)|=-\frac{t}{20}+C\Rightarrow$$

$$5-x(t)=\pm e^{-\frac{t}{20}+C}\Rightarrow 5-x(t)=\pm e^{C}e^{-\frac{t}{20}}\Rightarrow 5-x(t)=Ce^{-\frac{t}{20}}\Rightarrow x(t)=5-Ce^{-\frac{t}{20}}.\quad(3)$$

De la condición inicial $x(0)=0\ lbs$ se tiene $0=5-Ce^{\frac{0}{20}}\Rightarrow C=5\Rightarrow x(t)=5\left(1-e^{-\frac{t}{20}}\right)$.

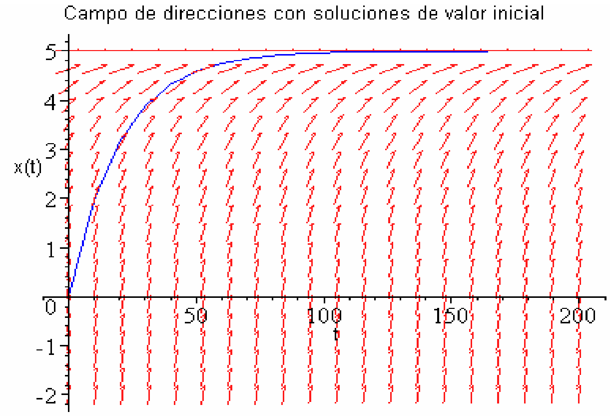


Figura 3. La gráfica de la función $x(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$.

De la función $x(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$, que describe la variación de la cantidad de sal en el recipiente, se obtiene la cantidad de sal en los diferentes momentos:

a) $x(1) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{20}}\right) \approx 0.244\, lbs$, b) $x(10) = 5\left(1 - e^{-\frac{10}{20}}\right) \approx 1.967\ lbs$,

c) $x(60) = 5\left(1 - e^{-\frac{60}{20}}\right) \approx 4.751\ lbs$, d) $x(1000) = 5\left(1 - e^{-\frac{1000}{20}}\right) \approx 5\ lbs$,

e) Para un tiempo "grande", como $t = 5000\,\text{min}$, se obtiene $x(5000) = 5\left(1 - e^{-\frac{5000}{20}}\right) \approx 5\ lbs$.

Control. Se verifica el resultado obtenido (que tenga sentido). La concentración de sal en el recipiente se incrementa a medida que transcurre el tiempo, tal como se muestra en el campo de pendientes (Fig. 3), lo cual es congruente con el resultado obtenido; además, la consistencia de unidades mostrada durante el planteamiento y resolución del problema, hace pensar que dicha resolución ha sido correcta.
Se expresa la respuesta en términos del problema dado: Si se tiene un recipiente de 10 galones de capacidad, originalmente lleno de agua, al cual se agrega sal a razón de ¼ de libras por minuto y se retira ½ galón por minuto de disolución de mezcla homogénea, y se añade agua pura a un flujo suficiente para que el tanque permanezca siempre lleno, entonces la cantidad de sal en el recipiente en cualquier momento es igual a $x(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$.

Resultados y conclusiones

La confirmación de la existencia de una relación lineal entre la habilidad para resolver problemas (y) y Acciones de modelación matemática (x) se obtuvo con el modelo lineal $y = 0.8158 + 0.9217x$ ajustado a los datos de los catorce estudiantes, con un nivel de significancia del 5% (Fig. 4).

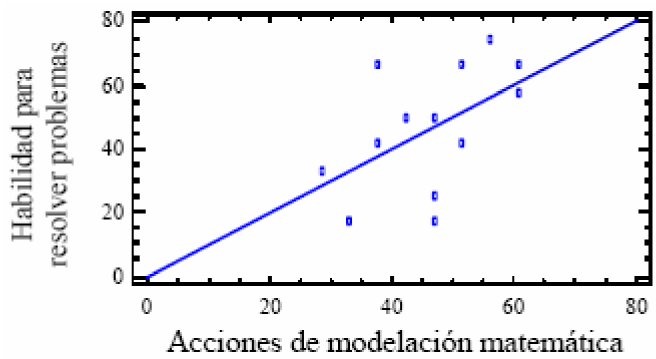


Figura 4. Diagrama de dispersión y del modelo ajustado.

El coeficiente de correlación obtenido, 0.517, indica una relación lineal positiva moderada entre las variables. Sin embargo, la expectativa era la existencia de una fuerte correlación positiva. El hecho de que sólo el 26% de la variabilidad total en la habilidad para resolver problemas sea explicada por las acciones de la propuesta, muestra que deben existir otros factores que no fueron considerados, tales que están relacionados con la estructura misma de la técnica propuesta, la forma en que se aplicó y el tiempo de su aplicación.

Para obtener el conocimiento seguro sobre el desarrollo de habilidades de modelación matemática en la solución de problemas es necesario realizar la experimentación durante un periodo de tiempo más largo.

Referencias bibliográficas

Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Internacional Thomson Editores.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educación Matemática*. Vol.6, No. 3, Diciembre 1994. Editorial Iberoamérica México.

Hernández, A. (1995). Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Tesis Doctoral. CINVESTAV-IPN. Departamento de Matemática Educativa.

Judson, T. (1997). *University Mathematics Education in the United States.* Recuperado el 7 de julio de 2003 de:
http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/etrang/judson/node14.html

Mochón, S. (2000). *Modelos matemáticos para todos los niveles.* México: Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Nesterova, E. D. (2000). Formación de la habilidad de estructurar el material didáctico en los estudiantes de escuela superior. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Krasnoyarsk, Rusia.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1999). *Looking Toward the 21ST Century: Challenges of educational theory and practice*. Disponible en: http://www.gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/AERA_final.pdf

EL CAMBIO DE VARIABLE: ¿UN PROCESO MATEMÁTICO O UN ARTIFICIO DE LA MATEMÁTICA?

Ramón Flores Hernández
Instituto Tecnológico de Saltillo, Universidad Autónoma de Coahuila. (México)
rnfloresh@hotmail.com
Campo de investigación: pensamiento matemático avanzado. Nivel educativo: superior
Palabras clave: cambio de variable, epistemología, cognición y didáctica

Resumen
Este artículo presenta resultados parciales de una investigación en desarrollo que pretende desentrañar el papel que juega el cambio de variable (cv) en la matemática escolar del nivel superior, conllevando a plantear la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué mecanismos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo, al reconocer el cv como un objeto explicito? Interrogante que toma el papel de guía principal de la investigación, aunada a otras de carácter particular. El marco teórico se sustenta en los siguientes aspectos: epistemológico del cv, de transposición de contenidos, de conversión de representaciones y de situaciones didácticas. La Ingeniería Didáctica es la metodología a utilizar. El estado actual del trabajo se ubica en la Fase del Análisis Preliminar, presentándose en este artículo el desarrollo y las conclusiones de dicha Fase.

Definición del Problema

El problema de investigación consiste en hacer explícito el cv, de tal forma que pueda ser utilizado eficazmente en los temas de la ingeniería. Para llevar a cabo lo anterior es necesario conocer o documentar, cuál es la problemática cognitiva presente en los estudiantes, causada por la presentación actual de los diferentes temas matemáticos que conllevan el cv. También, es importante la actuación del profesor en el aula bajo este tema y la influencia que los libros tienen en él, por ultimo, se mirará cómo se estructuró el cv a través del tiempo y cómo fue evolucionando y permeando diferentes contenidos matemáticos; actividad que permitirá tener una panorámica robusta del papel que ha jugado en el tiempo el cv, bajo el fin de modificar de manera benéfica el papel actual que ocupa en el sistema didáctico. Estas actividades se tratarán de unificar o entrelazar, de tal forma que se obtengan explicaciones sistémicas del problema. Este planteamiento inicial permite proponer algunas preguntas del problema, que pueden llevar a determinar si es o no posible tener un mecanismo que induzca a establecer un instrumento explícito de enseñanza del cv. Debido a esto, dichas interrogantes serán tomadas como guía para solventar la problemática planteada:
1)¿Cómo vive actualmente el cv en la enseñanza?, 2)¿Qué significados posee el cv dentro del sistema didáctico?, 3)¿Qué papel juega el cv en la comprensión del cálculo?, 4)¿Qué mecanismos cognitivos subyacen al surgimiento de una variable adicional que permita minimizar la dificultad de un proceso?, 5)¿Qué es lo que posibilita la epistemología del cv?, 6)¿Qué obstáculos están asociados al cv?, 7)¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito?

El Objetivo General, Marco Teórico y Metodológico

Las primeras 6 interrogantes anteriores deberán permitir abordar la pregunta siete que será tomada como el objetivo general, ya que ésta busca resignificar el cv apoyada en la triada: epistemología, cognición y didáctica; al tratar de encontrar una alternativa didáctica para introducir el cv como un tema independiente y enseñable en la matemática de ingeniería y, precisamente éste es el fin de la investigación. El resto de las preguntas se tomarán como los objetivos particulares o secundarios. También, estas interrogantes permitirán estructurar el marco teórico, ya que el significado de cada una se ubica en los actores de nuestro dominio de investigación; es decir, el profesor, el estudiante y el saber enseñado. Por ejemplo: las preguntas 1 y 2 caen en el ámbito de la transposición didáctica, tal como lo maneja Chevallard (1991); las preguntas 3 y 4 caen dentro de la cognición; y, las preguntas 5 y 6 caen en la dimensión epistemológica. Bajo esta última dimensión se observará: la naturaleza del cv, el análisis de algunas heurísticas y el análisis de obstáculos presentes en el cv. En cuanto a la dimensión cognitiva, el trabajo se apoyará en la actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas de un registro a otro bajo la noción de no-congruencia de las representaciones (Duval, 1995). Por ultimo, la dimensión didáctica estará apoyada en la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991), dando al trabajo una visión genérica y, en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), dotando al trabajo de una visión específica. Tocante al aspecto metodológico, se utilizará la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), presentándose en este trabajo la primera fase; es decir, el Análisis Preliminar.

Metodología

Análisis Preliminar

Esta fase se estructuró con base en las componentes: didáctica, epistemológica y cognitiva.

Componente Didáctica

La dimensión didáctica se refiere al estado que guarda la enseñanza del tema aludido; es decir, cómo vive el cambio de variable en el aula y cuál es su devenir como saber enseñable (Chevallard, 1991), en resumen, se refiere a lo relacionado con el profesor.

Como inicio, se revisó el contenido de los programas de estudio de las ingenierías del Sistema Tecnológico de México (STM) con base en el Instituto Tecnológico de Saltillo (ITS), bajo el fin de observar si contemplan el cv. La revisión abarcó las materias de: cálculo, ecuaciones diferenciales, series y transformadas de Laplace y de Fourier. En la mayoría de estos contenidos no se encuentra el cv de manera explícita, excepto en tres; sin embargo, hay varios temas donde se tiene que aplicar de manera implícita. En segundo lugar se recavaron apuntes de clase de distintos profesores y de las distintas matemáticas en el (ITS), comparándose con los contenidos de los libros de apoyo que utiliza cada docente. Todo esto bajo el objetivo de mirar el cv en el discurso del profesor. Al examinarlos, se observa que el cv aparece explícitamente en muy mínima forma y es, solo en algunos casos correspondientes al cálculo integral. Respecto al resto de temas donde puede aplicarse el cv, éste aparece desapercibido; es decir, no se le da la importancia debida. También se observa aquí que, la forma de enseñar el cálculo es con base en los libros de texto. El discurso matemático escolar del profesor es copiado del contenido de dichos libros casi textualmente. Así que el siguiente trabajo se centró en estudiar los libros de texto utilizados cotidianamente. Se revisaron los libros de matemáticas más utilizados en el ITS (Edwards y Penney, 1986; 1987; Stewart, 1999; Swokowski, 1982; Zill, 1987; 2002; Rainville, 1976; O'Neil, 2001; James, 2002), efectuándose una clasificación genérica de diferentes temas donde tiene cabida el cv, con el fin de observar su uso: observándose que es un tema presentado de manera implícita, en cuanto a su aspecto algorítmico y en cuanto a su aspecto conceptual (significando que, además de cambiar la variable, cambia también su significado; por ejemplo, en la transformada de Laplace). Aún más, es utilizado en algunas demostraciones pero no se explica cómo pensaron en obtener tal cambio de representación de la variable. Por último se escuchó una clase típica de cálculo diferencial sobre el tema de la derivada de un producto, pretendiendo documentar la existencia de otro tipo de cv. Este recurso se planeo de manera general, no así: la clase, el lugar, la hora y el día de la grabación. Tal actividad se realizó desde un salón adyacente y se cotejó con los apuntes de la clase. Los resultados arrojados

indican que el docente hace un cambio verbal de variable, ya que al estudiar el dialogo entre éste y el grupo de alumnos, nos damos cuenta que el docente habla en términos de las variables u y v, y escribe su valor o su derivada en términos de la variable x y según la formula del producto. Es en este paso, del hablar en términos de una variable y del escribir lo que se habla en términos de otra variable, cuando se presenta el cambio verbal de variable.
En resumen, se puede decir que el cv es una herramienta que vive en el aula de manera implícita y no es un saber enseñable, siendo el centro de esta forma de ver el cv; los libros, ya que en ellos se basaron los profesores para su actividad docente. Se puede decir también que los libros generan un consenso para el trabajo del profesor. Bajo estos resultados cabe hacerse la pregunta: ¿cuál fue la epistemología de origen del cv?

Componente Epistemológica

En esta parte se presenta un análisis epistemológico, sin pretender sea exhaustivo, con el fin de indagar cómo surge el cv en la historia, cómo se usaba y si existieron obstáculos para su progreso. Tal análisis abarca desde el siglo XIV al siglo XVIII, periodo donde se ve con claridad el cv. La utilidad de este análisis, aunado a la revisión de libros, radica en que permitirá ensayar predicciones sobre el diseño de secuencias didácticas.
El cv se localizó en la antigüedad en la resolución de ecuaciones de segundo grado. Boyer (1968), menciona el libro llamado "Espejo Precioso de los Cuatro Elementos", escrito por el matemático Chino Chu Shih-Chieh en 1303, donde explica un método de transformación que llama el *fan fa* y que en Occidente se le conoce como el "método de Horner". El *fan fa* es en realidad un cv que permite transformar la ecuación original en otra mas fácil y de donde se obtiene finalmente una raíz al regresar a la variable original (Boyer, 1968). Idem ocurre con los métodos de Cardano (1501-1576) sobre la resolución de ecuaciones cúbicas y cuárticas publicadas en su *Ars magna*, donde utiliza el cv con el fin de transformar la ecuación dada en otra más sencilla, solo que utiliza un estilo retórico (Boyer, 1968). Aquí es importante resaltar que el cambio de incógnita es parte de un método que facilita la resolución de la ecuación, utilizando una función de estructura variable.
Un caso diferente acerca del papel que juega el cv lo podemos ver en las ecuaciones diferenciales; por ejemplo, en "la ecuación de Bernoulli" $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, donde Jacques Bernoulli, Leibniz y Jean Bernoulli lograron resolver; Jean reduciéndola a una ecuación lineal, por medio de la sustitución $z = y^{1-n}$ (Boyer, 1968). En este caso se presenta un cv intrínseco pero con un fin necesario para poder resolver la ecuación, utilizando una función de estructura fija.
Otro caso muy característico acerca de las ecuaciones diferenciales es la sustitución $y = xt$ que utilizara Leibniz (1707-1783) y después J. Bernoulli para resolver la ecuación homogénea de primer grado (Ríbnikov, 1987; Cauchy, 1981). En este caso el cv tiene un fin primordial, utilizando una función de estructura fija.
Newton utiliza un cv necesario y por primera vez en la regla de la cadena, mostrado en un escrito titulado "The October 1666 Tract on Fluxions" (Newton, 2001; Edwards, 1979). Aquí se puede ver que, originalmente la regla de la cadena surge como un método de sustitución; es decir, como una herramienta que permitía hacer un cv bajo la mira de encontrar la derivada de una función. Edwards (1979) explica como trabajaba Newton al respecto, donde se puede apreciar que el cv es utilizado como una herramienta no indispensable y de estructura variable.
Finalmente podemos ver que: en las ecuaciones algebraicas mostradas y en la regla de la cadena, se busca encontrar una función que permita hacer el cv y, en las ecuaciones

diferenciales mostradas se da esa función que permite hacer un cv; es decir, aquí dicha función ya tiene una estabilidad o tiene el carácter de un invariante.

Componente Cognitiva

Componente referida a los estudiantes, en especial se refiere a cómo piensan el cv; es decir, se tratará de indagar qué concepciones tienen los estudiantes de ingeniería acerca del cv. El resultado de tal indagación surge de la triangulación de información: a partir del año 2003 se han hecho observaciones de clases y se han planteado problemas sobre el cv; en el 2004 se diseño un curso cuyo tema central fue el cv; en el 2005 se realizaron 11 entrevistas clínicas sobre el cv. Estos diversos acercamientos sobre una misma exploración asumieron el papel de plan piloto para finalmente llegar a establecer el diseño de cuestionarios, pero a la vez apoyaron las conclusiones obtenidas. Así pues, se aplicaron tres cuestionarios a dos grupos de estudiantes de la materia de "Series de Fourier": un grupo formado por 12 estudiantes y el otro por 17. Estos cuestionarios consistieron en plantear los siguientes 6 problemas:

CUESTIONARIO 1

1. La derivada de $y=\sqrt{1-x}$ se puede hacer por varios caminos, ¿cuáles de los siguientes sabes hacer?

a. Encontrando dy/dx a través de las fórmulas de derivación.

b. Realizando un cambio de variable, por ejemplo, haciendo que $1-x=t$. Para luego aplicar la fórmula:

$dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)$.

c. Desarrollando $1-x$ a la $1/2$ y luego derivar término a término.

d. A través de la definición de la derivada: $dy/dx=\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]/h$

e. Aplicando derivadas implícitas al escribir la función dada como $y^2=1-x$

f. Aplicando la derivación logarítmica, al escribir la función dada como:

$\ln y=\ln\sqrt{1-x}$, para luego derivar.

1. Encuentra la derivada de $y=\sqrt{1-x}$ por cada uno de los métodos que sabes.

2. ¿Podrías calcular la derivada de $y=\sqrt{1-x}$ aplicando el método del inciso b)? ¡inténtalo!

3. Resuelve la ecuación diferencial $2dx+(2x+3y)dy=0$, iniciando su resolución al emplear el cambio de variable $z=2x+3y$ y cuya diferencial total es $dz=2dx+3dy$. La ecuación resultante se podrá resolver por el método de separación de variables.

CUESTIONARIO 2

4. Sea $\int\left(x/\sqrt{x+1}\right)dx$

a. ¿Se podría calcular la integral al hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x+1}$?

Si _____ ¿por qué? (hacer desarrollo).
No _____ ¿por qué? (hacer desarrollo)

b. ¿Se podría calcular la integral si se hace el cambio de variable $\sqrt{t}=\sqrt{x+1}$?

Si _____ ¿por qué? (hacer desarrollo).
No _____ ¿por qué? (hacer desarrollo)

c. Si la integral la modificamos como $\int\left(x/\sqrt{x^2+1}\right)dx$, ¿cómo la resolverías?

CUESTIONARIO 3

6. Si en la integral $\int\left(1/e^x+e^{-x}\right)dx$ se hace el cambio de variable $e^x=t$ para poder integrarla,

a. ¿Podrías calcularla? ¡Inténtalo!

b. ¿Qué cambio de variable puedes inventar para integrar $\int\left(1/1+\sqrt{x}\right)dx$? ¡Resuélvela!

En estos problemas se requería hacer un cv y se pretendía observar el estado que guarda, específicamente se pretendía mirar: los antecedentes del estudiante acerca del cv, el desempeño sin mostrarle ningún apoyo, el desempeño con apoyo y el desempeño con apoyo indirecto solicitándole genere o invente una función para realizar el cv.

Las ***respuestas*** más notorias fueron las siguientes:

a) 5 estudiantes solo sustituyen la función que representa el cv y el resto de los términos los dejan en función de la variable original. b) 2 estudiantes evitan utilizar el cv y usan los

métodos tradicionales. c) Un estudiante no usa la variable proporcionada y la cambia por la variable “u”, que es la que se utiliza en la integral. d) 4 estudiantes solo sustituyen la función que marca el cv y el resto de los términos los dejan igual. Luego integran, tomando como constante a la nueva variable. e) En general tienen dificultad para cambiar el dx, por el dt. f) 4 estudiantes cambiaron automáticamente la x del dx por la t. g) Un estudiante en la pregunta donde se pide inventar la función del cv, inventa la igualdad $\sqrt{x}=1$; es decir, no utiliza una variable. h) Solo 1 estudiante logra inventar correctamente la función solicitada en la pregunta 6, pero no logra manipularla para cambiar el resto de la expresión de la integral.
Con base en las respuestas podemos decir que el estudiante asume los siguientes comportamientos: para el estudiante el cv es un tema nuevo (aunque realmente ya lo ha tocado en varios temas) y no logra manipular la función que enlaza la variable nueva con la variable dada. Aunado a esto, no logra hacer un cambio de diferenciales (de la variable dada a la nueva variable), ya que este proceso es intrínseco a la manipulación de la función de conversión (la función que permite hacer el cv). Este aspecto de manipulación de la función que permite hacer el cambio de variable implica decir que deviene en un obstáculo en el conocer. Indudablemente que otro problema mas es el de encontrar o inventar la función que permite hacer el cv. También, desde el punto de vista de Duval (1995), vemos que hay gran dificultad en el cambio de registros, ya que estamos frente a un fenómeno de no-congruencia, debido a que no hay una transformación espontánea; esto es, no hay una correspondencia semántica entre las unidades significantes de los dos registros.

Conclusiones del Análisis Preliminar

A través de este análisis se pudo observar que el cv es una herramienta que es utilizada en los libros y por los profesores de manera implícita. Su importancia radica en que permite aplicar métodos, hacer demostraciones y resolver problemas. Esta es su epistemología de origen. Pero por otro lado, para el estudiante es un tema difícil, que, parece ser, que no le toma mucha importancia, ya que cuando lo aplica no lo ve como un cv; es decir, no es conciente cuando aplica esta herramienta, de que está haciendo un cv. Y la dificultad se agudiza cuando se trata de inventar una función que relacione la variable original con la variable nueva y que permita una transformación de registros. Este hecho permite identificar un obstáculo, localizado en la relación funcional entre variables; mas específicamente: la relación entre la variable dada y la nueva variable es una función, pero este hecho de ser una función, donde hay una variable independiente y una variable dependiente, fijas, por la propia naturaleza del concepto de función, evita que en la concepción de función que se usa en el cv, se intercambien los papeles de las variables, por la concepción operacional que ya han interiorizado de una función. También influye en un grado menor que se use la variable x ó y con la nueva variable. Por lo que un obstáculo localizado es el aspecto operacional de una función. Así mismo se pude concluir que bajo el proceso de hacer un cv, puede existir alguna de las siguientes actividades:
A) Inventar el cv (como en el ejemplo 6 del cuestionario). B) Hacer un cambio verbal de variable (como el ejemplo del docente o al derivar o integrar parcialmente). C) Tomar el cv de la expresión dada (como el problema 4 del cuestionario o como en la ecuación de Bernoulli). D) Tomar una función dada como medio para hacer el cv (como en las ecuaciones diferenciales homogéneas). E) Hacer un cv en cuanto a su significado (como en la transformada de Laplace, transformada de Fourier, derivadas e integrales múltiples). Por ejemplo en la transformada de Laplace se cambia la variable tiempo t por la variable s, que

representa la frecuencia compleja. F) Hacer un cv yuxtalineal o sea, letra por letra (por ejemplo en las integrales definidas).

En cuanto al uso que se le da al cv, puede tomar la siguiente clasificación:

A) Una herramienta indispensable para llevar acabo un proceso (por ejemplo en las ecuaciones diferenciales homogéneas). Aquí el cv es primordial. B) Una herramienta intrínseca a un proceso (por ejemplo en la ecuación de Bernoulli). Aquí el cv es solo una pequeña parte de un proceso global. C) Una herramienta para economizar el tratamiento y por tanto no indispensable (por ejemplo en algunas ecuaciones diferenciales). Aquí el cv es opcional.

La mayoría de estas actividades fueron complicadas para el estudiante. Esto permite visualizar que el cv no es un proceso trivial, ya que se esta trabajando con la conversión de registros bajo el fenómeno de no-congruencia. Por el lado de la didáctica y bajo el apoyo del estudio epistemológico se observa que no se ha dado una transposición didáctica, específicamente para el cv. Así que no es suficiente adaptar este conocimiento a los esquemas cognoscitivos del estudiante, sino que requiere de un proceso didáctico específico con carácter sistémico que permita la apropiación del cv; esto es, falta generar una didáctica que permita mirar el cv bajo su significado intrínseco, para que el estudiante se apropie del cv. Esto es lo que se pretende en esta investigación, resignificar el cv.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970 - 1990. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditíons.

Boyer, C.B. (1968). *Historia de la Matemática.* Alianza Editorial

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. International Thomson.

Cauchy, A. L. (1981). *Équations Différentielles Ordinaries*. Éditions Études Vivantes.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. (pp. 213-226). *Cuadernos de Educación* No. 22. Institut de Ciéncies de L' Educació (Universitat de Barcelona) y Editorial Horsori. Barcelona , España.

Duval, R. (1995). Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag

Edwards y Penney. (1986). Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones. México: Prentice Hall.

Edwards y Penney. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall.

James, G. (2002). *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería.* México: Prentice Hall.

Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. UNAM. México. [I. Newton. Tractatus De Methodis Serierum Et Fluxionum. 1671]

O'Neil, P.V. (2001). *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería.* Volumen 2. México: CECSA.

Rainville, E.D. (1976). *Ecuaciones Diferenciales Elementales*. México: Trillas

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* URSS, Moscú: Mir

Stewart, J. (1999). *Cálculo.* México: International Thomson Editores.

Swokowski, E. W. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial.

Zill, D.G. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zill, D.G. (2002). Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones de modelos. México: International Thomson Editores.

EL APRENDIZAJE DEL TEMA "TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS" CON APOYO DEL CONOCIMIENTO PREVIO SOBRE LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO[§§§]

Emma Antonia Jáuregui Medina, Jorge Ávila Arciniega, Elena Dmitrievna Nesterova
Universidad Autónoma de Nayarit, Universidad de Guadalajara. (México)
emma@ecdif.intranets.com, javila@ecdif.intranets.com,elena.nesterova@cucei.udg.mx
Campo de investigación: gráficas y funciones. Nivel educativo: superior
Palabras clave: aprendizaje significativo, conocimiento previo, representaciones

Resumen
Este trabajo está relacionado con el estudio del problema de aprendizaje del tema "Transformada de Laplace (TL) de funciones definidas por intervalos (FDI)" con apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario (FEU). La teoría del aprendizaje significativo y la teoría de representaciones de conceptos matemáticos se consideraron como las bases teóricas para la investigación del problema. La investigación se llevó a cabo con el grupo único de 25 estudiantes de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Química Industrial de la Facultad de Ciencias e Ingenierías de la Universidad Autónoma de Nayarit.
Para determinar si existe relación entre la habilidad para representar analíticamente (en términos de la FEU) las FDI (variable independiente) con el aprendizaje del tema TL de FDI (variable dependiente) se realizó un análisis de correlación.

Introducción

Actualmente la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) se encuentra en un proceso de transformación, resultado del análisis de avances, aciertos, desaciertos y perspectivas de su desarrollo en los últimos años. Una de las políticas que se plantean en esta reforma universitaria es la de transformar el proceso educativo para impulsar la formación integral del estudiante, centrándolo en el aprendizaje significativo y en la construcción de conocimientos (Anzaldo, 2002, p. 21). En este modelo se considera el profesor como un diseñador y promotor de estrategias que posibiliten al estudiante aprendizajes significativos.
El aprendizaje del Cálculo proporciona la base conceptual y metodológica requerida para las matemáticas superiores, de tal manera que cualquier deficiencia u omisión trae como consecuencia problemas de aprendizaje posteriores. Los libros de Cálculo tratan con mayor amplitud las funciones continuas y prestan poca atención a las funciones definidas por intervalos (o compuestas). Sin embargo, este tema es indispensable en el análisis y diseño de sistemas de control. Cuando se modelan sistemas cuya entrada es una función definida a tramos, es necesario poder expresarla matemáticamente y para ello se emplea la función escalón unitario.
El problema de la investigación está relacionada con la búsqueda de los métodos, elaboración del contenido para la enseñanza de la Transformada de Laplace y el estudio de las condiciones de funcionamiento del apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario para que, como dice Cantoral (1993), el alumno construye su saber viviente, susceptible de evolución y funcional, que permite resolver problemas y plantear verdaderas preguntas.

[§§§] Proyecto de Cuerpo Académico de Matemática educativa UAN y Cuerpo Académico de Matemática educativa avanzada UdG

Consideraciones previas

Hitt (2003, p. 2) considera que uno de los problemas para el aprendizaje del cálculo es el concepto de función. El problema que tienen los estudiantes y algunos profesores de enseñanza media para desarrollar un entendimiento profundo del concepto de función, es que generalmente, tanto los estudiantes como algunos profesores, se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto que produce una limitación en su comprensión. En lo general, las tareas de conectar las diferentes representaciones de un concepto, no es considerada por la mayoría de profesores como algo fundamental en la construcción del conocimiento matemático y, en lo particular, las tareas de conversión son minimizadas por parte de los profesores en relación al concepto de función. Muchos alumnos y profesores tienen muy arraigada la idea intuitiva de pensar en funciones continuas, y que la idea es tan espontánea que anula el pensar en consideraciones analíticas. Nuestro punto es que las tareas de conversión promoverían un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización.

Las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por lo tanto, para su enseñanza y aprendizaje (Font, 2000). A pesar de que poseen la misma información, las diferentes representaciones ponen en función diferentes procesos cognitivos. La verbal se relaciona con la capacidad lingüística de los individuos y es básica para la interpretación de las demás; la gráfica permite conceptualizar mediante la visualización de los objetos; y la simbólica está relacionada con el pensamiento abstracto, analítico y lógico. Estos objetos se articulan mediante relaciones; cada objeto es a su vez parte de una estructura más amplia de conceptos, y los procesos se componen de operaciones sobre éstos objetos y transforman a los mismos (Cantoral, 2000).

Hernández (1998), al realizar un análisis epistemológico de la TL, hizo una propuesta para su enseñanza a partir de la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales mediante factores de integración y tomando la transformada exponencial como un puente entre esta técnica y la transformada de Laplace. El entendimiento del concepto de la TL (tanto en profesores como en estudiantes), se produce a partir de una epistemología del concepto y existen diversas formas de explicar la TL para que el estudiante pueda construirla y/o entenderla (Cordero y Miranda, 2002).

Burtseva y Tyrsa (2002) consideran que el teorema de convolución pertenece a los problemas matemáticos más difíciles en el aprendizaje, dado que dicha operación no tiene analogía con ninguna operación matemática aprendida en cursos anteriores, y proponen dos ejemplos para la interpretación didáctica del teorema de convolución: 1) totalización de las incertidumbres en la metrología y 2) la determinación de la probabilidad del funcionamiento libre de fallas de los sistemas en la teoría de confiabilidad.

Según Ausubel (1996), cuando ocurre el aprendizaje significativo el estudiante relaciona la nueva tarea de aprendizaje, en forma racional y no arbitraria, con los conocimientos y experiencias previas almacenadas en su estructura cognitiva. El aprendizaje significativo adquiere funcionabilidad cuando el alumno construye una representación mental a través de imágenes o proposiciones verbales o elabora su modelo mental como marco explicativo a dicho conocimiento (Díaz Barriga, 2003). Se requiere enseñar al alumno a proveerse de la experiencia adecuada para que cualquier término o concepto nuevo construido se corresponda con algo que ya forma parte de su experiencia concreta generadora de una representación mental razonablemente fuerte y que este conocimiento sea significativo (Gudiño, 2000).

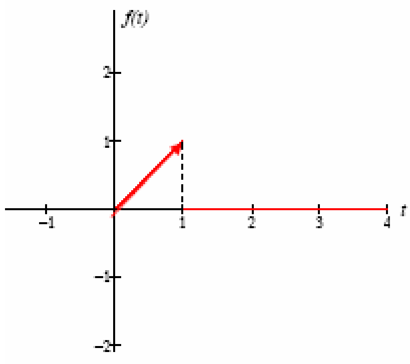
El objetivo de este trabajo fue describir y evaluar efectos del conocimiento previo de la función escalón unitario sobre el aprendizaje del tema de Transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos.
Se planeó la hipótesis que el uso del conocimiento previo (función escalón unitario) por los alumnos para la construcción del nuevo conocimiento (transformada de Laplace) influye positivamente al aprendizaje de los alumnos.

Materiales y métodos

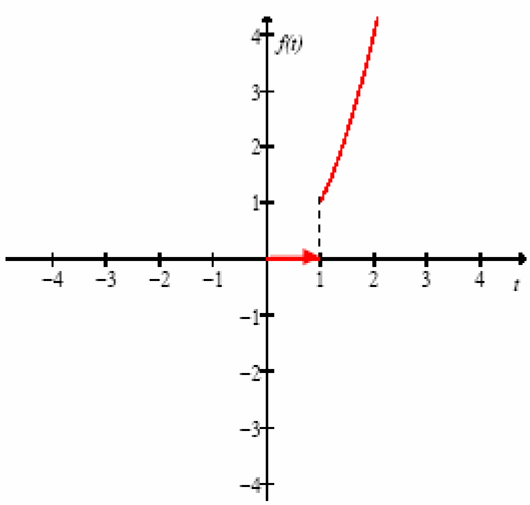
Las etapas y estructura de las actividades se elaboraron en la base del modelo de la formación y el desarrollo de las actividades de aprendizaje (Nesterova, 2000). Se diseñaron las lecturas, las actividades de aprendizaje y los instrumentos y criterios de evaluación. Los materiales didácticos fueron elaborados con una secuencia lógica apropiada cuidando de presentar en un principio los elementos más simples y generales y posteriormente introducir la información más detallada y compleja. En cada uno de ellos se delimitó la intencionalidad.
Con el fin de que los estudiantes lograran una mejor comprensión de los conceptos se hizo hincapié en las diferentes representaciones de una función considerando la forma verbal, gráfica y analítica por intervalos y empleando la FEU así como la traducción entre ellas. El material didáctico fue facilitado a los estudiantes de manera organizada y se propició la participación activa de ellos.
Ejemplos de las actividades.
1. Expresar analíticamente y bosquejar la gráfica de una función de *t* definida en dos tramos. Es igual a *t* cuando *t* es mayor o igual a 0 y menor que 1. Es igual a 0 cuando *t* es mayor o igual que 1.

La solución se inicia con el análisis de la descripción de la función dada:
¿De cuántas “partes” consta esta función? $\rightarrow$ *De dos*
¿En qué intervalo se da la primera parte? $\rightarrow$ $t<1$
¿En qué intervalo se da la segunda parte? $\rightarrow$ $t \geq 1$
¿Cómo se representa analíticamente la función en el intervalo $t<1$? $\rightarrow$ $f(t)=t$
¿Cómo se representa analíticamente la función en el intervalo $t \geq 1$? $\rightarrow$ $f(t)=0$
¿La función $f(t)=t$ es continua en el intervalo $t<1$? $\rightarrow$ es continua.
¿La función $f(t)=0$ es continua en el intervalo $t \geq 1$? $\rightarrow$ es continua.
¿En que punto se cambia la expresión analítica de la función dada? $\rightarrow$ $t=1$
¿Qué valor tiene la función dada en el punto $t=1$? $\rightarrow$ $f(1)=0$
¿Existe $\lim_{t\to 1-0} t$? $\rightarrow$ existe y $\lim_{t\to 1-0} t=1$
¿Existe $\lim_{t\to 1+0} 0$? $\rightarrow$ existe y $\lim_{t\to 1+0} 0=0$
¿La función dada es continua en el punto $t=1$? $\rightarrow$ es discontinua.

Al usar las respuestas obtenidas se construye la gráfica y se escribe la función dada en la forma analítica y en términos de la FEU:

<table>
<tr>
<td>Representación gráfica de la función definida en dos tramos:

</td>
<td>La representación analítica de la función definida en dos tramos $f(t)=\begin{cases} t & t<1 \\ 0 & t\geq 1 \end{cases}$
Al escribirla como $f(t)=\begin{cases} t & t<1 \\ 0 & t\geq 1 \end{cases}=\begin{cases} t-0\cdot t & t<1 \\ t-1\cdot t & t\geq 1 \end{cases}$
se obtiene la representación analítica en términos de la FEU $f(t)=t-tU(t-1)$.
Comprobación:
Para $t<1$, $U(t-1)=0$ y $t-t\,U(t-1)=t$
Para $t\geq 1$, $U(t-1)=1$ y $t-t\,U(t-1)=0$</td>
</tr>
</table>

2. Bosquejar la gráfica de la función $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<1 \\ t^2 & t\geq 1 \end{cases}$, expresarla en términos de la FEU y determinar la TL respectiva.

<table>
<tr>
<td>Representación gráfica de la función
$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\leq t<1 \\ t^2 & t\geq 1 \end{cases}$

</td>
<td>Esta función está definida en dos tramos, que se conectan en $t=1$. En el primer tramo, $0\leq t<1$ la función es constante igual a cero. En el segundo, $t\geq 1$ la función está definida por la fórmula $f(t)=t^2$.
Para expresarla en términos de la FEU se observa que la función t^2 se “enciende” en $t=1$, lo que se representa como $t^2\,U(t-1)$.
A partir de la forma alternativa del segundo teorema de traslación $\mathcal{L}\{U(t-a)f(t)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$, se tiene por comparación, que $f(t)=t^2$ y $a=1$.
Entonces $f(t+a)=f(t+1)=(t+1)^2$,
$\mathcal{L}\{f(t+1)\}=\mathcal{L}\{t^2+2t+1\}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$.</td>
</tr>
</table>

Del segundo teorema de traslación se tiene $\mathcal{L}\{t^2\,U(t-1)\}=e^{-s}\mathcal{L}\{t^2+2t+1\}=e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$.

Comprobación: Por la definición de transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\{t^2\,U(t-1)\}=\int_0^1 e^{-st}\cdot 0\;dt+\int_1^\infty e^{-st}\cdot t^2\;dt=0+\int_1^\infty e^{-st}\cdot t^2\;dt=\left.\frac{e^{-st}t^2}{-s}\right|_1^\infty-\frac{1}{-s}\int_1^\infty e^{-st}(2t)\,dt=$$

$$=\left.\frac{e^{-st}t^2}{-s}\right|_1^\infty+\frac{1}{s}\left[2\left.\frac{e^{-st}t}{-s}\right|_1^\infty-\frac{2}{-s}\int_1^\infty e^{-st}\;dt\right]=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\left[\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{2}{s^2}\left(\left.\frac{e^{-st}t}{-s}\right)\right|_1^\infty\right]=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-s}}{s^3}.$$

Para determinar si existe la relación positiva entre la habilidad para representar en términos de la función escalón unitario las funciones definidas por intervalos (variable independiente x_i) y el aprendizaje del tema de la Transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos (variable dependiente y_i) se realizó el estudio cuasiexperimental, transversal y de correlación. Se trabajó con el grupo de 5º semestre de la carrera de Ingeniería Química Industrial, que se imparte en la Universidad Autónoma de Nayarit, el cual estuvo integrado por 25 alumnos. La investigación se llevó a cabo en la materia de Matemáticas V. El estudio experimental se realizó durante un lapso de tres semanas.

Se observó cómo los alumnos representan una función definida por intervalos con el uso del concepto de la función escalón unitario y cómo pasan de una representación a otra (verbal, gráfica y analítica) y se identificaron las principales dificultades y beneficios de la aplicación del conocimiento previo por los estudiantes.

En la evaluación se asignaron valores de acuerdo a los diferentes niveles de ejecución. La información obtenida fue tabulada para analizar los aciertos obtenidos por cada alumno en cada actividad, los reactivos que fueron más difíciles y las observaciones acerca del tipo de errores cometidos en cada reactivo.

Resultados estadísticos

Los estadísticos de prueba que se utilizaron para determinar la significancia de la regresión, fueron la t de Student, a través de una prueba de hipótesis, y la F de Fisher, a través de una razón de varianzas. En ambos casos se consideró un nivel de significancia del 5%.

Se obtuvo el modelo lineal que describe la relación entre los Conocimientos Previos de la FEU (x) y el Conocimiento sobre la TL de FDI (y): $y = 24.744 + 0.656x$.

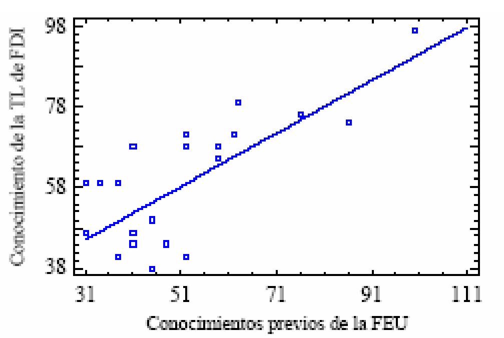


Figura 2. Diagrama de dispersión y del modelo ajustado.

El valor de P = 0.0030 obtenido en el análisis de varianza, menor que 0.05, rechaza la hipótesis nula y establece que existe una relación estadísticamente significativa entre las dos variables con un nivel de significancia del 5%. El coeficiente de correlación de 0.718 indica una relación moderadamente fuerte entre las variables. El valor de R-cuadrada indica que el modelo obtenido explica el sólo el 51.6% de la variabilidad en la variable y y que existen otros factores que deben ser considerados. Se hizo una comparación con modelos alternativos curvilíneos y el que generó el mayor valor de R cuadrada fue el modelo lineal seleccionado.

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos, se puede concluir que el conocimiento previo de la FEU, las habilidades para realizar la representación gráfica y el transitar entre las diferentes representaciones fue un factor muy importante para el aprendizaje de la Transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos.

Aunque los resultados aquí obtenidos no pueden generalizarse porque fueron obtenidos en único grupo de 25 alumnos, la metodología y los materiales de este experimento se pueden aplicar a una muestra seleccionada al azar para lograr un conocimiento estadísticamente confiable de los obstáculos que tienen los estudiantes para determinar la transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos. Además en este trabajo se consideró el conocimiento previo de la función escalón unitario como única variable independiente, sin embargo, sería interesante realizar un estudio multifactorial para determinar el impacto de otros factores.

Referencias bibliográficas

Anzaldo, V. M. (2002). Nuevo Modelo Curricular, Taller "Elaboración de la estrategia de implantación del nuevo modelo académico", Nayarit, México: Universidad Autónoma de Nayarit.

Ausubel, D.P., Novak J., Hanesian H. (1996). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Burtseva, L., Tyrsa, V. (2002). *Ejemplos de interpretación del teorema de la convolución.* Instituto de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. Recuperado el 15 de mayo de 2003, de

Cantoral, R. (1993). *Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición.* Publicaciones Centroamericanos 7, México: Cinvestav, pp. 391-410.

Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Trillas: México.

Cordero, F., Miranda, E. (2002). El Entendimiento de la transformada de Laplace: Una Epistemología como Base de una Descomposición Genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, International Thomson Editores, Vol. 5, Número 2, 133-168.

Díaz Barriga, F. (2003). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista (2ª Ed.). México: McGrawHill.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas,* No. 25, 21-40.

Gudiño, A (2000). *La problemática en la enseñanza de las ciencias,* Instituto Tecnológico de San Luis Potosí, México.

Hernández, R. A. (1998). La transformada exponencial: un puente entre los factores de integración y la transformada de Laplace. *Memorias del IX Seminario Nacional sobre microcomputadoras en la educación matemática*. Recuperado el 17 de mayo de 2002, de http://148.216.13.35/mem9sem/hernan/hernan.htm.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Recuperado el 15 de mayo de 2003, de http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/FernandoHitt.doc

Nesterova, E.D. (2000). Formación de la habilidad de estructurar el material didáctico en los estudiantes de escuela superior. Tesis de doctorado, Universidad de Krasnoyarsk, Rusia.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA FLEXIBILIZAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSALIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Dámasa Martínez Martínez, Aida María Torres Alfonso, Andrés Tellería Rodríguez, Lázaro Dibut Toledo
Universidad Central de Las Villas. (Cuba)
damasa@uclv.edu.cu
Campo de investigación: desarrollo del currículo. Nivel educativo: superior
Palabras clave: estrategia, flexibilidad, comprensión, universalización

Resumen
Como la flexibilidad es una característica esencial que deben tener los planes de estudio de la universalización de la Educación Superior, en este trabajo se propone el diseño de una estrategia didáctica para contribuir a flexibilizar y a hacer más eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática I y II para las carreras de Contabilidad, Ingeniería Industrial e Ingeniería Agrónoma. Se presentan los supuestos teóricos que sustentan la estrategia y los elementos prácticos necesarios para lograr un proceso de enseñanza aprendizaje, del cálculo diferencial e integral de funciones reales de una variable real, de forma tal que estos trabajadores puedan asumir los estudios universitarios y participar de modo activo en su propio proceso de formación, haciendo un uso intensivo de las nuevas tecnologías de la información.

Introducción

La Educación Superior cubana se encuentra en un proceso de transformación cualitativa, en el que la universalización ocupa un lugar de primer orden cuyo objetivo supremo será convertir cada rincón del país en una facultad universitaria donde trabajadores y pueblo en general reciban sus estudios superiores. Se reconoce que en las carreras universitarias donde se incluya la Matemática como disciplina básica éstos estudiantes enfrentarán una difícil tarea de aprendizaje, debido a las dificultades naturales que se presentan en la comprensión y aplicación de esta materia. Atender esta situación problémica amerita un estudio didáctico que fundamente el actuar en este modelo pedagógico, debido a lo heterogéneo del estudiantado que ingresa a la universidad por esta vía.
El trabajo propone el diseño de una estrategia didáctica para contribuir a flexibilizar y a hacer más eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática I y II para las carreras de Contabilidad, Ingeniería Industrial e Ingeniería Agrónoma.

Desarrollo

Los supuestos teóricos que sustentan la estrategia
La estrategia que se propone en este trabajo se sustenta en los presupuestos teóricos relacionados con:

- los principios de las concepciones curriculares y en específico lo relacionado con el currículum flexible para la formación de profesionales competentes.
- la significatividad didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- comprensión y actos de comprensión en didáctica de la Matemática, que vincula lo relacionado con representaciones y visualización en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática

Currículo flexible

El currículum flexible tiene la ventaja de estar centrado en el estudiante y por tanto ajustarse a sus necesidades, intereses y ritmos de aprendizaje, atiende también a las fuentes de conocimiento, aunque con una visión más interpretativa, no objetivista como en un currículum rígido. Dentro de sus desventajas fundamentales está precisamente la limitación que ofrece para el control, dado el carácter subjetivo de las interpretaciones que promueve; esta desventaja puede ser contrarrestada por varias vías y la fundamental está dada en la acción tutorial.

Las modalidades del currículum pueden establecerse de manera diversa, pero cuando se analiza como campo práctico se alude a cuatro modalidades para la concreción de las ideas pedagógicas: rígido, flexible, semiflexible y modular. Los docentes son los agentes fundamentales de cambio y los que permiten hacer realidad las propuestas curriculares. Las bases teóricas que sustentan la concepción de un currículo flexible son la teoría cognitiva y la teoría humanista.

El currículum flexible es un instrumento orientativo para configurar la práctica educativa. El carácter orientativo del currículum no es puntual, es un proceso continuo en el cual intervienen una diversidad de agentes. Como valor fundamental de la orientación se reconoce la posibilidad de ayuda que propicie la autoayuda, o sea, que propicie el desarrollo individual, social y profesional.

En esta visión más flexible y totalizadora se requiere educar en el terreno de la personalidad de los alumnos, lo que demanda de fines formativos con el desarrollo de actitudes y el fomento de valores derivados a su vez de objetivos trazados en la esfera afectiva.

Dentro del currículo flexible, se describe el subsistema práctico pedagógico

Este subsistema es medular dentro de un currículo flexible ya que las aspiraciones de cualquiera de ellos se concretan en las metas de la enseñanza.

En el diseño de la actuación del profesor se debe partir de las informaciones obtenidas en un diagnóstico inicial de los alumnos, este diagnóstico debe atender a una dimensión personal, una social y una cognitivo-profesional.

La fase que sigue a la descrita anteriormente es la parte del desarrollo curricular donde la flexibilidad cobra su pleno esplendor ya que entra en acción la metodología didáctica que engloba tanto a los principios psicoeducativos, los contenidos, los métodos, tipos de actividades, las estrategias y los recursos.

Por último se fundamenta la propuesta en que los procesos evaluativos se conciben en función de la mejora continua de cada estudiante. Atendiendo a que el cambio en la evaluación del aprendizaje exige atender a estas condiciones esenciales:

- Los tipos de aprendizaje son diferentes por tanto deben ser diferentes las formas de evaluarlos de acuerdo a sus características.
- Se registran los avances individuales de cada alumno respecto a si mismo, de manera que él pueda decidir para mejorar su desempeño.
- Aplicar una tipología integrada de evaluación.
- El proceso evaluativo debe verificar el desarrollo de competencias alcanzado por los alumnos.
- Los ámbitos de la evaluación no se limitan al ámbito referido al proceso de enseñanza aprendizaje.

La significatividad didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje

Cuando se habla de aprendizaje significativo equivale a poner el proceso de construcción de significados como elemento central del proceso de enseñanza aprendizaje; el alumno aprende un contenido cualquiera si es capaz de atribuirle un significado. También puede recibir el conocimiento sin atribuirle significado alguno, es lo que sucede cuando el alumno emplea los conocimientos de forma memorística y es capaz de repetirlos o utilizarlos sin entender en absoluto lo que está diciendo o haciendo.

Existe un aspecto que es conveniente aclarar, la mayoría de las veces, el alumno es capaz de atribuirle solo significados parciales a lo que aprende, ello implica que el profesor y los alumnos tienen significados distintos y que no tienen los conocimientos en igual extensión y profundidad. Por lo que la significatividad del aprendizaje no es una cuestión de todo o nada, y entonces es más adecuado proponernos que los aprendizajes que llevan a cabo los alumnos sean en cada momento lo más significativos posibles. Esto enfatiza el carácter dinámico del aprendizaje escolar y orienta la dirección en que debe actuar la enseñanza para que los alumnos profundicen y amplíen los significados que construyen.

¿Qué es la significatividad didáctica?

Es ese proceso a través del cual se logra una interacción entre los conocimientos previos y la nueva información, esa interacción tiene dos características; primera: activa, no es que reciban el conocimiento por vía inductiva o deductiva, de forma tradicional, sino activación que produzca cambios evolutivos para que construyan sus propios significados y el camino de su desarrollo; segunda: productiva, quiere decir que permita aplicar los conocimientos a nuevas situaciones de la realidad y ello implica que perciban la utilidad del conocimiento.

Para lograr esa activación y producción se requiere de determinada actuación por parte del profesor y por parte del alumno.

El profesor tiene que ser eficaz en su gestión, entre los factores que contribuyen a ello tenemos: es poseedor de características personales deseables, utiliza métodos eficaces para lograr el autoaprendizaje, domina un conjunto de competencias (interactiva, institucional y pedagógica didáctica) y es capaz de tomar decisiones adecuadas. Por otra parte, para ser eficaz debe integrar las funciones siguientes: revisar y comprobar el trabajo asignado (reenseñar si fuera necesario), realizar la presentación de los nuevos contenidos y habilidades, supervisar la práctica del alumno y comprobar su comprensión, realizar la retroalimentación y corrección de la práctica independiente del alumno. En la interacción didáctica no hay únicamente una asistencia del profesor al alumno, sino también una asistencia del alumno al profesor para indicarles dónde se encuentran las dificultades. El alumno debe hacer énfasis en las estrategias y no en los contenidos e ir creando habilidades metacognitivas, mediante la capacidad de reconocer y controlar la situación de aprendizaje estando al corriente de los propios estados cognitivos.

Por lo planteado, para lograr la significatividad didáctica se debe concebir la integración de la significatividad epistemológica y psicológica de los conocimientos; además tener en consideración, para su integración, aspectos fundamentales como:

- ♦ Lograr que los conocimientos adquiridos tengan valor funcional; o sea, que le sean útiles y a su vez puedan ser utilizados para generar nuevos aprendizajes.
- ♦ Lograr que se realice en todo el proceso una adecuada comunicación interpersonal entre los participantes, para que sea efectiva la comprensión de significados.

- Debe establecerse una adecuada relación entre lo afectivo y lo cognitivo en el proceso docente educativo.

Esta significatividad se logra si todo lo anterior se puede plasmar en acciones específicas en cada una de las categorías didácticas: objetivo, contenido, método, medios y evaluación.

Comprensión y acto de comprensión

El término comprensión ha sido estudiado por numerosos investigadores y puede ser entendido y utilizado tanto en el sentido conceptual como secuencial y procedimental, así Sierpinska (1991) señala que la comprensión es un objeto digno de estudio, distinguiendo varios usos de esta palabra y plantea que: "*…en la práctica de la enseñanza, "¿Habéis comprendido?" es muy a menudo otra forma de decir "¿Puedo continuar?"…* Sin embargo en la investigación considera que comprender se asume algunas veces para una noción bien definida y aparece como un ideal a ser logrado por los estudiantes", indicando que el objetivo principal de la elaboración de diseños de enseñanza, proyectos y libros de texto es promover una mejor comprensión del saber objeto de estudio en los estudiantes. Afirma además que la rapidez de comprensión no es una característica que permita discriminar ya que lo que cuenta es la calidad del nivel de comprensión, y considera la identificación, discriminación, generalización y la síntesis como distintas categorías de comprensión.

En el trabajo adoptamos el enfoque constructivista para la formación de competencias en los profesionales al que se le ha incorporado el punto de vista vigostkiano de la competencia, de acuerdo con el cual esta se homologa con el Zona de Desarrollo Próximo, según Magalys Ruiz (2004). Esta perspectiva enmarca los procesos formativos dentro de una concepción del desarrollo progresivo y gradual, adjudicando un lugar secundario a la demostración observable de los resultados como la que representa por ejemplo, un examen o un test.

Entender la comprensión como competencia reconoce la necesidad de un desarrollo mental, pero centra su interés en las descripciones y representaciones a medida que se "construyen" mediante las interacciones que se desarrollan en una institución escolar dada, ya sea entre los alumnos, entre ellos y sus profesores, entre estos últimos y entre cualquiera de estos sujetos y el contexto social en el cual se desarrolla el proceso de aprendizaje.

Hay varias condiciones necesarias para que se dé un acto de comprensión. Unas son de índole psicológica, como la atención y la intención de comprender, otras de carácter social, ligadas obviamente a las anteriores, como son el diseño de actividades significativas que logren captar la atención del alumno; y la comunicación, como medio para poder debatir y validar las propuestas de solución a dichas actividades.

La comprensión matemática, los cambios de representaciones mediante la visualización

En correspondencia con este enfoque constructivista asumimos que comprender un objeto matemático consiste en que el alumno sea capaz de reconocer sus características, propiedades y representaciones; relacionarlo con otros objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problémicas que sean propuestas por el profesor.

Especificamente en el caso del aprendizaje de las matemáticas muchos son los autores que reconocen las ventajas de las tecnologías en este proceso. Por la relación que guarda con nuestro trabajo, citamos a Miguel de Guzman (1996) quien sostiene que la visualización en las matemáticas es la representación concreta de relaciones abstractas y además considera que las ideas, conceptos y métodos en las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables geométricamente, por lo que la utilización de estos medios resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas. La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático. Del otro lado del problema didáctico a resolver, el alumno habrá comprendido un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas situaciones didácticas, en las que requerirá utilizar diferentes notaciones, así como convertir una representación en otra de manera natural.

Elementos de la estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Universalización

La estrategia se diseña para ser implementada en el currículum a nivel práctico, o sea, se muestra cómo la concepción del currículum en la Universalización de la Educación Superior, el que le ofrece a los docentes el marco propicio para diseñar y aplicar propuestas integradoras, que resuelvan los problemas que se presentan en el proceso docente educativo. A continuación se describe de forma resumida la manera de desarrollar cada una de las fases de que consta la estrategia.

Preparatoria

En esta fase se preparan las condiciones necesarias para el diseño de las acciones a implementar, para lo cual se consideran los siguientes elementos:

- ➢ Preparación del profesor
- ➢ Realización del diagnóstico de las necesidades de los estudiantes
- ➢ Establecimiento del sistema de acciones a realizar en las direcciones:
- ✓ Diagnóstico de los conocimientos matemáticos previos
- ✓ Uso intensivo de las tecnologías de la información en los medios de enseñanza
- ✓ Unidad entre lo afectivo y lo cognitivo en el proceso docente educativo
- ✓ La autoevaluación como vía para el desarrollo individual

Implementación de la estrategia diseñada

En la fase de implementación se concreta en el proceso docente educativo todo lo diseñado. Para la comprensión del desarrollo de esta fase se debe realizar un análisis del proceso docente educativo. Este proceso se estructura sobre la base de los componentes: objetivo, contenido, método, medio y evaluación.

Control

En esta fase de la estrategia se van analizando los resultados obtenidos durante todo el proceso para, en caso necesario, modificar o redirigir las acciones a realizar y al final trazar las direcciones de trabajo para posteriores aplicaciones de la misma.

Por las características del control a realizar y la información a obtener, las acciones a realizar para ello son:

1. Definir qué aspectos de la estrategia se van a controlar, cuidando que estos sean medibles y observables, de acuerdo a esto establecer los parámetros del control.

2. Definir qué vías de control se van a emplear (Observación participante, pruebas de conocimientos, análisis de casos, entrevistas, etc.)
3. Exponer cuantitativa y cualitativamente los resultados del control y los cambios operados.
4. Arribar a conclusiones parciales de los resultados que se obtienen, responder a ¿Cómo estaban antes?, ¿Cómo están después?
5. Valorar la influencia de la estrategia mediante los resultados obtenidos en el control y en éste los cambios observados.

Durante el desarrollo de esta fase se va retroalimentando de acuerdo a los resultados y se modifica el diseño inicial, de ser necesario, para que se cumpla con el objetivo propuesto.

Conclusiones

Se fundamenta teóricamente el diseño de una estrategia didáctica que contribuye al logro de la flexibilidad del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la Universalización.
Por no contar con materiales didácticos para el estudio de la Matemática concebidos con las características que se requieren para el desarrollo de un currículum flexible, característica esencial que tendrán los planes de estudio de la universalización de la Educación Superior, se propone un sistema de acciones que incluye el uso intensivo de las tecnologías de información en aras de lograr la comprensión matemática de manera significativa.
Los medios informáticos integrados a la estrategia, que se desarrollarán y validarán por esta investigación: los laboratorios virtuales de Matemática empleando el asistente matemático DERIVE y los Entrenadores Inteligentes de límite, continuidad, cálculo diferencial e integral, podrán ser utilizados como recursos complementarios en las diferentes modalidades en que se estudian las carreras universitarias.
La estrategia didáctica que se validará por esta investigación, permitirá una preparación más eficiente a los estudiantes y profesores de las carreras que estudien Matemática en la Universalización de La Educación Superior, es decir, en todas las universidades del país.
Esta actuación didáctica permitirá elevar el interés hacia la Matemática y la percepción de su utilidad por parte de profesores y estudiantes.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y; Bosch M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática*. ICE- Horsori, pp213-225; 277-290.

De Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización*. Disponible en: http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm

Martínez M., D. (2003) *Estrategia para el logro de la significatividad didáctica en la formación del concepto de función para la licenciatura en Economía*. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas sin publicar, UCLV, Santa Clara, Cuba.

Ruiz I., M. (2003). *¿Qué es un currículo flexible?* México: Ediciones Euterpe.

Ruiz, M (2004). *Hacia un nuevo concepto de la competencia pedagógica didáctica*. México: Arcadia. Grupo Editorial Norma, p. 9-21.

Vega Gorgojo, G., Gómez Sánchez E, (2004). El papel facilitador de las TIC en un proceso de aprendizaje colaborativo. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa vol.1 nº 1 ISSN 1695-288X*. 1(1):251-268.

NOCIONES MATEMÁTICAS Y DESARROLLO DE PROCESOS COGNITIVOS DE ALUMNOS [6, 8] CON PERCEPCIÓN AUDITIVA DIFERENCIADA

Ignacio Garnica Dovala, Hilda Eneyda González Ortiz
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
hgonzalez@cinvestav.mx

Campo de investigación: percepción, cognición y/o lenguaje. Matemática Educativa
Palabras clave: nociones matemáticas, percepción, cognición

Resumen
El campo de interés de la presente investigación es la *percepción, cognición y lenguaje*, frente a situaciones que incluyen nociones matemáticas. La investigación se dirige a reconocer la influencia de una percepción auditiva diferenciada[****] o visual en la expresión del pensamiento matemático (Garnica en prensa). En el caso de los niños con percepción auditiva diferenciada, consideramos sordo profundo a la pérdida total de la sensibilidad del oído, y como débil auditivo cuando esta pérdida es parcial. Se habrán de considerar sus modos de expresión relacionados con los fenómenos percibidos ante las limitaciones señaladas (fundamentalmente en el ámbito de la comunicación). Esto plantea a la investigación reconocer e interpretar aquellas expresiones relacionadas con el pensamiento matemático del niño ante la solución de tareas planteadas en el aula.

Preguntas de investigación

- ¿Qué caracteriza a los procesos cognitivos relacionados con las nociones matemáticas, implícitas en actividades dentro del aula, cuando la percepción auditiva no es completa?
- ¿Cómo diferenciar en los resultados de una actividad lo que es producto de un proceso de cognición, y no solamente de un problema del lenguaje o de la comunicación?

Escenario de Investigación

Las comunidades integradas por personas con déficit de audición o visión son comunidades poco atendidas en el ámbito escolar, bajo la consideración de un acuerdo colegiado con una institución que atiende a poblaciones en tal sentido, se plantea la caracterización específica. Educar en esta diversidad significa plantear estrategias adecuadas, un cambio de actitud de la docencia, así como respetar procesos.
La investigación se realiza en el Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje, (IMAL); Institución orientada a dar cuenta de la oralización como propósito fundamental y desde un punto de vista interdisciplinario ante la ausencia auditiva total (ver tabla 1). De manera paralela se trabaja con un alumno con problemas visuales que acude semanalmente al Cinvestav del IPN.
La investigación se realiza con cinco alumnos integrados en un grupo de 3er. año de preescolar, atendidos por una docente. Su condición corresponde a los niveles de audición indicados en la Tabla 1.

[****] Pérdida de audición: a) prelocutiva (anterior a la adquisición de la lengua);b) sordera adquirida (después de la adquisición y uso del lenguaje); c) en función del grado de pérdida: *audición normal (umbral inferior* a *20db),* ***leve*** *(umbral entre 20db y 40db),* ***mediana*** *(umbral entre 40db y 80db),* ***severa*** *(entre 70db y 90db),* ***profunda*** *(umbral superior a 90db).*

Tabla 1. Niveles de audición de los niños participantes en el estudio.

Alumno	Oído derecho	Oído izquierdo	Tipo de auxiliar	Nivel de audición
A	88.75	86.25	A. Aud.	Sordo profundo
Ab	11.25	105	A. Aud.	Anacusia
C	106.25	113.75	I.C.	Anacusia
G	93.75	92.5	A. Aud.	Sorda profunda
M	75	108.75	A. Aud.	Anacusia

Se ha observado durante el desarrollo de las actividades que las respuestas de los niños dependen de su escucha (en relación a sus niveles auditivos), de su mirada, de su visión, de su sensibilidad al tacto, de los aromas que perciben, por lo que es pertinente verificar, a partir de evidencias previas, que su percepción auditiva corregida o amplificada contribuya a su expresión de respuestas que revelen su proceso de cognición.
El método queda definido por el órgano operativo de la investigación en curso.”Sistema IMAL” fig. 1.

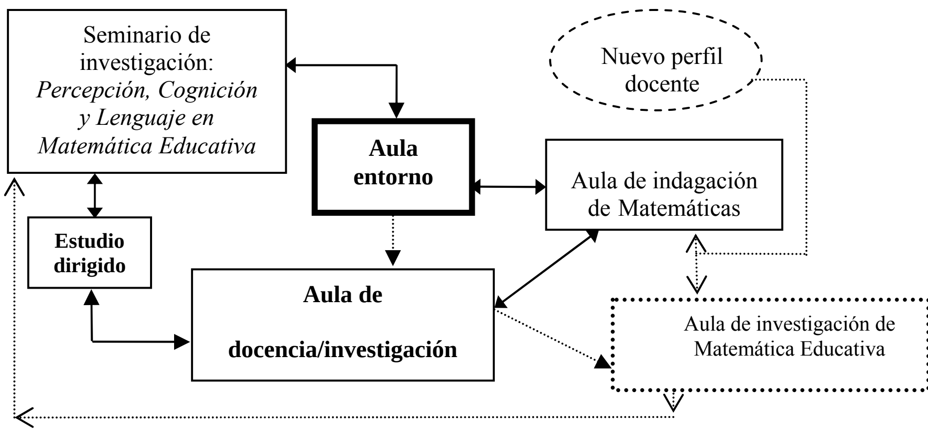


Figura 1. Órgano operativo de la *investigación en curso*. Sistema IMAL.

En “*aula de docencia investigación*” conformada por la titular del grupo en interacción con la responsable de la investigación en curso, se siguen los procedimientos asociados a los objetivos del estudio (SEP 2004); en el “*aula de indagación”* la titular del grupo desarrolla las actividades institucionales bajo la observancia de su reflexión y autocrítica, este espacio por tanto, pone en práctica los elementos esenciales a los procesos indagatorios como resultado de la misma.
Finalmente el “*estudio dirigido*” se convierte en un órgano de reflexión conjunta pertinente al seminario que pone en juego las ideas de la indagación y la investigación en curso y que permiten el acercamiento a los objetivos planteados. De esta manera por ser en “*curso*” la “*investigación*” precisa sus términos hacia la consolidación de una respuesta a las preguntas planteadas.

Noción de número

En relación con la noción de número, los alumnos reproducen las acción presentadas por el profesor, lo cual se verifica cuando al organizar *colecciones de objetos de menor a mayor*, repiten *la acción* sin continuar la secuencia de la seriación (un carrito, dos carritos, tres carritos…) hasta que se realizan otras acciones que rompen con el esquema, y es entonces cuando se pueden diferenciar respuestas relacionadas con procesos cognitivos.

Durante el desarrollo de la actividad fue difícil romper con una tendencia a la reproducción de acciones de la docente. Se colocó una colección de un elemento, en seguida otra con dos elementos y posteriormente una con tres elementos; se le pidió al alumno que colocara la que seguía de acuerdo a las acciones que observaba. El alumno volvió a formar las mismas tres colecciones, se dio la misma instrucción utilizando diferentes palabras e invitando al alumno a ver las acciones realizadas, él volvía a realizar las mismas acciones, se hizo hincapié en la observación de lo realizado y una de las alumnas después de varios intentos colocó una colección de cuatro elementos, fue entonces cuando sus compañeros mostraron una actitud de aprobación.

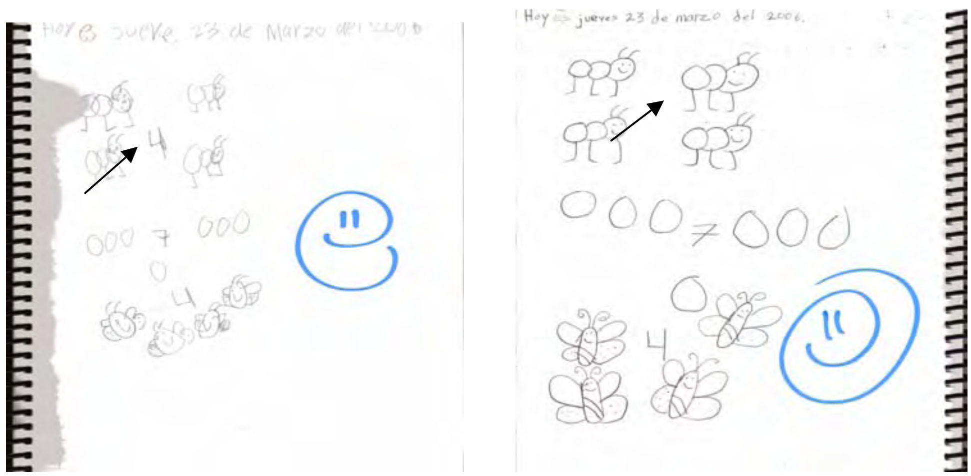


Figura 2. Dibujo de colecciones.

Después de varias actividades semejantes a la descrita, con diversos objetos (carritos de juguete, de diferente forma, tamaño y color, tazos de diferente decorado, pelotas de diferente tamaño y color, fichas de colores: grandes, medianas y chicas y el ábaco), se pidió a lo alumnos que las compararan considerando la cantidad de elementos de cada una de ellas, posteriormente se pidió que dibujaran en su cuaderno colecciones de diferente cantidad de elementos (ver figura 2).

La indicación textual fue "dibuja una colección de cuatro gusanitos", "dibuja una colección de siete pelotas" y por último "dibuja una colección de cuatro mariposas"*,* sin haberles solicitado que colocaran el numeral que representa la cantidad de elementos de la colección, bastó con que uno lo hiciera para que los demás lo anotaran, (*figura 2* muestra el ejercicios de dos alumnos; en este ejemplo se puede apreciar que la alumna de la derecha en la primera colección no coloca el numeral sin embargo lo hace en los ejercicios siguientes al observar el ejercicio de su compañero). Del análisis del registro en video resulta la influencia de la enseñanza por sus prácticas en el aula y búsqueda de la aceptación del niño a la afirmación formulada por ella.

La influencia del "supuesto conteo" uno por uno, la tendencia a tomar un objeto y asignarle un numeral (que puede ser consecutivo en la numeración formal o no), el pedirle que forme la colección en un sólo movimiento, permite que el alumno elabore estrategias que agilizan la identificación de una colección; como operaciones clasificatorias (Vergnaud 1998). El alumno vio la cantidad de objetos, en ocasiones los distribuyó para facilitar su "conteo", los agrupó por tamaño, los colocó uno cerca de otro, los "contó" ayudándose con los dedos para evitar señalar uno por uno, utiliza otras partes de su cuerpo para realizar el "conteo". El análisis de estas acciones realizadas por el alumno nos proporciona elementos para hablar de una comparación de colecciones.

Urna y noción de "evento seguro"

Se planearon tres actividades referidas a la noción de probabilidad para posibilitar la identificación de rasgos de pensamiento probabilístico. Una de las actividades se realizó con una urna y cinco canicas de diferente color, las canicas estaban a la vista de los niños, se hicieron extracciones sin reemplazo al azar. Se le preguntó ¿Cuál va a salir?; los alumnos *anticipaban* el resultado nombrado un color tomando en consideración sólo los que estaban dentro de la urna, al quedar sólo una (*resultado seguro*) la respuesta siempre fue acertada.
Se realizó la misma actividad utilizando una caja no transparente y pelota de diferente color e igual tamaño. Al introducir las pelotas el alumno veía la cantidad y el color, se le preguntó de igual manera. Los alumnos realizaron extracciones sin reemplazo, al azar, cada vez anticipando el posible resultado. Los resultados fueron semejantes al caso de la urna. Ante la dificultad de comunicación de sus respuestas, uno de ellos en particular, no extrajo la última pelota de la caja hasta asegurar que habíamos entendido su anticipación. Esto permitió verificar que el alumno sabía que era seguro el resultado, recordaba el color de las pelotas que ya se habían extraído y por ende el color de la pelota restante.
Los resultados obtenidos no permiten asegurar que haya noción de evento seguro. Sólo con estos datos no se puede afirmar cosa alguna sobre la noción de evento seguro. Todo indica que las respuestas obedecen a procesos de memoria. Investigaciones posteriores permitirán de estos elementos, dar seguimiento a las nociones asociadas a la probabilidad.
Es importante señalar que planes y programas de preescolar no consideran los contenidos para la comprensión de ideas de probabilidad.

Forma y Figura

"Numerosas investigaciones realizadas en el transcurso de varios años, recopiladas en la reciente obra de Bruner (1957) muestran que la aparente sencillez y el carácter directo de la percepción visual de un objeto real, o su representación son con frecuencia ilusorios, u basta con que compliquen un tanto las condiciones de la percepción visual (por ejemplo, la correlación entre la figura y su fondo, o pasar a la percepción de figuras que pasan con rapidez) para que aparezca con claridad toda la complejidad de este proceso. La percepción visual de un objeto o su representación constituye un complejo proceso activo que consiste en la identificación de rasgos individuales de este objeto o imagen, su síntesis formando un conjunto o grupo y la elección definitiva entre una serie de alternativas. En este proceso, que tiene un complejo carácter reflejo intervienen los aparatos sensorial y motor, en particular, el aparato que mueve los ojos, y realizan una actividad orientadora-investigadora" (R. Luria)
Se desarrolló, sistemáticamente trabajo con un alumno que presenta una percepción visual limitada, con el interés mismo de observar elementos de compensación en percepciones diferenciadas (auditiva y visual).

Ante la percepción visual diferenciada y la noción de perpendicularidad, se obtuvo el siguiente resultado producto de una actividad con doblado de papel. El propósito fue localizar línea perpendiculares y con la hoja facilitar la distinción del ángulo de 90°.
Con el doblado que hizo el niño se le pidió que trazara en su cuaderno una par de líneas perpendiculares (ver figura 3).

90°

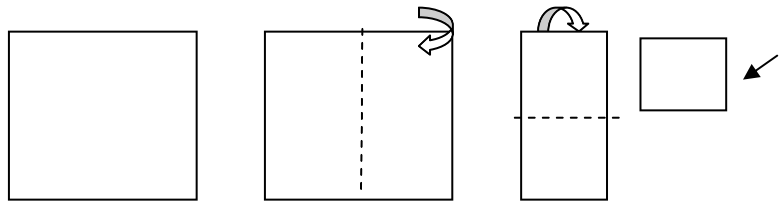


Figura 3. Doblado de papel.
Con este último doblado, a manera de escuadra, el niño traza el primer par de líneas y continua trazando rectas perpendiculares formando un cuadrante, el cual atraviesa por un par de diagonales; al cuestionarlo sobre la perpendicularidad, él responde señalando con el trazo de líneas de colores (azul, naranja, verde, morado y rosa) los ángulos de 90°. Localiza aproximadamente diez ángulos rectos (ver figura 4, en ella se señala con una punta de flecha una de las líneas que dibujó para identificar el ángulo recto).

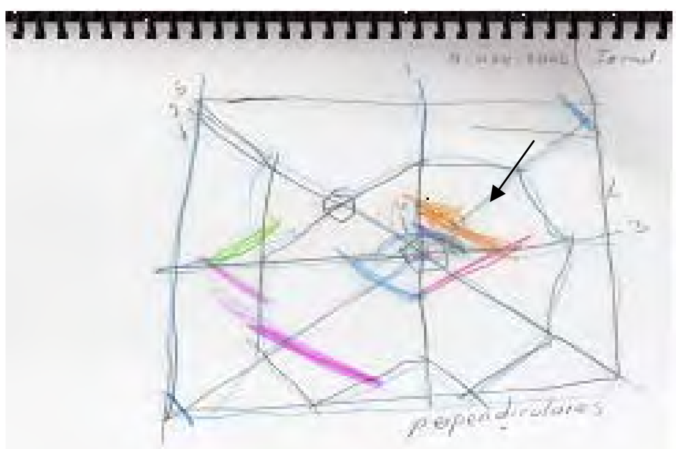


Figura 4. Perpendicularidad.

La *figura 4* muestra la composición detallada de trazos *aparentemente* desorganizados, producto de las limitaciones de su campo visual.
La argumentación que da el niño mediante oralización de la composición descrita, parece indicar principios cognitivos que el niño tiene de la noción de perpendicularidad, con líneas de diferente color indica los ángulos de 90° que caracterizan esta propiedad.
Los resultados son punto de partida para precisar el sentido de la pregunta de investigación y fortalecer los elementos orientados a estructurar los procedimientos de estudios clínicos posteriores.
Se tienen resultados importantes sobre la noción de cantidad derivada de las actividades sobre colecciones, que nos han permitido vigilar las tareas de correspondencia, de seriación y de orden, realizadas por los alumnos bajo la dirección de la docente. Esta última, motivada de manera notoria por la indagación.

En estas condiciones, se hace necesario un periodo de preclínica que nos permita trasladar todos estos resultados y observaciones a una inquisición sistemática, en donde estén controlados algunos factores como la comunicación y las respuestas hasta ahora mecanizadas por los alumnos. El propósito será precisar el cuestionamiento a los alumnos, las acciones a realizar, los materiales adecuados a tal fin y los tiempos de realización, para obtener respuestas que den indicios de una operación mental.
Los resultados obtenidos en la preclínica sustentarán un periodo de *clínica*. Durante éste, se pretende obtener elementos que evidencien los procesos cognitivos en relación con la producción de nociones de cantidad. Para el desarrollo de la presente investigación, el método clínico incorpora la característica particular de la observancia de la percepción auditiva del alumno, motivo por el cual la *preclínica* es un periodo necesario para diseñar la ruta a seguir en la *clínica.*

Referencias bibliográficas

Garnica I. Percepción auditiva diferenciada. Elementos para un modelo de comunicación de la unidad para la investigación en Matemática Educativa. *Matemática Educativa, 30 años y una mirada actual* (en prensa).

Luria, Alexander (2005), *Las funciones corticales superiores del hombre.* Fontamara (parte II pag. 166).

Ojeda, A.M. Introducción a la lógica de los programas de indagación, investigación y docencia en el aula de Matemática Educativa. En Memoria del Seminario *Estudios sobre el conocimiento matemático ante la percepción y el lenguaje*. (IMAL-Área de Ciencias de la Cognición, DME-Cinvestav del IPN. México (en prensa).

SEP (2004) Programa de Educación Preescolar. México

Vergnaud, G. (2001). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Editorial Trillas 1998. (pag. 15 – 100).

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO: SU HISTORIA

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas. (Uruguay)
filomate@adinet.com.uy, matemoni@adinet.com.uy
Campo de investigación: formación de profesores, resolución de problemas, pensamiento algebraico, pensamiento geométrico
Niveles: medio, superior
Palabras clave: ecuaciones de segundo grado, problemas, culturas antiguas

Resumen
Presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de segundo grado. Recorreremos, sin pretender ser exhaustivos, parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, griega, hindú, árabe hasta la resolución dada por François Viète.

En los últimos años ha crecido el interés en el estudio del rol que puede jugar el uso de la Historia de la Matemática en la enseñanza y el aprendizaje de esta asignatura. Se han realizado varios trabajos sobre este tema en los que se apunta a que el uso de la historia de la matemática en la clase no debería ser realizado desde una perspectiva ingenua, esto es, que usar la historia no significa enseñar matemática tratando de que el alumno reproduzca las distintas etapas del desarrollo de la disciplina. Tampoco significa que el uso del conocimiento histórico consista en contar con un conjunto de anécdotas e historias que sirvan de entretenimiento a nuestros estudiantes.
La Historia de la Matemática brinda a los docentes y futuros docentes la posibilidad de reconocer que la matemática, en su desarrollo, ha acumulado un enorme conjunto de hechos que permiten ver que los conceptos que la sustentan, tienen su origen en la abstracción de la realidad objetiva y que existen relaciones importantes entre el desarrollo matemático y el desarrollo de la sociedad.
"La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- *hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas*
- *enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes,...*
- *señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente,...*
- *apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes."* (de Guzmán 1992)

Por otro lado Nuñez y Servat (1998) nos dicen: *"La perspectiva histórica nos permite explicar mejor el papel que juegan determinadas técnicas o métodos matemáticos frente a otros que predominaron en el pasado. [...] Tampoco se pueden despreciar las posibilidades de 'hacer matemática' que ofrece en análisis de un problema en un contexto o con una metodología diferentes a las habituales."*
Teniendo en cuenta lo antes mencionado y a efectos de ser usado en los cursos de formación de profesores, presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de segundo grado. Recorreremos parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, griega, hindú, árabe, entre otras, en la resolución de estos problemas. De esta manera podremos comparar los resultados y técnicas que involucran su resolución hoy en día con los resultados y procedimientos conocidos en otras épocas.

Babilonios (2000 a.C. – 600 a.C.)

Para los Babilonios la resolución de la ecuación cuadrática no ofrecía grandes dificultades ya que poseían una gran habilidad para las operaciones algebraicas gracias al uso de tablas de multiplicación hasta 59x59, de división, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas, entre otras. Gracias a ello podían trasponen términos, eliminan factores, completan cuadrados, etc. (Boyer, 1986. pp. 55).

En las tablillas de arcilla, de donde proviene la información que tenemos de ellos, encontramos problemas que, en el lenguaje actual, se refieren a ecuaciones del tipo:

$x^2 + bx = c$ $\qquad$ $x^2 = bx + c$ $\qquad$ $x^2 + c = bx$

con b y c positivos. No figura la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ ya que esta no tiene raíces positivas. Esto mismo sucederá hasta la época moderna.

En la Tabla BM 13901 se encuentran 21 problemas que dan origen a ecuaciones de 2º grado y a sistemas de ecuaciones, donde una de ellas es de 2º grado. En cada problema figura el enunciado y cómo se debe proceder para su resolución.

Problema 1

El enunciado y solución de este problema traducido a nuestro sistema:

He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo ¾.

Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1 (:1/2). Multiplicarás ½ por ½ (:1/4). Agregarás ¼ a ¾: 1. 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el ½ que has multiplicado de 1 (:1/2). ½ es el lado del cuadrado. (Sessa, 2005. pp. 21-25).

En el lenguaje del álgebra actual se reduce a resolver la ecuación: $x^2 + x = \frac{3}{4}$

cuya solución positiva estaría dada por : $\frac{-1+\sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2}$

Si traducimos la solución dada en la tabla obtenemos:

Pondrás 1, la unidad: 1

Fraccionarás la mitad de 1 (:1/2): $\frac{1}{2}$

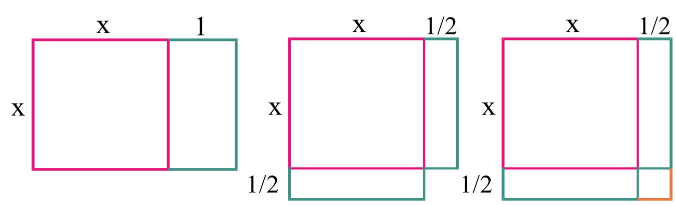
Multiplicarás ½ por ½ (:1/4): *(1/2)2*

Agregarás ¼ a ¾: 1: *(1/2)2 + ¾*

1 es (su) raíz cuadrada: $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

Restarás el ½ que has multiplicado de 1 (:1/2). ½ es el lado del cuadrado:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2}$$



Interpretación geométrica

Esta última figura medirá

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

de donde el lado del cuadrado es 1. Al ser el lado x + ½ obtendremos que x = ½.

En forma algebraica tenemos: $x^2 + x = \frac{3}{4}$

$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = ½$ que no es otra cosa que el conocido método de completar cuadrados.

Euclides (300 a.C.): Los Elementos

Trabajaremos con una variante de la Proposición 14 del Libro II.

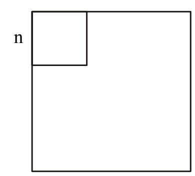
Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. (Se entiende por figuras iguales a las que tienen igual área.)

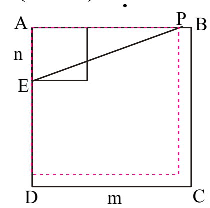
Variante: Construir un cuadrado igual a un rectángulo dado.

En el lenguaje del álgebra actual debemos resolver la ecuación: x2 = a.b

Por la Proposición 5 del mismo libro, Euclides sabe que se puede interpretar cualquier rectángulo como la diferencia de dos cuadrados. En el caso que nos ocupa, es fácil de comprobar que el rectángulo a.b lo podemos interpretar como $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Llamemos $m = \frac{a+b}{2}$ y $n = \frac{a-b}{2}$





Consideramos los cuadrados de lados m y n.

Debemos hallar x tal que x2 = m2 – n2

Si interpretamos a igualdad anterior usando la relación de Pitágoras, entonces debemos encontrar el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea *m* y el otro cateto *n*.

Para ello trazamos una circunferencia con centro en E y radio m ($C(E, m)$)

$C(E, m) \cap AB = \{P\}$. El cuadrado buscado es el punteado.

Veamos otro ejemplo interesante que es una variante de la Proposición 28 del Libro VI de Los Elementos, planteada por Sessa (2005).

Dividir una recta dada de manera que el rectángulo contenido por sus segmentos sea igual a un espacio dado. Ese espacio no debe ser mayor que el cuadrado de la bisección de la línea. (Cuando se habla de recta se está haciendo referencia a un segmento).

Si l es la medida del segmento dado, la condición impuesta por Euclides es que la superficie no sea mayor que (l/2)2. Sabemos que cualquier rectángulo construido a partir de un segmento dado se puede escribir como diferencia de cuadrados siendo el mayor de ellos de lado l/2, por lo que efectivamente el rectángulo tendrá un área menor que (l/2)2.

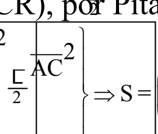
Por otra propiedad se sabe que cualquier superficie rectilínea se puede escribir como un cuadrado, por lo que trabajaremos con ese cuadrado S.

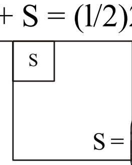
Para hallar el punto de corte (al que llamamos C) en el segmento dado, la construcción que se realiza y los argumentos dados son similares a los presentados en la construcción correspondiente al problema de la Proposición 44 del Libro I.

Presentamos a continuación la construcción en la siguiente sucesión de figuras:

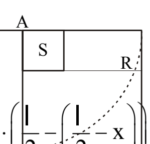
En (ACR), por Pitágoras: AC2 + S = (l/2)2

$\left.\begin{array}{l} S = \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \overline{AC}^2 \\ AC = \frac{l}{2} - x \end{array}\right\} \Rightarrow S = \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2$

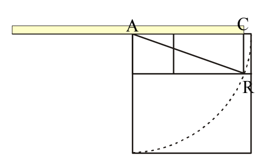




$\Rightarrow S = \left(\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2} - x\right)\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} - x\right)\right)$



$\Rightarrow S = (l - x).x$



de donde C es el punto buscado.

En lenguaje algebraico actual tenemos: $x.(l - x) = S \Rightarrow x^2 - l.x + S = 0$

La condición para que esta ecuación tenga solución es: $l^2 - 4S \geq 0 \Rightarrow 4.\left(\frac{l^2}{4} - S\right) \geq 0$
(l/2)2 – S ≥ 0 que no es otra que la condición impuesta por Euclides en el enunciado.

Brahmagupta (598-660)

Astrónomo y matemático indio. Es, sin duda el mayor matemático de la antigua civilización india. Desarrolló su actividad en el noroeste de la India y resumió sus conocimientos astronómicos en un libro escrito en el año 628, en el que rechazaba la rotación de la tierra. El rasgo más importante de esta obra es la aplicación de métodos algebraicos a los problemas astronómicos. Los matemáticos indios rindieron un gran servicio al mundo, ya que alguno de ellos, posiblemente Brahmagupta ideó el concepto y el símbolo "cero". Se cree que definió el cero como resultado de restar un número de sí mismo y dio algunas propiedades que lo involucran.

Veamos cómo resolvía la ecuación: $x^2 – 10x = -9$

La solución que plantea Brahmagupta es: *"Multiplica el número absoluto, -9, por el [coeficiente del] cuadrado, 1; el resultado es –9. Añádelo al cuadrado de la mitad [del coeficiente del] término medio, 25, y resulta 16; cuya raíz cuadrada, 4, menos la mitad del [coeficiente de la] incógnita, -5, es 9; y dividido por el [coeficiente del] cuadrado, 1, da como resultado el valor de la incógnita, 9."* (Meavilla Seguí, V., 2001).

Siguiendo la explicación dada por Brahmagupta podemos tener una generalización para la solución de una ecuación del tipo $ax^2 + bx = c$:

"Multiplica el número absoluto, c, por el [coeficiente del] cuadrado, a; el resultado es ac: a2x2 + abx = ac. *Añádelo al cuadrado de la mitad [del coeficiente del] término medio,* (b/2)2 *, y resulta* ac + (b/2)2:

a2x2 + abx + (b/2)2 = ac + (b/2)2 ⇒ (ax + b/2)2 = ac + (b/2)2 *cuya raíz cuadrada,* $\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ *, menos la mitad del [coeficiente de la] incógnita,* b/2, *es;* $-\left(\frac{b}{2}\right) + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$:

$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \Rightarrow ax = -\left(\frac{b}{2}\right) + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ *y dividido por el [coeficiente del] cuadrado, a, da como resultado el valor de la incógnita."* $x = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$

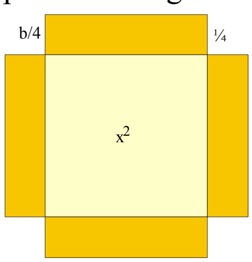
Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi (780 – 850 aprox.)

Sobrevivieron cinco de sus obras y la más importante sobre este tema es *"Precisiones sobre el cálculo del al-jabr y al-muqabala"*. En él se describen seis tipos canónicos de ecuaciones de primer y segundo grado ya que sus coeficientes debían ser positivos ya que no reconocían a los negativos como números. Admite coeficientes y soluciones racionales y positivas y para las ecuaciones de segundo grado el coeficiente principal era siempre 1. El enunciado se daba en forma retórica en términos de tesoros (x^2) raíces (bx) y números ©, donde a la incógnita se la llamaba "cosa".

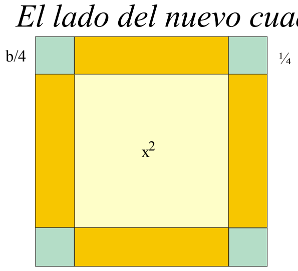
El libro estaba estructurado de la siguiente forma:

1) Se daban reglas de resolución de cada una de las formas canónicas antes mencionadas. El tratamiento se hacía en base a dos operaciones:

al-jabr – que literalmente significa insertar restaurar en el sentido médico de colocar en su lugar un miembro dislocado. En el matemático significa trasposición de términos: sumar a ambos miembros para obtener cuadrados.
al-muqabala – literalmente comparación y se refiere a la reducción de términos semejantes: restar a ambos miembros para quitar lo que es igual.
2) Se plantean una serie de problemas y la resolución de los mismos que consistían en:
(i) construir una ecuación, (ii) reducirla a forma canónica, (iii) aplicar regla
Como en aquella época no había un lenguaje estructurado para escribir ecuaciones, y menos, métodos algebraicos para resolverlas, este matemático recurrió a la geometría para resolver estas ecuaciones inspirado en los Elementos de Euclides.
(Moreno, R. 2002). Realizaba una interpretación geométrica de los pasos y la validación del procedimiento en base a las propiedades de las figuras.
Explicaba sus métodos de resolución con ejemplos concretos pero sabiendo que tenían validez general.
Veamos como ejemplo la forma de resolver la ecuación $x^2 + x = 1$.
$x^2 + x = 1$ $\quad$ $[x^2 + bx = c]$
El primer miembro: $x^2 + x$ $[x^2 + bx]$ representa la superficie lateral de una caja (como de zapatos), cuya base es cuadrada de lado x y las cuatro caras laterales tienen un lado igual a ¼ por un lado igual a x.



La superficie de la base cuadrada vale lado por lado, es decir: $x.x = x^2$
La superficie de cada cara lateral es: $¼.x = x/4$ *[(b/4)x]*
Como hay 4 caras, la superficie total será: 4. x/4= x [4.(b/4)x = bx]
Esta superficie vale: 1 *[c]* , porque así dice la ecuación inicial.
Ahora, Al-Khwarizmi, completa los cuatro cuadraditos de los ángulos, para obtener un nuevo gran cuadrado y calcula la superficie del mismo.
La superficie del nuevo cuadrado vale 1 + 4 cuadraditos: 1 + 4.(1/4)2 [c + 4.(b/4)2]
El lado del nuevo cuadrado es x + 2.1/4 [x + 2.b/4]



Entonces tenemos:

$$\left(x + 2 \cdot \frac{1}{4}\right)^2 = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \qquad \left[\left(x + 2 \times \frac{b}{4}\right)^2 = c + 4 \times \left(\frac{b}{4}\right)^2\right]$$

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \qquad \left[x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}\right] \Rightarrow$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \left[x = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2}\right]$$ (fórmula actual).

François Viète (1540 – 1603)
Introduce utilización de letras para expresar en forma general los datos (consonantes) y las incógnitas (vocales). El plan era copiar de la geometría (clásicos griegos) el tratamiento de lo general con la utilización de estas letras, como hacía Euclides en las demostraciones. Esto permitía no sólo identificar los objetos con que trataba, sino también establecer condiciones de existencia y unicidad a través del cálculo algebraico.
En lugar de ir de lo que se conoce a lo que se desconoce (síntesis), como lo hacían los griegos, parte de suponer que el valor de la incógnita está y establece una relación de igualdad expresando de dos formas distintas una cantidad que involucre la incógnita. Tal igualdad será cierta para el o los valores adecuados de la incógnita. (do Amaral, J. T., 1988).
Veamos el método de Viète para la resolución de la ecuación de segundo grado:

$ax2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$

Introduce 2 variables auxiliares mediante el cambio de variable: $x = t + y$:

$a(t+y)^2 + b(t+y) + c = 0 \Rightarrow \quad a\left(t^2 + 2ty + y^2\right) + b(t+y) + c = 0$

Ordenando en potencias de y se obtiene: $ay^2 + (2at+b)y + \left(at^2 + bt + c\right) = 0$

Anula el término en y sustituyendo $t = -\frac{b}{2a}$: $ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$

Operando y despejando se obtiene: $y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

si $b^2 - 4ac \geq 0$ entonces $\quad y = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene: $x = t + y = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

El conocimiento por parte de los docentes de cómo, cuándo y por qué se utilizaron determinadas técnicas de resolución de problemas, de cuándo y por qué subsistieron unas y otras fueron dejadas de lado les proporciona algunos elementos que se ponen en juego en el aula que lo ayudarían en su labor docente.

Al respecto Miguel de Guzmán (1992) dice: *"el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas, para:*

- *comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos*
- *entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática*
- *utilizar este saber como una sana guía para su propia pedagogía."*

Referencias bibliográficas

Bashmakova, I. y Smirnova, G. (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*. U.S.A.: The Mathematical Association of America.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

da Cunha Fragoso, W. (2000). Uma abordagem histórica da equaçao do 2º grau. Brasil: *Revista do Profesor de Matemática*, nº 43, págs. 20-25.

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Buenos Aires: OMA.

do Amaral, J. T. (1988). Método de Viète para resoluçao de equaçoes do 2º grau. Brasil: *Revista do Profesor de Matemática*, nº 13, págs. 18-20.

Larios Osorio, V. (2001). Filosofía e historia de la matemática en la formación docente. *Educación Matemática*, Vol.13, nº3, pp. 64-74.

Meavilla Seguí, V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Millán, A. (2004). Euclides. *La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid: Nivola.

Moreno, R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y matemático.* Madrid: Nivola.

Núnez, J. y Servat, J. (1998). Los recursos históricos en la educación matemática: el tratado de Alarifes de Diego López de Arenas. *Educación Matemática*, Vol.10, nº2, pp. 121-132.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectiva.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO: SU HISTORIA

Mario Dalcín, Mónica Olave
Instituto de Profesores Artigas. (Uruguay)
filomate@adinet.com.uy, matemoni@adinet.com.uy
Campo de investigación: formación de profesores, pensamiento geométrico, pensamiento algebraico, historia de la matemática
Nivel educativo: medio, superior
Palabras clave: ecuaciones de primer grado, problemas, culturas antiguas

Resumen
Presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de primer grado. Recorreremos, sin pretender ser exhaustivos, parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, egipcia, griega, en la resolución de estos problemas y haremos un análisis de la resolución planteada comparándola con la actual.

Introducción

A partir de la década del 90 se ha empezado a investigar acerca del uso y valor de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática. Prueba de ello es el trabajo que se empezó a hacer a partir del ICMI 2000 (International Commission on Mathematics Instruction) abordando el estudio del rol de la historia de la matemática en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
Según algunos estudios se evidencia el interés creciente entre los profesores de matemática en la historia de la matemática; al mismo tiempo señalan las dificultades de los docentes en acceder a materiales que permitan un uso real de la historia en sus clases. En muchos países europeos se formaron grupos de investigación en torno al tema. (Gulikers y Blom, 2001)
Con respecto a la historia de la matemática y a la necesidad o conveniencia de estudiarla, de Guzmán (1992) dice:
"A mi parecer, un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado.
La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico.
La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas."

Objetivo y forma de trabajo

Con el propósito de contribuir a la formación de los estudiantes de profesorado de matemática presentamos una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas a problemas que en el lenguaje del álgebra actual nos remiten a ecuaciones de primer grado. Recorreremos parte del camino que transitaron culturas como la babilónica, egipcia, griega, en la resolución de estos problemas. De esta manera podremos comparar los resultados y técnicas que involucran su resolución hoy en día con los resultados y procedimientos conocidos en otras épocas.

La forma de trabajo seguida implicó:

- ♦ Análisis de fuentes secundarias (debido a ausencia en el medio de fuentes primarias) a fin de identificar problemas que implicaron el uso de una ecuación de primer grado para su resolución.
- ♦ Reseñar brevemente el tratamiento que recibieron los problemas en la historia, buscando interpretar las soluciones dadas a los mismos.
- ♦ Contrastar las distintas perspectivas. En relación con esto último es fundamental el aporte de algunos autores respecto a clarificar el sentido de los problemas originales.
- ♦ Evaluar la consistencia y pertinencia de los argumentos usados a la luz de los cánones aceptados en la actualidad.

Babilonios (2000 a.C. – 600 a.C.)

La información que nos llega de las matemáticas babilonias es a través de tablillas de arcilla, en donde registraban sus actividades. Existen cerca de 180 tablillas que incluyen problemas que tratan respecto al comercio, herencias, división de propiedades, etc. Cerca de la mitad de los problemas contenidos en las tablas son puramente aritméticos o algebraicos y geométricos que tratan sobre áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos, etc. La solución de estos problemas llevan muchas veces a la resolución de lo que hoy consideramos ecuaciones de primer grado, segundo grado, tercer grado, sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.

Utilizaban sólo dos símbolos para representar todos los números, en el sistema de numeración en base 60, posicional y aditivo. Podían escribir enteros y fracciones sexagesimales.

Figuran en las tablillas, tablas de multiplicación hasta 59x59, de división, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas. (Bashmakova y Smirnova, 2000, pp. 2-3).

La Tabla YBC 4652 (propiedad hoy de la Universidad de Yale) contiene 22 problemas dispuestos por grado de dificultad, pero sólo once de ellos se conservan parcialmente y de estos, apenas seis están totalmente traducidos. Para cada problema se da una respuesta pero sin ningún comentario acerca de su resolución. El objetivo de los problemas es descubrir el peso original de una piedra dando orígen a una ecuación de primer grado.

Problema 19

Encontré una piedra, pero no la pesé; después pesé seis veces (su peso) y sumé 2 gin, después sumé la tercera parte de la séptima parte de esta cantidad multiplicada por 24. Todo pesa un mana. ¿Cuál es el peso original de la piedra?

Solución : 4 1/3 gin. (1 mana = 60 gin) (http://www.malhatlantica.pt/mathis/Babilonia/Babilonia.htm).

En el lenguaje del álgebra actual este problema se resolvería mediante la ecuación:

$$6x + 2 + \frac{1}{3}.\frac{1}{7}(6x + 2).24 = 60$$

cuya solución es efectivamente 4 1/3.

Egipcios (2000 a.C. – 1800 a.C.)

La información sobre las actividades matemáticas de los egipcios la encontramos en el Papiro de Rhind o Papiro de Ahmes. El nombre se debe a Henry Rhind quien lo compró en 1858 o Ahmes, escriba que lo copió hacia el año 1850 a.C. Trabajaban en el sistema de numeración decimal, usaban cifras o signos especiales para representar los dígitos, los múltiplos de las potencias de 10, las fracciones unitarias (numerador 1), las fracciones del tipo $\frac{n-1}{n}$.

Los problemas planteados se pueden clasificar en aritméticos y algebraicos. Los últimos no se refieren a objetos concretos, como ser cerveza o pan, ni piden el resultado de operaciones con números conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales del tipo $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, siendo a, b y c números conocidos y x es desconocido. A este número desconocido se le llamaba "aha" o montón. (Boyer, 1986, pp. 37-38).

En el Papiro de Ahmes, el método empleado para la resolución de estos problemas se conoce hoy como el *"método de la falsa posición"* o *"regula falsa"* que consiste en partir de un valor falso para la incógnita y llegar al valor correcto. Con el valor incorrecto se efectúan las operaciones indicadas en el miembro de la izquierda y se compara el resultado así obtenido con el que se debería haber obtenido. Mediante el uso de proporciones se llega a la respuesta correcta.

Veamos un ejemplo:

Se cambiaron los números para que la explicación sea más clara.

"Un montón, sus dos tercios, su mitad, todo junto es trece. ¿Cuál es la cantidad? (Guelli, 1989)

El problema, en el lenguaje del álgebra actual, se reduce a resolver la ecuación:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13 \Rightarrow \frac{13}{6}x = \frac{78}{6} \Rightarrow x = 6$$

Pero los egipcios no podían resolver la ecuación de esta forma. Para hacerlo atribuían un valor falso al montón, por ejemplo 12:

$$12 + \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 12 + 8 + 6 = 26$$

Por medio de una regla de tres simple obtenían el valor verdadero del montón:

12 es a 6 como el valor verdadero del montón es a 13, por lo que el montón es 6.

Aunque en problemas similares a este Ahmes utiliza el método de falsa posición, en el *Problema 30* la resolución pasa por factorizar el primer miembro de la "ecuación".

En él se resuelve la ecuación: $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37$

Ahmes factoriza el primer miembro y divide 37 entre $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ obteniendo el resultado $16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$.

Los egipcios no se conformaban con esto. Tenían otro método para resolver ecuaciones, que podríamos llamar *desandar lo andado.* Éste consistía en hallar la solución tras la

manipulación aritmética de la incógnita invirtiendo el proceso de manera que, mediante la aplicación a la solución de las operaciones aritméticas inversas y en sentido contrario, se consiga llegar a la cantidad inicial. Este método aparece aplicado en algunos problemas que figuran en el Papiro de Moscú, el que se encuentra en el Museo de Bellas Artes de Moscú.
Veamos un ejemplo:
El Problema 19 pide calcular un montón tomándolo 1 y ½ veces y añadiendo 4 para dar 10. ¿Cuál es la cantidad que hace esto?
El procedimiento detallado por el escriba sigue los siguientes pasos:
Si al final se ha añadido 4 para obtener el resultado 10 lo primero que se hace para llegar a la cantidad inicial es sustraer 4 del resultado (10 - 4 = 6). El problema entonces se puede reformular como "Calcular la cantidad tomándola 1 y ½ veces para dar 6".

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4=10$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4-4=10-4$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x=6$$

Si la cantidad se ha repetido 1 y ½ veces quiere decir que se ha multiplicado por 1 ½. Por ello se invierte de nuevo el proceso a partir del 6 multiplicando esta cantidad por el inverso de 1 ½, es decir, 2/3 (2/3 x 6 = 4) obteniéndose así la solución (4).

$$\frac{3}{2}x=6$$

$$\frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}}=\frac{6}{\frac{3}{2}}$$

$$x=6\cdot\frac{2}{3}$$

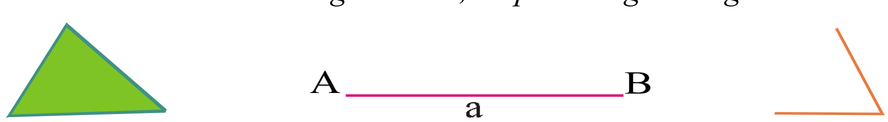
$x = 4$

De los tres métodos reseñados –falsa posición, factorización y desandar lo andado- los dos últimos son similares a los utilizados actualmente en la manipulación algebraica de las ecuaciones de este tipo. La técnica o método de la falsa posición, si bien no es un método que sea aceptado de buen grado por los docentes, es utilizado frecuentemente por los estudiantes que se inician en el tema.

Griegos (300 a.C. – 300 d.C.)

Euclides (300 a.C.): *Elementos.*

Para ejemplificar el tratamiento que realizaba Euclides a los problemas que hoy en día se reducen a la resolución de una ecuación de primer grado, veamos la Proposición 44 del Libro I: *"Aplicar a una recta dada en un ángulo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado".*



Se entenderá aplicar como construir, recta como segmento e igual como de igual área, entonces aplicar un paralelogramo a una recta AB significa construir un paralelogramo tal que uno de sus lados sea el segmento AB y que tenga igual área a una figura dada.
Los matemáticos griegos no consideraban las áreas como, por ejemplo en el caso de un rectángulo, producto de sus lados, sino que la veían como figura geométrica comprendida entre sus lados y obtenían sus resultados sobre el tamaño o contenido de la figura mediante una serie de razonamientos sobre las mismas que podríamos llamar *recortar y pegar*. (Millán, 2004, pp 77-78)
Para llevarlo al lenguaje del álgebra usaremos un caso particular: el ángulo dado es recto. Entonces debemos *hallar el lado del rectángulo para que su área sea igual a la del triángulo dado*.

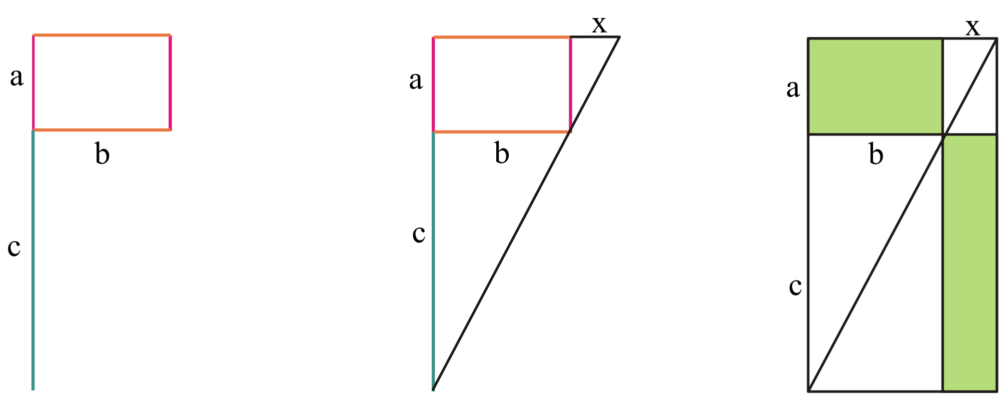
T = área del triángulo dado

$\overline{AB}$ = a

x = dimensión desconocida del rectángulo

La solución del problema se podría obtener mediante la resolución de la ecuación: $ax = T$.
Para entender mejor el procedimiento utilizado por Euclides trabajaremos con una variante de la Proposición 44 propuesta por Sessa (2005).
Dados dos segmentos, construir sobre un tercer segmento dado un rectángulo con área igual al rectángulo formado por los dos primeros.

Construye el rectángulo de lados *a* y *b* y a continuación de *a* traza el segmento de medida c. Une luego el extremo de *c* con el extremo de *b* y prolonga este segmento hasta cortar con la prolongación del lado opuesto al lado *b*. El segmento marcado con *x* es la solución del problema, que quedaría justificado con la figura 3, dejando a cargo del lector la comprobación de que las figuras sombreadas son equivalentes.



A modo de reflexión final

Una mirada a los ‘viejos métodos’ puede ayudar a los profesores y estudiantes a evaluar sus propias ideas matemáticas, al mismo tiempo que conocer formas alternativas de concebir un problema, enriquecerse en dicho proceso.

Por ejemplo, a través de re-examinar el desarrollo de los conceptos, métodos y demostraciones, los estudiantes y en especial los estudiantes de profesorado, pueden ver que los que hoy consideramos grandes matemáticos también tuvieron sus dudas y sus errores, incertidumbres y aciertos. Comparando trabajos matemáticos de distintas épocas ver que frente a un mismo problema se crearon distintas respuestas, que la matemática cambia.
La historia de la matemática puede ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de que el aprendizaje no es lineal. El desarrollo de las ideas matemáticas no es tan lineal como lo presentan en general los libros de texto. La matemática como producto final –como aparece en general en los libros– puede ser muy diferente al hacer matemático. La mayoría de las ideas matemáticas nunca han sido presentadas en los libros en la forma en que fueron creadas. Cuando un problema ha sido resuelto la solución se transforma en una teoría que los profesores enseñan sin ninguna referencia al problema que les dio origen.
La historia de la matemática permite al estudiante plantearse la relación entre rigor e imaginación, relación que él mismo deberá manejar en su propia formación como profesor de matemática, y que deberá manejar además en su futuro como docente en el trabajo con estudiantes de enseñanza media.

Referencias bibliográficas

Bashmakova, I. y Smirnova, G. (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*. U.S.A.: The Mathematical Association of America.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

De Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. OMA. Buenos Aires.

Guelli, O. (1989). A regra da falsa posiçao. Brasil: *Revista do Profesor de Matemática*, nº 15,18-22.

Gulikers, I. y Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics* 47, 223-258

Millán, A. (2004). Euclides. *La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid: Nivola.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectiva. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

http://www.malhatlantica.pt/mathis/Babilonia/Babilonia.htm.

GRUPO DE ESTUDOS CURRICULARES DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - GECEM

Carmen Teresa Kaiber; Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil. (Brasil)
kaiber@ulbra.br; claudiag@ulbra.br

Campo de investigación: estudos curriculares. Nivel educativo: superior
Palavras-chave: currículo de matemática, educação matemática, perspectivas curriculares

Resumo
A Universidade Luterana do Brasil e a Universidad Pedagógica Experimental Libertador acordaram uma rede acadêmica para o desenvolvimento de intercâmbio de processos e produtos de investigação. Assim formou-se o Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática – GECEM. Entre as ações previstas pelo grupo está o desenvolvimento de um trabalho conjunto entre os pesquisadores, professores de Matemática e alunos do Ensino Básico. Esse trabalho de investigação conjunta constitui-se no projeto "Perspectivas Curriculares em Educação Matemática". O grupo tem como objetivo geral refletir sobre critérios e possibilidades que possam nortear uma transformação curricular em Matemática tendo como pressuposto básico o desenvolvimento de competências nos estudantes que permitam uma participação cidadã, ativa e comprometida na sociedade em que se inserem.

Introdução

A escola deve assegurar aos seus alunos o domínio dos conhecimentos científicos e culturais, compreendendo-os na complexidade de suas interligações e relações. Deve promover o acesso a teorias e métodos de investigação científica e desenvolver habilidades mentais que levem ao pensamento autônomo.

A educação deve provocar aprendizagem como atividade permanente levando o sujeito a sua autonomia moral e o currículo escolar deve deixar transparecer através de seus objetivos, metodologias e procedimentos a importância da educação para a prática em uma sociedade cada vez mais exigente.

É importante salientar que o currículo é o centro da atividade educacional, é mais que a soma de realizações de alunos é um instrumento através do qual a escola concretiza sua responsabilidade educacional em relação a eles e a própria sociedade.

A Matemática ensinada na escola é, geralmente, desenvolvida de forma muito mecânica, exata, descontextualizada, fragmentada e distante do cotidiano do aluno, fazendo com que esse não valorize essa área do conhecimento. Isto é resultado da organização do currículo escolar tradicional, composto por disciplinas baseadas em conteúdos estáveis e universais, fragmentadas, compartimentadas e fechadas, que faz com que esse se distancie do saber fora da escola (Pires, 2000; Hernandez, 1998ª; Morin, 2000). Esse modelo disciplinar deve ser substituído por um modo de conhecimento capaz de compreender os objetos em seu contexto, em sua complexidade e seu conjunto, pois entender o mundo implica aprender a relacionar e analisar criticamente a realidade, não como um conjunto de partes, mas sim como uma totalidade, pois na construção da realidade o todo é muito mais do que a soma das partes (Morin, 2000; Azcárate, 1997; Hernandez, 1998b).

Dentro desta perspectiva, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (Brasil, 1998), a educação deve priorizar a contextualização dos conteúdos, dar significado aos planos de estudo e incentivar às discussões em torno de temas de relevância social, utilizando, para alcançar esses objetivos, as diferentes linguagens – verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias.

Uma educação matemática alinhada com os princípios assinalados leva ao desenvolvimento de competências como pensar e argumentar matematicamente, resolver problemas e modelar matematicamente, capacidade de utilizar a linguagem matemática, representar e usar informações com uso de ferramentas matemáticas, ler e compreender dados e informações matemáticas, utilizar a matemática na resolução de problemas do cotidiano, valorizar os conhecimentos matemáticos como parte da herança cultural do ser humano.
Com a preocupação de investigar, refletir, analisar e levantar indicadores para uma educação matemática com um currículo que tenha essas características formou-se o grupo de estudos curriculares em Educação Matemática (GECEM), que congrega pesquisadores de três países latinos americanos, Brasil, Bolívia e Venezuela, formado em 2003.

Histórico do GECEM

A Universidade Luterana do Brasil - ULBRA e a Universidad Pedagógica Experimental Libertador – UPEL acordaram uma rede acadêmica para o desenvolvimento de intercâmbio de processos e produtos de investigação constituída por um programa de Intercâmbio e Cooperação entre a coordenação do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA e a Subdireção de Investigação e Pós Graduação da UPEL – Maracay, no ano de 2001.
O programa de intercâmbio iniciou-se com a visita do professor Dr. Fredy E. González a ULBRA, em novembro de 2001, com sua participação no I Congresso Internacional de Ensino da Matemática promovido por essa instituição. Em continuação, em novembro de 2002, foi realizada a visita das pesquisadoras Drª. Claudia Lisete Oliveira Groenwald e Drª Carmen Teresa Kaiber a UPEL, Campus Maracay, onde foram realizadas várias atividades acadêmicas, como também participaram do IV COVEM em Trujillo, Venezuela.
Em 2003 os professores Fredy E. González, Walter Beyer e Castor David Mora estiveram na ULBRA participando do II Congresso Internacional de Ensino da Matemática, realizado no mês de novembro. Nesse período formou-se o Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática – GECEM. Entre as ações previstas pelo grupo está o desenvolvimento de um trabalho conjunto entre os pesquisadores, professores de Matemática do Ensino Básico e alunos do Ensino Básico dos três países. Esse trabalho de investigação conjunta constitui-se no projeto "Perspectivas Curriculares em Educação Matemática".
No ano de 2004 o grupo reuniu-se no mês de maio por ocasião do VI Simpósio de Educação Matemática, em Chivilcoy na Argentina. Em julho o professor David Mora esteve ministrando o seminário ¨Neurodidática e Educação Matemática¨, na UPEL Maracay, Venezuela. Também em agosto de 2004, o GECEM, representado pelos professores David Mora e Fredy E. Gonçales organizou conjuntamente com o Centro de Investigação de Matemática e Física (CIMAFI) do Instituto Pedagógico de Caracas e o Grupo de Investigação e Difusão de Educação Matemática (GIDEM) da Universidade Central da Venezuela e o Núcleo de Investigação em Educação Matemática ¨Dr Emilio Medina¨ (NIEM) da UPEL Maracay uma jornada de apresentação de projetos de teses doutorais em Educação da Universidade Central da Venezuela e da UPEL (Instituto Pedagógico de Caracas) e a Universidade Santa Maria de Caracas. Uma terceira reunião aconteceu na visita das pesquisadoras do Brasil à Venezuela no mês de novembro onde ocorreu a participação das investigadoras no V COVEM, na cidade de Barquisimeto, na jornada científica do Núcleo de Investigação em Educação Matemática ¨Dr Emílio Medina¨ (NIEM), na UPEL Maracay, e na III Jornada de Reflexão sobre o Ensino da Matemática em Educação Básica no Instituto Pedagógico Rural ¨El Mácaro¨em Turmero.

Em 2005 o grupo de pesquisadores reuniu-se em Chivilcoy, Argentina durante o VII Simpósio de Educação Matemática, no CIBEM no Porto em Portugal onde foi apresentado a comunidade acadêmica o GECEM e em outubro no III Congresso Internacional de Ensino da Matemática na ULBRA.
O grupo de investigadores reuniu-se fisicamente ao menos uma vez a cada ano e manteve contatos constantes via correio eletrônico. As atividades de pesquisa foram desenvolvidas nas Universidades dos participantes do grupo e as reflexões e discussões das mesmas aconteceram com todo o grupo de pesquisadores, virtualmente e nas reuniões citadas.

Objetivos do grupo GECEM

O grupo propõe investigar critérios e possibilidades que possam nortear uma transformação curricular em Matemática tendo como pressuposto básico o desenvolvimento de competências nos estudantes do Ensino Básico que permitam uma participação cidadã, ativa e comprometida na sociedade em que se inserem, considerando teorias pedagógicas, didáticas e de ensino aprendizagem da Matemática, mediante um processo de investigação-ação.
A investigação tem como objetivos no Ensino Básico:

1 Estabelecer critérios de mudanças no planejamento educacional em Matemática, que se reflitam no processo de ensino e aprendizagem.

2 Propor um conjunto de princípios básicos para a elaboração de materiais instrucionais em consonância com as estratégias de ensino, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática que objetivem um Currículo para o desenvolvimento de competências.

3 Determinar possibilidades de implementação de uma visão de Educação Matemática que possibilite o ensino aprendizagem dessa disciplina relacionado com a realidade e com os temas relevantes para a sociedade.

4 Desenvolver um conjunto de idéias didáticas em Educação Matemática que possibilitem aos estudantes o desenvolvimento de competências para compreender e atuar de acordo com os fenômenos sociais, naturais e intelectuais do mundo complexo.

Metodologia da Pesquisa

A pesquisa está sendo realizada nos moldes da pesquisa-ação participativa, pois essa representa o método mais apropriado para conhecer, interpretar e transformar os fatos reais elaborando constructos teóricos que podem explicar, aproximadamente, outros problemas similares em contextos com características semelhantes, ainda que este não se constitua no propósito principal da investigação-ação participativa. A proposta metodológica em espiral, da pesquisa ação está constituída por quatro momentos fundamentais: planejamento, ação, observação e reflexão sobre os resultados da ação.
O GECEM (grupo de investigadores) considera que a pesquisa a ser realizada, seguindo os passos do processo metodológico indicado, atingirá os objetivos propostos e levará aos resultados esperados.
O processo investigativo estará centrado nos elementos: Currículo de Matemática no Ensino Básico, Formação de professores de Matemática e Estudantes do Ensino Básico, conforme figura 1.

PROCESSO INVESTIGATIVO

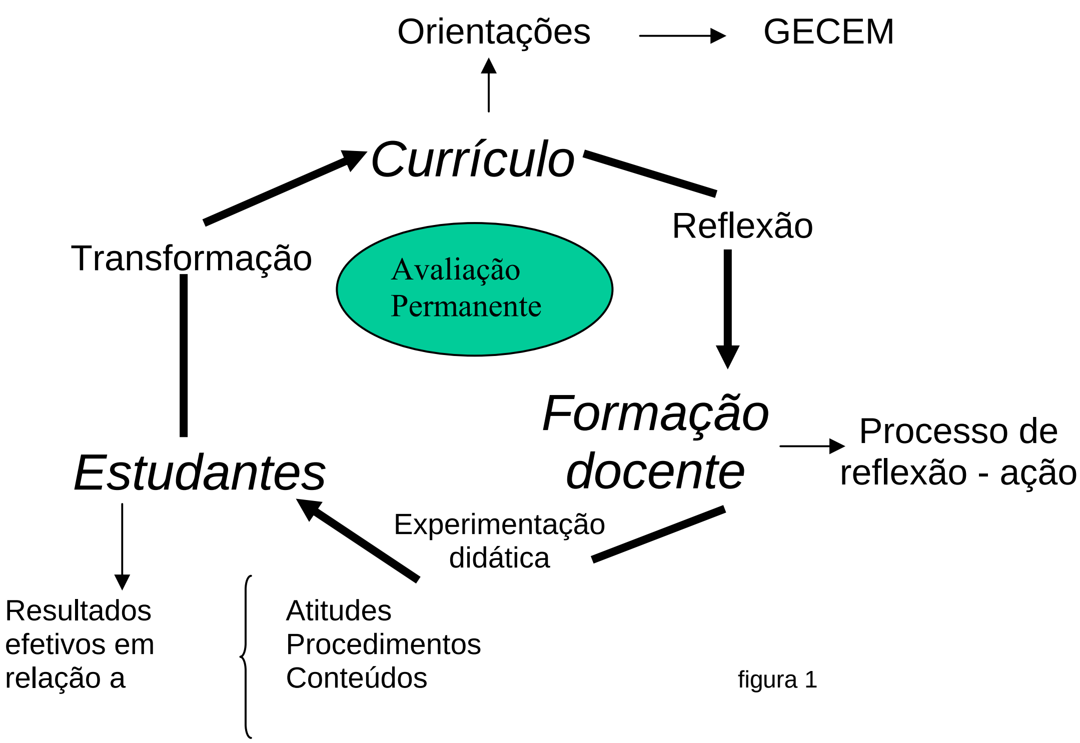


figura 1

O projeto está estruturado e está sendo desenvolvido a partir de: um *referencial teórico* em Educação Geral, Metodologia do Ensino da Matemática e Teorias de Aprendizagem; uma *visão epistemológica* de Matemática e Educação Matemática; uma *metodologia de investigação* baseada no paradigma qualitativo e crítico; em uma *estratégia de ação* baseada fundamentalmente na criação de grupos de discussão e ação.

A discussão está sendo realizada em três etapas diferenciadas e contínuas, durante todo o processo investigativo: Grupo A (meta discussão) – Grupo B (discussão participativa) – Grupo C (implementação).

Na ULBRA o grupo A é composto pelos investigadores que formam o GECEM; o Grupo B está formado pelos investigadores, professores do Ensino Básico e alunos do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA, da Especialização em Educação Matemática da ULBRA e alunos de Iniciação Científica do curso de Licenciatura em Matemática da ULBRA; o Grupo C é composto pelos professores de Matemática do Ensino Básico e pelas comunidades das Escolas envolvidas. Também existem grupos, como os do Brasil, nos demais países envolvidos.

A meta discussão no GECEM é realizada através de seminários virtuais e em encontros presenciais, conforme o histórico já apresentado.

A discussão participativa, no Grupo B, acontece em encontros mensais, através de leituras, apresentação de seminários e discussão coletiva.

O processo de coleta de informações do processo investigativo segue os princípios da metodologia que norteia o projeto, utilizando diferentes instrumentos de coleta de dados qualitativos objetivando uma análise de conteúdo.
Todas as ações realizadas com o grupo B levam a implementação de um experimento didático, junto as escolas de Educação Básica envolvidas no processo, com estratégias metodológicas já discutidas e analisadas durante o processo de discussão no Grupo B. A meta da experimentação didática aplicada é a constituição de critérios para um currículo em Matemática com critérios norteadores para o desenvolvimento de competências nos estudantes do Ensino Básico que permitam uma participação cidadã, ativa e comprometida na sociedade em que se inserem. Esses critérios curriculares em Matemática está sendo investigada em uma visão holística, em 5 dimensões, conforme o esquema da figura 2.

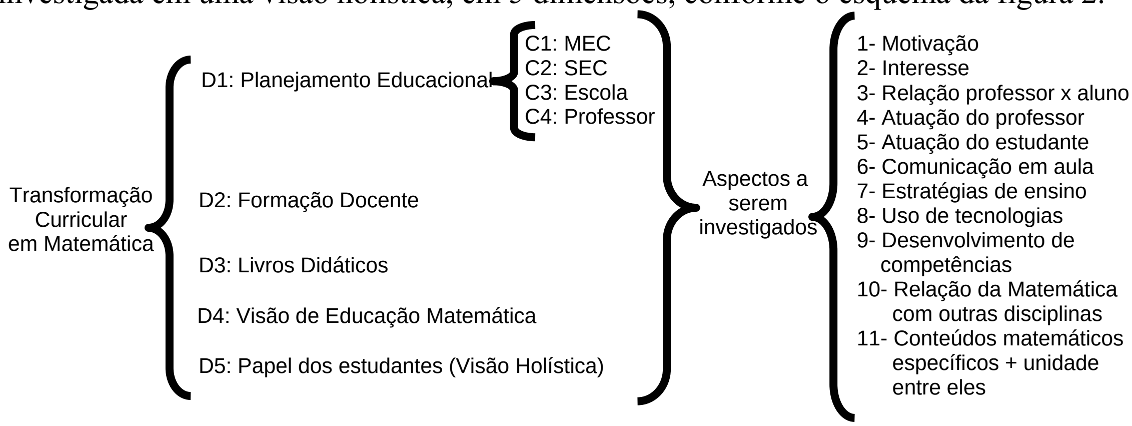


Figura 2

Resultados e recomendações

Os resultados aqui apresentados são relativos às investigações realizadas com o grupo de pesquisadores do Brasil, discutidos e avaliados pelo grupo GECEM em consonância com as ações previstas na pesquisa conjunta com os três países: Brasil, Bolívia e Venezuela.

Ação junto aos alunos de Matemática

Foi desenvolvido um projeto de trabalho partindo do tema "trabalho e consumo", analisando um problema real ligado ao tema central e que fosse de interesse da cidade onde os alunos moram, levantando dúvidas e hipóteses sobre ele e buscando respostas a essas perguntas. Para Demo (2002) esses princípios são as bases de uma educação pela pesquisa.
O público alvo da pesquisa foram 35 alunos, 24 meninos e 11 meninas, com idades entre 10 e 13 anos, da 5ª série do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Frentino Sacker, no estado do Paraná, no Brasil. O projeto foi desenvolvido em três etapas: aprendendo a investigar, investigando as situações de trabalho e consumo da cidade; apresentando os resultados.
Na primeira etapa, por serem alunos que nunca tinham realizado uma investigação, o professor organizou uma visita a uma grande empresa de venda de leite, pois a cidade faz parte da maior bacia leiteira do estado do Paraná. Nessa visita os alunos tiveram oportunidade de conhecer as relações de trabalho e consumo que são gerados na empresa. Os alunos realizaram perguntas, anotaram e organizaram os dados posteriormente. No segundo momento a professora trabalhou as questões que surgiram e várias situações relacionadas à Matemática foram desenvolvidas.
Na segunda etapa os alunos foram divididos em grupos de quatro alunos e cada grupo escolheu um assunto, ligado ao tema central, para ser investigado. Os assuntos escolhidos

foram: farmácia (venda de remédios), bicicletaria, materiais de construção, celulares, bens de consumo, posto de gasolina, mini-mercado, água, luz, aviário, pesque-pague, loja de materiais esportivos, artesanato. Nessa etapa os alunos colocaram em prática todos os procedimentos necessários à realização de um projeto e o professor mediou o processo. Nessa fase o professor organizava problemas matemáticos com os dados pesquisados pelos grupos e também os grupos organizavam problemas matemáticos com os dados pesquisados.

Na terceira etapa foi organizada uma feira para apresentação dos trabalhos realizados. A apresentação foi realizada através de pôsteres, onde cada grupo expunha os resultados. A feira foi realizada no pavilhão da escola, a noite, possibilitando a participação dos pais.

Os resultados alcançados demonstraram que a Matemática pode ser desenvolvida através de temas geradores com os alunos participando com interesse e motivação e também com os pais participando, tanto na realização das atividades quanto na participação da feira.

Também foi muito interessante verificar como os aluns cresceram em seus conhecimentos e discutiram temas que jamais seriam discutidos em uma 5ª série, como salário mínimo (o que é possível comprar e quais as dificuldades que enfrentam quem vive com esse salário), preços dos bens usuais (onde é mais vantajoso comprar e quais as vantagens de comprar a vista ou a prazo) preço do dólar e a influência da variação do dólar na cidade, as relações de consumo (excesso de consumismo e necessidades geradas por isso), juros que são cobrados (prazos, porcentagem, regra de três, parcelamento em compras).

Conclusão

O grupo entende que é de grande importância a divulgação do trabalho que está desenvolvendo, bem como, as investigações que estão sendo realizadas, para que seja possível aprofundar e ampliar as discussões em torno do tema, visando a implementação de um grupo de discussão maior sobre a formação de professores de Matemática na América Latina e como esta formação influencia o trabalho pedagógico de sala de aula, objetivando atuar nesse campo de pesquisa com alternativas viáveis, que atendam as necessidades dos países latinos e que venham a qualificar a Educação Matemática com resultados significativos para a população.

Referências

Azcárate, P. G. (1997). Que matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela.* Sevilha, n.32, p. 77-85.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: meio ambiente e saúde.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília: MEC/SEF.

Hargreaves, A. (2004).*O ensino na sociedade do conhecimento*. Porto Alegre: Artmed.

Hernandez, F. (1998ª). Transgressão e mudança na educação: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed.

Hernandez, F.; Ventura, M. (1998b). *A organização do currículo por projetos de trabalho*. 5.ed. Porto Alegre: Artmed.

Morin, E. (2000). *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. 2.ed. São Paulo: Cortez; Brasília: UNESCO.

Pires, C. M. C. (2000).Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD.

INVESTIGANDO E RENOVANDO A PRÁTICA ESCOLAR EM MATEMÁTICA

Carmen Teresa Kaiber, Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil. (Brasil)
kaiber@ulbra.br; claudiag@ulbra.br
Campo de investigación: formación de profesores. Nivel educativo superior
Palavras-chave: educação continuada, professores reflexivos, educação matemática

Resumo
Este artigo apresenta o projeto "Investigando e Renovando a Prática Escolar em Matemática" que visa desenvolver ações de pesquisa e educação continuada, junto a professores de Matemática do Ensino Fundamental. As ações relativas à educação continuada objetivam o aprofundamento teórico, a discussão sobre a prática, a implementação de projetos educativos, análise e avaliação das atividades de sala de aula desenvolvidas pelos professores. Permitem desenvolver, também, pesquisas relativas à postura teórico-prática desses professores no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, buscando, simultaneamente, fazer uma leitura da realidade educacional em relação à disciplina e intervir nessa realidade positivamente. O interesse maior se concentra nas interações cotidianas e nas possíveis transformações ocorridas, o que coloca a mesma sob uma perspectiva qualitativa nos moldes da pesquisa-ação.

Introdução

A educação de um indivíduo vista como um processo contínuo de construção de conhecimentos e valores apresenta-se através da leitura e intervenção que o mesmo realiza no mundo que o cerca. Nesse sentido, a educação deve possibilitar ao indivíduo uma completa inserção social e o uso pleno dos seus direitos, e os professores de Matemática não podem deixar de contribuir para a completa formação do cidadão.

Para Porlán e Rivero (1998) a atividade docente implica em capacidades profissionais, tais como: tomar consciência do sistema próprio de idéias dos processos de ensino e aprendizagem; constatar, por meio do estudo e da reflexão, as concepções e experiências próprias com as dos outros colegas; pôr em prática tais hipóteses (aquelas levantadas pela equipe de trabalho) e estabelecer procedimentos para um surgimento rigoroso das mesmas; comparar os resultados da experiência com as hipóteses de partida e com o modelo didático pessoal, estabelecer conclusões e comunicá-las ao grupo de profissionais; detectar novos problemas ou novos aspectos de velhos problemas.

Nesse contexto, está se desenvolvendo o projeto "Investigando e Renovando a Prática Escolar em Matemática", que objetiva articular ações de pesquisa e educação continuada, como forma de proporcionar um avanço na investigação das questões relacionadas ao desenvolvimento teórico e prático do professor, promovendo sua formação continuada. Propõe ampliar e consolidar um espaço para discussão e aprofundamento de temas de interesse para o ensino e aprendizagem da Matemática, estreitando laços entre o desenvolvimento teórico e a prática da sala de aula, propiciando aos educadores aperfeiçoarem-se em áreas que possibilitem uma melhora no desempenho profissional, buscando o perfil de um professor interdisciplinar e investigativo (Sacristan e Perez Gomez, 1998), ampliando as possibilidades de trabalhar com estratégias metodológicas inovadoras.

Formação Continuada de Professores

Segundo Hargreaves (2004) a sociedade do conhecimento aponta para a economia sustentada pelo conhecimento, em que a riqueza e a prosperidade dependem da capacidade das pessoas de superarem seus concorrentes em criatividade e astúcia. Para isso o cidadão dos tempos atuais necessita adaptar-se a diferentes situações, com capacidade de aprender continuamente, de atualização constante, de relacionamento, de trabalho em grupo, de tolerância com as diferenças, comprometimento com a vida coletiva e com a sustentabilidade do planeta. Nesse contexto a escola passa a exercer um papel fundamental, onde o professor e a educação passam a ser vistos como elementos chaves da formação do sujeito global que a sociedade da informação e da comunicação requer (Fiorentini, 2006).

A formação de professores é um requisito fundamental para as transformações que se fazem necessárias na educação. A formação continuada faz parte de um processo permanente de desenvolvimento profissional, o qual deve ser assegurado a todos, devendo propiciar atualizações, aprofundamento das temáticas educacionais e apoiar-se em uma reflexão sobre a prática educativa, promovendo um processo constante de auto-avaliação que oriente a construção contínua de competências profissionais.

Entende-se que um processo de formação continuada, além de utilizar as modalidades convencionais de comunicação, como seminários, palestras, cursos e oficinas pedagógicas, deve recorrer, também, a formas não convencionais, como o uso de recursos que permitam trazer a prática à discussão, intercâmbio de experiências, atividades de simulação de situações-problema e desenvolvimento de projetos. Essas atividades permitem uma participação mais significativa dos professores, indo além dos encontros destinados a ensinar o mesmo a fazer ou vivenciar algo que se julga necessário ou importante. A prática precisa ser discutida a partir de uma reflexão teórica ampliando, assim, as condições para superar a tendência à aplicação de modelos e possibilitar uma recriação dos conteúdos e métodos.

Situação-Problema

A presente investigação busca responder a seguinte pergunta: como ampliar e consolidar um espaço para discussão e aprofundamento de temas de interesse para o ensino e a aprendizagem da Matemática, estreitando laços entre o desenvolvimento teórico e a prática da sala de aula, propiciando aos educadores aperfeiçoarem-se em áreas que possibilitem uma melhora no desempenho profissional, buscando o perfil de um professor interdisciplinar e investigativo, ampliando as possibilidades de trabalhar com estratégias metodológicas inovadoras?

Objetivos

Este projeto visa desenvolver ações de pesquisa e educação continuada junto a professores de Matemática do Ensino Fundamental. Propõe articular a pesquisa, o aprofundamento teórico, atividades práticas e análise das atividades de sala de aula como forma de proporcionar um avanço na investigação das questões relacionadas ao desenvolvimento teórico e prático do trabalho do professor promovendo sua formação continuada.

Os objetivos específicos são: Investigar a postura teórica de um grupo professores de Matemática do Ensino Fundamental; Investigar e analisar as práticas de sala de aula adotadas por esses professores; Desenvolver ações de educação continuada em Matemática, através da abordagem de conteúdos e metodologias de interesse dos professores, incluindo a utilização de recursos de informática; Promover o estudo e o aprimoramento de temas de relevância social como exclusão social e cultural, violência na escola, drogas, respeito às diferenças, e outros de interesse do grupo.

Metodologia da Investigação

O projeto se propôs a desenvolver um trabalho de educação continuada, bem como, uma investigação das práticas do professor de Matemática e dos aspectos teóricos que as fundamentam. Objetivou articular a investigação e as ações de educação continuada, de maneira que se desenvolvessem paralelamente e em estreita relação, ou seja, a investigação e a análise da prática dos professores alimentou as ações de educação continuada e essa, por sua

vez, serviu de substrato para o professor refletir sobre sua prática, aprimorando-a com reflexos positivos no trabalho em sala de aula.
As idéias metodológicas que nortearam esse trabalho dizem respeito ao fato de que, na investigação realizada, o interesse maior se concentrou nas ações, nas interações cotidianas, o que mostrou uma preocupação maior com o processo do que com o produto. Aliado ao fato de que a análise dos dados seguiu um processo mais indutivo, sem a preocupação em buscar evidências que comprovassem as hipóteses definidas antes do início dos estudos, o processo de investigação se revestiu de características que o colocaram em uma perspectiva qualitativa. Um refinamento da opção metodológica que norteiou a investigação apontou para o desenvolvimento de um trabalho nos moldes da pesquisa-ação, buscando-se interpretações da realidade observada e a promoção de ações transformadoras, estando os pesquisadores e os participantes envolvidos de modo cooperativo.

Ações propostas na investigação

Seguindo os princípios propostos, o projeto foi organizado e se desenvolveu em encontros mensais de 4 horas aula ao longo de 18 meses, estruturado em três etapas: organização do grupo de professores, investigação da postura teórico-prática do grupo, ações de educação continuada.

- Organização do grupo de professores

Como primeira ação, articulou-se, junto a Secretaria Municipal de Educação (SME) de Canoas, a formação do grupo de professores de Matemática do Ensino Fundamental – Séries Finais. Compareceram dezoito professores, que mostraram interesse em participar do grupo. Na reunião, foram apresentados os aspectos gerais da proposta, ficando claro que as decisões para o desenvolvimento da mesma passariam a ser tomadas, a partir de então, pelo grupo.

- Investigação da postura teórico-prática do grupo

Esta ação foi desencadeada na primeira reunião com o grupo e foi se desenvolvendo ao longo do projeto. Cada integrante foi observado e entrevistado pelos pesquisadores, a fim de iniciar uma coleta de informações que foi uma constante ao longo de todo o trabalho. Houve uma entrevista inicial objetivando detectar as necessidades e expectativas dos professores em relação ao projeto e captar elementos do ideário teórico e prático dos mesmos. Essas informações contribuíram para a definição dos elementos teóricos e práticos constituintes das ações de educação continuada.

- Ações de educação continuada

As ações de educação continuada constituíram parte fundamental desse projeto, pelo fato de, simultaneamente, oportunizarem um processo de desenvolvimento profissional para os professores e se constituírem em campo para a realização de um trabalho de investigação da prática docente.
Essa fase se caracterizou pelo desenvolvimento do trabalho junto ao grupo de professores e foi organizada a partir dos eixos temáticos, apresentados a seguir.
Eixo temático 1: Temas de relevância social - temas de interesse da comunidade escolar, como exclusão social, drogas, violência na escola, Matemática e Educação Ambiental.
Eixo temático 2: Contempla o currículo de Matemática - reformas educativas, Parâmetros Curriculares, projetos pedagógicos, evolução do currículo de Matemática no ensino brasileiro.
Eixo temático 3: Apresenta a metodologia do ensino da Matemática em aspectos teóricos e práticos. Integrar teoria e prática no contexto da sala de aula constitui-se em desafio permanente dos professores.

Eixo temático 4: Contempla os conteúdos específicos de Matemática no Ensino Fundamental– Geometria, Números, Medidas, Álgebra, Probabilidade e Estatística, utilização da Informática no contexto da sala de aula.
Eixo temático 5: Apresenta a avaliação em Matemática – aspectos teóricos e práticos.
Projeto "Investigando e renovando a prática escolar em Matemática"
Os dados analisados, a seguir, referem-se ao grupo de formação continuada, com professores de Matemática, da rede municipal de ensino do município de Canoas, do estado do Rio Grande do Sul. O grupo reuniu-se mensalmente nos anos de 2005 e 2006 em convênio com a Universidade Luterana do Brasil, através do grupo de pesquisa GECEM (Grupo de estudos curriculares de Educação Matemática) e a Secretaria Municipal de Educação e Cultura (SMEC), de Canoas, através da coordenação de Matemática.

Perfil do grupo

O grupo permanente, formado por 18 professores, conta com apenas um professor do sexo masculino. Do grupo, 13 professores estão na faixa etária entre 41 e 50 anos, o que faz com que a média de idade seja 44 anos. É importante salientar que são todos professores da rede pública municipal, concursados, com mais de 10 anos de atuação, evidenciando uma necessidade dos professores em serviço terem acesso a possibilidades de formação continuada.
Com relação ao número de horas semanais trabalhadas, 8 professores trabalham 40 horas, 6 trabalham 60 horas e, nesse caso, as cumprem em mais de uma instituição. Dois atuam menos de 40 horas semanais. Todos atuam nas séries finais do Ensino Fundamental.
No que diz respeito à formação acadêmica dos professores, o quadro 1 apresenta um grupo com formação em nível superior e especialização na área de educação, conforme visto a seguir.

Quadro 1 – Formação dos professores

Professores com formação em Matemática-Licenciatura Plena	Com pós-graduação *lato sensu* em Ensino da Matemática	5
	Com pós-graduação *lato sensu* em áreas afins	4
	Sem curso de pós-graduação	1
Professores com formação em Ciências- Licenciatura Curta	Com pós-graduação *lato sensu* em áreas afins	1
	Sem curso de pós-graduação	6
Professores cursando Pedagogia-Orientação	Sem curso de pós-graduação	1

Quando solicitados a expor suas expectativas em relação às atividades a serem desenvolvidas pelo grupo, 12 indicaram que buscam uma renovação e melhoria da sua prática em sala de aula que leve a melhorar o interesse, rendimento e aproveitamento dos alunos, 5 afirmaram que é muito importante participar de um grupo de estudos e reflexão e 5 declararam terem muitas dúvidas e angústias em relação ao processo de ensino e aprendizagem, sendo o grupo um espaço de discussão que permite que essas dúvidas sejam expostas e compartilhadas. As respostas dadas pelos professores evidenciam uma grande preocupação com a prática da sala de aula, porém, para o grupo, uma melhoria dessa prática passa pelo estudo e reflexão em um contexto coletivo onde as dificuldades e incertezas poderão ser abordadas sob diferentes pontos de vista.
Em relação às dificuldades para participar de um grupo de estudos, foram apontadas, por 7 professores, questões relativas à disponibilidade de tempo e horários ligadas, em alguns casos, ao fato de conseguirem liberação das escolas, se o encontro ocorre em horário de trabalho.

Oito professores declararam não ter dificuldades de nenhuma natureza e um professor declarou que sua timidez em se manifestar no grupo é sua maior dificuldade.
Com relação a dificuldades encontradas no cotidiano, na atuação como professores de Matemática, 15 professores indicaram dificuldades ligadas ao aluno, como falta de pré-requisitos, defasagem em relação à série em que se encontram e desinteresse, 4 indicaram falta de recursos didáticos, 3 mencionaram questões relativas ao currículo, como avaliação e a contextualização da Matemática. Dois professores mencionaram a questão do número de alunos em sala de aula e dois, questões relativas à inclusão de alunos com necessidades especiais. Os aspectos apontados são de grande importância para o desenvolvimento profissional do professor e uma análise preliminar evidencia que, para ele, as dificuldades estão relacionadas ao desempenho e comportamento dos alunos, pouco questionando aspectos relativos à organização da escola, do currículo, questões metodológicas e a própria atuação.

Reflexões sobre conteúdos e metodologias de Matemática

A discussão sobre conteúdos foi uma solicitação do grupo de professores que demonstraram necessidade de discutir os conteúdos desenvolvidos em cada série, profundidade teórica necessária, pré-requisitos de cada série, bem como as necessidades e aplicações dos conteúdos para a formação do aluno no Ensino Fundamental e continuação de seus estudos no Ensino Médio.
Foi o encontro que reuniu o maior número de participantes (19 professores, representando 12 das 25 escolas do município de Canoas que atuam com Ensino Fundamental completo), além da responsável pela área de Matemática.
Ficou evidente que os professores participantes possuem claros os conteúdos a serem desenvolvidos em cada série e os pré-requisitos necessários. Não houve divergências nas discussões, mas emergiu fortemente a angústia dos mesmos sobre o caminho metodológico mais adequado, a seqüência a ser seguida no desenvolvimento dos conteúdos e como conseguir um melhor rendimento dos alunos, pois o alcançado não é o esperado pelos professores.
Uma das conclusões dos educadores participantes do grupo foi de que estão inseguros quanto ao "como" desenvolver o trabalho docente e concluíram que o próximo encontro deveria contemplar a discussão das metodologias para a prática dos conteúdos matemáticos nas séries.
Alguns conteúdos foram apontados como não trabalhados pelos professores: Conjuntos, Equação Biquadrada, Produto Cartesiano, Relações e Funções, Funções do primeiro grau, Função Quadrática, Relações métricas no triângulo qualquer.
Outros conteúdos não foram desenvolvidos em algumas escolas: MDC (4 escolas), MMC (2 escolas), Sistemas de Medidas (7 escolas), Noções iniciais de Geometria (7 escolas), Inequações (8 escolas), Frações algébricas (1escola), Triângulos (4 escolas), Quadriláteros (4 escolas), Polígonos (4 escolas), Circunferência e círculo (5 escolas).
Constatou-se que uma escola está desenvolvendo os conteúdos de razão, proporção, regra de três e porcentagem na 7ª série, sendo que as demais continuam com esses conteúdos na 6ª série. Em relação aos conteúdos de Estatística, recomendados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1996), os professores afirmaram, de modo geral, que não os estão desenvolvendo. Apenas uma escola trabalha Estatística na 5ª série, com leitura, interpretação de dados e gráficos. Quatro escolas estão trabalhando, na 6ª série, com média, moda, representação de dados graficamente e nenhuma escola está trabalhando com Estatística na 7ª e 8ª séries. Com relação aos aspectos metodológicos percebeu-se uma preferência pelas

oficinas pedagógicas, onde foram trabalhados conteúdos específicos ligados a metodologias e estratégias de ensino que direcionam o fazer pedagógico.
A proposta de trabalho com projetos de ensino ainda é vista como uma metodologia difícil de ser aplicada com alunos do Ensino Fundamental. Ao mesmo tempo que afirmam ser uma metodologia com possibilidades de crescimento, desenvolvimento e aprendizagem para os alunos, sentem-se inseguros para desenvolver um trabalho nesse sentido.
O grupo de professores demonstrou preferência pelo desenvolvimento dos aspectos práticos da proposta em detrimento da discussão das questões teóricas. O que ficou evidente foi que os professores possuem necessidades prementes, como domínio do espaço da sala de aula, enfrentamento a problemas ligados às condições sócio-econômicas dos alunos, baixos índices de aproveitamento e rendimento e o fato de desenvolver um trabalho individualizado, não colaborativo com o conjunto de professores e direção da escola, gerando dúvidas, incertezas.
As dificuldades encontradas no trabalho docente fazem com que o professor sofre um desgaste muito grande ao longo do seu exercício profissional. Assim, nos encontros ou cursos o professor tem a oportunidade de socializar as angustias, de se apropriar de distintas realidades, possibilitando uma reflexão sobre as questões que lhe causam preocupação. A oportunidade de interação com o estudo e discussão de casos é bastante valorizada.

Conclusão

O projeto se consolidou como um espaço de discussão e reflexão do processo de ensino e aprendizagem da Matemática entre os professores das escolas do município de Canoas, a Secretaria Municipal de Educação e Cultura e a Universidade Luterana do Brasil.
Os encontros realizados se caracterizaram pelo trabalho conjunto dos envolvidos. Os professores mostraram-se motivados, participando ativamente, em um ambiente onde todos têm o compromisso de compartilhar idéias e experiências em um intercâmbio constante. Uma das dificuldades encontradas, no decorrer do projeto, foi o número de horas trabalhadas pelos professores, o que muitas vezes acarretaram em faltas nas reuniões, porque, segundo informaram, tinham trabalho acumulado, como avaliações para corrigir, trabalho dos alunos para organizar, etc..
Porém ficou evidente a reivindicação, dos professores participantes do grupo, de mudanças nas escolas, em relação a ter um projeto de escola mais participativo, onde a discussão dos problemas pudesse ser analisada profundamente por todos os envolvidos no processo de ensino aprendizagem (pais, professores, alunos, direção da escola, secretaria de educação).
Outro ponto preocupante, segundo os professores, é a avaliação e a forma como está sendo conduzido, esse processo, pelas escolas. Segundo os professores só há uma cobrança relativa aos índices de aprovação, faltando um trabalho de apoio, que realmente seja eficiente e que ajude os professores a alcançarem maior qualidade na educação.

Referências

Brasil. (1996). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC.

Fiorentini, D. (2006). Desafios da profissionalidade docente em Matemática no contexto atual. *Anais da I Jornada Nacional de Educação Matemática*. Universidade de Passo Fundo.

Hargreaves, A. (2004).*O ensino na sociedade do conhecimento*. Porto Alegre: ArtMed.

Porlán, R.; Rivero, A. (1998). El conocimiento de los profesores. Sevilla: Díada.

Sacristan, J. G. Perez Gomez, A. I. (1998). *Compreender e transformar o ensino*. Porto Alegre: ArtMed.

LA EXTRAPOLACIÓN EN INGENIERÍA EN ALIMENTOS[††††]

María del Carmen Valderrama Bravo, Juan Alfonso Oaxaca Luna, Julio Moisés Sánchez Barrera, Carlos Rondero Guerrero
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. U.N.A.M. (México)
carmenvalde@yahoo.com.mx, joaxaca@correo.unam.mx, juliomoisessb@yahoo.com.mx
Nivel superior: pensamiento geométrico y algebraico
Palabras clave: extrapolación, desarticulación, discreto, continuo, saberes

Resumen
En este articulo se aborda el tema de la extrapolación gráfica aplicada en Ingeniería en Alimentos y la dificultad que los alumnos presentan desde el punto de vista didáctico debido a las deficiencias que presentan en sus saberes matemáticos ya que no tienen claro el concepto de lo continuo y lo discreto lo cual contribuye a que todo lo quieren ajustar a un comportamiento continuo. Para realizar el análisis de cómo a partir de valores discretos se pueden obtener valores continuos se emplea un modelo empírico que tiene un comportamiento exponencial al que se le aplica logaritmos y sus propiedades a fin de obtener un modelo lineal con el que se va a realizar la extrapolación.

Introduccion

En Ingeniería de Alimentos es importante conocer el diámetro promedio de partículas en polvos ya que influye considerablemente en las condiciones de proceso; por ejemplo los tiempos de absorción de agua en harinas es mayor cuando el tamaño de la partícula es mayor, lo que influye en la calidad del producto final.
Uno de los métodos mas usados para determinar la distribución de partículas de polvos es el del análisis por tamizado empleando mallas normalizadas; sin embargo se encuentran ciertas limitaciones en la distribución de partículas por debajo de 40 micras. Para resolver tal situación diversos autores han propuesto realizar extrapolaciones a partir de modelos empíricos para distribuciones de partículas finas. En el análisis que se realiza a tales modelos se muestra un claro ejemplo de la dualidad que existe entre lo discreto y continúo, sin embargo el lograr que el alumno comprenda tal situación es un reto, porque como lo menciona Rondero (1995):
"La forma en que se ha conceptualizado a lo discreto y lo continúo, por parte de la comunidad de científicos y de profesores, conlleva una serie de repercusiones didácticas, pues se les presenta como entes aislados, ajenos uno del otro, perdiendo de este modo en la práctica educativa su riqueza conceptual de implicaciones cognitivas"
"Es así, que cuando en el aula se trabaja en demasía lo continuo, al estudiante se le queda la idea de que en la misma práctica de su disciplina de conocimiento, todo será posible modelarlo a la manera de los saberes continuos, sin embargo, al adentrarse a su disciplina pronto se da cuenta de que casi todo se basa en los modelos discretos, empezando desde la toma de datos a los que hay que ajustarse para poder hacer en forma adecuada su correspondiente manejo"
Tal situación ha creado en los alumnos una concepción errónea de cómo analizar los datos que obtienen experimentalmente, ya que siempre pretenden ajustarlos a un modelo continúo, aunque para ello el alumno tenga que aplicar la técnica del "cucharazo", es decir quita el dato que supone no corresponde al modelo esperado o bien lo ajusta.

[††††] Este proyecto se ha realizado en el marco del proyecto PAPIME EN108904.

El alumno cae en tal situación debido a la desarticulación de los saberes matemáticos que tienen desde su formación porque en la mayoría de las ocasiones los profesores que imparten asignaturas prácticas se encuentran poco ligados con los profesores que impartimos asignaturas teóricas, en especial matemáticas. De ahí que los alumnos muestran poco interés en comprender la importancia de la aplicación de lo discreto y lo continúo y por ello sólo les interesa acreditar la asignatura que le causa problemas.

Metodología

Para poder comprender la relación que existe entre lo discreto y continuo, se realizó un experimento con alumnos de cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Alimentos en los que se obtuvieron datos experimentales de una muestra de polvo que se hace pasar por tamices normalizados de diferentes aberturas y los datos que obtuvieron fueron el peso que se obtuvo en cada tamiz el cual se convirtió en fracción de peso y el diámetro promedio de las mallas de los tamices.

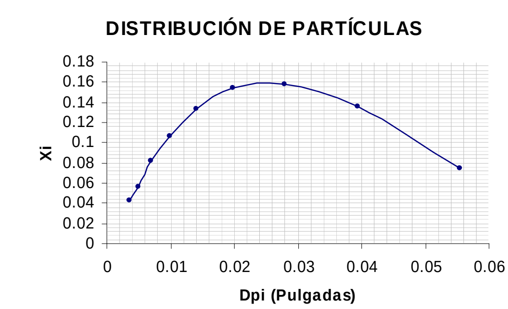
Cuadro 1. Datos experimentales de fracción de peso y diámetros promedio.

TAMIZ	x_i	Dpi (pulgadas)
10	0	-
14	0.075	0.0555
20	0.136	0.0394
28	0.158	0.0280
35	0.154	0.0198
48	0.133	0.0140
65	0.106	0.0099
100	0.082	0.0070
150	0.056	0.0050
200	0.043	0.0035
Charola	0.057	

x_i = Fracción en peso de la muestra de polvo

Dp_i = Diámetro promedio de las mallas

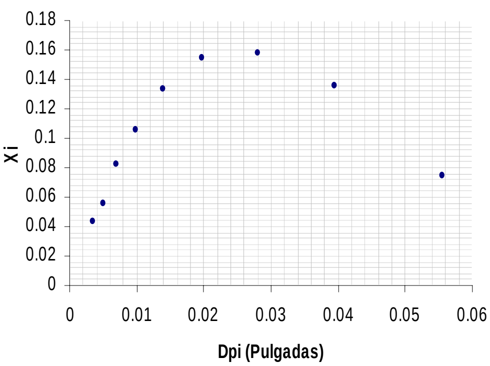
El dato de la charola es el polvo que no paso por ninguna malla, de ahí se les indicó a los alumnos realizar una gráfica en coordenadas cartesianas de Dp_i contra x_i. Lo que observamos fue la dificultad que presentan los alumnos para realizar una gráfica, no saben definir bien las escalas y lo primero que hicieron fue unir los puntos.



Gráfica 1. Distribución de partículas en coordenadas cartesianas (Continua).

Se les cuestionó el porque trazaron la gráfica de una forma continua. La mayoría de los estudiantes respondieron, que dentro del método de análisis granulométrico se deben unir los puntos, ya que lo que les interesa analizar es tomar como referencia la proporción de partículas pequeñas respecto a las partículas grandes.

Se les aclaró a los alumnos que no pueden unir los puntos porque el marcar una continuidad en los datos me indicaría que se pueden tener mallas de muchos diámetros, lo cual no es válido porque entre una malla y otra existe una relación de $\sqrt{2}$ o bien de $\sqrt[4]{2}$. Si se considera continuidad en los puntos está relación ya no se cumpliría, por lo que se les indicó que graficaran sin unir los puntos.

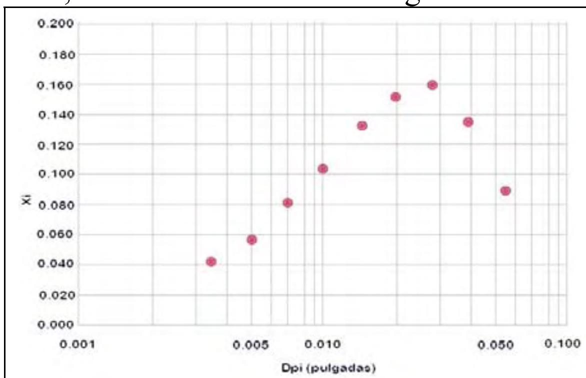


En la gráfica 1 y 2 se observa que para valores de diámetros menores a 0.03 el comportamiento de las partículas tiende a ser un modelo de la potencia en el que el exponente es menor a 1.

Para poder realizar una extrapolación gráfica es necesario que los datos se ajusten a un comportamiento lineal y para ello se propone graficar en papel semilogarítmico los datos. Los valores de Dpi son los que se modifican logarítmicamente y los valores de Xi quedan igual.

Gráfica 2. Distribución de partículas en coordenadas cartesianas (Discreta).

En el aula nos enfrentamos a una situación en la que los alumnos tienen dos sistemas de coordenadas y lo primero que les confundió es que mientras en el eje "y" existe el cero en el eje "x" no, lo cual entendieron hasta que en su calculadora se les pidió obtener el logaritmo de cero y como les marco error se convencieron de la escala que se tiene en coordenadas logarítmicas. Otra situación fue ubicar los valores numéricos en los ejes, porque mientras en el eje "y" pueden tomar distancias iguales entre un valor numérico y otro de igual magnitud, en el eje de las "x" no. Por ejemplo para ubicar el 0.005 en el eje "x" que es el punto central entre 0.001 y 0.010 querían medir la distancia que existe entre los dos valores y dividirla entre dos, lo cual en coordenadas logarítmicas no corresponde.



Gráfica 3. Distribución de partículas en papel semilogarítmico.

Para que los alumnos comprendieran, la variación en la escala logarítmica tuvieron que realizar cálculos.

En la gráfica 3 se observa que la tendencia de los valores de diámetros menores a 0.03 ya no tiene el comportamiento de una función de la potencia, ahora la tendencia que se tiene es la de una función lineal.

Gaudin-Andreiev propuso que en algunos casos, la distribución de partículas pequeñas se comporta como un modelo de la potencia:

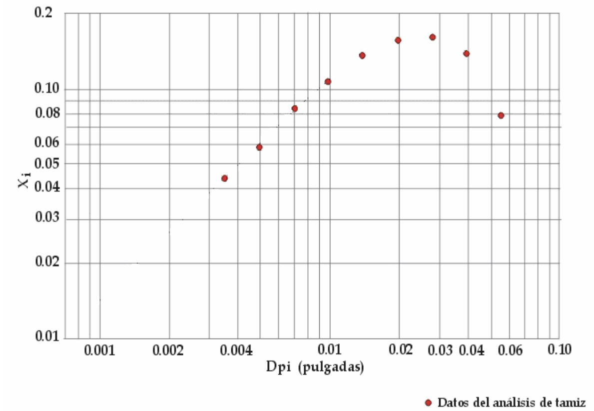
$$x_i = a\left(Dp_i\right)^n$$

Donde: *a* y *n* son constantes.

Al aplicar logaritmos y sus propiedades al modelo de Gaudin se mejora la visualización de lo discreto a lo continuo, por lo que obtenemos un modelo lineal:

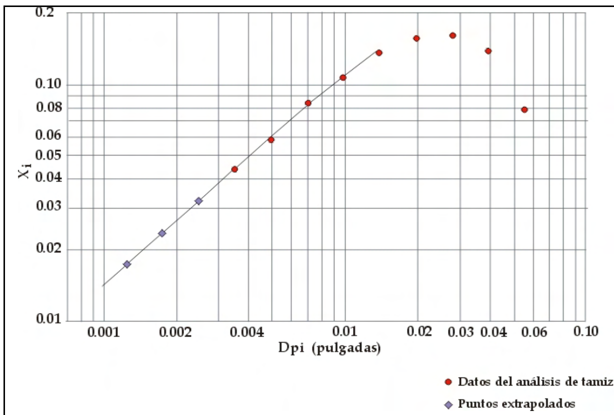
$$\log x_i = \log a + n \log Dp_i$$

El autor (Gaudin-Andreiev) propone graficar en coordenadas logarítmicas ((papel log-log) los valores obtenidos del análisis de tamizado, en el eje de las "x" Dp_i, y en el eje de las "y" x_i. Se les indicó a los alumnos que graficaran en papel log-log y al igual que en la gráfica con papel semilogarítmico se les dificultó, porque no comprenden que en un ciclo la distancia que existe entre una unidad y otra va disminuyendo, hasta que comienza otro ciclo, en ocasiones quieren tomar los puntos como si fueran coordenadas cartesianas.



Gráfica 4. Distribución de partículas en coordenadas logarítmicas (Discreta).

En la gráfica 4 se observa que en diámetros menores el comportamiento de la función discreta muestra una tendencia lineal, por lo que a partir de estos valores se considera una continuidad en la función para poder extrapolar los datos a diámetros de mallas menores a 200 y con ello poder analizar como se distribuirían los 0.057 Xi que quedaron en la charola.



Gráfica 5. Extrapolación de datos considerando continuidad.

Trazando una línea continua entre los puntos que muestran una tendencia lineal se extrapolo los valores de Xi considerando Dpi que cumplieran con la relación entre un valor y otro de $\sqrt{2}$.

Fue complicado que los alumnos llegaran a datos iguales o cercanos porque la forma de visualización de cada uno de ellos para trazar la recta es distinta, sin embargo se logró obtener datos gráficos. (Cuadro 2)

Cuadro 2. Datos extrapolados de Dpi y Xi obtenidos gráficamente

Dpi (pulgadas)	Xi
0.0025	0.032
0.00175	0.023
0.00124	0.017
	Suma = 0.072

En los datos observamos que no se puede en la práctica tener una continuidad de valores porque la suma total de los datos extrapolados de Xi no debe exceder de 0.057 que fue lo que quedo en la charola y al realizar la suma de tales datos nos da un total de 0.072. Para que quede un ajuste de datos el autor propuso que el valor de Xi correspondiente al Dpi = 0.00124 se modifique para que la suma total de los datos extrapolados de 0.057.

Cuadro 3. Datos modificados de Dpi y Xi extrapolados gráficamente.

Dpi (pulgadas)	Xi extrapolado	Xi ajustado
0.0025	0.032	0.032
0.00175	0.023	0.023
0.00124	0.017	0.002
	Suma = 0.072	Suma = 0.057

Como podemos ver se resuelve el problema, ya que hasta cierto valor se tiene una continuidad de valores, sin embargo para que el último dato se ajuste a los datos experimentales se tiene que considerar que el comportamiento de la curva es continuo hasta Dpi menores de 0.00124, porque en este valor se pierde la continuidad debido a que el valor de Xi= 0.002 no corresponde con el valor extrapolado.

Es importante aclararle al alumno la diferencia que existe entre realizar un ajuste de valores y el que se quiten o asignen valores para seguir un patrón de comportamiento. Al respecto Rondero menciona (1995):

"No es posible el seguir enseñando la ciencia como un cuerpo de conocimientos acabados, ni tampoco como un método de generalización y validación de tal conocimiento (Hodson), por el contrario es necesario aceptar en la práctica educativa que el conocimiento se construye y surge de una conjetura, lo que a postiori, se acepta o rechaza al analizar sus resultados de su puesta en escena"

Es necesario reflexionar sobre nuestros métodos de enseñanza, principalmente los profesores que impartimos asignaturas de Ingeniería porque muchas veces creemos que el alumno trae todos sus conocimientos de matemáticas bien articulados y damos por entendido que ellos pueden realizar cualquier tipo de análisis. Los alumnos que llegan a cursar una Ingeniería, en ocasiones no saben graficar en coordenadas cartesianas, mucho menos entiende como graficar en coordenadas logarítmicas. Para dar solución se recomienda obtener por regresión lineal una ecuación que permita realizar las extrapolaciones.

Como se observa en la figura 5 los cuatro primeros datos no caen en la recta que se considera continua, sin embargo, el modelo de Gaudin-Andreiev sólo es aplicado a partículas finas. Partiendo del modelo lineal:

$$\log x_i = \log a + n \log Dp_i$$

Se propone realizar un análisis de regresión lineal sin tomar en cuenta los cuatro primeros datos. Para ello se obtiene logaritmos a Dpi y Xi.

Cuadro 4. Datos de Log Dpi y Log Xi

MALLA	Log Dpi	Log Xi	
48	-1.8539	-0.8761	Ordenada al origen: 0.69358642 Pendiente: 0.83781058 Coeficiente de correlación: 0.99143212
65	-2.0044	-0.9747	
100	-2.1549	-1.0862	
150	-2.3010	-1.2518	
200	-2.4559	-1.3665	

Con los datos el modelo queda:

$$\log x_i = 0.69358642 + 0.83781058 \log Dp_i$$

Sustituyendo los datos de Dpi propuestos para la extrapolación en el modelo:

Cuadro 5 Datos de Dpi y Xi extrapolados por regresión.

Dpi (pulgadas)	Xi (Extrapolado)	Xi (Ajustado)
0.0025	0.032	0.032
0.00175	0.024	0.024
0.00124	0.018	0.001
	Suma = 0.074	Suma = 0.057

Al igual que en el caso de la extrapolación gráfica la sumatoria de Xi no se ajusta a 0.057, por lo que se realiza el ajuste correspondiente en el Dpi= 0.00124
Debido a que es muy difícil que el alumno pueda obtener los datos extrapolados gráficamente como el autor los obtuvo, para cuestiones prácticas se recomienda realizar el análisis de lo discreto a lo continuo para distribuciones de partículas finas por medio de regresión lineal.

Conclusiones

- Se logró que los alumnos comprendieran cómo pueden obtener valores continuos a partir de datos discretos, porque es muy importante que ellos visualicen la parte gráfica, además se les hizo hincapié de que la recta no puede ser continua en todos sus puntos porque aunque matemáticamente se logra, en la práctica no se aplica.
- El aplicar el método gráfico de extrapolación con los alumnos es difícil desde el punto de vista didáctico ya que sus saberes están desarticulados siendo nuestro propósito la articulación de los mismos, por lo que para cuestiones prácticas se recomienda realizar el análisis para distribuciones de partículas finas por medio de regresión lineal.
- Es importante aclarar que para una mayor comprensión del análisis es necesario que el alumno realice las gráficas correspondientes para tener una mayor visualización del comportamiento discreto-continuo; para ello nos tenemos que dar a la tarea de que el alumno articule sus saberes matemáticos con el fin de que pueda llevarlo a un problema en la práctica.

Referencias bibliográficas

Foust, A. (1960). *Principles of Unit Operations*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Rondero, C. (1995). Ensayo sobre la dualidad discreto-continuo de los saberes matemáticos Casos de transición y transposición didáctica. Tesis de Maestría sin publicar. Cinvestav, México.

Rondero, C. (2000). Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales ponderatio y equilibrium en la constitución del saber físico matemático. Tesis de doctorado sin publicar. Cinvestav, México.

Rondero, C. (2001). *Cálculo discreto*. Cuadernos didácticos (Vol. 8). México: Grupo Editorial Iberoaméricana.

Rondero, C. (en prensa). *Sobre la articulación de los saberes matemáticos: el caso de la media aritmética.* México.

MEDIOS Y ENSEÑANZA DE ESTOCÁSTICOS EN EL TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Patricia Flores Marroquín
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN. (México)
pflores@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: básico
Palabras clave: medios, enseñanza, estocásticos

Resumen
Esta investigación concierne al uso de medios en la enseñanza de estocásticos en la educación básica. De observaciones *in situ*, el análisis cualitativo de sucesos durante la clase con un programa de un cómputo (*Enciclomedia*), conducida por el docente, se encaminó hacia la caracterización de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos expresada en la interrelación docente-alumno-medio. El aprovechamiento del medio requiere de infraestructura *ad hoc* (acceso a internet) y de la familiarización con la herramienta; el programa reproduce la lección del libro de texto y es el guión de clase; la temporalidad de su uso, sin incluir vínculos, es la misma que la del libro; su empleo enfoca la atención de los alumnos y se uniformizan las respuestas a preguntas, pero no los procedimientos, ni la oportunidad de la actividad individual para la experiencia matemática.

Introducción

El fin de siglo y la entrada en el nuevo milenio están asociados a *la aparición de nuevas formas de organización social, económica y política* (Tedesco, 2003). Los conceptos y las formas de expresión se transforman y emerge la sociedad de la información, resultante de los avances tecnológicos (Velorio, 2003). En particular, el advenimiento masivo de la computadora tiene sus efectos en el aula de la educación primaria por medio de la implementación de programas de cómputo, en México principalmente con *Enciclomedia*, que presenta para su tercer ciclo la digitalización de la propuesta institucional que rige en todo el sistema nacional la educación básica: *Plan y programas de estudio* 1993; *Libro para el maestro*, que propone actividades al docente, formas de organización del grupo y material que puede utilizar; *Fichero de actividades didácticas*, el cual sugiere estrategias y la elaboración de materiales que puedan ser útiles al docente en su enseñanza; *Avance programático*, con la jerarquización de contenidos de enseñanza y propone al docente fechas y tiempos para la enseñanza de un contenido, se interrelaciona con el libro del alumno y libro del maestro; y *Libro del alumno*, que presenta actividades para ser resueltas por los alumnos dirigidas por el maestro como ejercicio de un contenido ya enseñado. El propósito supuesto del programa de cómputo es *fortalecer los procesos de enseñanza a través de la reflexión del quehacer docente y la vinculación en el uso de las nuevas tecnologías de información y comunicación (NTICs) de los profesores de 5to. y 6to. grado de educación primaria* (Programa Enciclomedia /documento base). Este programa inserta vínculos en las lecciones de los libros de texto para remisión a otros sitios del mismo tema u otros relacionados, para el desarrollo de actividades particulares, a simulaciones y a *Encarta*.

El problema de investigación

La presente investigación, en curso y parte de un proyecto más amplio, concierne al uso de medios en la enseñanza de estocásticos. La enseñanza de contenidos de estocásticos tiene su importancia por la intervención del azar en todos los órdenes de nuestra vida, lo cual deriva en la necesidad de tomar decisiones fundamentadas. Por otro lado, la probabilidad entraña un razonamiento que considera lo posible y que requiere de la experiencia con lo estocástico

como punto de partida y como un componente esencial de la intuición probabilística (Fischbein, 1975).
La pregunta que esta investigación se ha planteado es: ¿Cuál es la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria resultante de su enseñanza según distintos medios institucionales?
Los objetivos en mira son: caracterizar el uso de medios en la enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria; e identificar la comprensión de los alumnos de las ideas fundamentales de estocásticos resultante de su enseñanza.

Elementos teóricos para el enfoque de los estocásticos en educación
La investigación se orienta según tres ejes. El e*pistemológico* considera la propuesta de ideas fundamentales de estocásticos como guía de un currículum en espiral: medida de probabilidad; espacio muestra; regla de adición; regla del producto e independencia; equidistribución y simetría; combinatoria, modelo de urna y simulación; variable estocástica; ley de los grandes números y muestra (Heitele, 1975).
El eje *cognitivo* considera resultados de las investigaciones de Fischbein (1975), quien señala que aún los niños de preescolar *estiman probabilidades y hacen predicciones primarias con base en lo que ellos perciben* (pág. 120). En el período de operaciones concretas (7 a 10 años) con la adquisición de los esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, arriban a la distinción entre el azar y lo deducible (pág. 121), aunque la representación del azar llega a ser una estructura conceptual más clara y organizada después de los 7 años, cuando el niño empieza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a eventos imprevisibles y a la irreversibilidad de fenómenos aleatorios. Los experimentos de Fischbein han mostrado que al final de los 10-11 años los niños pueden, mediante la enseñanza, asimilar procedimientos de conteo usados en la construcción de diagramas de árbol, como adquisición estructural, con transferencia de generalización iterativa y generalización constructiva (pág. 124). Las intuiciones son componentes cognitivos del comportamiento inteligente que están adaptados, en su función y propiedades, para garantizar la eficiencia del comportamiento (pág. 125).
El eje *social* orienta las acciones hacia escenarios con los principales participantes en el acto educativo en su marco institucional. Según Eisner (1998), las dimensiones de la educación son: la *intencional*, que se ocupa de los propósitos que se formulan para las escuelas o las aulas (pág. 92); la dimensión *estructural* atañe a las formas organizativas de las escuelas, tales como la división de la jornada escolar, cómo se asignan bloques temporales a los temas que influyen sobre lo que los estudiantes aprenden (pág. 94); la dimensión *curricular*, que se centra en la calidad de los contenidos del currículo y en los objetivos y las actividades que se emplean para ocupar a los estudiantes en ello (pág. 96); la dimensión *pedagógica*, la cual es la mediatización del currículo por el profesor, por lo que se advierte que lo que los estudiantes aprenden está limitado por lo que los profesores pretenden enseñar y por lo que contiene el currículo (pág. 97); y la dimensión *evaluativa*, referente a juicios de valor sobre la calidad de algún objeto, situación o proceso (pág. 103).

La orientación de la investigación
La indagación, como inicio del proceso de investigación, identifica cualidades para precisar su pregunta. Eisner (1998) caracteriza los rasgos de un estudio cualitativo: tiende a *enfocarse* en todo lo importante para la educación; el *yo como instrumento* utiliza su sensibilidad para la percepción de conductas e interpretación de significados; su carácter *interpretativo* primero

justifica aquéllo de lo que se ha informado y luego interpreta la situación de acuerdo a la experiencia; el *lenguaje expresivo* fomenta el entendimiento humano y logra la empatía; su crítica educativa objetiva atiende a *lo concreto*; se norma por criterios de *coherencia*, *intuición* y *utilidad instrumental* (págs. 49- 57).

1. Organización y Escenario. La organización del trabajo de indagación la dictó el "órgano operativo de investigación" (Ojeda, en prensa), del cual nos referiremos aquí solamente a una de las primeras incursiones en *aula alterna*, es decir, el aula donde el docente ejerce su práctica diaria con sus alumnos, pero con la asistencia y participación de investigadores. El objetivo con ese escenario es la constitución conjunta de la experiencia de lo que sucede en el aula durante la enseñanza de contenidos de estocásticos, para su examen y el de los acontecimientos según criterios específicos.

Se realizó la observación de la enseñanza de probabilidad en el aula de sexto grado de una escuela primaria pública, de turno vespertino, previo acuerdo con directivos y docente, con el acatamiento de las condiciones reales respecto al recinto, hora y duración de la sesión, con los alumnos del grupo (¿19?) y con el recurso a los medios institucionales (libro de texto de matemáticas y programa *Enciclomedia*).

2. Célula de análisis de la enseñanza. Los acontecimientos de enseñanza en el aula alterna se enmarcaron de acuerdo a los ordenamientos institucionales, de modo que los datos obtenidos se analizaron desde su origen, es decir, según esos ordenamientos, y en su particularidad develada en el aula con sus actores específicos. Para ello se utilizó la "célula de análisis de la enseñanza" (Ojeda, en prensa), esquema para someter a escrutinio lo relativo a una unidad de enseñanza que usa medios determinados (propuesta institucional, medios empleados, propósitos, estrategia y su desarrollo) en cuanto a: ideas fundamentales de estocásticos implicadas, su distinción de otros conceptos matemáticos utilizados, recursos semióticos en juego, términos (referentes a estocásticos) usados. Así se enfocó, de lo acontecido en el aula, la intervención de la enseñanza con los medios que utilizó, las dificultades manifiestas ahí de los alumnos y la temporalidad al utilizar esos medios.

3. Instrumentos y Técnicas. Los guiones de observación en el aula alterna y de revisión de medios fueron los principales instrumentos aplicados de lo que aquí presentamos. Ellos atienden a los criterios indicados en la célula de análisis de la enseñanza. Para el acopio de datos se empleó la técnica de videograbación y su digitalización de las sesiones en aula alterna; esto permitió la revisión recurrente de lo acontecido ahí para la identificación de los pasajes de interés por los objetivos que perseguimos. La transcripción de las intervenciones ocurridas se utilizó reiteradamente para identificar concatenaciones entre ellas, sus patrones y peculiaridades.

Medios institucionales para la enseñanza de estocásticos

La indagación inició con el análisis de los medios institucionales.

1. *Referentes para el docente*. Como punto de partida, *Plan y programas de estudio* (SEP, 1993, pág. 69) ubica los contenidos de estocásticos en el eje de predicción y azar, cuyo propósito es la *advertencia de la intervención del azar en un fenómeno aleatorio*, por lo cual introduce situaciones para su estudio con *el registro de experimentos aleatorios* (SEP, 1993, págs. 36, 37). El *Libro para el maestro* de sexto grado (1997) consigna para ese eje *Predecir los resultados de un juego de azar. Registrar en tablas y gráficas los resultados del juego para analizar la frecuencia de los eventos* (págs. 44 y 45); recomienda también solicitar a los alumnos la anticipación de resultados a la realización de experimentos aleatorios y la comparación con los resultados obtenidos. El *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas*

(2003) sugiere incluir en esta lección el juego de “la perinola” (ficha 25), que tiene como propósito *Que los alumnos realicen juegos de azar y representen los resultados en una tabla*. La actividad trata de que cada alumno elabore su propia perinola con cartulina atravesada por el lápiz y con la inscripción de un número en cada área delimitada por los dobleces. Por parejas, cada niño elegirá dos de los cuatro números; ganará puntos si cae su número (hacia donde se incline la perinola, después de girarla). Se realizarán 40 repeticiones del giro de la perinola, con el registro cada vez del evento en una tabla ya propuesta. Ganará quien obtenga la mayor frecuencia. *Avance programático en Matemáticas. Sexto grado* (1997-1998), señala para el eje de *predicción y azar*, el propósito de: *Registro en tablas y gráficas de los resultados de diversos experimentos aleatorios* (pág. 15).

2. Libro de texto. Por limitaciones de espacio y como ejemplo, de *Matemáticas. Sexto grado* (libro del alumno, 2004) nos referiremos sólo a lo concerniente a su lección 14 “El juego disparejo” (SEP, 2004, págs. 36, 37), la cual fue puesta en juego en la enseñanza en aula alterna. Ella propone realizar ensayos independientes efectivos en secuencias de lanzamientos de una moneda y anotar los resultados para resumirlos por su frecuencia.

i) Las ideas fundamentales implicadas en la situación planteada en esta lección son: espacio muestra; independencia; equidistribución y simetría; variable estocástica.

ii) Los otros conceptos matemáticos requeridos son: los números naturales y su orden.

iii) Los recursos semióticos en la lección para presentar la situación y su estudio son: tablas de entrada sencilla para organizar y presentar datos, figuras de monedas de volados, y la lengua natural escrita.

iv) Los *términos* de estocásticos que se utilizan en la lección son: *frecuente*, como el adjetivo del evento que ocurrió más veces del lanzamiento de las monedas; con el de *frecuencia* se refiere al número total de marcas que se registran en una tabla propuesta, después de cada volado; *tabla*, rectángulo seccionado donde se concentra el registro de los datos; *oportunidades*, como la posibilidad de obtener el resultado deseado al lanzar una moneda; *registra*, como anotar una marca (raya) por y para cada evento sucedido.

v) La *estructura* de la lección es la siguiente: Introducción para reconocer el “juego disparejo”, su realización y preguntas a él, realización de secuencias de ensayos independientes del juego en equipos de tres alumnos; elección de un color por parte de cada alumno, lanzamiento de una moneda (30 veces por alumno) y registro de los resultados en una tabla; respuesta a preguntas relacionadas con la tabla; elaboración de una tabla general (todo el grupo) y respuesta a las preguntas al respecto; nuevamente, realización de secuencias de volados (30 veces) con el grupo organizado en equipos de cinco alumnos, con cinco resultados sin importar el orden, y contestación de las preguntas; presentación de datos generales del grupo y resumen.

3. *Descripción de los vínculos del Programa de cómputo Enciclomedia* (SEP, 2004) *en la lección 14*. Como medio institucional implementado en las aulas, el programa vincula la lección con simulaciones del interactivo. Primero se enlaza con el propósito, donde se coloca el cursor, se presiona y presenta tres propuestas, que son:

- *Matemáticas interactivo – dados.* Eje “predicción y azar”, muestra en la parte superior: 1) tipos de dados (de colores o con puntos), 2) número de dados (uno, dos o tres, de color o con número de puntos) y 3) número de tiradas; en la parte inferior izquierda de la pantalla el icono de un libro con un signo de interrogación, presenta las instrucciones del juego, que son: 1) elección del tipo de dado (colores o puntos), 2) los colores se pueden modificar, por ejemplo: se puede crear un dado con tres caras rojas y tres caras verdes, 3) los números en las caras de los dados se pueden modificar oprimiendo el botón del ratón cuando el puntero está en la cara del dado que se quiera cambiar. 4) Para regresar a los dados originales se coloca el puntero en el botón "reestablecer" y se oprime. A la izquierda, en la página inicial, dentro de un círculo se incluye el número de 1, 10, 100, tiros que se pueden realizar. Se elige color o el número; cuando el puntero señala el cubilete que aparece entre los números y la tabla, se lanza un dado y el resultado (número o color) se registra en la tabla automáticamente. Al terminar la secuencia de tiros, se ilumina con un color la tabla, según el número o color más frecuente. Se puede jugar con uno, dos o tres dados, la única diferencia es la tabla, que primero presenta los resultados con números (al usar un dado) y posteriormente con barras, con dos y tres dados.

- *Matemáticas interactivo – Ruleta.* Al inicio se localizan los botones de *créditos, instrucciones, iniciar.* Las instrucciones son: "Elección de un nivel: sencillo, medio o avanzado; se empieza la actividad con clic en el botón *empezar;* se inicia y en pantalla se muestra una ruleta hexagonal, dividida en seis partes con un número inscrito en cada sexto, que gira; aparece una pregunta sobre la probabilidad de ocurrencia de algún número de la ruleta. Cada acierto se indica con la figura de un plátano. Se proponen cinco giros (y preguntas); al terminar se cuestiona si se desea cambiar de nivel y, si es así, aparecen dos ruletas para realizar el mismo procedimiento que con el de una. El nivel avanzado presenta la probabilidad de los posibles resultados en la equivalencia de la fracción que sería la respuesta correcta. Cada nivel propone una tabla.
- *Matemáticas interactivo – diagrama de árbol.* Se indican elementos y niveles de ramificación para elaborar un diagrama de árbol. Este apartado sería más útil al propósito de conteo en combinatoria. El siguiente vínculo en la lección se indica en la palabra *frecuente,* enlaza a *Encarta* y al glosario.

4. La propuesta institucional. Los resultados de la revisión de medios denotan la falta de elementos acerca de las ideas fundamentales de estocásticos. La lección aquí considerada no trata de manera clara y completa la idea de espacio muestral, ya que tanto preguntas como la primera tabla propuesta omiten el evento *empate*. La ausencia de énfasis en lo conceptual reduce la actividad al desarrollo de un juego y registro de sus resultados sin la sistematicidad de la que derivaría la experiencia en estocásticos. La propuesta reproduce el énfasis en los contenidos aritméticos en detrimento de los de estocásticos, revelando así la poca importancia otorgada a éstos en la formación matemática básica.

"El disparejo" en aula alterna

El análisis de la enseñanza en aula alterna reveló desconocimiento del medio digitalizado utilizado por el docente; su uso se concretó a la presentación de la lección tal cual proyectada, sin foco en las ideas fundamentales. La enseñanza con el medio propició la concentración de la atención de los alumnos y la unificación de las respuestas, aunque sin la solicitud de la anticipación de resultados, como plantea *Plan y programas* o como recomienda Fischbein (1975). Como ejemplo, la ausencia de un evento en el espacio muestral en la lección pasó inadvertida para el docente en el curso de la clase, como lo revela el pasaje siguiente ("M" denota la intervención del docente y "A" del alumno):

M: ¿Ya hicieron sus 30 [lanzamientos]? Anoten el resultado.

A: Maestra, ¿contestamos las preguntas?

M: Sí, contesten en equipo las cuatro preguntas, por favor. ¿Qué color ganó más juegos?

M: Vamos a contestar esas cuatro preguntas de acuerdo a los resultados de su equipo, *porque ahorita vamos a ver los resultados del grupo en total.*

[Se leen las preguntas, se contesta y registran en el pizarrón dentro de la tabla].

M: Empezamos. Voy a hacer el cuadro por resultados del grupo [Pregunta por color en cada equipo].
M: A ver, alcen la mano los equipos [en] que ganó el color verde [tres equipos]; alcen la mano los equipos en que ganó el color rojo [dos equipos]; y alcen la mano los del color azul [un equipo]. [La maestra cuenta los equipos en la tabla y, como están reunidos, corrobora las cantidades].
M: ¿Obtuvieron los mismos resultados? ¿Por qué?
M: Aquí los sucesos, ¿cuáles son? [Enfatizando en la lección del libro]
A: Rojo, verde y azul.
M: ¿Son parecidos?
De manera similar a lo acontecido en el siguiente episodio, en el resto de la clase es notoria la ausencia de términos que promoverían u orientarían hacia la idea de probabilidad tal como frecuencia.
M: ¿Cuál fue el que ganó menos veces?
A: Azul.
M: ¿Cuál fue el que ganó más veces?
A: Verde.

Observaciones

En general, como aquí se vio, la docencia reproduce en su práctica lo presentado en las lecciones de estocásticos, tanto en el libro de texto como en Enciclomedia. Lo anterior es debido a que no se considera a los estocásticos como contenidos necesarios. Sin embargo, algunos estudios señalan hacia la aportación del estudio de la probabilidad a una formación matemática básica, al desarrollo de un pensamiento dinámico (Perrusquía, 1995); y a la dotación de sentido a otros conceptos de matemáticas por su uso en la consideración de situaciones aleatorias (Fischbein, 1975) que no se concrete a resultados únicos y deterministas. En cuanto al programa de cómputo, se hace necesario perfeccionar sus contenidos, y dar énfasis a lo conceptual de estocásticos, de modo que su presentación no sea sólo pretexto para ejercitar otras nociones de matemáticas. Es de interés el estudio de su uso en mayor escala y con el recurso a Internet para dirimir sobre su aportación en la educación en estocásticos.

Referencias bibliográficas

Eisner, Elliot W: (1998). *El ojo Ilustrado.* España: Paidos Educador.

Fischbein E. (1975). *The Intuitive sources of probabilistic thinking in children.* D: Reidel Publishing Company. Dordrecht-Holland/Boston- USA.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, págs 187-205. Reidel, Holanda.

Ojeda, A. M.: (2005). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: ensayo en la enseñanza de estocásticos "Matemática Educativa", 30 años y una mirada actual (en prensa)

Perrusquía, M, E. (1998). Probabilidad y aritmética: Estudio epistemológico en el estadio medio. Dificultades de interpretación. Tesis de maestría. DME, Cinvestav, México.

SEP: (2004), Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado. México.

SEP: (1997-1998), Avance programático. Sexto grado. México.

SEP: (1993), Plan y Programas de estudio de educación básica primaria. Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

SEP: (2003) Fichero actividades didácticas. Matemáticas. Sexto grado. México.

SEP: (2004) Matemáticas. Sexto grado. México.

Tedesco, J.: (2003). Educar en la sociedad del conocimiento. FCE, México.

Velorio, M.: (2003). La cumbre mundial de la información. *Gaceta UNAM*, No. 355, México. www.sep.gob.mx/worklappsite/Enciclomedia/documentoenciclomedia.pdf. 24-08-05

LUGARES GEOMÉTRICOS: ¿CUÁL ES SU ROL EN LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA?

Verónica Molfino, Greisy Winicki-Landman, Javier Lezama Andalón
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. IPN. (México)
veromol@adinet.com.uy

Campo de investigación: pensamiento geométrico, demostración. Nivel educativo: medio
Palabras clave: demostración, lugares geométricos, bachillerato

Resumen
¿Cómo y para qué enseñar a demostrar en cursos de Enseñanza Secundaria? Esta es un cuestionamiento que se presenta con fuerza entre profesores de Matemática de Bachillerato en Uruguay. Resulta ineludible reflexionar e investigar en vistas de rediseñar el discurso matemático escolar con argumentos teóricos precisos. En la investigación que se reporta se analizó la producción de estudiantes de un curso de Geometría Métrica del Bachillerato al resolver problemas de Lugares Geométricos con la finalidad de evaluar su relevancia para la enseñanza y aprendizaje de la demostración. Se constató la misma a través del análisis de las funciones y esquemas de demostración.

Introducción

El trabajo que se reporta es el resultado de una investigación realizada para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Con el objetivo general de investigar un problema relacionado estrechamente con la práctica educativa, de modo que esta investigación sea una herramienta para reflexionar sobre ella y modificarla, se decidió trabajar sobre Lugares Geométricos (LG) y su vínculo con la enseñaza y aprendizaje de la demostración en el curso de Geometría Métrica de 2º año de Bachillerato (16-17 años) en un Instituto de Educación Secundaria en Montevideo, Uruguay. Fue necesario indagar primero sobre el concepto de demostración, específicamente su aspecto relacionado con el discurso actual de la Matemática Escolar. Más adelante se diseñó y puso en práctica una actividad que permitiera dar respuesta a las interrogantes planteadas a partir del análisis de los resultados. Se propusieron dos objetivos concretos: en primer lugar, analizar y describir las producciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas que involucran variación de puntos en una situación geométrica particular –de LG y de construcción– en lo que refiere a los esquemas de demostración y procesos que se hacen presentes, así como a las funciones de demostración que se manifiestan en la resolución. En segundo lugar, analizar las maneras de conjeturar resultados de los estudiantes, sus modelos de justificación y cómo el abordaje de este tipo de problemas (de lugar geométrico) permite el fortalecimiento o no en los estudiantes de la práctica de la demostración en matemática y en geometría en particular.

Marco teórico

En el marco de este trabajo se entiende a la demostración –en un contexto educativo- como un proceso social a través del cual una persona descubre que una propiedad es cierta, la comprende, puede argumentar por qué es así, es capaz de integrarla dentro de un sistema de conceptos y relaciones que tienen un significado determinado para ella y de comunicarla a otras personas. Balacheff y Laborde (1988; 267) enfatizan su dimensión social: si bien el proceso de demostrar es individual de cada persona, es fundamental el transitarlo con otras ya que el valor de verdad de un razonamiento es acordado por un determinado colectivo, en un momento determinado (que puede ser, por ejemplo, el grupo de clase en un día de clase). Esta explicación puede ser reconocida por un colectivo y no por otro, o en determinado momento y no en otro.

Coincidiendo con Duval (1999), se concibe a la argumentación como el proceso a través del cual se exponen razones para fundamentar la validez de un resultado o una opinión y buscar la convicción de uno mismo o de otros, que puede o no ser aceptado en cierto contexto. Es precisamente por eso que es importante la consideración de la argumentación en las prácticas educativas: porque es ella, y no tanto la deducción en sí, la que aporta entendimiento al proceso de demostración.

Se utilizaron para analizar las producciones que los estudiantes realizaron al resolver la actividad propuesta dos caracterizaciones: los *esquemas de demostración* que presentan Harel y Sowder (1998): externos, empíricos y analíticos y las *funciones de la demostración* que presenta de Villiers (1993): verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación.

Historia y situación actual de la demostración en geometría y del tema "Lugares Geométricos" en el currículo de Educación Secundaria en Uruguay

Se llevó a cabo un análisis de los contenidos programáticos de los cursos de Matemática en las diferentes orientaciones que ofrece el Bachillerato uruguayo desde el programa del año 1941 hasta el vigente en el año 2006. El objetivo de este análisis era obtener un panorama de la existencia y desarrollo de la demostración –particularmente en geometría– en el currículo, así como del tema "Lugares Geométricos" como destreza ineludible en la formación matemática de un individuo. Este análisis reveló, por un lado, que en ningún caso se menciona a la demostración como habilidad a desarrollar en ninguno de los programas, así como tampoco se hacen sugerencias metodológicas o didácticas al respecto. Por otro lado, en lo que hace a la inclusión del tema "Lugares Geométricos" sí se hace referencia explícita a ellos en el programa de primer año de Bachillerato vigente actualmente, pero no en el de segundo año. Esta última observación llama la atención porque en los cursos de Geometría Métrica de ese año es donde más extendido está el tratamiento del tema, siendo incluso requisito para aprobar el curso en la mayoría de los casos.

Los programas del curso de Geometría Métrica de segundo año de Bachillerato son, incluido el actual, una lista de contenidos, sin referencias metodológicas y didácticas, sin sugerencias respecto al tiempo a dedicar para el desarrollo de cada tema e incluso sin sugerencias bibliográficas. Nada en ellos nos permite deducir que se entienda a la demostración como una herramienta para desarrollar habilidades deseadas en el marco de la matemática educativa. Surgen entonces algunas interrogantes: ¿para qué se trabaja la demostración en el aula? ¿Cómo se debe introducir? ¿Qué tipos de problemas tenemos que plantar para favorecer el desarrollo de los procesos argumentativos en nuestros estudiantes?

Descripción de la experiencia

Se decidió acotar la investigación a las siguientes interrogantes:

- ¿Qué tipos de esquemas de demostración se hacen presentes en la resolución de problemas de construcción y lugares geométricos?
- ¿Qué procesos cognitivos relacionados con la demostración en geometría se hacen presentes en la resolución de este tipo de problemas? (A modo de ejemplo, algunos de los procesos esperados son la fase de descubrimiento de un resultado sobre la figura a estudiar, su conjetura inicial, su formulación y, en algunos casos, la demostración: explicaciones y justificaciones).
- ¿Cuáles son las funciones de la demostración que el docente puede detectar en el proceso de resolución de los problemas de lugares geométricos?
- ¿De qué manera intervienen los elementos anteriores para que los estudiantes logren exitosamente demostrar los resultados conjeturados?

- ¿De qué manera influye la resolución de problemas de lugares geométricos en el desarrollo de la habilidad de demostrar de los estudiantes?

Fue diseñada una actividad con tres problemas, la cual se propuso en tres instancias: la primera vez a estudiantes de un centro de formación docente –esta experiencia sirvió como prueba piloto para ajustar detalles– y las otras dos veces a dos grupos de estudiantes de 2º año de Bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria (16-17 años), proponiendo parte de la actividad a un grupo y la otra parte al otro grupo. En las tres instancias se armaron grupos en forma espontánea de uno, dos o tres integrantes. La actividad fue desarrollada en salones de clase en los que había computadoras con software de Geometría Dinámica (GD) (Geometer Sketchpad y/o Cabri-Géomètre) y se permitía trabajar con lápiz y papel, con la computadora, e incluso con ambas.

Se utilizaron diversas estrategias para recolectar datos: <u>*grabación de diálogos*</u> entre la docente y los diferentes grupos y del diálogo entre los miembros del grupo, <u>*registro escrito*</u> de figuras, apuntes, intentos de justificación de resultados obtenidos, <u>*archivos de los programas*</u> de computadora utilizados con producciones de los estudiantes y <u>*apuntes personales*</u>, registrando tanto éxitos como fracasos.

La siguiente es la actividad propuesta:

Te agradecería que al resolver los problemas escribieras <u>*todas*</u> las estrategias que pensaste para abordarlos, tanto aquéllas que crees que son válidas como aquéllas que crees incorrecta, o que descartaste por alguna razón.

Problema 1:

a) Traza una circunferencia C de centro O y radio r y una recta t. Construye en el mismo plano una circunferencia C' de centro O' y radio 3 que sea tangente a C_O y a t.

Discute la cantidad de soluciones según la posición de C_O y t.

b) Se consideran dos circunferencias C_A y C_B de igual radio y la circunferencia C_O, en el mismo plano que las anteriores y tangente a ambas. Halla el lugar geométrico de O en las siguientes situaciones:

i) C_A y C_B son exteriores. ii) C_A y C_B son tangentes.

iii) C_A y C_B son secantes. iv) C_A y C_B son coincidentes.

Problema 2:

a) Dadas dos circunferencias $C_{O,r}$ y $C'_{O',r'}$ con $C \cap C' = \{P, Q\}$. B es un punto de C tal que $\overline{BP} = r$ y ΔPOB es horario. Se traza una recta t variable por P, $t \cap C = \{P, A\}$. Halla el LG de H, intersección de la bisectriz de $B\hat{A}P$ con la circunferencia C.

b) B' es un punto de C' tal que $\overline{B'P} = r'$ y $\Delta PO'B'$ es antihorario, $t \cap C' = \{P, A'\}$, $AB \cap A'B' = \{J\}$. Halla el lugar geométrico de J.

Problema 3:

Dado un triángulo ADE, B el punto medio del segmento AD y C un punto variable en el segmento AE. Las bisectrices de $A\hat{C}B$ y $A\hat{B}C$ se cortan en I, y las bisectrices de $A\hat{E}D$ y $A\hat{D}E$ se cortan en J. Halla el lugar geométrico de O, circuncentro del triángulo ΔAIJ.

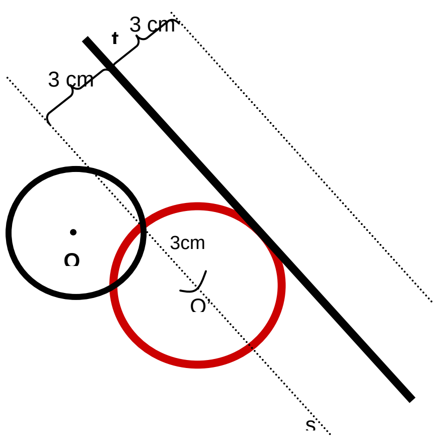
Análisis de la experiencia

Por razones de espacio sólo se desarrollarán las producciones de algunos de los estudiantes, seleccionados por su representatividad.

EP trabajó en forma individual sobre el Problema 1a, solamente con lápiz y papel. Propuso una construcción sin un análisis previo de las condiciones, lo que le condujo a una solución en la que se respetaba la condición de tangencia a la recta y la medida del radio pero no la condición de tangencia a la circunferencia. Cuando se le hizo ver su error, la corrigió por esta otra:

1 – Trazar perpendicular a t que pase por O (al punto de intersección lo llama P).

*2 – Trazar una recta que pase por P y sea tangente a la circunferencia de centro O. (*al punto de tangencia lo llama Q*)*
3 – Trazar una recta s que pase por O y por Q.
*4 – Trazar una circunferencia de centro Q y radio 3cm, el punto que corta a s exterior a la circunferencia de centro O. [*Se supone que se refiere a que ese punto es O'*].*
5 – Trazar circunferencia de centro O' y radio 3cm. (t tiene que estar a menos de 6cm de la circunferencia de centro O).
Esta nueva solución sí respeta la condición de tangencia a la circunferencia y la medida del radio pero no respeta la condición de tangencia a la recta.
A EP no se le presenta en ningún momento la necesidad de justificar los pasos que va haciendo ni las decisiones que va tomando, a pesar de que se le había solicitado en forma explícita. En el segundo intento descubre la necesidad de que los dos centros estén alineados con el punto de tangencia. Sin embargo, el *descubrimiento* no se hace presente como una función propia de métodos deductivos sino como el papel jugado por métodos empíricos en la resolución del problema.
Según la clasificación de Sowder y Harel, en esta situación el estudiante presenta un *esquema de demostración empírico perceptivo*: en las dos soluciones que presenta se convence de la validez de su algoritmo de construcción por la figura que construye (que además cuida que sea precisa, con regla y compás). El haber trabajado sólo con lápiz y papel y sin un software de GD refuerza esta situación.
AR y JO trabajaron sobre el mismo problema integrando ambos métodos: lápiz y papel y Cabri. En un primer intento, trazaron el LG de los puntos que se encuentran a 3cm de la recta t (unión de dos rectas paralelas a la recta a esa distancia) y ubicaron el centro sobre una de esas rectas y a 3cm del punto de intersección de dicha recta con la circunferencia dada originalmente. Los estudiantes respetaron así la condición de tangencia a la recta pero no a la circunferencia, lo que constataron al llevar a cabo su construcción.



Darse cuenta del fracaso los llevó a intentar nuevamente, y después de un proceso de búsqueda con métodos empíricos e inductivos, presentaron un segundo intento de solución. En esta nueva construcción impusieron una condición extra al centro buscado: estar en una circunferencia concéntrica con la original y de radio 3 unidades mayor.
Adaptando la teoría de de Villiers a este ambiente de resolución de problemas, podemos afirmar que en los razonamientos de AR y JO se pueden detectar varias funciones de la demostración, algunas más explícitas que otras: el *descubrimiento* de una solución, que es en definitiva un resultado geométrico generalizable y a la cual se arribó a partir de la deducción de las figuras en las que se debía encontrar el centro de la circunferencia buscada, la *explicación* de por qué la solución encontrada es una solución válida (especialmente en la pertenencia de O' a la recta paralela a t) y la *sistematización* de resultados, que se hace más explícita en la discusión de la cantidad de soluciones.
Puede encontrarse en los razonamientos de esta pareja una combinación del *esquema de demostración analítico por transformación* (en la búsqueda del cumplimiento de la condición de tangencia a la recta) con el *empírico inductivo* (en la búsqueda del cumplimiento de la otra condición). Especialmente en el primer caso se puede apreciar una intención explícita de

anticipar el resultado: "El punto O' va a estar en …". RS y SA trabajaron juntos sobre los problemas 1b, 2 y 3 solo con lápiz y papel. En su producción se puede apreciar cómo la predicción jugó un papel importante en la resolución de los ejercicios. En su diálogo aparecen frases que lo atestiguan, como: "…el lugar geométrico del centro de la circunferencia va a ser la mediatriz del segmento AB porque el centro O va a equidistar al punto de tangencia con la circunferencias C_A y C_B …"; o "…las bisectrices de [los ángulos de vértices] B, C y A se van a cortar en el punto I porque las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, entonces si dos de ellas se cortan en este entonces la tercera también se va a cortar acá".
La docente pudo detectar con claridad diferentes funciones que, si bien de manera inconsciente e implícita por parte de los estudiantes, se le asignó a la demostración: ya sea para *verificar*, para *explicar*, para *sistematizar*, para *comunicar* o para *descubrir*. Esta pareja presentó una gran variedad de *esquemas de demostración*, en su mayoría *empírico inductivos* y *analítico axiomáticos*, pero también utilizaron mecanismos *externos* de convencimiento (apuntes de clase, por ejemplo).

Reflexiones finales

Con respecto al análisis del discurso escolar, la investigación arrojó que la demostración es considerada como una habilidad a desarrollar instaurada de manera implícita entre los docentes, y a la vez una práctica que se introduce en las clases de Matemática en Bachillerato. Pero existen al día de hoy pocos consensos explícitos acerca de para qué introducirla en el aula, de qué manera y cuáles son las problemáticas concretas que están asociadas a ella y que permiten a los estudiantes desarrollar los procesos argumentativos asociados. Por su parte, el tema "Lugares Geométricos" no es un contenido programático en el curso de Geometría Métrica de 2º año de Bachillerato pero forma parte del discurso matemático escolar. De esta manera, se está corriendo un grave peligro: las prácticas educativas dependen de cada profesor, lo que atenta contra la equidad necesaria en todo sistema educativo.
En lo que refiere al primer objetivo planteado, se pudo observar que los problemas propuestos –de LG y de construcción- son actividades en cuya resolución se hace presente la demostración cumpliendo diferentes roles. Esta instancia permitió a la docente distinguir diferentes funciones de la demostración en el análisis de la resolución de los problemas por parte de los estudiantes. Creemos que esto puede favorecer la resignificación de la demostración como una de las habilidades a desarrollar dentro de su cultura matemática y su formación como ciudadano en general. Asimismo, se detectó que este tipo de problema permite al docente detectar cuál es el esquema de demostración que está atravesando quien lo intenta resolver, lo que es un buen punto de partida para saber cómo intervenir para lograr esquemas de demostración más elaborados. En suma, la resolución de problemas de lugares geométricos ofrece una excelente oportunidad de acercarse de manera significativa a la demostración en geometría y favorecer el desarrollo de razonamientos de tipo analítico-deductivos. Se observa que a diferencia del tratamiento usual de la demostración (exposición por parte del profesor de resultados y demostraciones ya fabricadas y que aportan poco aprendizaje significativo a los estudiantes), este tipo de problema ofrece a los estudiantes una oportunidad de acercarse de manera significativa a la demostración en geometría. Estas razones hacen que éste sea un tema que vale la pena seguir trabajando con los estudiantes y que sería recomendable explicitarlo en el listado de contenidos del curso, a la vez que pueden explicar el por qué ha sobrevivido en las prácticas reales de los docentes a pesar de que no se mencionen de forma explícita a nivel curricular. También se hicieron observaciones que permiten comenzar a dar respuesta a las preguntas asociadas al segundo objetivo. Por un lado, se puede afirmar que los esquemas de demostración externos o el empírico perceptivo

representan obstáculos a la hora de generar argumentos deductivos para justificar un resultado. Esto puede ser un buen punto de partida para trabajar con los estudiantes que presentan mayores dificultades en el tema, ahora la pregunta sería más concreta: ¿qué tipo de trabajo previo es necesario para que los estudiantes logren ir más allá de las demostraciones externas y empírico-perceptivas, que son las que representan obstáculos para razonamientos más elaborados? ¿A través de qué procesos los estudiantes pueden atravesar esa barrera? ¿En qué etapa de la escolarización se debe abordar?

Por otro lado, se detectó que la presencia de esquemas de tipo analítico-axiomáticos fue precedida en la mayoría de los casos por la de esquemas de tipo empírico inductivos, situaciones en las que la demostración se hizo presente en una mayor variedad de funciones. Entonces la pregunta que queda planteada es: ¿Qué tipo de trabajo previo es necesario realizar con los estudiantes para fomentar el desarrollo de esquemas de demostración de tipo empírico inductivos? Una posible repuesta puede encontrarse si se reconoce a la Geometría Dinámica como una herramienta ideal para desarrollar el tipo de razonamiento empírico inductivo ya que permite al estudiante construir infinidad de posiciones para una figura en un tiempo muy reducido. Otro aspecto que se pudo observar en la producción de los estudiantes es que en general, los estudiantes que son capaces de diferenciar entre los elementos variables y los fijos presentan más posibilidades de arribar a una solución y lograr convencerse a sí mismos y a sus compañeros de la misma. Se detecta en los diálogos de los estudiantes la intención de predecir la posición de la figura en cuestión. La predicción se hace presente como elemento que motiva y conduce en la mayoría de los casos a encontrar una solución. La pregunta que queda planteada entonces es: ¿se podrá vincular este tipo de trabajo con la teoría del pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis desarrollada, entre otros autores, por Cantoral y Farfán (1998)? ¿Será provechoso para la Matemática Educativa encontrar vínculos entre ambas líneas de investigación? Los aportes al pensamiento gráfico e intuitivo pueden representar antecedentes importantes para dicha teoría.

Existen diversos aspectos que no han sido considerados y en los cuales se debería profundizar para continuar mejorando nuestras prácticas educativas: el trabajo en parejas vs el trabajo individual, la influencia de la GD, el tratamiento del tema en libros de texto, la relación entre el tratamiento del tema en las aulas y la evaluación y la relación entre las expectativas docentes y las prácticas educativas reales, entre otros.

Referencias bibliográficas

Alsina, C, Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.

Balacheff, N. y Laborde, C. (1988). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. In Mugny, G. y Pérez, J.A. *Psicología social del desarrollo cognitivo* (pp. 265-288). Barcelona: Editorial Antroupos.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon,* 42, Vol. 14(3), 353 – 369.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15 – 30.

Duval, R (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México D. F.: Grupo Editorial Ibeoroamericana.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Types of Students' Justifications. The Mathematics Teacher, Vol. 91, 8, 670-675.

Molfino, V. (2006). *Lugares geométricos: ¿cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría?* Tesis de maestría no publicada. Cicata – IPN.

CONSTRUCCIÓN COLEGIADA Y APLICACIÓN DE UN EXAMEN CRITERIAL ALINEADO CON EL CURRÍCULO PARA EVALUAR A GRAN ESCALA UN CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

José Alvaro Encinas Bringas, Ruth Rivera Castellón y Maximiliano De Las Fuentes Lara
Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. (México)
aencinasb@uabc.mx, ruthrc58@uabc.mx, maximilianofuentes@uabc.mx
Campo de investigación: medición. Nivel educativo: superior
Palabras clave: examen, colegiado, criterial, cálculo

Resumen
Se describe un procedimiento para desarrollar exámenes criteriales de gran escala, de opción múltiple, alineado con el currículo, cuyo propósito es conocer el nivel de aprendizaje de los estudiantes al finalizar el curso. Se aplicó a la materia de Cálculo Diferencial cursada semestralmente por 700 estudiantes en promedio, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). Una vez desarrollados, los ítems y modelos de examen fueron sometidos a una prueba empírica con una pequeña muestra de alumnos, a fin de calibrarlos antes de su aplicación a gran escala. Con los resultados de estos exámenes, es posible identificar problemáticas de enseñanza y aprendizaje, tomando acciones para su resolución. Los procedimientos ejecutados en este caso pueden aplicarse sin mayor modificación a otros cursos.

Introducción

En el año de 2004, la Subsecretaría de Educación Superior (SESIC) y la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) publicaron una convocatoria para diseñar instrumentos de evaluación colegiada del aprendizaje. En respuesta, varios grupos de académicos presentaron proyectos y cinco de ellos, entre ellos éste, obtuvieron financiamiento para desarrollar sus propuestas.

La convocatoria especificó que quienes resultaran apoyados, recibirían capacitación y asesoría para la construcción de los exámenes por parte del Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo (IIDE**)** de la UABC. La construcción de los instrumentos dio inicio con el caso de los modelos de examen para la materia Matemáticas I (Cálculo Diferencial) en la Facultad de Ingeniería, Unidad Mexicali (FIM).

En la actualidad, un problema relevante para las instituciones educativas, relacionado con el crecimiento del número de profesores y estudiantes, radica en conocer con precisión y justicia el nivel de aprendizaje que logran los alumnos. En Mexicali, la FIM cuenta con 4000 alumnos, alrededor del 50% están en la etapa básica y cursan alguna materia de matemáticas. En particular, Matemáticas I ofrecida en primer semestre, es cursada por 700 estudiantes en promedio.

En esta institución educativa, Matemáticas I tiene una alta reprobación, alrededor del 65 % en examen ordinario, generando con ello retraso y abandono escolar. Se sabe que estos porcentajes de reprobación son relativos, puesto que en general los profesores asignan diferente peso a diferentes temas. Un examen colegiado propicia estándares de ejecución comunes como base para estimar la calidad en el aprendizaje y de alguna manera puede reorientar la actividad de los profesores hacia el uso de prácticas innovadoras en temas identificados como difíciles. Además, puede ser un instrumento para responsabilizar al estudiante de su propio aprendizaje, ya que el proceso de implementación del examen exige que el contenido a evaluar sea socializado.

Construcción del examen

Para construir el examen se adoptó el modelo de Nitko (1994) para desarrollar exámenes nacionales orientados por el currículo. Dicho modelo se complementa por la metodología para la construcción de test criteriales de Popham (1990) y con aportaciones metodológicas y operativas de Contreras (1998, 2000). El examen desarrollado tiene las siguientes características: a) criterial, este tipo de prueba tiene el propósito de evaluar el aprendizaje informando que puede hacer o no el examinado; b) alineado con el currículo, se desprende una actividad para identificar lo esencial de éste y evaluarlo; c) opción múltiple, se pide al estudiante elegir la respuesta correcta o mejor opción de entre las que se ofrecen d) a gran escala, su aplicación corresponde a todos los grupos que toman una cierta materia. A continuación se presenta en la tabla 1, parte del modelo de Nitko (1994) utilizado para la construcción del examen:

Tabla 1. Proceso general seguido para diseñar la prueba

Etapa	**Procedimientos**
1. Definir el dominio de resultados que pretende el currículo	Selección y capacitación del comité diseñador del examen
	Análisis del contenido curricular del programa de estudios
	Análisis complementario por profesores en servicio
2. Analizar el currículo	Elaboración de la retícula del contenido a evaluar
3. Desarrollar el plan de evaluación	Muestreo de resultados de aprendizaje a evaluar
	Capacitación del comité elaborador de especificaciones
	Diseño de especificaciones de ítems
	Capacitación del Comité elaborador de ítems
4. Producir y validar ítems	Elaboración de ítems según las especificaciones
	Revisión de la congruencia ítem-especificación
	Ensayo empírico y revisión de ítems
	Estructuración de una muestra de ítems representativa del dominio curricular
	Ensayo empírico de gran escala y revisión de ítems

Para realizar las actividades que establece el modelo, se constituyeron tres comités especializados y uno organizador de las acciones:

- *Comité coordinador*: integrado por especialistas en planeación y evaluación educativas del IIDE y la FIM, el cual estuvo encargado de coordinar el diseño, elaboración y validación de los modelos de examen. Para realizar dichas acciones, el comité desarrolló y seleccionó diversos materiales apoyando la capacitación necesaria para diseñar, elaborar, aplicar y evaluar la prueba.

Los siguientes comités integrados cada uno por tres profesores en servicio con experiencia docente y dominio del contenido curricular de Cálculo Diferencial.

- *Comité diseñador del examen*: su función consistió en analizar el programa de estudios vigente, detectar y estructurar el universo de contenido del mismo, determinar el contenido importante a evaluar y sintetizar las decisiones correspondientes a dichas acciones en un plan de evaluación para la prueba.
- *Comité de especificaciones*: a cargo de la elaboración de las especificaciones de reactivos del examen.

- *Comité de reactivos*: encargados de elaborar los ítems de opción múltiple correspondientes a cada modelo de examen.

La capacitación de los miembros de los comités técnicos operó mediante la modalidad de curso-taller. Los participantes primero revisaron los aspectos conceptuales y metodológicos; posteriormente los aplicaron y presentaron los productos elaborados, para posteriormente ser retroalimentados y corregidos hasta obtener su versión final. Los productos debieron ser consensados tanto por los miembros de cada comité, como por los profesores que integran la academia del área de matemáticas.

Una vez elaborados los reactivos y estructurados en modelos de examen, estos fueron aplicados a una pequeña muestra de alumnos a fin de calibrarlos. Así, tras su ensayo empírico, se efectuó un análisis de reactivos para detectar los que tienen dificultad inadecuada, discriminación impropia y opciones no seleccionadas, entre otros problemas. Posteriormente, a partir de los resultados de dicho análisis, se procedió a revisar y corregir los reactivos que presentaron fallas y a estructurar de nueva cuenta la versión definitiva de los modelos de examen que se aplicaron a gran escala. Finalmente se obtuvieron tres modelos de examen llamados A, B y C. Cada uno con 75 reactivos de opción múltiple.
Algunos de los productos mencionados pueden ser consultados en la página WEB de la Facultad de Ingeniería de la UABC: http://ingenieria.mxl.uabc.mx/~tc/examenColegiado/examenColegiado.html

Evaluación de conceptos del cálculo

Se consideró que la evaluación sobre el aprendizaje de un concepto del cálculo, puede incluir reactivos que evalúen el dominio que logró el examinado sobre los atributos que lo definen, prueben su poder de distinguir ejemplos y no-ejemplos del concepto, así como la habilidad para ubicar el concepto en la red conceptual a la que pertenece (Castañeda, 1996).
Los conceptos matemáticos son abstractos; para su enseñanza se recurre a su representación gráfica, analítica, numérica, así como al transito entre ellas, por tal motivo habrá que evaluar esas diversas representaciones y correspondientes tránsitos. Se presentan dos reactivos que fueron elaborados siguiendo los criterios antes señalados:

Reactivo 1. Selecciona la gráfica que no representa una función:

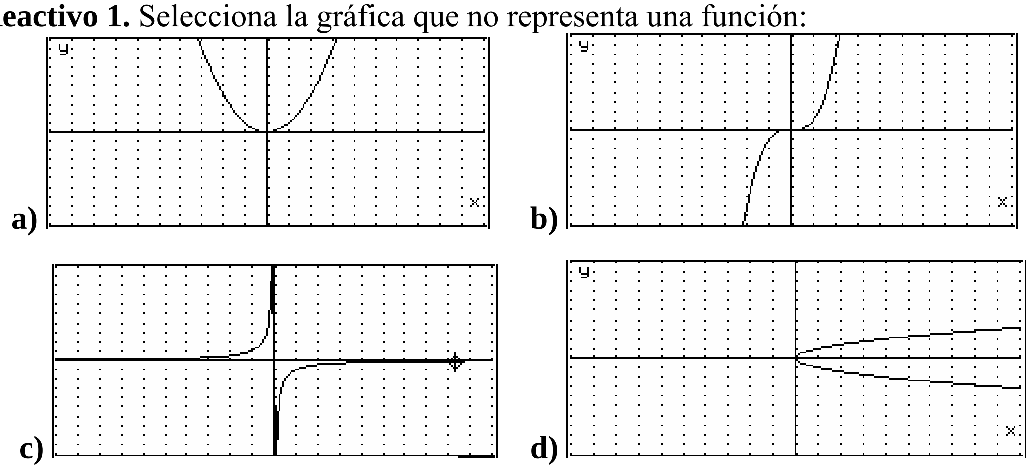


Figura 1.

Este reactivo explora el dominio de no-ejemplos, en este caso la gráfica que no corresponde a la representación de una función.

Reactivo 2. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa a una función**?**
a) $y^2 = x^2 + 4$ b) $y^2 + x^2 = 9$ c) $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$ d) $y = 4 - x^2$

Este reactivo investiga la identificación de ejemplos, en este caso la representación algebraica de una función.

2.2 Evaluación de procedimientos del cálculo

Para evaluar el aprendizaje de procesos en el cálculo, se consideró necesario explorar si el examinado tiene dominio de:
a) Los requisitos teóricos y prácticos del procedimiento, b) las condiciones o contexto de uso para su aplicación; es decir cuándo, cómo y dónde emplearlo; que casos resuelve, etc. y c) el dominio sobre las diferentes etapas o secuencia de operaciones del procedimiento (Castañeda, 1996).
Se presenta un ejemplo para ilustrar el diseño de la evaluación del dominio de los procedimientos en el examen:

Reactivo. En un problema en el cual se busca minimizar una variable x, habiendo obtenido un valor $x = c$ candidato para ser solución, ¿Qué se tiene que hacer antes y después de haberlo obtenido?
a) Antes: encontrar $f'(x) = 0$ y despejar x; después: encontrar $f''(c)$
b) Antes: encontrar $f(x) = 0$ y despejar x; después: encontrar $f'(c)$
c) Antes: encontrar $f'(x) = 0$ y despejar x; después: encontrar $f(x) = 0$
d) Antes: encontrar $f'(x) = 0$ y despejar x; después: encontrar $f''(x) = 0$
Este reactivo explora el dominio de las etapas o secuencia de un procedimiento.

Aplicación del examen

El examen se ha aplicado a gran escala durante los semestres 2005-2 a 669 estudiantes y el 2006-1 a 475. Los 75 reactivos por examen se dividieron en dos partes: la primera, a mitad del semestre y la segunda al final, en sesiones de dos horas cada una. La aplicación se ha hecho durante esos semestres en papel y lápiz, esperando próximamente terminar la elaboración de un software que administre en computadora el examen.

A cada profesor se le entregan los resultados del examen por alumno. Por acuerdo de la academia, se le asignó un peso del 30 % en la calificación semestral del estudiante, con la finalidad de asegurar su interés al responder el examen.
Los datos obtenidos de las respuestas del examen son organizados en una matriz de igual número de renglones que de estudiantes toman el examen y 75 columnas, una para cada reactivo. Utilizando un software adecuado, se captan en computadora las respuestas de los examinados. Para cada pregunta se calcula el índice de dificultad y de discriminación.

Discusión y comentarios finales

Sobre la construcción del examen

Entre las principales dificultades enfrentadas durante el proceso de elaboración del examen, se destaca la relacionada con la cultura evaluativa del profesor tradicional de matemáticas. Por ejemplo, la reticencia a considerar que un examen de opción múltiple pueda indagar sobre el dominio de un concepto o procedimiento matemático. Fue necesario romper ese paradigma en los profesores participantes.

En la construcción del examen se involucró directamente a 15 académicos y de manera indirecta al resto de profesores de la academia de matemáticas. Debido a la experiencia de la aplicación del examen, ha surgido la inquietud por parte de los profesores de mejorar el proceso de evaluación en sus cursos normales.

La actividad del proceso de desarrollo del examen por sí misma ha sido un excelente ejercicio de vida colegiada, donde los profesores de esta facultad, estamos entrando en una etapa de efervescencia y discusión académica: qué enseñar, cómo, con qué tecnología, etc.

Respecto a los reactivos presentados, dentro de los límites que imponen los ítems de opción múltiple, estos satisfacen las expectativas para efectuar una evaluación más auténtica de conceptos y procedimientos sin recurrir a los reactivos de ejecución que, aunque más ecológicos, son imprácticos en la evaluación a gran escala (Contreras, 2005).

Actualmente, la experiencia en la construcción del examen en matemáticas I se está transfiriendo al curso de matemáticas II (Cálculo Integral).

Sobre la aplicación del examen

El tipo de acciones realizadas luego de la aplicación masiva del examen se ilustran con el caso siguiente:

El reactivo no. 15 que se muestra a continuación fue contestado correctamente por 123 de los 669 estudiantes lo cual arroja un índice de de dificultad de 0.18.

Reactivo 15. Si f(x) es representada por la gráfica de abajo-izquierda, entonces la de abajo-derecha corresponde a:

a) f (x - 2) b) f(x) + 2 c) f (x+ 2) d) f(x) – 2

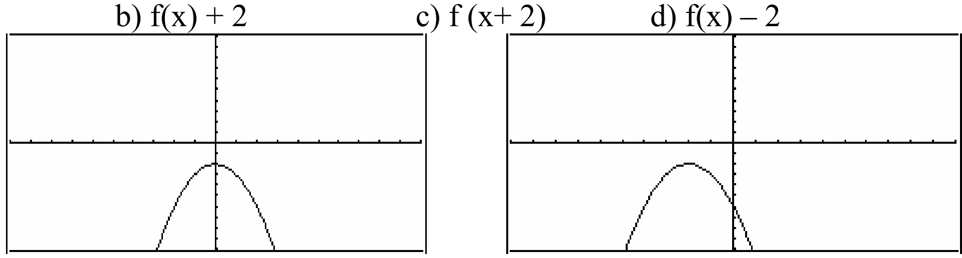


Figura 2.

Este reactivo evalúa el contenido de graficación de funciones por parámetros, el cual no puede considerarse complejo conceptual o procedimentalmente. El desempeño sugiere que los profesores no están utilizando la suficiente tecnología para su enseñanza, tal como la calculadora graficadora o algún software para computadora. Esta situación revelada vía el examen, ha propiciado la aceptación entre los profesores reacios al uso de recursos tecnológicos, la búsqueda de actualización en su uso para la enseñanza del cálculo.

Además, se ha encontrado una tendencia a la baja semestre tras semestre, en los índices de reprobación de este curso a partir de la aplicación de los exámenes. Se atribuye a una mejora en el desempeño cotidiano de los docentes y de los estudiantes.

Finalmente se subraya que el fin último del diseño e implementación del examen construido colegiadamente es buscar la mejora en la enseñanza y aprendizaje del curso, en este caso, Matemáticas I.

Referencias bibliográficas

Contreras, L.A. (1998). *Metodología para desarrollar y validar un examen de español, de referencia criterial y referencia normativa orientado por el curriculum, para la educación primaria en México.* Memorias del III Foro Nacional de Evaluación Educativa. Veracruz. Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior.

Contreras, L.A. (2000). *Desarrollo y pilotaje de un examen de español para la educación primaria en Baja California.* Tesis de maestría, obtenida el 16 de agosto de 2005 del sitio Web http://eduweb.ens.uabc.mx/egresados/index.html .UABC.

Contreras, L.A., Encinas, J.A., De las Fuentes, M., Rivera, R.E.(2005) *Evaluación Colegiada del aprendizaje en la Universidad Autónoma de Baja California.* Ponencia presentada en VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa . Hermosillo, Sonora.

Castañeda, M. (1996). *Análisis del aprendizaje de conceptos y procedimientos*. México: Trillas.

Hitt F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista educación Matemática*, Vol.10, #1.

Martínez, F., Backhoff, E., Castañeda S., De la Orden, A., Schmelkes, S., Solano-Flores,

Tristán, G., y Vidal, R. (2000). *Estándares de Calidad para Instrumentos de Evaluación Educativa*. México. CENEVAL.

Nitko, A.J. (1994). *A Model for Developing Curriculum-Driven Criterion-Referenced and Norm-Referenced National Examinations for Certification and Selection of Students*. Ponencia presentada en la Conferencia Internacional sobre Evaluación y Medición Educativas, de la Asociación para el Estudio de la Evaluación Educativa (ASSESA).

Popham,J.(1990). *Modern educational Measurement: a practitioner's perspective.* (2a. ed.). Allyn and Bacon, MA.

Robredo, J.M., Ledezma, R. y Alvarado, J.F. (1983). *Reticulación: una estrategia para la elaboración de programas de estudio*. UNAM. Tesis de licenciatura.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable*. México. Ed. Thomson-Learning.

LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN PUNTOS DE INFLEXIÓN: UN MÉTODO ALTERNATIVO EN LA ARTICULACIÓN DE SABERES

Oleksandr Karelin, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. (México)
skarelin@uaeh.reduaeh.mx, rondero@uaeh.reduaeh.mx, anataras@uaeh.reduaeh.mx
Campo de investigación: pensamiento matemático avanzado. Nivel educativo: medio y superior
Palabras clave: cálculo recta tangente; desigualdades; puntos de inflexión y métodos no tradicionales

Resumen

En trabajos anteriores (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006), se propuso un método alternativo en la búsqueda de la recta tangente para funciones elementales sin el uso de la derivada y donde se demostraron algunas de sus principales propiedades. Por medio de una función adicional, *F(x) = f(x) – (m x + b)*, se identifican relaciones entre los puntos extremos de ésta función y los puntos de tangencia de la función original $f(x)$. Todos los resultados previos fueron obtenidos para funciones cóncavas.
En este trabajo, se discute una ampliación del método que posibilita incluir el caso del cálculo de la recta tangente en los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

Introducción

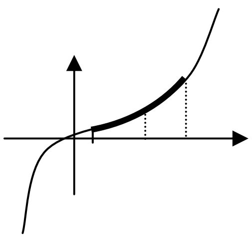
El estudio de la recta tangente se realiza en cálculo usando derivadas. Se ha venido construyendo un método no tradicional, cuya puesta en escena permite mostrar aspectos geométricos y analíticos que complementan el enfoque clásico y potencian el desarrollo del pensamiento variacional y el manejo de la representación visual- gráfica de los estudiantes. Ahora en este trabajo, el método propuesto se ha ampliado al cálculo de la recta tangente en puntos de inflexión, lo que es una muestra de su potencial analítico. De este modo se estructura una propuesta didáctica que busca articular al precálculo con el cálculo, lo que puede ser útil para estudiantes de bachillerato y licenciatura.

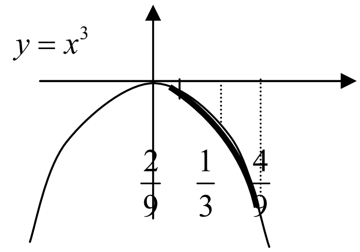
Observación 1.

En el trabajo (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006) se muestra como se construye la recta tangente para las funciones formadas por operaciones aritméticas sin derivar.
Las demostraciones se llevan a cabo bajo las condiciones, de que los sumandos y el resultado de la operación son funciones cóncavas de clase C. Pero no siempre que se suman dos funciones de esta clase, se puede garantizar que el resultado sea una función cóncava. Misma situación se cumple con el producto de funciones.

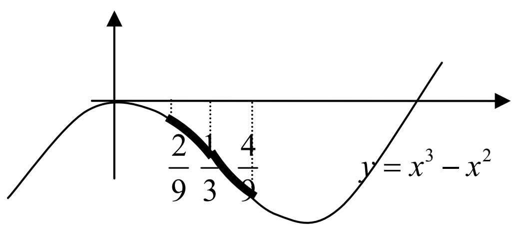
En tal caso vamos a construir dos funciones cóncavas $f_1(x) \in C$ y $f_2(x) \in C$, tal que su suma no es cóncava $f_1(x) + f_2(x) \notin C$.

Sean $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = -x^2$, en el Dominio $D = [\frac{1}{3} - \frac{1}{9}, \frac{1}{3} + \frac{1}{9}]$, sus gráficas son:



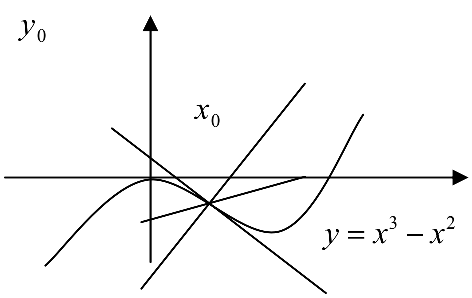


La suma de las dos gráficas en el dominio $D = [\frac{1}{3} - \frac{1}{9}, \frac{1}{3} + \frac{1}{9}]$, es



La función $y = x^3 - x^2$ no es de clase C en el punto $x_0 = \frac{1}{3}$.

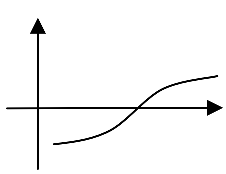
En realidad, si se traza cualquier recta, que pasa por punto $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27})$

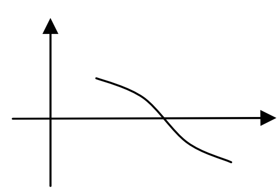


podemos ver que siempre una parte está de la gráfica esta arriba y otra abajo con respecto de cualquier recta, esto significa que la función $y = x^3 - x^2$ no pertenece a clase C.

Si formamos la función auxiliar para $y = x^3 - x^2$,

obtenemos la función $F(x) = f(x) - [mx + b]$ y su grafica tiene forma alrededor del punto $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27})$:





Como se puede observar no hay mínimo, ni máximo en el punto $x = 1/3$, por lo tanto a la función $y = x^3 - x^2$, no se puede aplicar nuestro método presentado en (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006).

Observación 2.

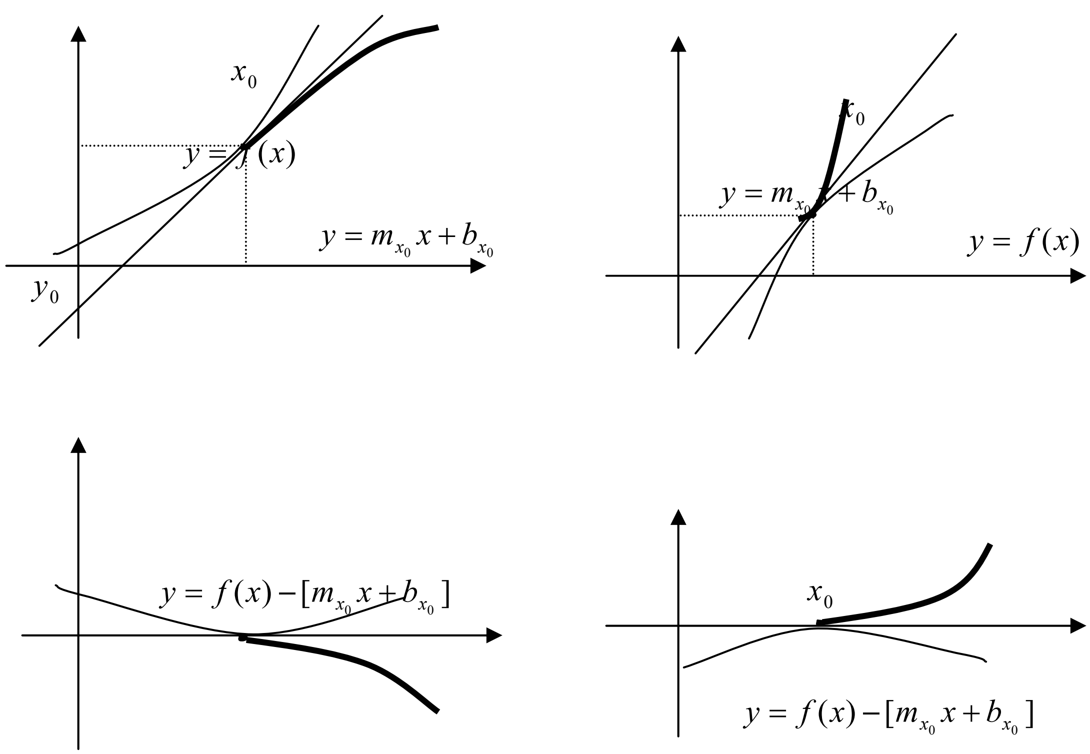
En (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006) se propuso un método alternativo en la búsqueda de la recta tangente para gráficas de funciones elementales sin el uso de la derivada.

La idea general es: si a la grafica de una función cóncava $y = f(x)$, se le resta la gráfica de la recta tangente $y = mx + b$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ entonces en el punto $x = x_0$, la función auxiliar $F(x) = f(x) - [mx + b]$ tendrá un punto máximo ó mínimo local.

Por medio de la $F(x) = f(x) - [mx + b]$ se identifican relaciones entre los puntos extremos de ésta función y los puntos de tangencia de la función original $f(x)$.

Todos los resultados previos fueron obtenidos solo para funciones cóncavas

El método propuesto no se aplica cuando x_0 es un punto de inflexión.



La función auxiliar $F(x) = f(x) - [mx + b]$ no tiene punto mínimo o punto máximo en el punto $x = x_0$

Ahora generalizamos nuestro método para incluir los puntos de inflexión.

Idea básica

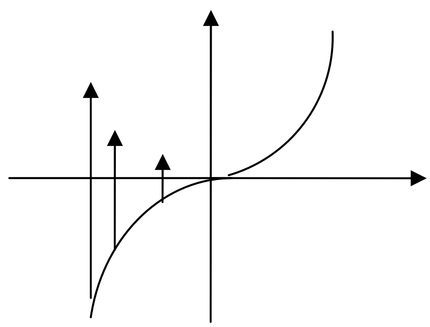
Definición. Sea $y = f(x)$ una función con el punto de inflexión en (0,0).

Si la función transformada $y = \tilde{f}(x)$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$, la cual es cóncava,

tiene en (0,0), la recta tangente $y = 0$ (el eje X), entonces la recta $y = 0$ recibe el nombre la recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto de inflexión (0,0).

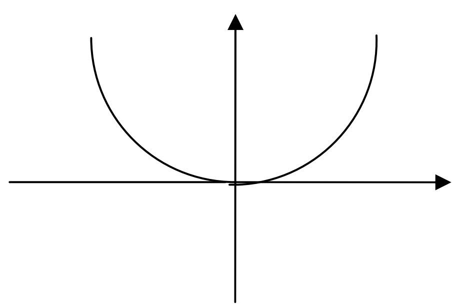
Aspectos gráficos.
El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión para f

$y = \tilde{f}(x)$



Trazamos la gráfica de la función $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$

$y = \tilde{f}(x)$



Alrededor del punto $(0,0)$ la gráfica de $\tilde{f}$ es cóncava, podemos construir según (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006) la recta tangente para $y = \tilde{f}(x)$, ya que ella es cóncava en $(0,0)$. Si la recta tangente en el punto $(0,0)$, para la gráfica de $y = \tilde{f}(x)$ es igual $y=0$ entonces la recta tangente en el punto $(0,0)$, para la gráfica de $y=f(x)$, también es igual a $y=0$. Las rectas tangentes para la función inicial y la función transformada coinciden.

Ejemplo

Consideremos la función $y=f(x), \quad f(x)=x^3$, vamos a construir la recta tangente $y=mx+b$ que pasa por el punto $(0,0)$ sin hacer uso de la derivada.
Para la función $y=x^3$ el punto $(0,0)$ es su punto de inflexión.
La función transformada $y=\widetilde{f}(x)$ ya es cóncava

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\geq 0 \\ -f(x), x<0 \end{cases} \qquad \widetilde{f}(x)=\begin{cases} x^3, x\geq 0 \\ -x^3, x<0 \end{cases}$$

Podemos aplicar nuestro método (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2004, 2005 y 2006) y construir la recta tangente para $y=\widetilde{f}(x)$ y su recta tangente coincide con la recta tangente para $f(x)=x^3$.

Según Afirmación 1 de (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006), $y=mx+b$ es la recta tangente de la función $y=\widetilde{f}(x)$,
si y solo si la función auxiliar para la función transformada
$\widetilde{F}(x)=\widetilde{f}(x)-[mx+b]$
tiene su punto mínimo local en $x=0$.

Por la definición del punto mínimo local debe cumplirse la desigualdad:

$$\widetilde{F}(x)\geq\widetilde{F}(0) \quad \text{o} \quad \widetilde{f}(x)-[mx+b]\geq\widetilde{f}(0)-[m\cdot 0+b]$$

Escribimos la última desigualdad aparte para $x\geq 0$ y $x<0$ tomando en cuenta que $\widetilde{f}(x)=x^3$, para $x\geq 0$ y $\widetilde{f}(x)=-x^3$, para $x<0$.

$$\begin{cases} x^3-mx\geq 0, \quad x\geq 0 \\ -x^3-mx\geq 0, \quad x<0 \end{cases}$$

Factorizamos,

$$\begin{cases} x(x^2-m)\geq 0, \quad x\geq 0 \\ x(-x^2-m)\geq 0, \quad x<0 \end{cases}$$

Recordamos que buscamos un número m tal que el sistema de las desigualdades se cumpla. Según Afirmación 1 de (Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A., 2006) solución m, es la pendiente de la recta tangente.

Si $m>0$, entonces no se cumple la primera desigualdad del sistema alrededor del origen. El factor $x\geq 0$, el factor $(x^2-m)<0$ en un entorno de $(0,0)$.

Si $m < 0$, entonces no se cumple la segunda desigualdad de (8) alrededor del origen. El factor $x < 0$, el factor $(-x^2 - m) > 0$ en un entorno de $(0,0)$.
Si $m = 0$ el sistema se transforma en,

$$\begin{cases} x^3 \geq 0, & x \geq 0 \\ -x^3 \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

Estas desigualdades se cumplen.
Entonces la pendiente de la recta tangente $m = 0$.
Según la fórmula $b = \widetilde{f}(x_0) - mx_0 = \widetilde{f}(0) - 0 \cdot 0$, $b = 0$.
Obtenemos la resolución del problema. La recta tangente para la grafica de $y = x^3$ que pasa por el punto $(0,0)$ es $y = 0$.

Conclusiones

El método propuesto se amplió al incluir el cálculo de la recta tangente en puntos de inflexión. Nuestra perspectiva no tradicional permite mostrar una articulación conceptual entre las nociones básicas del cálculo como concavidad, puntos extremos, pendiente de una recta y la comprensión de la dependencia lineal y no lineal.

Referencias bibliográficas

Rondero, C., Karelin, O. y Tarasenko, A. (2004). Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 821-827. CLAME.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A., (2005). Un método alternativo de articulación de saberes en el cálculo elemental. Construcción de la recta tangente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 881-887. CLAME.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A., (2006). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. *Acta Latinoamericana* de Matemática Educativa 19, 386-391. CLAME.

Boyer, C. y Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. New York, USA.: John Wiley.

Edwards,C. H. (1979). *The Historical development of the Calculus*. New York, USA.: Springer-Verlag.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, Conceptos y Contextos*. México: Internacional Thomson Editores.

PROBLEMAS EN EL DESARROLLO DE HABILIDADES LECTOMATEMÁTICAS

José Octavio Camelo Romero, Ricardo Ulloa Azpeitia
Universidad Autónoma de Nayarit México y Universidad.de Guadalajara. (México)
ocamelo@nayar.uan.mx, ulloa_azpeitia@yahoo.com.mx
Campo de investigación: lenguaje matemático. Nivel educativo: superior
Palabras clave: lectomatemática, signo, señal, significado personal, constructo

Resumen
Del rechazo de los estudiantes a las matemáticas surgió la necesidad del estudio de los elementos que influyen en su aprendizaje. Se propuso indagar el factor lingüístico. Se planeó determinar el nivel de correlación entre la lectocomprensión y los resultados en la materia de Lenguaje y Pensamiento Matemático e identificar los componentes lectomatemáticos problemáticos. Se realizó una investigación de tipo exploratorio, transversal, correlacional y clínico. Para la correlación, se seleccionó una muestra de 40 alumnos de una muestra de tres Programas Educativos de la UAN. Para el estudio clínico, aleatoriamente se seleccionaron seis jóvenes a los cuales se les presentó un problema planteado en palabras. Los resultados fueron una correlación positiva baja y significados o constructos personales que dificultan la comunicación profesor-alumno.

Introducción

El estudio de la relación lenguaje-aprendizaje en la escuela no es reciente. En 1960 se llegó a la consideración que las diferencias en los niveles promedio de logro académico alcanzado por los niños de diversos ambientes familiares se pueden entender y explicar en términos de las formas en que el lenguaje es usado y estructurado en diferentes grupos sociales, y que las diferencias lingüísticas de este tipo afectan el aprendizaje escolar (Word, 1988, p. 8).

La lectomatemática es estratégica en el proceso de enseñanza aprendizaje porque media la comunicación en los cursos de matemática entre el profesor y los alumnos dentro y fuera del aula. Para su estudio se realizó primero un análisis de correlación entre las habilidades de lectocomprensión y las habilidades matemáticas. Para cada caso se aplicó un examen. El correspondiente a lectocomprensión fue una adaptación del examen EXCOBA de la Universidad de Baja California, México, que se aplica a los estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad Autónoma de Nayarit. El examen de matemáticas fue el que se aplicó en la Unidad de Aprendizaje denominada Pensamiento y Lenguaje Matemático. El resultado de la correlación fue positivamente bajo.

Posteriormente se hizo una investigación clínica (Alarcón, De la Fuente y Velásquez, 1988), para identificar los componentes lectomatemáticos problemáticos, con una muestra aleatoria de estudiantes. Dicho estudio clínico mostró la existencia de distintos lenguajes entre profesores y alumnos, y la consecuente incomunicación entre ambos, la diversidad de significados personales que los alumnos dan a los términos y expresiones matemáticas y el correspondiente distanciamiento del significado institucional o de la comunidad de profesores de matemáticas, la reducción del signo o símbolo matemático que los estudiantes hacen a su función indicativa, el escaso desarrollo de las actividades mentales superiores y uso de símbolos, términos y expresiones matemáticas no comprendidos.

Contexto

En las estadísticas oficiales de la Universidad Autónoma de Nayarit, México, se observa que la deserción del primero al segundo grado del nivel medio superior fluctúa entre el 28 y el 33 % y que el 85 % de los alumnos del tercer grado elige un bachillerato con bajo o nulo contenido matemático. Situación semejante se observa en el nivel superior. Más del 85 % de

los alumnos de nuevo ingreso a las licenciaturas escoge carreras cuyos currícula contengan pocos temas matemáticos (UAN-UDI, 2003).
Dada la multiplicidad de factores del aprendizaje, en el proyecto se planeó estudiar el factor lingüístico del aprendizaje de las matemáticas. Como la comprensión de cualquier procedimiento o problema matemático implica una interpretación mediada por el lenguaje natural, el estudio de los procesos de traducción del lenguaje matemático al lenguaje materno y viceversa cae en el campo de la lectomatemática (Ulloa, Nesterova, Radillo, Pantoja y Yakhno, 2004).

Objeto de estudio y objetivos

Objeto de estudio fue el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos de primer ingreso al nivel superior de la UAN, en referencia a sus competencias lectomatemáticas. Se definieron dos objetivos básicos los cuales motivaron dividir el estudio en dos partes, en la primera se planteó determinar el nivel de correlación entre la lectocomprensión y los resultados alcanzados en la Unidad de Aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático. En la segunda parte se planteó identificar los componentes lectomatemáticos problemáticos que afectan el aprendizaje matemático.

Fundamentos y perspectivas teóricas

En general el estudio del lenguaje y de las lenguas no es reciente, ni corresponde a una sola ciencia (Lomas, Osoro y Tusón, 1993). El estudio se sustentó con las ideas de la teoría socio-cultural de Vygotsky, la cual concibe al lenguaje no sólo como “signo mediador” en la intercomunicación, sino a la vez, como instrumento psicológico para la creación, desarrollo y fortalecimiento de las actividades mentales del individuo. Esta teoría es una de la familia de teorías constructivistas entre las cuales existen diferencias conceptuales y hasta posturas filosóficas opuestas.
En torno a la relación Sujeto-Objeto se han agrupado los filósofos en dos grandes campos: 1) el idealismo, para el cual, lo supremo, lo primario es lo espiritual y, 2) el materialismo, que prima lo material sobre lo espiritual. En el constructivismo, como conjunto de teorías diversas, son identificables estos dos enfoques filosóficos.
La unidad más simple de cualquier lengua es el signo. Algunos lingüistas consideran que su estudio corresponde a la Semiología (Saussure, 1916). Entre los humanos la lengua es un sistema de signos que expresan ideas. Un signo lingüístico está constituido por un doble aspecto: externo e interno. El aspecto externo es su materialidad y el interno, es su significado. Los signos no-lingüísticos juegan el papel de señales, esto es, señalan o indican algo como el humo al fuego, etc. Para que un objeto adquiera el carácter de señal se requiere que ejerza una función indicativa.
Los signos lingüísticos, al igual que los signos indicativos, se refieren a algo, pero de manera distinta. La relación entre el signo lingüístico y lo referido es una relación racional, intelectiva. El criterio para que un signo adquiera el carácter de lingüístico es el significado. Entre los signos lingüísticos se pueden distinguir los signos verbales y no-verbales. Son signos no-verbales las señales de tránsito vehicular, ciertos gestos y comportamientos, etc. Son signos verbales las palabras, sentencias, etc. Los signos lingüísticos son de naturaleza social, son convenciones sobre la relación entre un significante y un significado. (Guiraud, P 1971). La convención evidencia el carácter arbitrario del signo. El significado del signo tiene la característica de ser una generalización. La palabra con significado se refiere a un grupo o clase de objetos, es una generalización. En tanto reflejo generalizado de la realidad, la

generalización es un acto de pensamiento. Por ello, el significado pertenece tanto al dominio del lenguaje como al del pensamiento (Vigotsky, L. 1934 p 52). En este sentido, el significado del signo es equiparable o equivalente al concepto.
Un aspecto relevante del significado del signo es su no identificación con la cosa efectiva o realmente existente. Esto permite que la palabra Zeus, dragón, etc., sean cada una un signo lingüístico, esto es, palabra con significado. Aquí, la creencia, la fe, la fantasía, otorgan significación a la palabra, le crean una imagen mental o un concepto, y con ello, su significado.
Si la comprensión o interpretación equivale a la significación, se garantiza que la palabra tenga significado para el oyente o lector. Sólo así las expresiones contradictorias adquieren significado (Rossi, 1969, p. 49). Y dada la diversidad de interpretaciones, una misma palabra puede tener distintos significados.
El lenguaje en general, es la emisión-recepción de unidades comunicativas. Lo que caracteriza a una unidad comunicativa es el mensaje. Desde esta perspectiva existen lenguaje, lengua y habla entre algunas especies de animales, lo cual presupone la representación interna de objetos y situaciones con los cuales se han encontrado (Vauclair, 1998, p. 46). En el chimpancé, su lenguaje es afectivo, su lengua está constituida por ciertos signos lingüísticos y su habla es gestual y sonora (Vigotsky, 1934, pp. 99 y 103).
Desde la perspectiva objetiva y humana una expresión es una composición de palabras según un sistema de reglas que dice algo acerca de alguien. La comprensión de la expresión es la captación de lo dicho, es el entendimiento o la interpretación de lo expresado. Por eso, siempre existe la posibilidad de la diferencia en la interpretación o comprensión de un mismo mensaje, tanto en el nivel social como individual. Este tipo de conflicto lingüístico ya ha sido identificado y ha servido para explicar las diferencias en el logro académico de los estudiantes (Word, 1988, p. 8).
En ocaciones, la interpretación de una expresión es producto de la fantasía sin que por ello se contraponga a la realidad como irreductible, antes bien, la fantasia se basa en las experiencias pasadas del sujeto, ya que los datos extraidos de la memoria son combinados en situaciones distintas a las reales. Más aún, la fantasía o la imaginación hace posible la asimilación de experiencias sociales ajenas, al construir mentalmente, mediante la combinación de datos de las experiencias anteriores del sujeto, imágenes o situaciones no vividas (Vigotsky, 1930, p. 20).
Esta flexibilidad y relatividad de las significaciones permite que una misma expresión puede ser sin sentido para un interlocutor y significativa para el otro. Así sucede con el lenguaje de los “grafiteros”, con el lenguaje extranjero e incluso, con las expresiones matemáticas.
Desde la perspectiva de quien recibe una expresión, la significación se identifica con la interpretación. Para él la expresión tiene significación si logra interpretarla, si logra captar lo que se dice del objeto o del sujeto, esto es, si capta el mensaje. En caso contrario, la expresión no tiene sentido. Éste es un aspecto relevante para la didáctica porque la comprensión o lo que para el receptor dice la expresión, puede ser diferente de la intención del emisor, de lo que quiso decir del objeto o del sujeto, según sea el caso. De aquí que la comunicación entre profesores y alumnos en ciertas circunstancias dé la apariencia de haberse establecido aunque efectivamente no haya existido en cuanto tal. En el proceso de enseñanza aprendizaje es importante saber la significación personal del alumno, saber qué entiende o cómo interpreta lo expresado por el profesor.
Cabe hacer la distinción entre significado y sentido. En una palabra, el significado viene dado por el concepto, por la generalización, en tanto que el sentido, por su uso contextual.

Significado y sentido no necesariamente son coincidentes. Una expresión tiene un significado y más de un sentido, en función del contexto en el cual se use (Vigotsky, 1934, p. 222).

Tipo de estudio
El estudio fue exploratorio, transversal, correlacional y clínico.

Muestreo
En la primera parte de la investigación, primero se hizo una elección por insaculación de tres programas educativos y posteriormente se seleccionaron al azar 40 alumnos.
En la segunda parte de la investigación, se eligieron aleatoriamente dos alumnos de cada uno de los tres programas educativos seleccionados para constituir una muestra de seis alumnos.

Técnicas para la recopilación y análisis de los datos
En la primera parte de la investigación se aplicó el examen de lectocomprensión y se pidió a los profesores de los alumnos de la muestra, el registro de calificaciones de la materia Lenguaje y Pensamiento Matemático. Se hizo el vaciado en Excel y se aplicó la función Coeficiente de Correlación.
En la segunda parte de la investigación se entrevistó a cada uno de los seis seleccionados de la muestra. Se les presentó un problema planteado en palabras. Se les pidió que lo leyeran en voz alta. Se desarrolló un diálogo con cada uno de ellos en torno a la resolución del problema. Se videograbó el diálogo. Posteriormente se hizo un análisis de la grabación, se hicieron anotaciones, se trascribió mecanográficamente cada diálogo y se obtuvieron las conclusiones.

Situaciones relevantes
A continuación se señalan algunas situaciones encontradas en las entrevistas:
*La aplicación mecánica del algoritmo correcto sin tener el concepto de la operación***.** Se le solicitó a un entrevistado que explicara o expresara cómo entiende las operaciones fundamentales de la aritmética: la suma o adición y la resta o sustracción. La respuesta del entrevistado fue contundente: ¡No sé explicar!
Sin embargo, cuando se le pide en palabras que realice cierta sustracción, siete menos dos, inmediatamente la realiza y responde cinco. Aquí el signo lingüístico "menos" tiene para el oyente la significación indicativa de sustraer dos unidades de las siete unidades iniciales. La palabra (menos) funge como señal e indica un procedimiento simple que se aplica mecánicamente.
Como la aplicación mecánica del algoritmo simple es irracional y el entrevistado no ha construido el concepto de sustracción o de resta, al planteársele en palabras que resuelva la operación, tres cuartos menos cinco tercios, la palabra "menos" en este contexto no tiene significación alguna, es insignificante para el oyente. Como consecuencia, no resuelve dicha operación.
Construcción y permanencia de una significación personal del signo a partir de una creencia dada por los profesores de primaria.
Se le pidió a otro entrevistado expresase lo que entiende de las operaciones aritméticas. Y cuando se le solicita diga cómo entiende la división, su respuesta es inmediata: Como nos la enseñaron en la primaria, "cuántas veces cabe un número en otro".
Al preguntarle cuánto es un tercio, entre un medio, respondió que sería un número negativo, porque un tercio es una cantidad más pequeña que un medio. Aquí la palabra "entre" tiene para el entrevistado la significación de "medir el número de veces que un medio cabe en un

tercio", y el término negativo, "lo que hace falta". El significado personal construido en la escuela primaria sigue vigente, porque no ha logrado construir el concepto de "división". La ausencia de ese concepto le obstaculiza la resolución del problema.

El razonamiento lógico no es factor limitativo para la fantasía o para los significados personales discordantes con las definiciones matemáticas de los signos.

Se le pidió al entrevistado que expresase su idea de variable y de incógnita. Tras momentos reflexivos contesta que incógnita es lo mismo que hipótesis. Y aunque puede parecer irracional, esta afirmación es producto de un razonamiento lógico, con enunciados cuyos contenidos son creencias personales.

Al parecer, la forma de razonamiento del entrevistado fue la siguiente: Incógnita es lo que no se sabe. Hipótesis es lo que no está comprobado. Lo que no está comprobado es lo que no se sabe. Por lo tanto, incógnita es lo mismo que hipótesis.

El razonamiento lógico y la significación de las expresiones no bastan para el aprendizaje de las matemáticas.

En cierta entrevista, cuando se indagaba por qué el entrevistado había dicho que multiplicación es "una cosa varias veces", se le preguntó cuánto es un medio por un tercio y la respuesta fue un entero. Luego se le pidió dijera su idea de entero y responde que "es un número completo". Aquí el término "entero" tiene el significado de "el todo, donde no faltan, ni sobran partes".

De este significado, de considerar a las fracciones como partes de un todo y de concebir a la multiplicación como anexión sucesiva de partes, el entrevistado llegó a la conclusión de que un medio por un tercio es un entero. Aun con la presencia del razonamiento y la significación, el resultado es equívoco.

Conclusiones

El estudio correlacional mostró que no existe un alto coeficiente para lectocomprensión y rendimiento en la materia de Lenguaje y Pensamiento Matemático

Los datos obtenidos mediante la investigación permitieron identificar que en el proceso de comunicación quien determina el carácter de significante o insignificante de una palabra o expresión es el oyente o el lector. También quedó evidente que la significación de la palabra o de la expresión adquiere un doble carácter en el oyente o lector. En él, la significación puede ser de carácter indicativo o conceptual. La significación es indicativa cuando la palabra o la expresión le significan al alumno la ejecución irracional, mecánica de algo, de un algoritmo, esto es, cuando la palabra o expresión funciona simplemente como señal. Y es conceptual, cuando la palabra o expresión significa para él una concepción.

Con el desarrollo de la investigación también se evidenció que si la concepción del oyente o lector es personal y distante de la conceptualización de la sociedad, no se establece la comunicación entre el hablante y el oyente, o entre el escritor y el lector.

Con la investigación clínica hecha con la muestra de seis estudiantes se han puesto de manifiesto algunos problemas estructurales de la lectomatemática y se pueden extraer algunas regularidades para el grupo:

Los entrevistados dan significados personales a los signos lectomatemáticos y por lo tanto el mensaje recibido por el alumno y el mensaje emitido por el profesor fue distinto. Se ha puesto de manifiesto que el concepto social o de la comunidad matemática no se ha asimilado, que el alumno no ha construido en su mente el concepto aunque haya incorporado a su léxico palabras de uso matemático cuyo significado para él es personal. En algunos casos, el alumno no logra trascender el carácter de señal del signo matemático Pudiera pensarse que la

enseñanza de las matemáticas ha consistido en mostrar el carácter de señal de los signos matemáticos y no su significado. Lo cual explica la aplicación mecánica de los algoritmos matemáticos.
No basta con plantear que el aprendizaje es o debe ser significativo. En ocasiones, es más importante saber la significación que el aprendiz da a los signos, la cual puede ser discordante con la esperada, sin que por ello se niegue la existencia del aprendizaje significativo. La significación no depende de los objetos mencionados en la expresión matemática. El objeto de la expresión resulta distinto para el maestro y para el alumno, dada la interpretación personal de éste. Y sin embargo en tales circunstancias dicha expresión resulta significativa para el estudiante ya que para éste tiene sentido.
Estos aspectos de la lectomatemática entorpecen, confunden y hasta cierto punto, impiden la construcción mental de los significados sociales de las expresiones matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alarcón, D., De la Fuente, J. R., Velásquez, A. (1988). *Fundamentos de la investigación clínica.* México: Siglo XXI UNAM.
Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* México: Siglo XXI
Chomsky, N. (1964). *Problemas actuales en teoría lingüística. Temas teóricos de gramática generativa.* México: Siglo XXI.
Ferreiro, E., Teberosky, A. (1979). *Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño.* México: Siglo XXI.
Guiraud, P (1955). *La semántica.* Chile 1995. Fondo de Cultura Económica.
Guiraud, P (1971). *La semiología.* México: Siglo XXI.
Lenin, V. I. (1914-1916) *Cuadernos filosóficos.* (La dialéctica de Hegel). México: Ediciones Roca.
Lomas, C. Osoro, A. Tusón, A. (1993). *Ciencias del lenguaje, competencia comunicativa y enseñanza de la lengua.* Madrid: Editorial Paidós.
Luria, A. R. (1956). *Lenguaje y desarrollo intelectual en el niño.* Madrid: Siglo XXI.
Luria, A. R. (1960). *El papel del lenguaje en el desarrollo de la conducta.* México: Editorial Cártago.
Rossi, A. (1969). *Lenguaje y significado.* Santiago de Chile: Fondo de Cultura Económica.
Sánchez, A. (1967). *Filosofía de la praxis.* México: Siglo XXI.
Saussure, F, de. (1916). *Curso de lingüística general.* México: Distribuciones Fontamara.
SEC-Gobierno del Estado. (2003). Informe Técnico de circulación interna.
UAN-UDI. (2003). *Estadística Básica*. Documento de circulación interna.
Ulloa R., Nesterova, E., Radillo, M, Pantoja, R. y Yakhno, A. (2004). *Lectomatemáticas y su vinculación a los problemas en el aprendizaje de las matemáticas influidos por deficiencias de lectoescritura: estudio correlacional y clínico.* Sección de Matemática Educativa del C.U.C.E.I., UDG.
Ulloa R. (2003). Material de la MCEM. Sección de Matemática Educativa del C.U.C.E.I., UDG.
Vauclair, J. (1998). *El hombre y el mono. Psicología comparada.* México: Siglo XXI.
Vigotsky, L. S. (1930). *La imaginación y el arte en la infancia.* Madrid: Ediciones Akal.
Vigotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y Lenguaje.* Madrid: Editorial Paidós.
Word, D. (1988). Cómo piensan y aprenden los niños. México: Siglo XXI.

UN ESTUDIO DESCRIPTIVO DE LAS INTERACCIONES EN EL AULA. ELEMENTO DE ANÁLISIS EN LA REPROBACIÓN Y REZAGO DE CÁLCULO

Estelita García, Eddie Aparicio
Cinvestav-IPN. Universidad Autónoma de Yucatán. (México)
egarcia@cinvestav.mx, alanda@.uady.mx
Campo de investigación: estudios socioculturales; Nivel: superior
Palabras clave: aula, interacción, cálculo, quehacer didáctico

Resumen
Reportamos un estudio de carácter descriptivo realizado al interior de dos aulas de nivel universitario en un curso de cálculo diferencial. Se consideró al aula como el escenario propicio para indagar sobre el tipo de prácticas que se ejercen al momento en que interactúan *profesor, alumno* en torno a un conocimiento que se quiere sea aprendido (contenido temático). De esta manera, presentamos algunas características de la cultura y del quehacer docente desarrollado en las aulas, fruto del análisis de observaciones sistemáticas realizadas a lo largo de tres meses.

Introducción

La enseñanza tradicional implica una relación entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la cual consiste en suponer una transferencia simple de la enseñanza al aprendizaje: el alumno "graba" lo que se le comunica, tal vez con algunas pérdidas de información (Cantoral, et al, 2003). Sin embargo, los contextos escolares están formados por una trama de relaciones entre el docente, los alumnos y el contenido, factores que deben ser tomados en cuenta en sus múltiples articulaciones para comprender los aspectos variados del proceso de construcción de significados compartidos (Candela, 2004).
En un ambiente escolar como el aula, alumnos y profesores constituyen individuos (de naturaleza social), que poseen características, filosofías, formas de comportamiento, intereses, costumbres y valores propios. Sin embargo, estos individuos se ven en la necesidad de establecer comunicación entre ellos, realizar consensos e instituir normas de comportamiento, diremos pues, que se conforman en una micro sociedad con cultura, negociando y construyendo significados.
Sin duda, el aula matemática resulta ser el espacio privilegiado socialmente para construir y manifestar conocimiento explícito a ser aprendido, capaz de aportar información para comprender determinadas problemáticas que se presentan en el proceso de aprendizaje.

El problema de investigación

Nuestra investigación consistió en introducirnos al escenario áulico para obtener información fundamentada sobre la estructura y dinámica del mismo, y dar cuenta de las prácticas que se realizan cuando interactúan: *docente*, *alumnos* y *contenido*. Esto fue realizado en el marco de comprender las problemáticas de reprobación y rezago escolar en la asignatura de cálculo, presentes en dependencias educativas de nivel superior en las áreas de ciencias e ingenierías computacionales.
Centrados en la idea de que el conocimiento es una construcción social y que depende de la interacción entre quien aprende y las características del contexto de aprendizaje (De Longhi, 2000), decidimos enfocarnos en los procesos de interacción entre el docente, los alumnos y el saber matemático.

La permanencia en el aula nos permitió observar la vida cotidiana de este escenario, e identificar elementos como: el desarrollo del contenido, la autoridad y práctica del docente, los tipos de evaluación y la motivación. Cada uno de estos aspectos formó parte del ambiente cultural específico de la sociedad que se integró en el aula.
Nuestro principal objetivo fue *observar sistemáticamente el ambiente que se conforma en las aulas durante el desarrollo de un curso de cálculo diferencial, atendiendo a las interacciones entre el profesor, los alumnos y el contenido,* de modo que, pudiéramos ofrecer una descripción precisa, confiable sobre el tipo de cultura en las aulas y la caracterización de la práctica docente.

Aspectos teóricos y metodológicos

Como hemos referido, durante los procesos de interacción interviene el sistema ideológico tanto de alumnos como del profesor, resultando que las dimensiones culturales y sociales en las que están inmersos no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático, sino parte intrínseca del mismo, el profesor y los alumnos constituyen interactivamente la cultura que se forma en el aula, y las convenciones y los convenios tanto en lo relativo al contenido, como a las regularidades sociales emergen interactivamente (Godino, Llinares, 2000).
Las consideraciones anteriores apoyan la perspectiva de que al interior del aula en el proceso dinámico de interacción entre el individuo y su ambiente, se conforma una *'cultura matemática'*, es decir, un sistema que provee al individuo de conocimientos, creencias, tradiciones, valores, actitudes, filosofía de vida, normas sociales y pautas de comportamiento. Posteriormente, presentaremos ejemplos que permitan apreciar lo hasta ahora expuesto.
Durante el desarrollo del curso, los docentes presentan comportamientos reiterativos con respecto a su manera de desarrollar los contenidos y formas de interacción con los alumnos, mismos que en conjunto hemos denominado *quehacer didáctico del docente*.
Para lograr nuestro objetivo y describir con precisión y fundamentadamente el ambiente del aula, adoptamos a la etnografía como método cualitativo de investigación educativa.
Participantes
Para la investigación se estudiaron dos grupos de alumnos con sus respectivos profesores, en su curso de cálculo diferencial de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México. Los grupos estaban integrados por estudiantes de tres diferentes licenciaturas: *Ingeniería en Computación*, *Ingeniería en Software* y *Licenciatura en Ciencias de la Computación*, carreras del área de ciencias computacionales. La edad de los alumnos oscilaba entre los 18 y 21 años. Ambos grupos y su respectivo profesor, fueron denominados *grupo A* y *grupo B*.
Fuentes de información

Las observaciones no participantes realizadas en el aula

Las clases fueron registradas en videograbaciones y apoyadas con notas de campo. Cada una de las videograbaciones fueron transcritas. En el grupo A se observaron y analizaron 42 sesiones y en el grupo B, 36 sesiones, representando del total de clases en el curso el 61% y 51%, respectivamente.

Entrevistas no estructuradas realizadas a los docentes y alumnos

Las entrevistas a los alumnos fueron de carácter individual y grupal, éstas últimas estuvieron conformadas por tres estudiantes. Las conversaciones se registraron por medio de una grabadora de voz y posteriormente fueron transcritas.
Con los datos obtenidos en el trabajo de campo, se elaboraron registros de información cuyo análisis permitió definir ciertas categorías con respecto al profesor, los alumnos y el contenido matemático.

Interacciones en el aula con respecto al contenido

De nuestro trabajo, sostenemos la idea, de que el discurso del profesor en el contexto escolar supone una situación comunicativa en la que se presentan procesos de interacción, a través de los cuales los integrantes del aula actúan en torno a una tarea o contenido de aprendizaje, con el fin de lograr objetivos relativamente definidos. Veamos el fragmento siguiente (A' hace referencia a un alumno y P al profesor):
Extracto 1, sesión 5, grupo B
El ejercicio consistía en hallar cotas superiores para el conjunto $S = \{n \in N, n < 50\}$.
P: ahora piensen en todas las cotas superiores de este conjunto.
A'1: *¿no n tiene que ser menor que 50?*
P: *n*, por pertenecer al conjunto tiene que ser menor que 50, si.
A'1: entonces, *¿por qué escribió* $n \le 100$ *o* 80*?*
P: los elementos del conjunto son los que son menores que 50, ahora todos los del conjunto son menores que 100, ¿eso es cierto, no?, cualquier elemento que sea menor que 50 es menor que 100 también, pero también son menores o iguales a 80, así que ambas son cotas superiores, a ver dime otra cota superior del conjunto.
A'1: setenta.
P: ¿setenta también es cota superior?, a ver otra.
A'2: 100,000.
A'3: *¿en qué se basa para sacar la cota?*
P: en la definición nada más, a ver los demás, ¿100,000 será una cota superior?
La interacción entre docentes y alumnos en el aula está determinada, en parte, por un flujo particular de conversaciones, que no son independientes ni simultáneas, ya que se sostienen a través del eje directivo del docente (Caldeiro, 2005). En el fragmento anterior, el profesor tiene la intención de que los alumnos comprendan el concepto de cota superior, para lo cual propone un ejercicio y plantea preguntas.
Si bien durante el flujo de conversaciones en el aula se observa una relación asimétrica entre docentes y alumnos, el extracto nos permite apreciar cómo los alumnos, a través de la interacción, son capaces de modificar dicha relación, ya que asumen el rol del profesor y se muestran como conocedores potenciales, proponiendo posibles explicaciones (Candela, 1999), además expresan sus dudas y exigen al docente explicaciones más precisas, ocasionando que éste modifique su tipo de discurso.
También podemos observar que a través del diálogo el docente intenta *negociar* con el alumno el procedimiento y el conocimiento matemático puesto en juego en la solución del ejercicio, con la finalidad de que sea aceptado por ambos. Posteriormente, extiende el proceso de negociación al plantear preguntas al resto del grupo.

Durante nuestra permanencia en las aulas, observamos que la participación de los alumnos ante las explicaciones realizadas por el profesor o algún compañero, en ambos grupos únicamente se presentó durante las tres primeras semanas del curso. Cabe decir, que después de este período de tiempo, no existió cuestionamiento alguno hacia al docente o entre compañeros, prevalece una ausencia de manifestación de dudas, de aportaciones a la clase. Justo a partir de este momento, la relación e interacción entre profesor y alumnos se ve reducida a la realización de actividades concretas: resolver ejercicios, responder preguntas, realizar anotaciones. Particularmente, en el grupo B la participación de los alumnos se torno exclusiva de un grupo minoritario.
A continuación ciertos aspectos del quehacer didáctico docente que pudieron colaborar para la situación anterior.

El quehacer didáctico del docente en el aula

A nuestro modo de ver, en los grupos observados el quehacer didáctico del docente permitió el regulamiento funcional de la clase y conformó parte de la vida cotidiana del aula y de la cultura que se estableció al interior de ésta.
Como parte de su quehacer didáctico, los docentes determinaron la estructura de participación en el aula[‡‡‡‡], referida ésta como lo que se espera que hagan el profesor y los alumnos, a sus derechos y obligaciones en el transcurso de las actividades (quién puede hacer o decir algo, qué, cuándo y cómo), así como la estructura académica, que se refiere al contenido de la actividad escolar y a su organización. Lo anterior, fue realizado sin un consenso con los estudiantes.
En el extracto siguiente presentamos algunas de las prácticas que en ambos docentes formaron parte de la caracterización de su quehacer didáctico.
Extracto 2, sesión 26, grupo A
El ejercicio consistía en mostrar que $p(x) = x + x^3 - 2x^2$ es función de densidad en [0, 4].
A':..., lo que haces es integrar esto en el punto 4 y en el punto 0, y ya.
P: te digo, si esto fuera una función de densidad la integral nos daría la masa total,…, *¿qué cosas cumple una función para ser de densidad?, eso te lo tienes que saber*, (silencio por 5 segundos),..., tiene que ser positiva, ¿es positiva la función esa?, ¿esto qué es?
A'1: es el área.
P: ¡¡¡¿cuál área?!!!, aquí no estamos hablando de áreas ni de volúmenes, eso debe ser la masa.
A'1: hay un teorema que dice, si lo evalúas en dos puntos, en el 1 y si te da positivo, eso es positivo.
P: ¡*no*, *está mal!*, que clase de teorema es ese, te puedo dar varios contraejemplos, *basta con que te haga un dibujito*,..., entonces eso no prueba nada.
A'1: evaluó otro punto.
P: *podrías evaluar un cuatrillón de puntos y no me terminas de convencer*.
A'1: ¿si sustituyo un número negativo?
P: ¡¡¡pero no queremos sustituir los números negativos!!!, queremos sustituir los números del intervalo [0, 4],..., *bueno veo que no puedes hacerlo, entonces lo voy hacer yo*.

[‡‡‡‡] En el grupo A, el aula se convirtió en una especie de 'taller', los alumnos debían resolver ejercicios previamente asignados por el docente, los contenidos no eran desarrollados en la clase por el profesor, sino era responsabilidad de los alumnos interactuar directamente con ellos. La función del docente era "evaluar" la solución presentada por los alumnos. En el grupo B las clases fueron de tipo 'tradicional', caracterizada por centrarse en la dictadura de cátedra.

Durante la explicación de los ejercicios, los docentes tenían como objetivo resolverlos, para ello se valían de estrategias tales como cuestionar a los alumnos para intentar guiarlos a la solución, empero, los profesores poco o nada reflexionan sobre el tipo de argumentaciones presentadas por los estudiantes (en el mejor de los caso, les proporcionan poco tiempo para analizar las preguntas, menos de 5 segundos). En general, no se observó situaciones de aprendizaje que favorecieran la construcción de conocimientos, las cuestiones planteadas tenían un carácter memorístico, por ejemplo, *¿qué cosas cumple una función para ser de densidad?*

En el aula los docentes se mostraron como la autoridad en cuanto al contenido matemático se refiere, ellos eran quienes indicaban las normas matemáticas a seguir durante la resolución de ejercicios, es decir, señalaban lo que era 'matematicamente correcto' emplear. Una norma que predominó durante el curso fue que únicamente se podían emplear proposiciones (teoremas, lemas, corolarios) que hubieran sido previamente demostradas o enunciadas. Por otra parte, los docentes eran quienes aceptaban o rechazaban las argumentaciones de los alumnos. El docente A, en varias ocasiones recurría al uso de frases tales como '*está mal', '¡no cuate!'* para señalar de manera tajante los 'errores' que desde su perspectiva cometían los alumnos. Si bien, esta actitud del profesor podría implicar el tipo de conciencia que tiene con respecto a la matemática, poco se puede decir sobre su conciencia respecto al aprendizaje y su proceso. El docente en su intento por explicar a sus alumnos, tendió a imponer su forma de proceder sobre la del alumno, soslayando los intentos de éstos y coartando la posibilidad de consenso. A este respecto, regresemos al extracto anterior y pregúntese ¿por qué el docente rechaza el argumento numérico de evaluar puntos que el alumno propone, a la vez que lo corrige empleando un argumento de carácter gráfico?, ¿por qué ciertas argumentaciones son aceptadas y otras no? Pareciera que la evaluación del procedimiento del alumno estuviera subordinada a las consideraciones y criterios del docente.

En el docente denominado B, no se observó un rechazo directo y explícito al tipo de argumentaciones que proponían los alumnos, sino que empleaba frases tales como '*esta bien como un primer intento*'. No obstante, cabe decir, tampoco se observó que utilizara y analizara las respuestas de los estudiantes.

Extracto 3, sesión 14, grupo A

El ejercicio consistía en hallar el dominio de la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$

A'1: no pude hacer el problema.

P: solo era despejar *x* en términos de *y,* ¡eso es fácil!, para resolverlo usa la fórmula cuadrática, (*el profesor tiene las manos en la cintura y encoge los hombros*).

A'1: no me acuerdo.

Los alumnos le dictan la fórmula al estudiante, pero éste escribe: $x = -b \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$

P: ¡*¡no!!, ¿tú qué haces aquí?, ¿qué te paso?*

En el aula, el alumno debía poseer ciertos conocimientos, de modo que no podía cometer 'errores' ante aspectos que el docente considerara como 'matemáticamente fáciles'. Asimismo, el docente emitía juicios personales que de cierta manera influían negativamente en la perspectiva que el alumno tiene de sí mismo.

Los elementos que evidenciaban ciertas dificultades en los alumnos no fueron considerados para realizar situaciones que favorecieran el aprendizaje. De igual forma, notamos que la evaluación sistemática e integrada del curso no forma parte de la cultura y costumbre didáctica del quehacer docente en el aula.

Consideraciones finales

A luz de nuestras observaciones, señalamos que no es factible mirar el desempeño de los estudiantes sin considerar la cultura y las prácticas sociales asociadas y establecidas al interior del aula. La participación de los estudiantes, así como su interacción con el profesor, queda determinada, en parte, por la interacción entre compañeros y el quehacer didáctico del docente. Profesores y alumnos no perciben al aula como el espacio para la negociación y consenso en la construcción de aprendizajes.

Entrevista 9, grupo A

A': …, si el maestro está de acuerdo, que bien, ¡ya la hiciste!, pero sino, te interrumpe y te va diciendo, entonces, ¿para qué lo hiciste?, está bien que dé sugerencias, pero que vea tu trabajo.

Particularmente, los alumnos del grupo A consideraban que en el momento en que el docente interviniera, ya no eran responsables ni partícipes activos de la situación, por lo que se limitaban a seguir las sugerencias del docente y responder a sus preguntas.

Los profesores después de las tres primeras semanas del curso, no intentaban incluir en su discurso las aportaciones de los alumnos para construir significados compartidos. Sus discursos no eran adaptables a las condiciones de los grupos y lo importante era la consecución de objetivos planteados ya sean personales o del programa del curso.

Finalmente, mencionaremos que aspectos como: *la autoridad del docente con respecto al contenido*, *falta de comunicación entre docentes y alumnos*, *nula modificación en la estructura de las clases y en la forma de desarrollar los contenidos, según necesidades de los grupos*, en nuestra opinión, son factores determinantes en el tipo de participación y motivación de los alumnos en el aula.

Los autores agradecen el apoyo brindado a Fondos Mixtos CONACYT-Gobierno del Estado de Yucatán para realizar esta investigación como parte de proyecto con clave: Yuc-2004-C03-033.

Referencias bibliográficas

Candela, A. (1999). Prácticas discursivas en el aula y la calidad educativa. *Revista Mexicana de Investigación Matemática*. 4(8), 273-298.

Candela, A. Importancia del análisis del discurso en el aula para la investigación educativa. [Conferencia] XVIII *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* del 19 al 23 de Julio de 2004, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Cantoral, R., et al. (2000). Introducción. En Cantoral, et al, Trillas. *Desarrollo del Pensamiento Matemático*, (pp. 11-12). México, D.F., México: Trillas.

De Longhi, A. (2000). El discurso del profesor y de los alumnos: análisis didáctico en clase de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*. 18(2), 201-216.

Godino, D., Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Revista de Educación Matemática*. 12(1), 70-92.

Caldeiro, G. (2005). Interacción en el salón de clases. Recuperado julio 7 de 2006, de: http://educacion.idoneos.com/index.php/290431

UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS CLASES DE CÁLCULO EN EL ÁREA DE CIENCIAS

Erika García, Eddie Aparicio
Cinvestav-IPN. Universidad Autónoma de Yucatán. (México)
egarciat@cinvestav.mx, alanda@uady.mx
Campo de investigación: estudios socioculturales. Nivel educativo: superior
Palabras clave: aula, cálculo, interacciones, costumbre didáctica

Resumen
Se presenta una investigación que refiere el tipo de interacciones que se produce entre profesor y alumnos al interior de dos aulas de ciencias matemáticas al momento de desarrollar las clases de cálculo. Haciendo uso de la etnografía en tanto método cualitativo de investigación, documentamos durante un tiempo prolongado, lo acontecido en las clases de cálculo en dos grupos distintos de estudiantes. De esta manera, nuestros hallazgos son caracterizados en función de lo que hemos denominado, la *costumbre didáctica del profesor* y las interacciones de aula.

Problema de investigación

La Universidad Autónoma de Yucatán, además de ser la única universidad pública en el estado de Yucatán-México, es la única en la que a través de su Facultad de Matemáticas (FMAT) se ofrecen e imparten licenciaturas relacionadas con el área de ciencias matemáticas y ciencias computacionales.
En la FMAT se presentan problemas de rezago y reprobación principalmente en el área de cálculo en los primeros semestres de estudio. Llevar el cálculo a un contexto escolar, en el que un profesor debe enseñarlo a sus alumnos, y más aún si éstos se encuentran en contacto por primera vez con esta rama de las matemáticas, genera problemas de aprendizaje, que a la larga pueden verse reflejados en problemas de reprobación y rezago.
El estudio de las problemáticas asociadas al aprendizaje del cálculo se ha discutido y afrontado desde distintas perspectivas, como aquella centrada en el entendimiento de dificultades en torno a conceptos específicos.
Desde esta perspectiva, el centro de atención está en explorar aspectos cognitivos de los estudiantes, olvidando que los significados atribuidos a los objetos matemáticos se constituyen en gran medida, en las aulas de clase, y son el producto de las interacciones de quienes allí participan. Las relaciones que los alumnos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre lo que es la actividad matemática e incluso por su status como alumno (Cantoral y Farfán, 2003).
En este sentido, las producciones matemáticas de los estudiantes están condicionadas por las interacciones que se establecen al interior del aula, así que analizar la práctica cotidiana de profesores y alumnos es pertinente para poner de manifiesto la manera en que se constituye y adquiere significación un saber matemático. Esto permitiría explicar muchas de las disfunciones del sistema didáctico al interior de las aulas, que se traduce entre otras cosas, en el bajo aprovechamiento y rendimiento de los estudiantes.

Objetivos

En la investigación nos centramos en obtener un conocimiento confiable sobre lo que acontece al interior de las aulas de ciencias matemáticas como ese escenario propicio para la producción y generación de aprendizajes. Así, la investigación no se limitó a estudiar las respuestas que proporciona un alumno ante una tarea matemática específica que permita conocer su desempeño, sino que se vislumbró la necesidad de documentar de manera sistemática y en tiempos prolongados, cómo se comunica y negocia el significado de los conceptos matemáticos involucrados y los procesos asociados a dichos conceptos, particularmente, en las clases de cálculo.
El *aula* fue la principal unidad de análisis y se pretendió caracterizar el sistema didáctico que allí se ubica (figura 1).

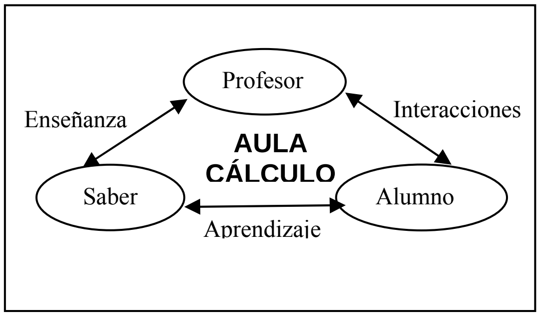


Figura 1. Relaciones entre los componentes del sistema didáctico.

A partir de esta unidad de análisis, nos interesó por una parte, caracterizar las interacciones del profesor y el alumno; por otra, caracterizar el tipo de aprendizaje que se establece entre el alumno y el conocimiento puesto en juego, identificando qué factores en el aula lo "determinan"; y finalmente, caracterizar la relación entre el profesor y el conocimiento, a través de las características de su enseñanza, esto es, su práctica docente.
En síntesis, los objetivos que perseguimos con el estudio fueron:

- Describir la costumbre didáctica del profesor universitario en su clase de cálculo.
- Caracterizar las interacciones entre el profesor, el alumno y el conocimiento.

Marco Teórico

Se emplearon nociones de la *Teoría de Situaciones Didácticas* para describir las interacciones del sistema didáctico, específicamente, la noción de contrato didáctico.
El contrato didáctico es un conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del profesor que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el profesor (Brousseau, 1982) citado en Ávila (2001).
El contrato didáctico es constitutivo de una situación específica y depende del contenido del saber (conocimiento) puesto en juego, es decir, el contrato es perecedero. Sin embargo, para el análisis de los fenómenos didácticos que permanecen en el tiempo, el contrato didáctico al dar cuenta de las interacciones del sistema didáctico, permite caracterizar las prácticas en el aula, que llegan a constituirse en costumbre. El contrato didáctico entonces, da cuenta de la costumbre didáctica que se establece al interior de las aulas.

Recabación de datos

Utilizamos el *enfoque etnográfico* de la metodología cualitativa de investigación educativa. El término etnografía deriva de la antropología y significa literalmente “descripción del modo de vida de una raza o grupo de individuos”. Se interesa por lo que la gente hace, el cómo se comportan y cómo interactúan (Woods, 1986).
Nos valimos de la técnica de *observación no participante,* que consiste en observar las cosas tal y como suceden, con la menor interferencia posible. Para ello se videograbaron las clases de un curso de cálculo (con duración de 80 minutos cada una) de 2 grupos (grupo A y grupo B) de estudiantes de primer semestre de tres diferentes licenciaturas: Matemáticas, Enseñanza de las Matemáticas y Actuaría. Cada videograbación fue transcrita, registrándose 63 sesiones del grupo A y 54 del grupo B para su posterior análisis. Este registro representa el 70 % del curso. Adicionalmente, se realizaron entrevistas a los profesores participantes y a sus alumnos al término de la observación no participante en las aulas.

Resultados

El estudio arrojó resultados que en nuestra opinión serían “imposibles” de obtener de otra forma. Se caracterizó el *contexto de las clases de cálculo*, es decir, las características de los profesores, de los alumnos y de sus interacciones en función del saber matemático. Se identificó la noción de *contrato didáctico* como un regulador de la manera en que se negociaban significados a fin de llegar a conformar un significado compartido. Con respecto a los profesores se determinó su *costumbre didáctica,* término referido a la estructura de la clase, estrategias de enseñanza e intencionalidad didáctica observada en los profesores a lo largo del curso. Determinar la costumbre didáctica permitió caracterizar la práctica docente e identificar fenómenos didácticos presentes en ella. Observamos el establecimiento de una cultura al interior de las aulas, y que a juzgar por los datos obtenidos, es el producto de la costumbre didáctica y de las reglas del contrato didáctico.

Características de la práctica docente

▪ *Centrada en lo discursivo-expositivo*
El discurso fue un recurso ampliamente utilizado, aunque en momentos se tornó excesivo y repetitivo. Los profesores eran los responsables de exponer y desarrollar los contenidos, evidenciando una estrategia expositiva. Al respecto, los alumnos se mostraron concientes de esta práctica, y evidenciaron cierto rechazo (extracto 1).
Extracto 1
Ah[§§§§]: …, repite mucho lo que ya dijo, o sea te dice una cosa y te lo anda repitiendo a cada rato, a cada rato, y hay momentos en que ya, como que sientes que ya lo sabes y no es necesario que lo esté repitiendo. O sea nosotros lo que necesitamos es avanzar y hacer ejercicios, en lugar de que lo esté repitiendo mejor que ponga ejercicios…
▪ *Fenómenos didácticos*

[§§§§] Notación empleada. PA: Profesor del grupo A; Ah: Alumno; Am: Alumna; (…): Silencio; [...]: Murmullos.

*Insistido uso de analogía***.** Los profesores frecuentemente sugerían a los alumnos realizar procedimientos de manera "análoga" o "similar" (extracto 2) a como ellos lo habían hecho. Así, el alumno utilizaba los mismos parámetros que utilizaba el profesor ante la resolución de un ejercicio y por consiguiente, intentaba generar técnicas aplicables para otros casos.
Extracto 2
PA: … ahora vamos a resolver el número 2, de forma similar a como resolvimos el 1. ¡Recuerden! ¿Porqué se tuvieron que tomar dos casos? (…) porque los casos se heredan de la definición de valor absoluto. ¿Qué casos tomo ahora?
*Prescindir del error***.** Esta acción predominante en particular en el profesor A, consistió en inducir a los alumnos para que proporcionaran respuestas "correctas", valiéndose para esto del empleo de interrogatorio a manera de diálogo "socrático". Además, era frecuente que este profesor proporcionara demasiadas *indicaciones o advertencias* a los alumnos para evitar que cayeran en errores, incluso antes de que esto ocurriera. En el extracto 3 se muestra la introducción de la función valor absoluto y las advertencias del profesor A al respecto.
Extracto 3

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

PA: …, quizá la confusión más común cuando vemos esta función por primera vez, ¿cuál es? ¿Qué pensaban en esta parte? ¿Qué confusión puede haber? Pensaban que esto tenía que ser negativo porque hay un menos, (señalando $-x$ de la definición). ¿Por qué no es negativo este número a pesar de que tiene un signo menos? [...] Porque esto es cuando x es negativo y al multiplicarlo por menos, es positivo. Esto que dijimos vamos a escribirlo. ¿Por qué en la última parte $-x$ no es negativo?
Se observa que el profesor advierte a los alumnos de un error que posiblemente pudieran haber cometido. Sin embargo, al no ser una duda o error que surja de su práctica, estas advertencias pueden carecer de relevancia o notoriedad.
Una idea de lo "aparentemente intuitivo a lo formal". Ambos profesores si bien seguían la secuencia *definición-ejemplos-ejercicios* en sus cátedras, intentaron realizar un cambio y se observaron matices de otra índole, como partir de casos particulares y llegar a la generalización de un concepto. Haciendo uso de sus experiencias, los profesores decidían los casos particulares de los que se partían y en un intento por hacer más accesibles los contenidos a los alumnos, omitían condiciones iniciales formales en los teoremas.
Intencionalidad didáctica. Referimos a la *intencionalidad didáctica* del profesor, como la forma en que éste presenta los contenidos, de modo que queda de manifiesto cierta planeación de la clase y se percibe cierta intención de provocar aprendizaje en los alumnos vía una enseñanza explícita.
El extracto 4 evidencia los dos fenómenos antes descritos.
Extracto 4
Nos situamos en el momento en que un profesor introduce el concepto de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva en el aula.
PA Efectúa las graficas de las funciones $y = x$ y $y = x^2$ en la pizarra.
PA: …estas funciones son distintas, ¿cuáles serían las características principales que las hacen distintas?
Am: Una es una línea recta y la otra una parábola.

Am: En una (*refiriéndose a* $y = x$*)* hay imágenes negativas y en la otra (*refiriéndose a* $y = x^2$*)* solo positivas.
PA: Aja, ¿qué más? ¿Qué otra característica las hace distintas?
Ah: El rango.
PA: ¿Qué va a ser el rango? (…) Las imágenes que puede tener.
PA dice cuál es el rango de $y = x$ *y de* $y = x^2$.
PA: A ver, ¿algo más?
PA dibuja la gráfica del valor absoluto ($y = |x|$).
PA: Ahora, el valor absoluto tiene algo común con ésta ($y = x^2$) pero distinta de $y = x$, ¿qué es? (…) igual vemos que son positivos, ¿algo más? (…). El rango es nada más de cero a infinito. Queremos encontrar una característica más que nos va a servir! (…).
PA: Vamos a ver, aquí (*señalando el eje* y *en* $y = |x|$) si tomamos el 2, ¿cuántos puntos en el eje x tienen ese valor? ¿Cuántos puntos en el eje x tienen la imagen 2? ¿O cuáles van a ser?
Am: El 2.
PA: El 2 tiene como imagen 2 y el -2 tiene como imagen 2, también tiene imagen 2. Aquí estos puntos se van a la misma imagen. Aquí también (*señalando* $y = x^2$ *).*
A continuación repite los mismos argumentos para la imagen 3 en la función $y = x^2$.
PA: ¿Aquí sucede lo mismo (*señalando* $y = x$)?
Los alumnos contestan que no.
PA: Pues no!, todos se van a una sola imagen.
Nótese como el plan del profesor es considerar a partir de la representación gráfica de las dos funciones, la lineal y la cuadrática, que los estudiantes de algún modo y de manera inmediata, mencionen la propiedad que caracteriza a las funciones inyectivas. Como esto no ocurre, entonces realiza intentos de modificar su discurso (empero no así la intencionalidad). En otro intento, el profesor dibuja la gráfica de la función valor absoluto junto a las dos gráficas anteriores y vuelve a preguntar con la intención de inducir al alumno a esa respuesta esperada por él. Preguntémonos, ¿es espontáneo que un estudiante al ver esos ejemplos note la supuesta diferencia expresada por el profesor?, es posible que esto ocurra, empero, observamos que allí no ocurrió. De este suceso, desprendemos que el profesor tiene preparado algo y al momento en que no se sigue el rumbo esperado, trata con mayor insistencia de inducirlo, ¡no hay cambio de estrategia! Los alumnos en esta situación, no son constructores de conocimiento como tal, sino que satisfacen las cláusulas del contrato didáctico, es decir, responden lo que creen que el profesor espera que respondan. Si bien es cierto que el profesor tiene la intención de presentar y tratar el contenido matemático de manera diferente a la "tradicional", también es cierto, que no contempla el efecto de sus acciones en sus alumnos.

Conclusiones y reflexiones

Nuestra aportación dentro del terreno práctico, radica en aportar evidencia empírica de cómo la enseñanza tiene un carácter sociocultural en el nivel universitario, y que el aprendizaje no es asunto exclusivo de la cognición. El conocimiento no es producto solamente de una actividad mental sino, se genera y adquiere significación en virtud de una dinámica en el aula.

Las aulas constituyen espacios donde se producen las *condiciones del aprendizaje*. La costumbre didáctica del profesor determina lo que los alumnos aprenden y lo que dejan de aprender. Se establece una "cultura" al interior del aula, que permite ver que las clases se desarrollaron en función de la dinámica y del "tratamiento didáctico" de los contenidos. Esta cultura establece en cierta medida, la forma en como tienen que ser las clases y el rol que cada participante habrá de desempeñar determinando el tipo de aprendizaje que habrán de generar los alumnos.

En este sentido concluimos que los asuntos de éxito o fracaso que puedan tener los alumnos en sus aprendizajes, no es condicionado por factores meramente externos al proceso de enseñanza sino constitutivos de éste.

Finalmente, los autores hacen explicito su agradecimiento a Fondos Mixtos CONACYT-Gobierno del Estado de Yucatán, México, por el apoyo brindado para la realización de este trabajo como parte del proyecto de investigación, Clave: YUC-2004-C03-033.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(1), 27-40.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Revista Educación Matemática*, 13(3), 5-21.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-115.

Woods, P. (1986). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa.* Barcelona, España: Paidós.

EL PROGRAMA DE LA DISCIPLINA MATEMÁTICA PARA LA CARRERA DE INGENIERÍA FORESTAL EN CUBA

María del Carmen Acuña Salcedo, Madelén Garófalo Novo, Ignacio Estévez Valdés, Domingo Pimienta Barquín
Universidad de Pinar del Río (UPR). (Cuba)
msalcedo@mat.upr.edu.cu
Campo de investigación: educación continua. Nivel educativo: superior
Palabras clave: perfeccionamiento, clases semipresenciales, informatización

Resumen
El aprendizaje de la Matemática es de suma importancia en la formación del Ingeniero Forestal pues le ofrece técnicas, métodos y algoritmos de trabajo que contribuyen al logro de un ecosistema forestal sostenible, a la protección y cuidado del medio ambiente y a la defensa del país bajo condiciones extremas.
El Colectivo de Profesores de Matemática de esta carrera en la Universidad de Pinar del Río ha trabajado durante varios años en el continuo perfeccionamiento de la disciplina a través de la elaboración de los diferentes planes de estudios. Actualmente es imprescindible una formación diferente a la tradicional y es precisamente esto lo que se pretende lograr con la propuesta del Plan de Estudio "D" de la Disciplina Matemática para la Ingeniería Forestal y que constituye el objetivo del presente trabajo.

Introducción

El pleno acceso a la Educación Superior Cubana supone asegurar *la permanencia y el egreso* del estudiante en ese nivel. Para ello se identifican cuatro aspectos fundamentales que deben influir positivamente para garantizarlo:

- Perfeccionamiento de la *labor educativa y político ideológica.*
- Perfeccionamiento de los *planes de estudio.*
- Cambios en las *reglamentaciones* para los cursos regulares.
- Determinación del *nivel de preparación de los estudiantes* y la *solución temprana de las posibles insuficiencias*.

Lo anterior presupone la implementación inmediata de un nuevo Plan de Estudio "D", vía principal para lograr una formación con calidad sobre la base del fortalecimiento de la *formación básica* del alumno*; una mayor p*recisión del *currículo base* con carácter estatal y *flexibilidad* en la aplicación del mismo en cada Centro de Educación Superior; disminución de la *carga semanal de clase; incremento de la autopreparación;* así como la implementación de *t*ransformaciones relacionadas con la *virtualización* del proceso de formación y con el sistema de *evaluación del aprendizaje.*
Esto trae consigo cambios en los programas de estudio de cada disciplina de la carrera, de modo que se aprovechen las nuevas tecnologías informáticas en favor de la enseñanza y se logre una nueva manera de comunicar el conocimiento, apoyado en la integración de las nuevas tecnologías y buscando aportar a la enseñanza una base más científica que la haga productiva y eficiente, mejorando así la calidad del trabajo académico y del egresado.

Desarrollo

A partir del triunfo de la Revolución Cubana y teniendo en cuenta la importancia del sector forestal surge la necesidad de formar Técnicos e Ingenieros Forestales en el país.
En 1969 se inician los estudios de Ingeniería Forestal en la Escuela de Agronomía de la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad de la Habana y en 1973 se traslada la carrera para la Sede Universitaria de Pinar del Río, radicando a partir de 1982 en las instalaciones de la hoy Universidad de Pinar del Río.

La Carrera de Ingeniería Forestal ha mantenido colaboración con prestigiosas Universidades e Instituciones Científicas de Cuba y de otros países. Desde su creación se han graduado 1 685 estudiantes, de los cuales, 165 son extranjeros procedentes de 25 países.
La enseñanza de la misma ha transitado por las diferentes versiones de planes de estudios que gradualmente y de acuerdo a la política de formación de profesionales han conducido al logro de un ingeniero forestal de perfil ancho (amplio), capaz de enfrentar los disímiles retos de la actividad productiva.
Además de la formación de ingenieros a través de la modalidad a tiempo completo existe el programa de Educación a Distancia Asistida mediante el cual se imparte la carrera de modo semipresencial en tres Sedes Municipales de la provincia de Pinar del Río y en otros centros del país.
Durante los últimos 2 años el Colectivo de Profesores de Matemática para la carrera realizó un detallado y minucioso trabajo para la elaboración del Programa de Estudio de la Disciplina teniendo en cuenta la opinión de graduados, estudiantes, docentes de otras disciplinas, las tendencias educativas actuales, los avances en la rama de la informatización, la experiencia de los profesores en la enseñanza de los distintos contenidos matemáticos, la necesidad de determinados temas para el profesional forestal, etc. A continuación se exponen los resultados fundamentales de ese trabajo.
La Disciplina Matemática para la formación del Ingeniero Forestal queda compuesta por las asignaturas siguientes:

Asignaturas	**Tipo**	**Ubicación**		**Fondo de Tiempo**		
		Año	**Sem.**	**CA**	**CLI**	**Total**
Matemática I	Obligatoria	1ro	I	60		60
Matemática II	Obligatoria	1ro	II	60		60
Informática I	Obligatoria	1ro	I	30		30
Informática II	Obligatoria	1ro	II	30		30
Estadística	Obligatoria	2do	I	60		60
Elementos de Investigación de Operaciones	Obligatoria	3ro	I	54		54
Estadística Multivariada	Electiva	-	-	30		30
Métodos Numéricos	Electiva	-	-	40		40
Investigación de Operaciones	Electiva	-	-	40		40
Totales				294		294

CA: Componente académica; CLI: Componente Laboral Investigativa.

Como se puede apreciar está compuesta por la unión de dos antiguas disciplinas (Matemática y Computación) pues la integración de ellas como una sola debe resultar muy provechosa para ambas, sobre todo en lo relacionado con el empleo de las TIC, de los diferentes asistentes matemáticos y con el cumplimiento de la estrategia curricular de computación.
También como algo novedoso está que, por primera vez, en la Disciplina aparecen asignaturas con carácter electivo. Ellas pueden ser seleccionadas y cursadas por los estudiantes a partir del tercer año de la carrera en dependencia de sus intereses y necesidades particulares. E incluso puede tratarse de estudiantes que no cursen la carrera de Ingeniería Forestal los que opten por estas asignaturas.
En cuanto a los elementos teóricos relacionados con el diseño investigativo del Programa quedaron formulados del modo siguiente:

Problema: El ingeniero forestal necesita para el manejo y desarrollo sostenible de los sistemas y recursos forestales de la aplicación de las técnicas de la Matemáticas y la Informática.
Objeto de Estudio: La Matemática y la Informática.
Objetivo Educativo: Actuar de acuerdo con los principios éticos del Ingeniero Forestal aplicando los conocimientos y habilidades matemáticas e informáticas en el desarrollo de sus actividades, con elevado rigor científico y creatividad, desarrollando el pensamiento lógico, la toma de decisiones, la constancia, el proceder reflexivo, etc y siendo portadores de elevados sentimientos humanistas y patrióticos, caracterizados por el amor a la naturaleza, la preocupación por la capacidad defensiva del país y dispuestos a prestar sus servicios incondicionalmente a la sociedad. *Objetivo Instructivo:* Aplicar las técnicas de la Matemática y de la Informática que permitan la solución de problemas de la profesión.
Otro aspecto bastante discutido durante las innumerables sesiones de trabajo del Colectivo fue el relacionado con el sistema de habilidades y de contenidos de cada una de las asignaturas. Pues había diferentes tendencias al respecto, sobre todo con relación al modo de impartir el Cálculo Diferencial e Integral para funciones de una y de varias variables (esto es si impartir todo el Cálculo Diferencial para funciones de una y varias variables, con sus respectivas aplicaciones como la Matemática I. Y lo relativo al Cálculo Integral como la Matemática II).
Pero la experiencia de los docentes y los resultados de los estudiantes en los últimos años determinaron que quedara como se muestra:

Sistema de habilidades

- Aplicar los conceptos del Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial e Integral para funciones de una variable a la solución de ejercicios y problemas (Matemática I)
- Aplicar los conceptos de la Geometría Analítica, el Cálculo Diferencial e Integral para funciones de varias variables y las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a la solución de ejercicios y problemas (Matemática II).
- *Aplicar las técnicas de manipulación de datos y recursos de redes (Informática I)*
- Aplicar software sobre la gestión de bases de datos (Informática II).
- Aplicar las Técnicas de la Estadística Descriptiva, la Inferencial y el Diseño de Experimentos a la solución de ejercicios y problemas (Estadística).
- Modelar problemas de Programación Lineal, sus casos especiales y de Programación Multicriterio para el análisis de la solución y la toma de decisiones (Elementos de Investigación de Operaciones).
- Aplicar los métodos del Análisis Multivariado a la solución de problemas de la profesión (Estadística Multivariada).
- Aplicar los métodos numéricos a la solución de problemas de carácter práctico relacionados con el perfil del Ingeniero Forestal (Métodos Numéricos).
- Modelar problemas de optimización no lineal, de redes lineales, de programación dinámica y de árboles de decisión para aplicarlos al perfil del Ingeniero Forestal (Investigación de Operaciones).

Sistema de conocimientos (para cada asignatura respectivamente)

- Nociones de Álgebra Lineal. Funciones de una variable. Límite y Continuidad de funciones de una variable. Cálculo Diferencial de funciones de una variable y aplicaciones (extremos, problemas de optimización y trazado de curvas). Cálculo Integral de funciones de una variable y sus aplicaciones (cálculo de áreas y de volumen de un sólido de revolución).

- Geometría Analítica. Cálculo Diferencial para funciones de varias variables (derivadas parciales, diferencial total y sus aplicaciones, derivada direccional y gradiente, extremos incondicionados, extremos condicionados y problemas de optimización). Cálculo Integral de funciones de varias variables con sus Aplicaciones (cálculo de áreas y volumen de un sólido en el espacio). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y Lineales de Primer y Segundo Orden con Coeficientes Constantes (Método de los Coeficientes Indeterminados).
- Sistema Operativo Windows. Elementos de seguridad informática. Sistema Microsoft Office: MsWord, MsPowerPoint. Características generales de una computadora, su estructura y funcionamiento. Compactadores. Conceptos y trabajo en redes de computadoras. Intranet e Internet, Correo Electrónico, Páginas Web. Caracterización del entorno de trabajo del procesador de texto MsWord y de presentaciones electrónicas MSPowerPoint.
- Tabulador Electrónico. Concepto de libro, hojas, fila, columna, celda y rango. Formato de la celda. Utilización de funciones. Creación de gráficos. Concepto de Listas de Datos. Establecimiento de filtros. Ordenamiento, Creación de tablas dinámicas. Importación y Exportación de Datos. Creación y manipulación de los objetos que brinda Access para trabajar con Bases de Datos.
- Estadística Descriptiva. Probabilidad. Estadística Inferencial (Muestreo, Estimación, Pruebas de Hipótesis Paramétricas y no Paramétricas, Análisis de Varianza, Regresión y Correlación). Diseño de Experimentos. Manejo del software: SPSS.
- Planteamiento de problemas de PL. Solución de un problema de PL. Algoritmo del Método Simplex. Solución utilizando un software adecuado (WINQSB). Análisis óptimo y post-óptimo de la solución. Problema dual y su relación con el primal. Interpretación económica. Problemas lineales especiales (programación entera, problemas de transporte y transbordo). Introducción a la programación Multiobjetivo. Programación por Meta. Utilización de los software (WINQSB y LINDO).
- Componentes Principales. Regresión Múltiple. Análisis de Discriminantes. Análisis de Cluster. Análisis de Cluster Jerárquicos.
- Introducción a la teoría de errores. Separación de raíces. Técnicas de solución por reducción del intervalo. Técnicas de solución iterativa. Interpolación polinómicas. Interpolación segmentaria. Aproximación de funciones. Integración Numérica. Integración Monte Carlo. Solución de problemas de optimización. Técnica de búsqueda unidimensional directa. Técnicas diferenciales. Método del gradiente. Método Monte Carlo.
- Programación no Lineal. Aplicaciones. Optimización no restringida de varias variables. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para optimización restringida. Programación Cuadrática. Programación Separable. Programación Convexa. Conceptos básicos de la Programación Dinámica y aplicaciones. Redes Lineales. Características y análisis de las soluciones de los problemas de redes. Rutas de Distribución. Análisis de Decisión. Toma de decisiones sin experimentación y toma de decisiones con experimentación. Árbol de decisión.

El documento del Programa de la Disciplina consta, también por primera vez, de un conjunto de indicaciones metodológicas y organizativas generales. Estas permiten lograr un trabajo lo más homogéneo posible en algunos aspectos esenciales y prioritarios en todas las Sedes Municipales y CES donde se imparte la carrera.

También brinda orientaciones de trabajo en cada una de las asignaturas, en específico relacionadas con el cumplimiento de las diferentes estrategias curriculares del MES, con la formación de valores en los estudiantes, con la evaluación, etc
Por ejemplo, algunas de las indicaciones que se ofrece son:

- Por su condición de disciplina del ciclo básico, tiene un fuerte componente académico organizado en distintas formas de enseñanza: conferencias, clases prácticas, seminarios, clases de laboratorios, videos, búsquedas en Internet, entre otras en la modalidad a tiempo completo y los encuentros y tutorías en la educación a distancia (modalidad a tiempo parcial).
- En cada año académico las asignaturas de la Disciplina mediante la utilización de métodos científicos aportan a la componente laboral–investigativa, contribuyendo a la articulación horizontal de las asignaturas del año con la asignatura de la disciplina principal integradora.
- La dirección del proceso docente-educativo en las asignaturas se apoya en métodos de carácter reproductivos, productivos y creativos, con mayor énfasis en los dos últimos. Siempre que sea posible deben utilizarse métodos activos que desarrollen el carácter productivo y creador de los alumnos, contribuyendo a desarrollar el pensamiento lógico e insistiendo en el enfoque práctico, medio ambiental y forestal en los diferentes ejercicios y problemas.
- Con relación a la Estrategia Curricular relacionada con el idioma inglés en las diferentes asignaturas se le dará cumplimiento mediante el empleo de softwares, el estudio de materiales y la orientación de algunos problemas en ese idioma.
- En cuanto a la estrategia referida a la Computación se aprovecharan todas las facilidades del Microcampus, del Microsoft Office y del Encarta en la realización, exposición y presentación de trabajos en clases, Jornadas Científicas y Forum.
- Las asignaturas de Matemática I y Matemática II desarrollarán actividades prácticas de laboratorio empleando el asistente matemático Derive.
- En la asignatura Informática I se desarrollaran habilidades en la utilización del Sistema Operativo Window y los programas del Microsoft Office, principalmente procesadores de textos y la edición de presentaciones electrónicas, mientras que en Informática II se procesará información relacionada con problemas forestales donde se requiera la realización de cálculos avanzados, gráficos y la manipulación de la información.
- En Estadística se enseñará la utilización del software profesional SPSS (Statistical Package for Social Science) y debe mantenerse su uso por parte de todas las demás disciplinas para la solución de problemas estadísticos que se presenten en el transcurso de la carrera.
- En Elementos de Investigación de Operaciones se trabajará con los softwares profesionales WINQSB y LINDO, los cuales deben ser utilizados en el transcurso de la carrera para la solución de diversos problemas relacionados con la profesión.
- La Historia de Cuba y la Defensa del país se destacarán en cada asignatura en el propio proceso docente–educativo, mediante la labor educativa del profesor, el señalamiento de fechas históricas, la valoración de la situación política del país y del mundo, etc.
- Con relación a la formación de valores se trabajará en conjunto con los proyectos educativos y sociales de cada año académico en que se imparten las asignaturas de la disciplina, contribuyendo de manera activa a la formación de valores éticos, morales, profesionales, históricos y político - ideológicos en los estudiantes. Estos serán tratados a través de la instrucción abordando la ética del profesional forestal; la historia de la Matemática y la Informática; el tratamiento de los diferentes descubrimientos científicos y sus autores; los adelantos científico-técnicos contemporáneos; el análisis de situaciones políticas

en nuestro país y en el mundo; la atención a las inquietudes y preocupaciones que muestren los estudiantes en cualquier ámbito del saber; la estimulación de la lectura de obras literarias; el comentario de películas que lleven un mensaje ético, moral, histórico o político e ideológico; la discusión de artículos en revistas y periódicos que contengan un análisis e información de cualquier contenido que contribuya a elevar la cultura de nuestros estudiantes; etc.

- El control del aprendizaje estará presente a lo largo de todo el proceso docente - educativo de la disciplina, a través de las diferentes asignaturas. La evaluación es concebida de manera problémica, dinámica y creativa, interrelacionándola con el resto de las asignaturas de la disciplina y del año académico. Las asignaturas utilizarán en la evaluación de sus temas formas tradicionales y novedosas de control, combinadas con test - escritos o prácticos aplicando las técnicas de cómputo, vinculando los mismos a problemas de la profesión especialmente en las asignaturas de Estadística y de Elementos de I.O.

Por último se indica la Bibliografía Básica y de Referencia para cada una de las asignaturas que conforman la Disciplina, destacándose que la misma posee un elevado nivel de actualización, tanto con relación a los textos como a los materiales digitales y en formato electrónico que se proponen.

Conclusiones

La propuesta del Plan de Estudio "D" de la Disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería Forestal en Cuba tiene básicamente las siguientes ventajas sobre las versiones anteriores:

_ Menor cantidad de horas presenciales del profesor y por consiguiente mayor trabajo independiente por parte del estudiante.
_ Se proponen 3 asignaturas con carácter electivo.
_ Las asignaturas de Matemática e Informática conforman una única Disciplina.
_ Se estructuran los contenidos de Matemática I y II de un modo diferente.
_ Se hacen Indicaciones Generales de carácter metodológico y organizativo.
_ Mayor utilización de las nuevas tecnologías y de los asistentes matemáticos.

Referencias bibliográficas

Arteaga, E. (2001). *El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior*. Tesis en opción al grado de doctor en Ciencias Pedagógicas. MES. Universidad de Cienfuegos, Cuba.

Ballester, P. S. y otros (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación, Ministerio de Educación.

Hernández, D. y Sánchez, A. (2001). *¿Cómo organizar el proceso de enseñanza aprendizaje en la carrera de Economía utilizando estrategias didácticas?* Disponible en: http://www.monografias.com/trabajos13/artestrg/. Consultado: 22 de octubre del 2005.

Hernández, H. (1993). *Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate*. Quito, Ecuador.

Rodríguez, T. (1991). *Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la Disciplina Matemática Superior*. Tesis de Doctorado. Habana, Cuba.

Solís, Y. (2004). *Propuesta Didáctica para el desarrollo de estrategias de aprendizaje con el apoyo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones*. Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas, CREA, La Habana, Cuba.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR MEDIANTE ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS Y EL USO DE OBJETOS DE APRENDIZAJE

Ricardo Ulloa Azpeitia, Ana Luisa Estrada Esquivel
Universidad de Guadalajara, Universidad Autónoma de Nayarit. (México)
Campo de investigación: Resolución de problemas. Nivel educativo: superior
Palabras clave: aprendizaje basado en problemas, objetos para el aprendizaje

Resumen
Con la investigación objeto de este reporte, se estudiaron los efectos que tiene una propuesta didáctica centrada en el enfoque de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y con empleo de Objetos para el Aprendizaje (LO), sobre el aprendizaje del tema ecuaciones de grado superior, por parte de alumnos de segundo de la Licenciatura en Matemática Educativa (LME) de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN). La etapa de experimentación se llevó a cabo durante tres meses. Se empleó como marco teórico la teoría constructivista de Vygotsky. Para realizar la investigación, se diseñaron actividades de aprendizaje según la estructura del ABP, se elaboró una presentación en *Power Point* para ilustrar a los estudiantes sobre las características del ABP, un video construido en *Corel Photo Paint,* para visualizar el comportamiento de las raíces de la ecuación de segundo y tercer grado, se construyeron instrumentos para evaluación de los conocimientos adquiridos y se utilizó una opción de LO, elaborada por el Dr. Rafael Pantoja Rangel, catedrático de la Universidad de Guadalajara.
Para efectos de determinar la significatividad de los resultados observados, se utilizó la prueba *t* de *student*, se encontró que el empleo de estrategias de ABP propicia mejores resultados de aprendizaje que el método tradicional.

Problema de investigación
El deficiente proceso de aprendizaje del tema de ecuaciones de grado superior, en el que se han observado resultados pobres cuando se han empleado métodos de enseñanza tradicional, por lo que se propuso estudiarlo mediante el enfoque ABP, con el empleo de LO diseñados específicamente, además de dar cuenta de la transformación indicada a raíz de la Reforma Universitaria, hacia el diseño curricular basado en competencias.

Objetivo
Evaluar los efectos que producen la propuesta ABP y el empleo de LO en el proceso de aprendizaje de los métodos de solución de ecuaciones de grado superior.

Meta
Adaptar LO construidos específicamente y probar sus efectos sobre el trabajo en el tema de ecuaciones de grado superior.

Objeto de estudio
El proceso de aprendizaje y aplicación de métodos para resolver ecuaciones de grado superior, por estudiantes de la LME, con el enfoque didáctico ABP y el empleo de LO.

Tipo de estudio
La investigación fue experimental, con grupo de control, la parte experimental se desarrolló a lo largo tres meses; se buscó determinar los efectos de la aplicación de la propuesta basada en la teoría definida previamente.

Muestra
Se trabajó con el grupo de segundo semestre del Programa de Licenciatura en Matemática Educativa, de la UAN. El grupo se dividió en dos subgrupos , cada uno se integró por 18 alumnos. En uno se aplicó la estrategia experimental y en el otro se aplicó el método tradicional.

Antecedentes
Pueden encontrarse numerosas referencias al respecto del empleo del enfoque ABP, de acuerdo a la Academia de Matemáticas y Ciencias (*Illinois Mathematics and Science Academy,* 2001), con el empleo del ABP, simultáneamente se desarrollan estrategias para solución de problemas, bases de conocimiento disciplinar y habilidades, mediante la ubicación de estudiantes en el papel de resolvedores de problemas enfrentados a problemas mal estructurados que reflejan la realidad.
En el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey se ha diseñado un Programa de Desarrollo de Habilidades Docentes, que es un proceso de trabajo y aprendizaje por parte de los profesores, cuya acreditación depende de productos concretos, su finalidad es formar al profesor en los conocimientos, habilidades, actitudes y valores que se requieren para diseñar e implementar un curso utilizado en el modelo educativo vigente. En este programa se da prioridad a las técnicas didácticas de ABP, aprendizaje colaborativo y estudios de casos (Sola, 2005), pero no se ubicaron resultados específicos de su empleo.
No se encontró información sobre instituciones del Estado de Nayarit en donde se trabaje con la estrategia del aprendizaje basado en problemas, por lo que fue una investigación novedosa.

Justificación
Como parte del proceso de Reforma Universitaria iniciado, se concretó un rediseño curricular, que adoptó el modelo basado en competencias profesionales y como estrategia de enseñanza asociada, el aprendizaje basado en problemas.
Los resultados de investigaciones respecto al aprendizaje mediado por el uso de las nuevas tecnologías, han mostrado resultados prometedores con el empleo de objetos para el aprendizaje, por lo que resulta pertinente la adecuación de alternativas novedosas, que den cuenta del empleo de las nuevas tecnologías para apoyar el proceso de aprendizaje de los contenidos del tema ecuaciones de grado superior, que forma parte del curso de Álgebra Superior.

Pregunta principal
¿Cómo influye sobre el aprendizaje por parte de los estudiantes, el empleo de LO en la estrategia didáctica ABP?

Preguntas de investigación
1. ¿Cómo participan los alumnos en el proceso de aprendizaje y aplicación de métodos para resolver ecuaciones de grado superior?
2. ¿Cómo participan los maestros en el proceso de aprendizaje y aplicación de métodos para resolver ecuaciones de grado superior, por parte de los estudiantes del PAME?
3. ¿Cuáles son las dificultades de los alumnos del PAME al utilizar ABP?
4. ¿Cuáles son las dificultades de los maestros del PAME al utilizar ABP?

Sustento teórico

La investigación fue sustentada en la teoría constructivista de Vygostky. En ella se sugiere que la interacción social conduce a cambios continuos en el pensamiento y el comportamiento puede variar de cultura a cultura, es decir, que el desarrollo depende de la interacción con la gente y las herramientas que el entorno proporciona, por lo que se buscó su presencia en el diseño de las actividades.

La elección de la estrategia de trabajo mencionada, también es apoyada por la concepción de zona del desarrollo próximo (ZPD), que Vygotsky (IVIC, 1999) define como aquella en la que un estudiante no puede hacer por sí solo una actividad, pero es capaz, si es ayudado por alguien con mayor conocimiento – aunque se considera que aún la interacción con compañeros del mismo nivel puede provocar aprendizajes potencialmente mejores a los que tendría al trabajar de manera aislada.

También se define la ZPD como la distancia entre el nivel actual de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz (Cascio, Hernández. y Duarte, 2005); una estrategia en donde se aplica lo anterior, es precisamente en el aprendizaje basado en problemas. El ABP es una estrategia de aprendizaje en la que tanto la adquisición de conocimiento, como el desarrollo de habilidades y actitudes resultan importantes; en el entorno del ABP, un grupo de alumnos se reúne, con el apoyo de un tutor, a analizar y resolver un problema seleccionado o diseñado especialmente para el logro de los objetivos de aprendizaje planteados. Logrando con esto, conciencia de la importancia de trabajar colaborativamente, desarrollo de habilidades de análisis y síntesis de información, así como el compromiso con su propio proceso de aprendizaje (Sola, 2005).

Con la estrategia de ABP se promueve el auto aprendizaje y la investigación, para lo que el estudiante requiere de apoyos, que esta investigación se utilizaron los LO que son recursos digitales que apoyan la educación y pueden reutilizarse constantemente (Enríquez, 2004). En esta investigación fueron utilizados dos LO, uno fue realizado por el investigador, el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado, en el que los estudiantes encontraron información que relaciona las gráficas dinámicas con la solución correspondiente y el otro LO utilizado, fue el construido por el Dr. Rafael Pantoja Rangel, catedrático de la UDG, en el que incluye métodos para resolver ecuaciones de grado superior (3º y 4º grado) que se encontraba en banco de LO de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas del CUCEI.

Metodología

En la investigación se empleó un diseño experimental, sólo con post prueba, con grupo experimental y de control. A un grupo se aplicó la propuesta ABP y al otro el método tradicional; para analizar los datos numéricos se utilizó el estadístico *t-student* para muestras independientes y para el análisis de aspectos cualitativos se utilizaron cuestionarios, que fueron medidos con escalas de tipo Likert.

La variable dependiente fueron los resultados de aprendizaje, cualitativos y cuantitativos y la independiente fue la presencia o no del tratamiento experimental.

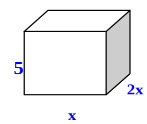
El diseño básico de la investigación corresponde al de grupo experimental con grupo de control y sólo postest.

1. Se propuso la solución de un problema adecuado, que podía ser resuelto por diferentes vías, -un tanto equivalente a “mal estructurado”, como sugiere la teoría, bajo la supervisión de un facilitador/asesor.

2. Se asignó la solución de un cuestionario que sirvió de guía para evitar demasiada dispersión en la interpretación del problema.
3. Se sugirió obtener los conocimientos e instrumentos de apoyo convenientes para la solución del problema en dos objetos para aprendizaje: (a) Visualización de funciones y (b) Solución de ecuaciones de grado superior.
4. Se compararon las soluciones obtenidas del problema, para propiciar situaciones de interacción.
5. Se solicitó responder las encuestas de autoevaluación y coevaluación.
6. Se aplicó una evaluación de los conocimientos obtenidos.

Presento una de las actividades:

ACTIVIDAD 1



Objetivos

- Identificar la parábola y sus raíces.
- Dar solución al problema
- Localizar espacios de aplicación de la raíces de la ecu

Problema 1

Una caja mide 5 cm. de altura y su ancho es el doble que el largo. Su volumen es de 1000 cm^3. Calcule el largo y el ancho.

Primera sección: Interpretación

1. ¿De qué trata el problema?
2. ¿Cuáles son los datos que se tienen?
3. ¿Qué se pide?
4. ¿Cómo se encuentra el volumen de un prisma?

Segunda sección: De investigación

5. ¿Qué es una ecuación de segundo grado?
6. ¿Qué significa resolver una ecuación de segundo grado?
7. ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado?
8. ¿Cuántas formas de resolver una ecuación de segundo grado existen?
9. Grafica la función asociada a la ecuación que obtuviste y contesta:
    a. ¿Que grafica se genera?
    b. Sobre que eje encuentras las raíces de la ecuación?¿porque lo crees?

Tercera sección: Solución

10. ¿Cuál es la solución del problema planteado al inicio?

Cuarta sección: Aplicación

Inventa un problema que satisfaga la condición de cada uno de los incisos siguientes:

a) Tenga raíces complejas
b) Tenga raíces reales diferentes
c) Tenga raíces múltiples

Para desarrollar el estudio se contó con la colaboración de dos profesoras, una utilizó el método tradicional y la otra utilizó la propuesta didáctica ABP.

Los tiempos que se tenían previstos no fueron suficientes para el grupo de experimentación, dado que se utilizó aproximadamente el doble de tiempo programado. Este hecho afecta la validez interna, pues en vez de sesiones de dos horas, se llegó a consumir cuatro horas, lo que ocasionó que se observara a los estudiantes cansados y hambrientos, lo que de acuerdo a la clasificación de Campbell y Stanley, es una invalidez de inestabilidad (Hernández, Fernández y Baptista, pag. 1991).

Hipótesis

H_1: El empleo de estrategias de ABP propicia mejores resultados de aprendizaje cuantitativos (μ_2), para el tema de ecuaciones de grado superior. ($\mu_2 > \mu_1$)

μ_2: Promedio de calificaciones de la población con la propuesta ABP

μ_1: Promedio de calificaciones de la población con el método tradicional

H_0 : No son mejores los resultados de aprendizaje al emplear la estrategia propuesta. ($\mu_2 \leq \mu_1$).

Resultados

Los resultados que se obtuvieron fueron de dos tipos, de carácter cualitativo, producto de los cuestionarios de autoevaluación, evaluación al profesor y de observación; otros de carácter cuantitativo, resultado del examen que se aplicó a los grupos de control y experimental.

Del análisis estadístico que se realizó con la prueba t se tuvo que:

la $t_{calculada} = 1.71708$. Para encontrar la $t_{tabulada} = 1.6909$, se utilizó la tabla correspondiente, con 34 grados de libertad, con un $\alpha = 0.05$**.** Como $t_{calculada} > t_{tabulada}$ se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa, es decir, el empleo de estrategias de ABP propicia mejores resultados de aprendizaje cuantitativos.

Para obtener información de aspectos cualitativos, se aplicó un cuestionario cuyas preguntas fueron cuantificadas mediante una escala Likert, los aspectos que se tomaron en consideración fueron los que se proponen en el Modelo ABP, en el que se sugiere que se fomente la responsabilidad, el respeto y las habilidades de relación, de ayuda, de búsqueda y análisis de información y de iniciativa y el uso de LO. Se aplicaron 54 encuestas. Se concluyó que la estrategia didáctica ABP propicia la responsabilidad, el respeto, habilidades de relación, de ayuda, de búsqueda de información, de análisis de información y de iniciativa, dado que la evaluación de actitudes a estudiantes se inclinaron hacia las opciones "*siempre*" y "*algunas veces*", y representan el 84% de las respuestas.

Conclusiones

- Como parte del trabajo realizado, se concluyó que si se lograron los objetivos y las metas, pues se adaptó un LO y construyó otro para que ser utilizados en las ecuaciones de grado superior y se evaluaron los efectos que produce la propuesta ABP y el empleo de LO en el proceso de aprendizaje de los métodos de solución de ecuaciones de grado superior. Se realizó un análisis cuantitativo y otro cualitativo.
- En los resultados que se obtuvieron del análisis estadístico se concluyó que *el empleo de estrategias de ABP al compararla con la tradicional propicia mejores resultados de aprendizaje para el tema de ecuaciones de grado superior.*
- Con el análisis de los aspectos cualitativos se encontró que el ABP fomenta la responsabilidad, el respeto y el desarrollo de habilidades sociales, como negociación de significados, compartición de ideas, de ayuda mutua, además de aquellas para búsqueda y análisis de información, así como de iniciativa.

- Se observó mejor motivación para trabajar en equipo, que con el enfoque tradicional.
- Se notó que a partir de la interacción, surge la necesidad de investigar para responder cuestiones planteadas por los mismos miembros de los equipos, para finalmente, dar solución a problemas específicos.
- En general, resultó una alternativa más eficiente para modificar y/o apoyar las labores de enseñanza y aprendizaje.
- La estrategia didáctica ABP representó un cambio positivo en el quehacer del profesor y del estudiante.
- Para los estudiantes, resultó más motivante la alternativa planteada por la interacción con sus compañeros, pues pasaron de guardar silencio, a participar en la construcción de sus conocimientos.
- Resultó problemático que los estudiantes de corte tradicional no asumen retos, ni hacen compromisos, dada la costumbre de que el profesor decida los conocimientos que necesita y la secuencia en que se estudian, por lo que tomar decisiones para resolver un problema, resultó un verdadero caos. Esto puede provocar desánimo, tanto del profesor, como de los demás estudiantes y se puede estimar que la estrategia no funciona.
- No menos importante fue el uso de LO, pues fue un extraordinario apoyo en la etapa de investigación. La secuencia y la objetividad del diseño de los LO fue un material clave para los estudiantes, porque los LO estaban diseñados de acuerdo con las necesidades de los estudiantes según se desprendió de experiencias previas.
- El trabajo con los objetos para aprendizaje propició un ambiente de motivación.
- De acuerdo a las experiencias obtenidas al aplicar la estrategia ABP, la búsqueda de información es la única etapa en donde podría disminuir la motivación de los estudiantes. Posteriormente, en la etapa de solución del problema, ya no se percibió algún motivo de desánimo.
- Otro punto importante de resaltar, es la autoevaluación. Cuando los estudiantes se ven en la necesidad de evaluar sus actitudes y valores, les parece interesante realizar una introspección y eso les resultó motivante. Se puede concluir que la autoevaluación no debe separarse del contexto educativo.

Referencias bibliográficas

Cascio, F., Lluis, E., Raggi F. y Tomás, F. (1982). Álgebra Superior (6ª reimpresión). México: Ed. Trillas.

Enriquez, L.L. Educación compartida. El nuevo Reto, 2004, parrafo 13. Consultado el 6 de octubre del 2004 en: http://www.enterate.unam.mx/Articulos/2004/Enero/educa.html

Hernández, E., Fernández C. y Baptista P. (2003). *Metodología de la Investigación*. México: Ed. McGraw-Hill. Interamericana.

Illinois Mathematics and Science Academy. (2001) . *What is problem based learning? Parrafo 4,5.* Consultado en septiembre de 2004, en: http://www2.imsa.edu/programs/pbl/whatis/whatis/slide1.html

Ivic, I. (1999). Lev Semionovich Vygotsky (1896-1934). Revista Electrónica Educar y Aprender. El texto se publicó originalmente en Perspectivas: revista trimestral de educación comparada (París, UNESCO: Oficina Internacional de Educación), vol. XXIV, nos 3-4, 1994, págs. 773-799.©UNESO: Oficina Internacional de Educación, 1999. Consultado en junio de 2004, en: http://www.educar.org/articulos/Vygotsky.asp

Sola, C. (2005, pag 31). *Aprendizaje basado en problemas. De la teoría a la práctica.* México: Ed. Trillas.

TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LAS FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE: PROCESO DE MODELACIÓN

Elsa Caridad Ramírez García
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. (Cuba)
elsar@uclv.edu.cu
Campo de investigación: modelación matemática. Nivel educativo: superior
Palabras clave: modelación matemática, funciones, concepto de función

Resumen
En la vida práctica, las personas que hacen uso de la matemática estudian diferentes relaciones o correspondencias; físicos, químicos, biólogos, economistas, ingenieros, analizan las relaciones entre los elementos en sus campos y tratan de describir y predecir el comportamiento de diferentes fenómenos a partir de dichas relaciones, por tanto el concepto de función es objeto de estudio tanto de la enseñanza general como de la superior. A pesar de que este contenido ya ha sido tratado en la enseñanza precedente, al llegar los estudiantes a la educación superior, presentan algunas dificultades en las acciones que deben poder realizar para llegar a saber este concepto matemático.
En este trabajo se exponen algunas ideas sobre las etapas en el proceso que conduce a la asimilación del concepto de función y se muestran diferentes ejemplos, en los que la modelación matemática de situaciones reales, permite consolidar la asimilación o fijación del concepto, mediante su sistematización en diferentes temas de la disciplina o en su relación con otras disciplinas.

Introducción

Uno de los conceptos más importantes para la matemática es el concepto de función, debido a su naturaleza unificante y modelarizadora. En él subyace uno de los modelos matemáticos más elementales y ampliamente utilizados en la vida práctica, por lo que es objeto de estudio, tanto del nivel medio como de la enseñanza superior. Además, el aprendizaje de este concepto es imprescindible para la comprensión de otros conceptos como; límite, continuidad, derivadas e integrales.
"*A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo*" (Hitt, 2000)**.**
Cada día cobran mayor fuerza, las estrategias que se utilizan para aprender matemáticas a partir de situaciones y fenómenos del mundo físico. Éstas incluyen interpretar la realidad a partir de la identificación de las variables participantes, la recolección de datos que se generan en situaciones reales o simuladas y modelación de situaciones.

La línea directriz correspondencia, transformación, función

En los programas para la enseñanza de la matemática se identifican algunos lineamientos que penetran todo el curso e incluso se siguen desarrollando de un nivel a otro, son las denominadas líneas directrices en la enseñanza de la matemática. Una de estas líneas directrices es la de *correspondencia, transformación y función***.**
Desde el nivel primario, a los estudiantes se les comienza a preparar para poder asimilar el concepto de función; se inicia en una primera etapa, con el trabajo con aspectos lógicos,

lingüísticos, símbolos y términos, pero no es hasta la secundaria básica que se inicia formalmente el estudio del concepto de función.

Es precisamente en este nivel donde se define este concepto, los estudiantes deben comprenderlo como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos y se utiliza explícitamente el término dependencia funcional; deben dominar el concepto de función lineal, sus propiedades y representación gráfica. En noveno grado se define función cuadrática y se estudian sus propiedades y la proporcionalidad inversa. En décimo y onceno grados se introducen las funciones potenciales, las funciones trigonométricas y las funciones exponenciales y logarítmicas; se desarrollan habilidades en la obtención de los gráficos de otras funciones a partir de los anteriores, con la aplicación de traslaciones, contracciones o dilataciones. Al tratar estos tipos de funciones se insiste en el ploteo de puntos para realizar la representación gráfica y a partir de ésta, describir las propiedades más importantes. Se insiste en el hecho de introducir la teoría mínima y se concentra el trabajo en la vinculación con otras líneas directrices, entre ellas "trabajo con variables" y "ecuaciones e inecuaciones", que permite seguir desarrollando habilidades de cálculo numérico y con variables. (Martínez, 1998)

Fases en la enseñanza del concepto de función. Algunas dificultades

La matemática forma parte del curriculum en la mayoría de las carreras universitarias, en los programas de esta disciplina o en los de otras que la incluyen, aparece el concepto de función dentro del sistema de conocimientos a estudiar, generalmente relacionado con el objeto fundamental de estudio de esta disciplina, por ejemplo, en la carrera de Licenciatura en Ciencias Farmacéuticas, el objeto de estudio de la disciplina Matemática es el estudio de los modelos y procedimientos relacionados con el diseño, elaboración, estabilidad, control de la calidad y biodisponibilidad del medicamento, (Ramírez, 1996) uno de estos modelos es el de función.

A pesar de que este contenido ya ha sido tratado en la enseñanza precedente, como ya hemos analizado, al llegar los estudiantes a la educación superior, presentan algunas dificultades en las acciones que deben poder realizar para llegar a saber este concepto matemático.

Al estudiar un concepto matemático, reconocemos la necesidad de lograr un tratamiento metodológico (Ballester, 1992) que tenga en cuenta tres fases en la estructura del proceso a seguir en la elaboración de su definición:

*Preparación para el concepto, se caracteriza por las consideraciones y ejercicios preparatorios, lo cual generalmente se hace antes de la introducción del concepto***.**

Formación del concepto**,** *consiste en la parte del proceso donde se conduce desde la creación del nivel de partida, la motivación y la orientación hacia el objetivo, que pasa por la separación de las características comunes y no comunes, hasta llegar a la definición o a la explicación del concepto.*

*Asimilación del concepto***,** *termina con la fijación del concepto; el alumno asimila el contenido del concepto a través de acciones mentales y prácticas dirigidas hacia este objetivo.*

La tercera fase, que denomina de asimilación o fijación del concepto, en realidad tiene un alcance mayor, pues también es de aplicación del concepto y sistematización.

Si se quiere estudiar un concepto en matemática, no basta con el conocimiento de su definición, es muy importante esta tercera fase. Por otra parte, de acuerdo a la complejidad del

concepto que se trabaja, es imprescindible el estudio de las operaciones lógicas de clasificación, de generalización y restricción.
Al asimilar el concepto, el alumno tiene que realizar las siguientes acciones:

- *Identificar el concepto.*
- *Realizar o construir el concepto.*
- *Aplicar el concepto.*

Por la identificación del concepto se entiende el determinar si un objeto dado pertenece o no a la extensión del concepto, para ello el alumno debe realizar ejercicios con diferente grado de complejidad y ser capaz de decidir si el objeto posee las características esenciales expresadas en la definición (Jungk,1989).
Además, en la educación superior, por las características de las extensiones de los conceptos, se considera la acción inclusión en el concepto, que consiste en analizar si el objeto cumple con las condiciones suficientes o incumple las condiciones necesarias para estar en la extensión del concepto.
Para la realización se deben crear objetos que satisfagan las características dadas por el concepto. En este caso las tareas a realizar por el estudiante deben llevarlo a utilizar las características del concepto para construir representantes del mismo.
La aplicación del concepto se realiza siempre en relación con otras situaciones de la enseñanza, no necesariamente en relación con su elaboración. La fijación contempla, ante todo, las aplicaciones y el ordenamiento del concepto en un sistema de conceptos. Esta es una acción fundamental para el trabajo con los conceptos en la educación superior y es la acción fundamental, que a nuestro criterio, da la posibilidad no sólo de apropiarse del concepto, sino que también es un instrumento para desarrollar aprendizajes significativos.
Estas tres acciones se llevan a cabo desde la enseñanza media, pero de forma intuitiva; es en la enseñanza superior donde se presentan situaciones nuevas para el estudiante, dadas por la necesidad de modelar situaciones reales, que lleven a la construcción de funciones definidas por una o varias expresiones, que evidentemente requieren un mayor dominio en la asimilación del concepto objeto de estudio.

La modelación como aplicación del concepto de función

En el trabajo didáctico para la asimilación del concepto de función, nos proponemos utilizar la modelación de funciones reales de una variable, a través de situaciones que utilicen:

- El propio concepto de función.
- Otro modelo matemático, cuya solución se describe mediante una función.

En ambos casos se debe tener en cuenta un análisis amplio de las herramientas de trabajo que ofrece la matemática, los diferentes tipos de problemas que pueden ser planteados y las vías que pueden ser usadas, aunque las estrategias de solución sean diferentes. En el primer caso pueden analizarse dos tareas fundamentales:

1. Establecer relaciones fundamentales entre magnitudes, como resultado se debe obtener la expresión analítica de una función (obtener el modelo a aplicar, o sencillamente, aplicar un modelo ya conocido). Los tres primeros ejemplos permiten obtener una función lineal que describe, en cada caso, una situación de este tipo.

2. Analizar las propiedades de la función obtenida para describir o explicar el comportamiento del fenómeno o experimento en sí (describir el comportamiento del modelo para otros valores de la variable independiente considerada).

En el segundo caso, se parte de un modelo que involucra indirectamente el concepto de función, que describe un determinado proceso o fenómeno objeto de estudio y a partir de su solución, se obtiene una función que brinda información sobre el proceso. En este caso, las tareas a considerar, pueden ser las siguientes: obtener el modelo o aplicar un modelo conocido, solucionar el modelo y describir el comportamiento del modelo a partir de la interpretación del resultado obtenido en el paso anterior (en los ejemplos 4, 5 y 6 se relacionan los conceptos de integral, derivada y ecuación diferencial, con el concepto de función).

Ejemplos

1. Un paciente con cáncer recibirá terapias mediante fármacos y radiación. Cada cm^3 de medicamento que se usará contiene 200 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 300 unidades curativas. El paciente requiere 2400 unidades curativas. Si $\boldsymbol{d}$ cm^3 de la droga y $\boldsymbol{r}$ minutos de radiación son suministrados. Determine la función lineal que exprese la cantidad de medicamento $\boldsymbol{d}$ en función del tiempo $\boldsymbol{r}$ de radiación y calcule la cantidad de medicamento a suministrar para una radiación de 1,5 minutos.

En este caso el modelo se obtiene directamente y se corresponde con la función lineal:

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{12} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{r}$$

2. En un estudio de laboratorio, realizado en el Centro de Bioactivos Químicos de la UCLV, a un nuevo producto que fue denominado G-1, se le aplicó un procedimiento de valoración potenciométrica, empleándose la ley de la volumetría, con vistas a comprobar que la técnica que se propone cumpla el requisito de validación de la linealidad y donde:

$$\%\boldsymbol{pureza} = \frac{\boldsymbol{m_b}}{\boldsymbol{m_n}}.\mathbf{100} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{m_b} = \boldsymbol{V_g\,F\,T}$$

donde: $\boldsymbol{V_g}$ representa, los ml consumidos del agente valorante, $\boldsymbol{F}$ el factor de corrección de la disolución del agente valorante, $\boldsymbol{T}$ Titro de la disolución del valorante en relación con el G-1 y $\boldsymbol{m_m}$ la masa de muestra del G-1. $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{m_m}$ son constantes, por lo que la expresión para determinar el % de pureza es:

$$\%\boldsymbol{pureza} = \frac{\boldsymbol{V_g\,F\,T}}{\boldsymbol{m_n}}.\mathbf{100}$$

3. En un experimento con ratones se comprobó que cuando la temperatura $\boldsymbol{T}$ (en grados Celcius) de un ratón es reducida, la frecuencia cardiaca (en latidos por minuto) disminuye. Bajo condiciones de laboratorio, un ratón a una temperatura de 37 ^oC tuvo una frecuencia cardiaca de 220 y a una temperatura de 32 ^oC su frecuencia cardiaca fue de 150. Si $\boldsymbol{r}$ está relacionado linealmente con $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}$ está entre 26^o y 38^o.

a) Determine una ecuación para $\boldsymbol{r}$ en términos de $\boldsymbol{T}$.

b) Determine la frecuencia cardiaca para una temperatura de 28 ^oC.

4. Un área bajo la curva de nivel plasmático es un parámetro cinético de utilidad, pues es un criterio para determinar la biodisponibilidad de un medicamento (es la fracción o porcentaje de dosis aprovechada eficazmente en la forma de administración utilizada), y se define mediante $\int_0^\infty C(t)\,dt$. En la siguiente tabla se dan valores de la concentración de un cierto medicamento (mg/l) en diferentes intervalos de tiempo (horas) a un paciente.

t	0	1	2	3	4	5	6
C	0	5,03	7,70	7,80	6,98	6.91	4,97

Determine aproximadamente la curva de nivel plasmático y la biodisponibilidad alcanzada en este caso, para $\mathbf{0} \le \boldsymbol{t} \le \mathbf{6}$.

5. Suponga que el pulso de un individuo (en latidos por minuto) a los $\boldsymbol{t}$ segundos de haber comenzado a correr, está dado por: $\boldsymbol{P(t)=56+2t^2-t}$ para $\boldsymbol{0\le t \le 7}$. Calcule la razón de cambio de $\boldsymbol{P(t)}$ con respecto a $\boldsymbol{t}$ para $\boldsymbol{t=2}$.

6. En tránsito del medicamento a través del organismo puede presentar cinco fases principales: liberación, absorción, distribución, metabolismo y excreción. De acuerdo a la forma de administración de éste y algunas características que determinan su influencia en el organismo, estas fases pueden o no presentarse. Para llegar a modelos que describen estos procesos se hacen simplificaciones sobre la base de análisis compartimentales, en los cuales se agrupan, por afinidad farmacocinética, las diferentes zonas anatomo - fisiológicas del organismo, a los que accede y de los que sale determinada concentración o cantidad de fármaco por unidad de tiempo. Uno de estos modelos es el que siguen los procesos activos como: la excreción tubular activa y la excreción biliar. La ecuación que representa este proceso es:

$$\boldsymbol{\frac{dC}{dt}=\frac{V_m\,C}{k_m+C}} \qquad (1)$$

donde $\boldsymbol{C}$ es la concentración en cualquier instante, $\boldsymbol{V_m}$ es la velocidad máxima del proceso (mg/h o mg/l.h) y $\boldsymbol{k_m}$ es la cantidad de fármaco por la cual la velocidad del proceso es la mitad de la velocidad máxima ($\boldsymbol{V_m/2}$).

Al resolver la ecuación diferencial (1), se obtiene:

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{V_m}\left(C_o-C+k_m\,ln\,\frac{C_o}{C}\right)}$$

considerando que $\boldsymbol{C_o}$ es la concentración inicial para $\boldsymbol{t}=0$.

Conclusiones

1. En el objeto fundamental de estudio de la matemática para las carreras universitarias interviene, de una forma u otra, la modelación matemática mediante el concepto de función, por lo que se hace necesario profundizar en el tratamiento metodológico de este tema.
2. En la asimilación del concepto de función es necesario que los estudiantes sean capaces de aplicar éste en la modelación de problemas relacionados con la profesión, teniendo en cuenta sus múltiples relaciones con otros conceptos matemáticos planteados en los programas de matemática y utilizados en la solución de problemas básicos fundamentales de la carrera.
3. La estructura del trabajo didáctico en el tratamiento del concepto de función, sugerido en este trabajo, puede servir de guía para lograr la interrelación entre los diferentes temas de la

disciplina Matemática y de ésta con otras disciplinas y como punto de partida para el diseño de tareas más complejas, que permitan valorar su efectividad en la formación matemática del egresado de la educación superior.

Referencias bibliográficas.

Ander, E. E. (1994). *Interdisciplinariedad en Educación*. Buenos Aires. Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I. Guantánamo, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Hing R. (1995). *Programa Director de la Matemática*. Evento Internacional Pedagogía'95. La Habana. Cuba.

Hitt F. (2000). *Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática*. Departamento de Matemática Educativa. México.

Jungk, W. (1989). *Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2*. Primera Parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Martínez, D. (1998). *Estudio del concepto de función real en la formación de profesores*. Tesis de maestría sin publicar, UCLV.

Ramírez G. E. (2002). *Diseño de una estrategia didáctica para la integración de la matemática en la carrera de Licenciatura en Ciencias Farmacéuticas*. Tesis de doctorado sin publicar. Santa Clara. Cuba.

Sánchez, C. (1982). *Análisis Matemático I*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Santos, N. (1998). Estrategias para la modelación matemática en las carreras de ingeniería en Cuba. *Actas Pedagógicas. Revista del Centro de Estudios de Didáctica y Pedagogía*. Año 2, Septiembre de 1998. Coruniversitaria de Ibagué. Colombia.

DESARROLLO Y FORMACIÓN DE HABILIDADES EN LA ASIGNATURA DE ESTADÍSTICA EN CONTEXTO DE UNIVERSALIZACION DE LA ENSEÑANZA

Raúl Báez Olazábal, Doris Prieto Valdés, Irma Gonzáles Jiménez, Raúl Báez Prieto
Universidad de Camaguey. (Cuba)
raul.baez@redu.edu.cu, doris.prieto@reduc.edu.cu
Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: superior
Palabras clave: universalización, habilidades

Resumen
El proceso de universalización en Cuba tiene raíces profundas, se gesta con la intención de llevar la universidad a todos, aplicando nuevas formas y métodos de enseñanza que se describen en las tendencias modernas de la educación superior, con el uso de las tecnologías más avanzadas, de manera que todos tengan derecho y acceso a una mejor educación con el objetivo supremo de lograr un mundo mejor para todos ,a partir de los resultados de investigaciones relacionadas con el diseño de diversas disciplinas y carreras referidas en la bibliografía , es que se han aplicado las consideraciones teóricas del modelo de invariante de habilidad profesional en la asignatura de Estadística, con el desarrollo y formación de habilidades en la asignatura de Estadística en contexto de universalización de la enseñanza

Desarrollo

Se le denomina *formación* de las habilidades a la etapa que comprende la adquisición consciente de los modos de actuar, cuando bajo la dirección del maestro o profesor el alumno recibe la orientación sobre la forma de aprender, es precisamente en esta etapa donde la base orientadora de la acción (BOA), fundamentada por N. Talizina ocupa un importante lugar. En este caso, según su teoría se debe resolver ¿Qué se conoce del objeto? ¿Cómo se presentan las operaciones que hay que cumplimentar? ¿Cuáles son las condiciones externas en las cuales hay que desarrollar dichas operaciones?, también se requiere precisar ¿en qué nivel de desarrollo intelectual se enmarca el alumno?
Se hace referencia al *desarrollo* de la habilidad cuando una vez adquiridos los modos de actuación se inicia el proceso de ejercitación, es decir, de uso de la habilidad recién formada, de modo que vaya haciéndose cada vez más fácil de producir o usar. La concepción psicopedagógica acerca de la formación y desarrollo de las habilidades también permite la determinación del sistema operacional para cada acción. En este caso se está identificando la acción con la habilidad Los sistemas propuestos han encontrado su aprobación y han sido perfeccionados por docentes de diferentes niveles educativos de Cuba y México. La propuesta posee posibilidades objetivas para la utilización de la metacognición en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Acciones con sus sistemas operacionales.

Describir: La descripción significa: representación, dibujo, pintura, reseña. Se describen objetivos, hechos, fenómenos, procesos, experimentos, vivencias, sentimientos

Sistema de operaciones que incluye la descripción

- Seleccionar objeto de la descripción.
- Determinar cualidades esenciales del objeto.
- Establecer las relaciones entre las cualidades o elementos esenciales.

Observar: Es la percepción consciente de la realidad. Condición indispensable para el conocimiento.

- Determinar el objeto de observación.
- Determinar el objetivo.
- Seleccionar indicadores.
- Registrar datos.
- Elaborar conclusiones.

Comparar: Permite descubrir las peculiaridades relativas a dos o más objetos, sus elementos comunes y diferentes.

Comparar: Es en cierto modo una forma de definir, pero no siempre es suficiente para lograr el conocimiento, en la enseñanza escolar la formación del pensamiento lógico comienza con el proceso de comparación.

- Determinar objeto de comparación.
- Establecer parámetros de comparación.
- Distinguir diferencias y semejanzas.
- Realizar conclusiones.
- El sistema de operaciones a esta acción es:

Determinar los rasgos de los objetos o fenómenos.
Seleccionar de estos los esenciales.
Determinar el rasgo base de la comparación.
Contraponer los objetos tomando como fundamento este rasgo o base de la comparación.

Clasificar: Significa distribución, organización de los objetos tomando en consideración su pertenencia a determinada clase, género o grupo. Agrupar apartados en categorías definibles sobre la base de sus atributos.

- Seleccionar objetos de clasificación.
- Determinar criterios de clasificación.
- Comparar los objetos a clasificar.
- Incluir los objetos o fenómenos en el grupo, clase o género correspondiente.

Argumentar: Indica la toma de posición del sujeto en diferentes situaciones, se manifiesta en dos direcciones: argumentar respuestas propias, argumentar un juicio expresado por otra persona. M. Silvestre ha reseñado que el desarrollo de la habilidad argumentar se vincula con la formación de conceptos científicos, favorece el desarrollo de los procedimientos lógicos del pensamiento, constituyendo un medio muy valioso para el desarrollo del lenguaje. (M. Silvestre

- Determinar las bases para la toma de decisiones.
- Revelar relaciones causa-efecto.
- Expresar ideas propias.
- Explicar puntos de vistas propios.

Caracterizar: Posibilita determinar los elementos esenciales de un objeto que los hacen diferente de otros. Indica lo peculiar inherente a un fenómeno u objeto.

- Analizar el objeto.
- Distinguir sus propiedades esenciales..
- Precisar relaciones entre estas partes esenciales.
- Determinar el movimiento del objeto.

Comprender la lectura: Permite interpretar lo leído en contraposición a la repetición mecánica de este acto.

- Lectura general del escrito e identificación del tema principal.

- Lectura por parte.
- Identificación de relaciones entre las partes.
- Elaborar síntesis de cada parte.
- Elaboración de síntesis de lo leído.

Comprender-retener la lectura
Crear la disposición de ánimo para el estudio.

- Leer para comprender (haciendo hincapié en las ideas importantes y difíciles).
- Recordar el contenido sin acudir al texto.
- Resumir lo leído.
- Ampliar los conocimientos auto preguntándose.

Como puede observarse la relación entre las acciones y operaciones es dinámica y cambiante. Lo que en un momento ocupa el lugar de acción en otro funciona como operación de una acción más general. Esta regularidad indica que la formación y desarrollo de habilidades requiere de un enfoque sistémico y dialéctico.

A nuestro juicio la ilustración anterior permite el uso de procedimientos afines para el tratamiento de las habilidades en el trabajo docente lo que requiere de gran precisión, cuando no se trabaja de forma consciente y dirigida por parte de los docentes y alumnos este proceso ocurre de forma espontánea con muy poca o ninguna efectividad.

Es muy importante tanto para el maestro como para el alumno ¿Para qué? se realiza una determinada actividad y qué estrategias se seguirán para la consecución del objetivo propuesto en el contexto de la didáctica de la educación superior, precisamos un tipo específico de habilidad que se forma en dicho contexto y que forman la base de la actuación del profesional, estamos hablando de las habilidades profesionales.

Destaquemos ahora el doble carácter metodológico que adquiere el *invariante de habilidad*. Por una parte la propia estructuración del invariante y su concepción constituyen una metodología para la estructuración y organización de la disciplina, así como el punto de partida para su dinámica, y por la otra constituye una metodología para formar la lógica de actuación del profesional a lo largo de la carrera. *El invariante de habilidad profesional constituye un modelo didáctico para el perfeccionamiento de la formación de habilidades y una metodología para la actuación del estudiante y del profesional, que además permite el diseño del proceso docente educativo de la disciplina, una vez que incorpora el sistema de contenidos y métodos de la misma*. Así mismo se definió que el primer nivel de habilidad como la habilidad elemental; ésta se sustenta en conocimientos elementales de esa ciencia, tecnología o arte y en que consideramos habilidades primarias, que actúan como operaciones dentro de esta habilidad elemental.

Las habilidades se van perfeccionando en dos direcciones en el proceso de aprendizaje, construyendo habilidades de mayor nivel de sistematicidad. Estas direcciones son: A través de un proceso consciente que permite cumplir acciones teóricas y prácticas de mayor complejidad, lo cual se produce en el enfrentamiento de situaciones de mayor riqueza y complejidad, lo que conduce a un perfeccionamiento de las habilidades, a partir de un proceso de ejercitación, donde enfrentan problemas de igual grado de complejidad, de manera que se automaticen las habilidades, siendo el sujeto cada vez menos consciente de sus acciones, formando un hábito o habilidad automatizada. Mediante este proceso se llega a un alto grado de perfeccionamiento en las habilidades, ante determinados objetos, sujetos y situaciones, lo que va acompañado de un proceso de abstracción y generalización que permite la formación de habilidades cualitativamente superiores dada su generalidad pues permiten al sujeto actuar ante diversas situaciones frente a objetos o en sujetos ante los que no se había actuado anteriormente y que denominamos habilidades generalizadas estas tienden a formarse por vía inductiva, de modo que el estudiante se apropie de la habilidad, y además de la habilidad para generalizarlas, lo cual conduce a un proceso desarrollador. Se requiere de un camino inductivo-deductivo en el que se desarrollen las capacidades creativas de los estudiantes para enfrentar situaciones nuevas cuando no disponen de los contenidos necesarios.

Metodología para la determinación de las Invariantes de Habilidad en Estadística

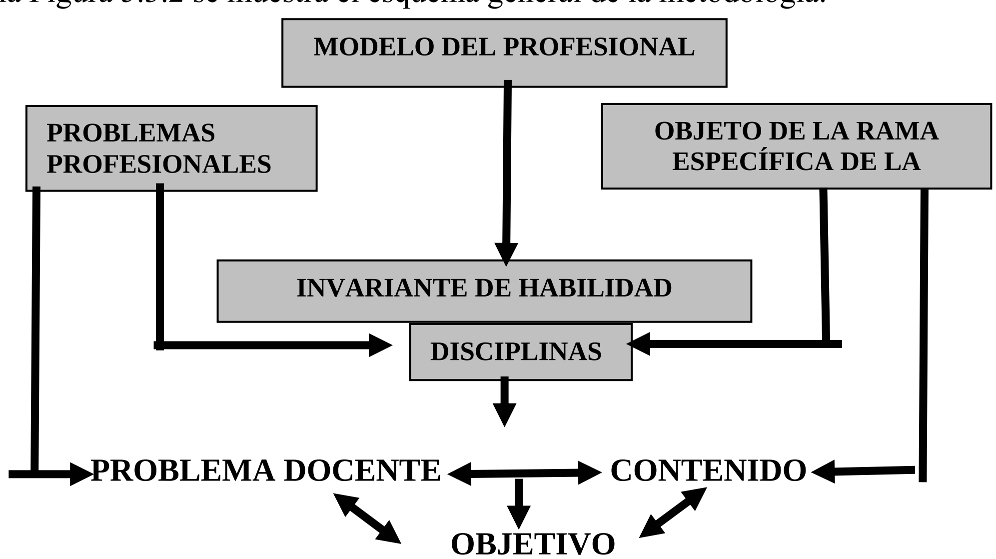
La metodología que proponemos ha sido elaborada a partir de los resultados de investigaciones relacionadas con el diseño de diversas disciplinas y carreras referidas en la bibliografía y en las que se han aplicado las consideraciones teóricas del modelo de invariante de habilidad profesional.

El punto de partida de la metodología es el *modelo del profesional*, cuya definición se establece en el modelo curricular de los procesos conscientes desarrollado por C. Álvarez (1989:111). "El Modelo del Profesional, es el sistema de objetivos generales educativos e instructivos. Estos últimos se deben formular en términos de las habilidades, de las tareas que desarrollará de manera inmediata el egresado, para resolver los problemas a que se enfrentará, mientras que en los objetivos educativos deben concretar en la carrera los objetivos generales definidos para cualquier egresado de la Educación Superior, según los objetivos propios de dicha carrera

Para la elaboración de la invariante de habilidad, se considera la relación entre: *los problemas docentes de la disciplina,* derivados de los problemas profesionales; *los objetivos y los contenidos de la disciplina,* determinados previamente en una primera aproximación. En la determinación de la invariante, se tienen en consideración las dimensiones gnoseológica, profesional y metodológica del contenido implícito en él.

Los problemas docentes que ha de enfrentar el estudiante como parte del contenido de la disciplina, se concretan en un listado de tareas representativas del contenido de la disciplina, pero vinculadas con la profesión. Si comprendemos la tarea como la actividad en las condiciones concretas de su realización, estamos hablando de habilidades y operaciones que deben ser apropiadas por parte del estudiante en el proceso de aprendizaje.

En la Figura 5.3.2 se muestra el esquema general de la metodología.



N. F. Talízina señala: "Podemos hablar sobre los conocimientos de los alumnos en la medida en que sean capaces de realizar determinadas acciones con estos conocimientos. Esto es correcto ya que los conocimientos siempre existen unidos estrechamente a una u otras acciones (habilidades).

Este sistema de habilidades además de desarrollarse en toda la asignatura conforma la de la unidad de Estadística , agregándosele.

Tema 1 - Probabilidades .Se pueden tener en cuenta

➤ Calcular	1. Identificar el tipo de cálculo a realizar. Propiedades. 2. Seleccionar las reglas de cálculo necesarias. 3. Efectuar los cálculos.
➤ Evaluar	1. Identificar el tipo de expresión. 2. Seleccionar y utilizar los medios necesarios (tablas, algoritmos, etc). 3. Calcular.
.	1. Simplificar si es necesario. 2. Reconocer el tipo de ecuación. 3. Seleccionar el procedimiento de resolución. 4. Calcular 5. Comprobar las ecuaciones.
➤ Relacionar gráficos y propiedades	1. Identificar la relación entre el gráfico y la propiedad. 2. Reconocer el comportamiento en el gráfico(en este grado) 3. Concluir sobre las propiedades a utilizar.

Tema 2 - Distribuciones de frecuencias.

➤ Calcular	Identificar el tipo de cálculo a realizar Medidas de tendencia central y dispersión. Propiedades. Seleccionar las reglas de cálculo necesarias. Efectuar los cálculos.
➤ Evaluar	Identificar el tipo de expresión. Seleccionar y utilizar los medios necesarios (tablas, algoritmos, etc). Calcular.
Procesar información	A través de de un software estadística realizar análisis de datos.
➤ Relacionar gráficos y propiedades	Identificar la relación entre el gráfico y la propiedad. Reconocer el comportamiento en el gráfico(en este grado) Interpretar.

Tema 3. Tratamiento metodológico del tema de Estimación y Prueba de Hipótesis., algunas ideas sobre los ejercicios de demostración o fundamentación. La resolución de problemas Objetivo específico del tema: Que los cursistas sean capaces de: Dominar la esencia de las dócimas de hipótesis y su importancia para desarrollar en los estudiantes habilidades para el razonamiento y la comunicación de su pensamiento en la resolución de problemas

Tema de Estimación y Prueba de Hipótesis.

Argumentar o fundamentar	▪ Seleccionar las reglas lógicas que sirven de base al razonamiento
Modelar	▪ Representar problemas a través de relaciones matemáticas ▪ como son las ecuaciones , sistemas, distribuciones. .
Comparar	▪ Determinar los rasgos de los objetos o fenómenos. ▪ Seleccionar de estos los esenciales. ▪ Determinar el rasgo base de la comparación. ▪ Contraponer los objetos tomando como fundamento este rasgo base de la comparación.
➤ Calcular	▪ Identificar el tipo de cálculo a realizar. ▪ Seleccionar las reglas de cálculo necesarias. ▪ Efectuar los cálculos. Uso d tablas
➤ Evaluar	▪ Identificar el tipo de expresión. ▪ Seleccionar y utilizar los medios necesarios (tablas, algoritmos, etc). ▪ Calcular.
➤ Relacionar gráficos y propiedades	4. Identificar la relación entre el gráfico y la propiedad. 5. Reconocer el comportamiento en el gráfico(en este grado) 6. Concluir sobre la propiedad.
➢ *Interpretar*;	7. Poder llegar a tomas de decisiones y conclusiones

Recomendaciones. En este trabajo es imprescindible la determinación del banco de problemas de la carrera, de las habilidades profesionales y valores a formar, el análisis de los objetivos de la asignatura y su relación con otras disciplinas.

Referencias bibliográficas

Castro Ruz F. (1994). *Conclusiones del claustro extraordinario de profesores del ISCM–H.* La Habana, www.monografias.com/trabajo15/*documentos-cuba.stml.*

Discurso de clausura del VIII Congreso de la UJC. 2004. Disponible en: http://granma.co.cu2004/12/06/nacional/articulo07.html

Ministerio de Educación Superior. Cuba. (2001). *La Universidad en la batalla de ideas.* Proyectos aprobados. VI Taller Nacional de Trabajo Político- ideológico. La Habana.

Ministerio de Educación Superior. Cuba. (2004). *El nuevo modelo de Universidad cubana* (Una respuesta más integral a los retos actuales de nuestra sociedad y del desarrollo de la ciencia y la tecnología) Reyes JI, Quiñones A. (2005). *La formación docente en las condiciones de la universalizacion en Cuba* www.monografias.com/trabajo15/documentos-cuba.stml.

Ministerio de Educación Superior. Cuba. (2005). La universalización. Disponible en: www.islagrande.cu.

Peña Sánchez de Rivera, D. (2005). *Estadística*. ***Modelos y*** *Métodos 1. Fundamentos.* Madrid: Alianza.

Ruiz, J. M. (2000). Enseñanza por problemas en Matemática en las carreras de Ciencias Técnicas. *Revista Enseñanza de la Matemática*. 9(2):36-39.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL USO DE TÉCNICAS ESTADÍSTICAS EN EL CONTEXTO DE LA CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

Raúl Báez Olazábal, Doris Prieto Valdés, Raul Báez Prieto, Edry García Cisneros
Universidad de Camaguey. (Cuba)
raul.baez@reduc.edu.cu, doris.prieto@reduc.edu.cu

Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística, modelación matemática. Nivel: superior
Palabras clave: problemas, modelación matemática

Resumen

El objetivo fundamental de la matemática es servir de instrumentos de modelación a diferentes situaciones que se presentan en otras disciplinas de la carrera o en el ejercicio profesional de sus graduados. Las heurísticas, las habilidades, la meta-cognición y las creencias todas ellas importantes. De los elementos de la estrategia didáctica que de ahí emerge se tienen los modelos matemáticos que es un concepto que debe dominar el egresado durante su vida profesional. G.Polya planteó.“¿Qué significa dominar las matemáticas? Significa poder resolver problemas, y no solo problemas tipos, sino también problemas que exigen pensamiento independiente, sentido común, originalidad, inventiva. “La atención se ha centrado en el proceso implicado en la resolución de problemas Se muestra un ejemplo de los resultados obtenidos de un estudio realizado entre el Departamento de Matemática y la facultad de Mecánica de la Universidad de Camagüey (Cuba).

La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. El objetivo fundamental de la matemática es servir de instrumentos de modelación a diferentes situaciones que se presentan en otras disciplinas de la carrera o en el ejercicio profesional de sus graduados Camarena.P.1995 G. Polya planteó. “¿Qué significa dominar las matemáticas. Significa poder resolver problemas, y no solo problemas tipos, sino también problemas que exigen pensamiento independiente, sentido común, originalidad, inventiva. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas“La atención se ha centrado en el proceso implicado en la resolución de problemas, se muestra un ejemplo de los resultados obtenidos de un estudio realizado entre el Departamento de Matemática y la facultad de Mecánica de la Universidad de Camagüey (Cuba).

La capacidad para, el álgebra, la estadística, la representación gráfica, la modelización, y por supuesto mucho más la de los ordenadores actuales, potencian claramente las posibilidades de la matemática elemental para las aplicaciones realistas que hasta ahora estaban vedadas en nuestros cursos por el exceso de tedioso cálculo simbólico y numérico que habría que efectuar a mano. La resolución de problemas contribuye al desarrollo intelectual que constituye en la actualidad una de las más importantes exigencias que la sociedad plantea a la escuela y al sistema educativo en general necesario para la asimilación de conocimientos por parte del estudiante y se presupone que el docente reconozca los niveles por el cual transcurre el pensamiento. La teoría de resolución de problemas incluye 4 elementos teóricos Las heurísticas, las habilidades, la meta-cognición y las creencias todas ellas importantes. De los elementos de la estrategia didáctica que de ahí emerge se tienen los modelos matemáticos que es un concepto que debe dominar el egresado durante su vida profesional

En la enseñanza de la Matemática la habilidad resolver problemas es considerada como un proceso que debe transcurrir por las etapas de orientación, ejecución y control. En tal sentido G. Polya considera cuatro etapas en la solución de los mismos:

- Comprensión del problema.

- Concebir un plan.
- Ejecución del plan.
- Visión retrospectiva.

.La atención se ha centrado en el proceso implicado en la resolución de problemas estadísticos (Chervany y otros, 1977; Stroup, 1984) y en la necesidad de fundamentar los cursos de estadística en la resolución de problemas (Garfield, 1981; Kempthorne, 1980). La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora y el ordenador actuales está comenzando a influir fuertemente en los intentos por orientar nuestra educación de datos reales, introduciendo los conceptos estadísticos conforme se van necesitando.
El matemático alemán Werner Jungk en las Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática se refiere a cuatro etapas:

- Orientación hacia el problema
- Trabajo en el problema.
- Solución del problema.
- Consideraciones retrospectivas y perspectivas.

Por su parte Ballester, Sergio y otros (1994), coincide con las tres primeras etapas reflejadas anteriormente, considerando la última como "'Evaluación de la solución y de la vía''. Alberto Labarrere Sarduy, hace también consideraciones similares dirigidas a la solución de problemas matemáticos en los escolares, puntualizando que en muchos casos, el maestro realiza en lugar del alumno el análisis del problema ejecutando las acciones mentales por lo que le entrega al alumno el producto terminado y la actividad de este último se circunscribe a la realización de las operaciones finales. ("Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas, p.25). Sobre esta base la actividad de aprendizaje del estudiante se caracteriza por insuficientes acciones de orientación hacia la actividad y el análisis limitado y superficial de las condiciones dadas.
El éxito del proceso de enseñanza- aprendizaje depende, en gran medida, de la calidad de la actividad mental lograda en el alumno y por ende de las diferentes acciones que va desarrollando en su actividad sistemática, sin embargo la práctica escolar ha demostrado que las orientaciones que tiene el docente para enfrentar el trabajo metodológico no precisa las acciones a realizar por parte del estudiante en su actividad de aprendizaje y si como debe transcurrir la actividad docente, lo que trae como consecuencia una ruptura de carácter psicológico, pedagógico y metodológico entre el acto de enseñar y el acto de aprender.
De lo anteriormente planteado se infiere la necesidad del vínculo entre los fundamentos psicológicos y didáctico-metodológicos asociados al trabajo con la habilidad *"Resolver Problemas",* expresado en la siguiente tabla.

Fundamento psicológico	**Fundamento didáctico-metodológico**	
Fases según la Teoría de Galperin	Programa Heurístico General	Intención didáctica
1. Fase de motivación y orientación	Orientación hacia el problema	-Búsqueda del problema o motivación. -Planteamiento del problema. -Comprensión del problema.
2. Fase de realización	-Trabajo en el problema. Solución del problema.	-Precisión del problema. -Análisis del problema. -Búsqueda de la idea de la solución.

		-Realización del plan de solución. -Representación de la solución.
3. Fase de control	Evaluación de la solución y de la vía.	-Comprobación del problema. -Consideraciones retrospectivas y perspectivas.

Evaluación de la vía y de la solución: El alumno debe comprobar la solución en el modelo matemático, en el enunciado del problema y con la práctica; se realiza las consideraciones retrospectivas y perspectivas referentes a la utilidad de los métodos aplicados y a las consecuencias que se derivan de la solución con respecto al planteamiento de nuevos problemas.

En esta ponencia se presenta un ejemplo de cómo se lleva a cabo vinculación de la Matemática y la Estadística en la carrera de Ingeniería Mecánica Este contribuye a una mejor interpretación del conocimiento estadístico matemático por parte de los estudiantes de segundo año de ingeniería Mecánica. Estudio Estadístico de los Índices de productividad de cosechadoras y medios de transporte. Este trabajo se basa en la Determinación de la dependencia funcional .Específicamente de: 1.W1 vs Q, 2. Wt vs Q, 3.W07 vs Q. Q (cantidad de arroz cosechado), W1 (productividad por hora de tiempo limpio de trabajo), Wt (productividad por hora de turno sin fallos) y W07 (productividad por hora de tiempo de explotación Este contribuye a una mejor interpretación del conocimiento estadístico matemático por parte de los estudiantes de segundo año de ingeniería Mecánica.).Se utilizó el programa de computación S.P.S.S. 8.0 sobre Windows, ya que el mismo constituye una herramienta de avanzada que facilita el cálculo estadístico de cualquier información. El mismo nos permite trabajar con una base de datos amplia y de comprobar mediante el método de la regresión, y de explicar acorde a los resultados obtenidos de los coeficientes estadísticos explicados anteriormente, la dependencia funcional de los índices técnicos que estamos evaluando; además de observar gráficamente la variación que realiza la curva obtenida en comparación con las ajustadas. Para ello consideramos una serie de elementos provenientes de la Estadística Matemática entre los que destacamos: a) Ajuste de curvas. b) Coeficiente de correlación. c) Coeficiente de determinación. d). Prueba de significación.

Metodología de trabajo

La utilización de coeficientes de correlación para analizar la relación lineal entre las variables.

El reconocimiento de que el mundo en que vivimos nos presenta muchas situaciones que nos llevan a la necesidad de hacer ajustes a curvas.

La obtención de los modelos matemáticos, a partir de su ecuación general.

Metodología para el uso del programa SPSS. 1.Entrada de datos: para introducir los datos en la computadora, primeramente se definen las variables a analizar y luego se especifican los lugares decimales con los cuales se trabajarán. En este caso se definieron como variables: Q (cantidad de arroz cosechado), W1 (productividad por hora de tiempo limpio de trabajo), Wt (productividad por hora de turno sin fallos) y W07 (productividad por hora de tiempo de explotación), y se fijaron 2 lugares decimales que satisfacen los requerimientos de cálculos.

2. Análisis estadístico. Para el análisis estadístico de este conjunto de datos se especifican en cada caso las variables dependientes y las independientes, así como los tipos de curvas de aproximación que se van a ajustar, este ajuste se realiza mediante el método de los mínimos cuadrados ya explicados con anterioridad. Las variables dependientes son en este caso:1.W1 2.Wt 3.W07. La variable independiente es: 1.Q

Los tipos de curvas de aproximación son los siguientes:1.Lineal 2.Cuadrática 3.Cúbica 4.Logarítmica 5.Exponencial 6.Potencial.

Análisis de los resultados.

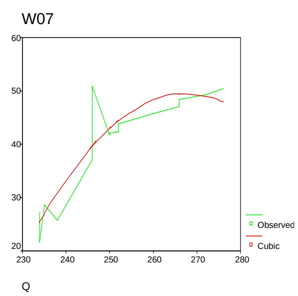
Con el procesamiento estadístico de los datos en el programa S.P.S.S 8.0 sobre Windows se obtienen un conjunto de resultados de coeficientes que nos permiten evaluar la dependencia funcional de los parámetros analizados.

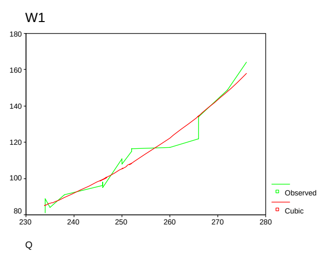
Para mayor facilidad del análisis de estos valores se realiza para cada U.B.P.C por separado.

Granja "Jesús Suárez Gayol".

Para analizar la relación W1=f(Q) se observan el valor que toma el coeficiente de determinación (R2), del cual podemos decir que es muy bueno (R2> 0,90) y del valor de significancia =0, lo que indica que el valor de la variable independiente (Q) predice totalmente el que pueda tomar la variable dependiente (W1).

Como modelo representativo escogemos la curva de mejor ajuste, la cual será la cúbica por tener mayor valor de R2 (R2=0,927), lo que demuestra que un 92,7% del valor de Q influye en el resultado que tendrá la productividad (W1). En el gráfico se puede apreciar que la pendiente es positiva, por tanto, a medida que el arroz cosechado aumenta también lo hace la productividad por hora de tiempo limpio de trabajo, la inestabilidad de esta curva es producto de la influencia que realiza la variación del tiempo en que la cosechadora esta produciendo.





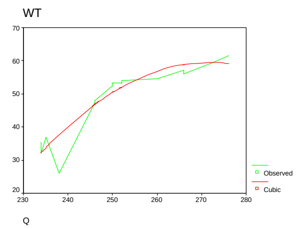
La ecuación de esta dependencia funcional y su gráfico son los siguientes:

W1=227,822 + 0,0120*Q + 4,0*Q3 W07= - 1493,8 + 11,5455*Q - 0,0216*Q3

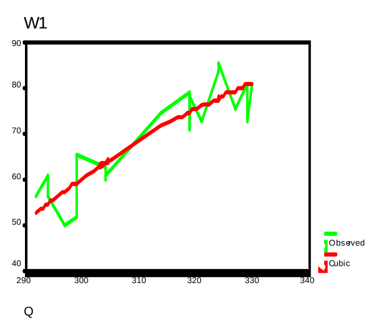
En la dependencia de W07=f(Q) se observa que los valores de R2 no son tan elevados como el anterior, pero si denotan buen ajuste, ademįs de ser igual a cero su significancia.

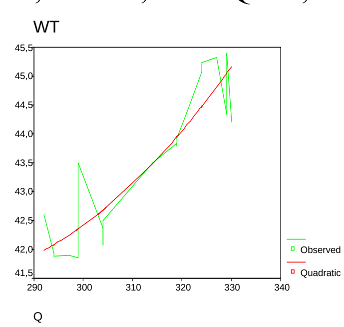
La curva mejor ajustada es la cúbica con un valor de R2=0,826, es decir, que un 82,6 % del valor de Q influye en W07, su inestabilidad (ver gráfico) indica que no solamente este índice de productividad depende de Q, sino que varios factores inciden en el valor de W07 los cuales pueden ser: el tiempo auxiliar, es aquel en que la cosechadora realiza los procesos de viraje, el tiempo de mantenimiento que se le hace a la máquina antes de comenzar a cosechar, el tiempo que se pueda perder a causa de cualquier posible fallo que ocurra, ya sea, de tipo técnico (rotura de algún órgano de trabajo) ó tecnológico (atoro en los órganos debido a la maleza en el campo y a la humedad del suelo), el tiempo que pierde el operario realizando sus necesidades personales y el tiempo en que la combinada se traslada en vacío a otro campo o cuando realiza la descarga. La pendiente positiva de la curva denota el aumento relativo de los valores, es decir que estįn correlacionados positivamente. La ecuación que representa el mejor ajuste y su variación curvilínea se pueden ver a continuación: W07= - 1493,8 + 11,5455*Q - 0,0216*Q3

De la función W t= f(Q), observando los valores de R2 comprobamos que las curvas que mejor se ajustan son la cuadrática y la cúbica con un valor de R2 =0,877 y con una significancia de 0. De estas escogemos la cúbica como representativa de la relación, de R2 se deduce que un 87,7 % del valor de arroz cosechado influye en el resultado final del ķndice de productividad por hora de tiempo sin fallo. El valor positivo de la pendiente demuestra que a medida que aumenta Q aumenta Wt, y su inestabilidad en la curva de que no solo influye la cantidad de arroz cosechado en su productividad, sino que existen otros factores La ecuación que identifica la curva cúbica y la variación de su gráfico son: Wt = - 1353,9 + 10,4041*Q - 0,0191*Q3



U.B.P.C "Armando Diéguez Pupo".
En la dependencia funcional de W1 = f(Q) los valores de R2 son > 0,807 , con una significancia igual a 0. La curva que mejor se ajusta es la cúbica con un R2 = 0,807, esto significa que un 80,7 % del valor de Q incide en el de W1, y su pendiente positiva indica que a medida que aumenta el arroz cosechado también lo hace la productividad por hora de tiempo limpio de trabajo (W1), influyendo en ello el tiempo en que la mįquina permanece en explotación. La ecuación de la curva cuadrática y su gráfico se ven a continuación:
W1 = -560,49 + 2,6688*Q – 7*10-6*Q3
Para la relación de la función W07 = f(Q), los valores de R2 no son buenos, aunque todas las curvas son significativas (sig =0). De las curvas la de mejor ajuste es la cuadrática con un R2 = 0,779, lo que expresa un 77,9 % del valor de Q que influye en W07, con una pendiente positiva (ver gráfico) que demuestra una correlación positiva de los parámetros de arroz cosechado y la productividad por hora de tiempo de explotación. La curva de los datos experimentales presenta inestabilidades en su pendiente.
W07 = 98,7490 + 0,696*Q + 0,0016*Q2 Wt = 111,364 + 0,5220*Q + 0,001*Q





La ecuación de la curva que da sus características funcionales y su gráfico representativo sería: Las curvas ajustadas de Wt = f(Q) presentan valores de R2>0,80, por lo que son aceptables los ajustes, además de tener significancia igual a 0. La mejor curva ajustada es la cuadrática con un R2 =0,820, lo que indica un 82 % de influencia de Q en la productividad (Wt), su pendiente al ser positiva demuestra una dependencia funcional creciente entre ambos parįmetros. La ecuación de la curva y su variación gráfica se pueden ver a continuación: Wt = 111,364 + 0,5220*Q + 0,001*Q2
Este trabajo posibilita.1-Que se pueda medir la eficiencia. 2-Permiten tomar decisiones en cuanto a alternativas en los procesos de producción.3-Perfeccionar la aplicación de los métodos matemáticos y técnicas estadísticas en el desarrollo de trabajos científicos estudiantiles y trabajos de diploma.

Sin lugar a dudas la relación reflejada anteriormente y el carácter heurístico del proceso de solución de problemas permite al estudiante adoptar una posición activa en el aprendizaje, esto supone insertarse en la elaboración de la información, en su remodelación, planteándose interrogantes, diferentes vías de solución, argumentando sus puntos de vistas, etc. La utilización de procedimientos heurísticos conduce, por parte del alumno, a la producción de nuevos conocimientos, asegura los niveles de autorregulación con lo cual se eleva su nivel de conciencia, el control valorativo de sus propias acciones de aprendizaje, garantizando un desempeño activo y reflexivo y por consiguiente la asimilación de conocimientos, desarrollo de hábitos y habilidades, así como la formación de valores.

Recomendaciones

Crear un banco de problemas relacionados con temáticas de la especialidad que requieran de la aplicación de los métodos matemáticos y técnicas estadísticas.

Referencias bibliográficas

Ballester.Sergio y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática.* Tomo I. La Habana. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Camarena, P. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de las ingenierías.* XXVIII 2000. Clasificación de los modelos matemáticos en la Ingeniería Taller de enseñanza de las Matemática para Ingeniería y Arquitectura.

Chervany y otros. (1977). *Dificultades en el aprendizaje de conceptos básicos de resolución de problemas estadísticos...*

De Guzmán., M. (1996). El papel del matemático en la Educación Matemática. Conferencia Plenaria ICME-8. Sevilla. *Actas del 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática* (p. 47-63).

Galperin. P. Y. (nf). *La Teoría de la Actividad.* A. N. Leontiev. ... Departamento de Psicología y Pedagogía. CEPES. Universidad de la Habana.

Galperin.Y. (1993). www.upsp.edu.pe/descargas/Docentes/Antonio/revista/02/2/189402206.pdf

Garfield.Joan, Ahlgren Andrew (1981).*Dificultades en el aprendizaje de conceptos básicos de probabilidad y estadística. Implicaciones para la Investigación*. Universidad de Minnesota Traducción de Enrique Salazar. 1995 Universidad de Almería. España

Ortiz A. (nf). S*istema de objetivos y contenidos de la disciplina proyecto de Ingeniería Mecánica.* Tesis de Maestría en Ciencias de la Educación.

Kempthorne,(1980). ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/.

Labarrere Sarduy, A.F. (1987). B*ases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Stroup,(1984). La necesidad de fundamentar los cursos de estadística en la resolución de problemas.

Werner Jungk. (1989). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2* (Primera Parte). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

LA HABILIDAD PROCESAR DATOS. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS PARA SU DESARROLLO EN EL NOVENO GRADO DE LA SECUNDARIA BÁSICA

Ricardo Sánchez Casanova, Olga Lidia Pérez González, Fermín Hurtado Curbelo
Instituto Superior Pedagógico "José Martí " (Cuba)
rsanchez@cmw.rimed.cu, rsanchezcasanova@yahoo.es
Campo de investigación: capacitación para el trabajo en la Secundaria Básica Cubana
Palabras clave: tareas docentes, sistematizar, operaciones

Resumen
La escuela media cubana está comprometida en la formación de los estudiantes de nivel medio que en las actuales condiciones económicas y sociales exige nuestra sociedad.
A partir de la definición de los Objetivos Formativos Generales y por grados para el nivel de Secundaria Básica se fundamenta el papel de la matemática como asignatura priorizada, y por otra parte dentro de las transformaciones en el enfoque metodológico general de la asignatura aparece, la incorporación de habilidades matemáticas que amplían los procedimientos lógicos para el planteamiento y solución de los problemas prácticos, el trabajo que se presenta constituye un primer acercamiento a la caracterización y proyección metodológica de la habilidad procesar datos sobre todo a partir de la estructura de las operaciones fundamentales que la definen así como una propuesta de tareas docentes que insertados en un proceder metodológico que se explicita , constituyen los principales aportes en un orden práctico del trabajo que se presenta .

Introducción

La época actual, llamada de la revolución científico- técnica, necesita de hombres capaces de consultar un gran volumen de información en poco tiempo y utilizar este caudal de conocimientos en la solución adecuada de los problemas que se plantean de forma creadora, la creatividad del hombre está a prueba cada día cuando debe enfrentar disímiles problemas sociales, científicos- técnicos, económicos, ideológicos, entre otros.
Es por eso que el sistema educativo cubano se encuentra hoy inmerso en profundas transformaciones, desde la Enseñanza Primaria hasta la Universidad, se producen cambios radicales en su modelo educativo, **"(…)** *partiendo de ideas y conceptos enteramente nuevos (...)*" (Castro, F. 2002(P.5-6)) para el logro de una cultura general integral, lo que demuestra la constante preocupación por resolver los problemas en el aprendizaje.
A partir de lo expuesto anteriormente es la escuela Secundaria Básica Cubana la que tiene como fin: **"***La formación integral básica del adolescente cubano, que promueve una cultura general e integral, que le permite estar plenamente identificado con su nacionalidad, conocer y entender su pasado, enfrentar su vida presente y su preparación futura, adoptando conscientemente una opción de vida socialista, que garantice la defensa de las conquistas sociales alcanzadas y la continuidad de la obra de la Revolución, expresado en sus formas de sentir, de pensar y de actuar*"[*****].

Es por ello que una de las tendencias en la modernización de la clase en la actualidad lo constituye la utilización de los más variados *recursos didácticos* que vinculen y preparen al alumno desde y para la vida lo que contribuye, además, a resolver las contradicciones entre el *volumen siempre creciente de información* que se debe transmitir y el constante tiempo escolar para la educación en los individuos.

[*****] Proyecto de escuela secundaria básica. versión 06. República de Cuba. Ministerio de Educación. / 24 de febrero del 2003.Página 4

En este contexto se insertan de forma experimental, a partir del curso1999-2000, *transformaciones* educativas en el escenario de las Secundarias Básicas en Cuba, enmarcadas *en un proceso formativo que perfecciona el sistema de objetivos, el sistema de conocimientos y los resultados que se deben alcanza***r**[†††††].
Tales transformaciones determinan modificaciones en la forma de enseñar, en los procedimientos que pueden utilizar los estudiantes para aprender, en los contenidos que se estudian, en las habilidades que se deben desarrollar y por ende en los aspectos formativos que se pretenden lograr en los escolares.
En particular, la enseñanza de la Matemática en la Secundaria Básica Cubana constituye una prioridad que presupone: **(...)***la resolución de problemas en el que se presenten situaciones de carácter político- ideológico, científico-ambiental relacionados con el entorno natural y social en que se desarrolla el alumno, el país y el mundo a partir de la recopilación y análisis de la información* (...)[‡‡‡‡‡]**.**
Esto significa que la actividad docente se debe desarrollar a partir de *problemas extraídos de situaciones prácticas* y que en el contexto cubano no pueden ser de otro tipo que los referidos anteriormente y donde el alumno debe jugar un papel protagónico.
Dentro de las *habilidades que se incorpora***n** al proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, ocupa un lugar importante la de *procesar datos cuantitativos*, estas constituyen sin dudas un *eslabón fundamental en el proceso formativo* de los escolares, donde se pretende *sistematizar acciones y operaciones* que constituyan un valioso medio para la transmisión y procesamiento interactivo de la información

Desarrollo

Como parte del momento exploratorio de la investigación durante los cursos escolares comprendidos entre 99-2003, *sobre el estudio de la habilidad de procesar datos en la escuela media*[§§§§§], que incluyó; análisis de resultados de diagnósticos, exámenes de ingreso al Instituto Pre-Vocacional de Ciencias Exactas (IPVCE) y resultados de controles a clases, se destacaron, entre otras, las siguientes situaciones:

- Los alumnos demuestran poca solidez en los conocimientos por lo que no logran su reproducción total o parcial de recopilar y organizar a partir de problemas vinculados con la vida;
- Aunque algunos alumnos son capaces de reproducir los conceptos y teoremas son limitadas sus posibilidades para aplicarlos al procesamiento de datos vinculados con la práctica.

Los autores de esta investigación manifiesta que las *habilidades* para *recopilar, procesar y analizar información* de diferentes fuentes manuales y automatizadas y su aplicación a la

[†††††] Precisiones para la dirección del proceso docente-educativo. Secundaria Básica. Curso Escolar 1999-2000”. (Folleto). Ciudad del a Habana. Página 5
[‡‡‡‡‡] -----: Programa de Matemática para las Secundarias Básicas seleccionadas. Curso Escolar 2002-2003”. (Folleto). Ciudad de la Habana. Página 8
[§§§§§] Ver: Álvarez, Díaz Anara, Casanova, Sánchez Ricardo y Hurtado, Curbelo Fermín. La habilidad procesar datos. Consideraciones metodológicas para su desarrollo en la Secundaria Básica. Camaguey, 2002 <<inédito>><<y>> Hurtado, Curbelo, Fermín. La habilidad procesar datos en la secundaria Básica .Propuesta metodológica. Trabajo presentado en el evento Internacional Enseñanza de las Ciencias, Universidad de Camaguey, 2002. En lo adelante se consignarán otros datos tomados de la caracterización que aquí aparece.

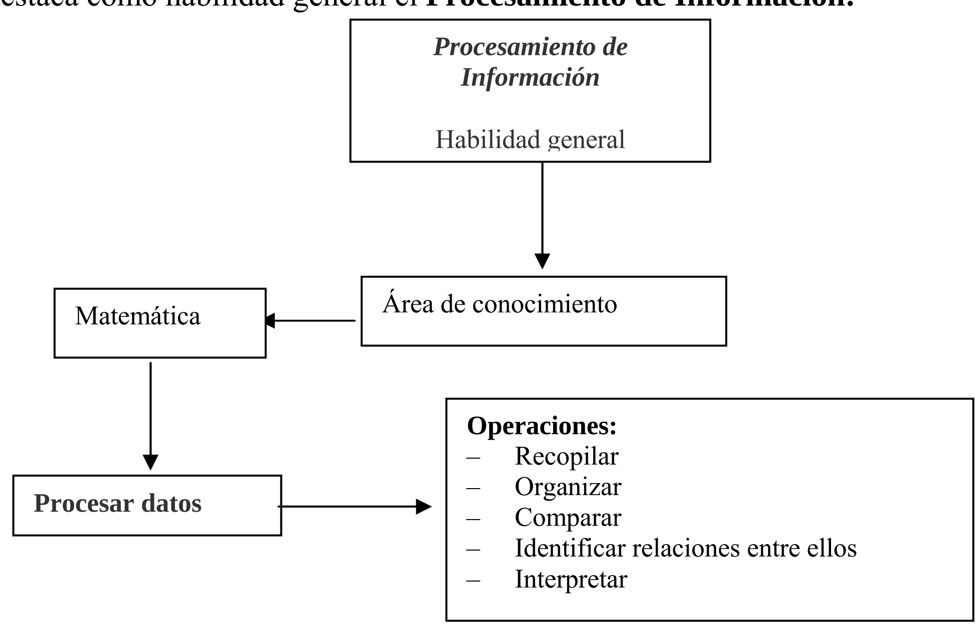
formulación y resolución de problemas son insuficientes. La comprensión de la estructura de *la habilidad procesar datos como sistema didáctico* dentro de la matemática escolar por parte de los docentes tiene *dificultades*, lo que no favorece la preparación de los alumnos para sistematizar acciones relativas al desarrollo de la habilidad objeto de estudio, su necesario *vínculo con cada complejo de materias* y su aplicación práctica a la *resolución de problemas*, habilidad que se reconoce en diferentes tendencias actuales como un elemento principal a tener en cuenta desde el diseño de la matemática en la escuela media.
Las reflexiones anteriores han servido de base para revelar la necesidad de recurrir a *fundamentos teóricos y didácticos* que posibiliten por una parte la estructuración del procesamiento de datos que posibilite el vínculo de los complejos de materias del contenido matemático con la vida, y la implementación didáctica de su tratamiento como habilidad independiente en la Matemática de la Secundaria Básica.

Problema de la Investigación

Las dificultades que tienen los alumnos de noveno grado para procesar datos a partir de problemas prácticos de carácter político ideológico, económico, social y científico ambiental en la solución de problemas y tareas docentes.
Los autores de esta investigación asumen en el trabajo el concepto de Procesar datos cuantitativos asumido por Curbelo Hurtado F, Tesis Doctoral, (2005) P. 51 en el que expresa:

Procesamiento de datos cuantitativos:

Sistema de acciones y operaciones, en el cual intervienen informaciones (magnitudes) referidas a una problemática objeto de estudio y que permite a partir de la obtención y proceso de las mismas establecer inferencias.
La habilidad procesar datos y sus **operaciones fundamentales** a través del siguiente esquema donde se destaca como habilidad general el **Procesamiento de Información:**



*La significación práctic***a** del presente trabajo está dada por el hecho de que se ofrece una *propuesta didáctica* que establece exigencias didácticas para el desarrollo en los escolares del procesamiento de datos cuantitativos como habilidad Matemática en la Secundaria Básica.
Sistema de *tareas docentes* para desarrollar el sistema operacional de la habilidad de procesar datos cuantitativos en el noveno grado:

1- El trabajo interdisciplinario con las diferentes asignaturas

Geografía:
En la unidad # 1 Cuba y sus provincias se pueden trabajar en la temática 1. 3 Estudio de la localidad se puede proponer el siguiente ejercicio:
Busca en tu consultorio médico lo relacionado con: la cantidad de embarazadas menores de 18 años, cantidad de mujeres mayores de 18 años, cantidad de niños menores de 1año, cantidad de niños menores de 1año vacunados, el peso de tu familia en kilogramos y el total de atendidos.
2- Ejercicios para desarrollar la operación de interpretar datos
Busca en el periódico Granma con fecha 14 de septiembre de 1999 (páginas 4-5), la tabla relativa a la cantidad de países que votaron a favor de poner fin al bloqueo impuesto por Estados Unidos contra Cuba entre los años 1992 y 1998, luego responde:
a) Construye un gráfico de barras donde ilustres la situación anterior.
b) Compara la cantidad de países que votaron a favor en lo años 1992 y 1998.
c) A cuánto asciende la diferencia entre la cantidad de votos en los años 1992 y 1998. Interpreta los datos relativos a la tabla y expresa a partir de aquí tus conclusiones.
3- El uso de las nuevas tecnologías de la información en el desarrollo de la habilidad
A continuación se presenta una guía para una actividad docente a resolver por los alumnos en una clase con *Software Educativo vinculada al procesamiento de datos***:**
Título de la tarea: Identifica la tarea específica.
Objetivo: Se plantea el propósito central de la tarea.
Introducción: Se contextualiza la tarea.
Guía: Se amplía la información necesaria para explicitar la tarea docente.
Proceso: Se plantean las fases o subprocesos necesarios.
Recursos: Se especifican los medios informáticos necesarios.
Conclusiones: Los alumnos tienen que arribar a conclusiones.
Evaluación: Se plantea el criterio que se seguirá.

4- Tarea Suficiente donde se combina todas las operaciones de la habilidad
Desde el triunfo de nuestra revolución a sido política de nuestro estado colaborar de una forma desinteresada con naciones, fundamentalmente del tercer mundo, en el campo de la salud. En el año 2000 laboraron 4359 cooperantes entre técnicos, profesionales y especialistas en 90 países de 4 continentes. Si en América Latina laboraron 2685, en África 1390, en Europa 248 y en Asia 36 colaboradores, contesta:
a) Calcula el tanto por ciento de cada cantidad de participantes por países con relación al total.
b) Construye un gráfico de pastel donde ilustres la cantidad de participantes por países.
c) Compara como es la cantidad de participantes entre: América Latina y Europa; África y

Asia.

d) ¿Por qué crees tú que esta respuesta se centra entre América Latina y África?

Conclusiones

Como resultado del proceso investigativo realizado concluimos que:

La habilidad procesamiento de datos se revela como un proceso cognoscitivo importante dentro de las transformaciones que se operan en la Secundaria Básica Cubana y que sin dudas aporta *procedimientos básicos* en el *aspecto formativo* de tales transformaciones.

Los principales aportes introducidos en la estructuración de la habilidad objeto de estudio en las unidades # 1, 2 y 3 de noveno grado y las vías propuestas *fortalecen la base orientadora* con la definición del modo de actuar esperado del alumno que se expresa a partir de la habilidad para resolver problemas matemáticos, lo que contribuirá al logro de mejores resultados en la *formación integra***l** de los alumnos, en tal sentido los resultados obtenidos en la práctica corroboran que la investigación es aplicable y necesaria en las condiciones actuales de la Escuela Secundaria Básica Cubana.

Referencias bibliográficas

Álvarez, Z. de (1993). *La escuela integrada a la vida. Pedagogía` 93*. Ciudad de la Habana.

Brito, H. (1990). *Capacidades, habilidades y hábitos, una alternativa teórica, metodología y práctica*. En Primer coloquio sobre la inteligencia. ISP Enrique José Varona. Ciudad de la Habana.

Ballester, S. (1995). *Cómo sistematizar los conocimientos matemáticos*. Editorial Academia. Ciudad de la Habana.

Barrón, R. (1991). *Constructivismo y desarrollo de aprendizajes significativos*. Revista Educación 294. Madrid.

Campistrous, L. y Rizo, C (1994). *Aprender a resolver problemas aritméticos.* En Memorias de la 8. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Costa Rica.

Fuentes, H. (1999). *Fundamentos didácticos para un proceso de enseñanza participativo***.** Monografía. Centro de estudios de Educación Superior "Manuel F. Grant", Santiago de Cuba.

Leontiev, A. N. (1979). *La actividad en la Psicología.* Editorial de libros para la educación, La Habana, 1979.

Mitjans, A. (1995).*Creatividad, Educación y Personalidad.* Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Rebollar, A. (1993). *Estudio de la habilidad para resolver problemas matemáticos en la escuela media.* Informe de investigación. Santiago de Cuba.

Silvestre, M. (1993). *Metodología y técnica que contribuyen a estimular el desarrollo intelectual*. Proyecto cubano TEDI.

Torres, P. (1993). *La enseñanza problémica de la Matemática de nivel medio general*. Tesis de grado. Ciudad de la Habana.

Vigotsky, L. S. (1968). *Pensamiento y lenguaje*. Edición revolucionaria. La Habana.

Torres, P. (2000). *La enseñanza de la Matemática en Cuba, en los umbrales del siglo XXI: logros y retos*. Ponencia electrónica de COMPUMAT´ 2000. Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Instituto Superior Pedagógico "Blas Roca Calderío". Manzanillo.

¿PUEDEN LOS ESTUDIANTES USAR LA FUNCIÓN COMO MEDIO DE EXPRESIÓN EN EL LENGUAJE MATEMÁTICO?

Ramón Blanco Sánchez, Alexia Nardín Anarela, Yosbel Morales Olivera
Universidad de Camagüey. (Cuba)
ramon.blanco@reduc.edu.cu

Campo de investigación: gráfica y funciones. Nivel educativo: superior
Palabras clave: función, generalización, lenguaje matemático

Resumen
Un elemento esencial del lenguaje matemático es la función, la cual se requiere para expresar una variedad considerable de diferentes relaciones, pero en el presente trabajo se ha podido comprobar el pobre dominio, que de este concepto, poseen los estudiantes, no ya en lo que respecta a aplicaciones, sino en la simple evaluación de una función.
En el presente trabajo se vincula la dificultad planteada, con un pobre desarrollo del proceso de generalización teórica que poseen los estudiantes y se propone actuar sobre este problema teniendo en cuenta en la actividad docente, los niveles en los que se manifiesta dicha generalización.

Desarrollo

La generalización teórica posibilita generalizar sobre los elementos esenciales del fenómeno que se analiza, y no sobre los rasgos comunes y aparentes de los fenómenos, por lo tanto, cuando el estudiante ha desarrollado correctamente el proceso de generalización teórica, puede evaluar funciones sin presentar dudas en la realización de esta acción, ya que esta acción no presenta diferencias esenciales de una función a otra.
No obstante el estudio realizado muestra lo contrario, pues se pudo apreciar que en estudiantes universitarios, se mantienen las dificultades en la evaluación de funciones.

Para fundamentar los planteamientos del presente trabajo se hizo un estudio de un total de 40 estudiantes universitarios, 21 correspondientes al primer año de la carrera de Bibliotecología y 19 al segundo año de la carrera de Ingeniería en Informática, a los que se les pidió evaluar las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \ldots si \ldots x<4 \\ 2x \ldots si \ldots x>6 \end{cases} \qquad \text{en} \quad x=1, \text{ y en } \quad x=8$$

$$g(x) = 2x^2 + 4 \qquad \text{en} \qquad x = a - 1$$

Obteniéndose los resultados que se muestran a continuación:
Antes de analizar la tabla es preciso aclarar que no hubo ningún caso de un estudiante que evaluara bien f(x) y mal la función g(x).

Como se puede apreciar de los datos que se muestran en la tabla anterior, el 57.5 % de los estudiantes evaluados, no fueron capaces de evaluar correctamente la función f(x), e incluso

Función	Evaluaron bien		Evaluaron mal		Total de estudiantes
	f(x)	g(x)	f(x)	g(x)	
Est. De Informática	9	9	9	1	19
Est. De Bibliotecología	6	5	15	10	21
Total de estudiantes	15	14	23	11	40

la función g(x) fue evaluada incorrectamente por el 27.5 % del total de estudiantes, los que incurrieron en este error fueron prácticamente los estudiantes de bibliotecología, aunque para estudiantes de informática un 47.37 % de respuestas incorrectas en la primera función, es un resultado que está lejos de lo que debe ser para este tipo de alumno.

De primera intención es natural asumir que no existe razón para que un estudiante de nivel superior no sea capaz de evaluar funciones como las presentadas en el experimento descrito, ya que el procedimiento de evaluación de una función tiene un carácter general y su explicación se puede hacer breve y clara, de donde se deriva una pregunta. ¿Por qué entonces se presentaron tantos errores en el experimento realizado?

De acuerdo a los estudios desarrollados por los autores, esto se debe a que la generalización teórica, aquella que se realiza sobre los elementos esenciales de los objetos y fenómenos que se estudian, no se desarrolla en los estudiantes, sino que estos se mantienen haciendo generalizaciones empíricas, las que se realizan sobre los aspectos comunes y aparentes de los fenómenos estudiados, la generalización empírica la persona la va desarrollando con el lenguaje, por lo que cambiar la forma de generalizar desde los elementos comunes y aparentes a los esenciales es algo que requiere mas entrenamiento de lo que usualmente se supone; donde la primera dificultad que se enfrenta es lograr que el sujeto se habitúe a orientarse a lo esencial del contenido, pues la propia adquisición del lenguaje crea un obstáculo epistemológico al respecto, ya que gran parte de la formación del lenguaje se realiza sobre elementos comunes y aparentes que no siempre coinciden con los esenciales.

La teoría en que se basa el presente trabajo considera elementos esenciales de un objeto o fenómeno, aquellos que lo caracterizan, el elemento que no puede faltar para ubicar dicho objeto o fenómeno en una clase determinada, son los elementos que están presentes en el concepto científico que lo identifica. Pero a pesar de la evidencia que se manifiesta en la determinación de los rasgos esenciales, no es una tarea pedagógica fácil, poner en la mente del estudiante la necesidad de identificar dichos rasgos esenciales, existe una tendencia facilista de juzgar el fenómeno por sus rasgos comunes y aparentes y cuando estos no coinciden o sólo coinciden parcialmente con los esenciales el juicio realizado es completamente incorrecto o presenta errores considerables.

Lo anterior quiere decir que en muchos casos, los estudiantes incorporan en la evaluación de la función las características particulares de la función que evalúan, esto es la fórmula particular que la define, por lo que el estudiante no aprende a evaluar funciones sino a evaluar casos particulares de funciones, con lo cual transforman un problema específico en una variedad de problemas, que según su modo de ver cada uno de ellos tiene sus particularidades que se deben tener en cuenta para poder resolverlos, lo cual hace que quede desconcertado o al menos trabaje incorrectamente cuando se le pide evaluar una función con la que no acostumbra a trabajar.

La solución de la dificultad didáctica descrita sólo se puede lograr, si se contribuye a desarrollar la generalización teórica de los estudiantes, y siendo la generalización teórica un proceso del pensamiento lógico, no se logra desarrollar con un pequeño entrenamiento, se requiere un trabajo didáctico perseverante, que debe comenzar por lograr que el estudiante ejecute las orientaciones y tareas asignadas. Resultados de este tipo solo se pueden apreciar a lo largo de un semestre en algunos casos, pero más usualmente a lo largo de un curso escolar y los resultados son más seguros si en otras asignaturas, como por ejemplo Física, se trabaja en la misma dirección.

Para entrenar a los estudiantes en la generalización teórica es necesario tener en cuenta los diferentes niveles en que se manifiesta este tipo de generalización, según la clasificación de Blanco R.(1998), estos son:

- La representación singular de lo general.
- La generalización producto de una deducción.
- La generalización por ampliación de un concepto.
- La generalización mediante un cambio del problema.
- La generalización con desarrollo de un nuevo modelo.

El primero de estos niveles o etapas de la generalización identificado como: “La representación singular de lo general” se refiere a la representación de los componentes de un conjunto de muchos o infinitos elementos mediante una determinada semiótica, por ejemplo, cuando al hablar de los números pares, se dice que un número par es un número de la forma 2n, o cuando se representa una sucesión por su n-simo término, o cuando al hablar de una cantidad finita pero no determinada de elementos o sucesos, estos se representan como los hechos a_i con $i = 1 .. n$, etc. Esta forma de generalización tan cotidiana para el matemático y tan imprescindible para la Matemática en sí misma, (aunque debemos destacar que no es privativa de la Matemática, pues con el desarrollo científico técnico cosas así aparecen hasta en las ciencias sociales), no es tan inmediata para el alumno, requiere cierto desarrollo de sus capacidades cognoscitivas para interiorizarlo, y no simplemente repetirlo mecánicamente cuando se le requiera. Se puede asegurar que el estudiante ha alcanzado este nivel de generalización cuando él es capaz de usarla por su propia iniciativa, para expresar sus ideas, cuando lo usa como componente de su propio lenguaje.

El segundo nivel considerado, la generalización producto de una deducción (propia de las ciencias deductivas), se manifiesta por ejemplo, cuando se prueba que todo número tal que la suma de sus dígitos es divisible por tres, es también divisible por tres él mismo; y se tiene así un resultado que sirve de criterio general para determinar si un número dado es o no divisible por tres. Aparentemente el alumno hace esta generalización de forma natural, pero lo que sucede comúnmente es que el alumno usa el resultado deducido en forma general porque el profesor le dice que se ha obtenido una regla que se va a aplicar siempre para determinar tal o cual cosa, pero no hace suyo el resultado obtenido si sus capacidades cognoscitivas no han alcanzado el nivel requerido; aquí influye el nivel anterior, pues precisamente en la deducción casi siempre es necesario representar lo general en forma singular. No es fácil determinar cuando el alumno ha interiorizado el carácter general de la deducción, ya que el mismo puede usar el resultado alcanzado por iniciativa propia o porque así se lo dice su profesor, aquí se requiere de cierta maestría pedagógica para determinar en que nivel está realmente el alumno.

El tercer nivel referido, esto es, la generalización por ampliación de un concepto, se manifiesta cuando se pasa de un concepto a otro más general, pero que mantiene los rasgos esenciales del primero, un ejemplo se tiene cuando se extienden los principios de la mecánica de dos tiempos a la de cuatro tiempos, pues sobre los mismos principios esenciales se estudia el fenómeno de una forma más amplia; otro ejemplo se puede ver cuando se pasa de las derivadas de funciones de una variable a las de funciones de varias variables.

Es muy importante ejercitar al alumno en este tipo de generalización, esto es, en las diferentes ocasiones en que el contenido que se imparte implica esta generalización, se debe asignar al alumno como tarea que haga las consideraciones necesarias para pasar a la nueva situación más general. Evidentemente en las primeras tareas de este tipo el estudiante sólo tendrá un éxito parcial, pues le resultará muy difícil poder prever todos los elementos necesarios. Pero esta actividad está entre las que el futuro profesional tendrá que hacer para mantenerse a la par del desarrollo científico técnico, por lo que es menester que sea entrenado en la misma.

El cuarto nivel, es en el que se está, cuando la generalización se logra mediante un cambio del problema con que se trabaja, aunque manteniéndose en el mismo modelo. Este cambio del problema puede ser, inmediato, cuando las variaciones no son esenciales, como cuando se trabaja con una fórmula cuyos coeficientes se caracterizan por determinada forma, y se introduce una variación al problema que determina un cambio en la forma de los coeficientes de la fórmula a través de la cual se resuelve el problema. Aunque esta es una generalización que no requiere de mucho desarrollo de las capacidades cognoscitivas, sí es necesario ejercitarla con el fin de que el alumno esté en condiciones de trabajar en las siguientes etapas.

También hay que tener en cuenta, que el cambio del problema puede ser mediato, esto es, cuando las variaciones al problema aunque manteniéndose dentro del mismo modelo determinan cambios esenciales en el mismo, este cambio se manifiesta por ejemplo si los cambios llegan a tal punto que aparentemente se ha producido un cambio en el modelo del problema, y para identificar el modelo original se requiere de cambios de variables, o algunas transformaciones especiales que permitan identificar el modelo original; un ejemplo al respecto es la ecuación:

$$\mathbf{\cos^2(x) + 5\cos(x) + 6 = 0,}$$

donde el estudiante no se percata que puede usar el modelo de la ecuación de segundo grado para resolver el problema planteado. Por lo tanto tenemos que ser cuidadosos de contemplar en nuestra actividad docente ambas situaciones, pues si empezamos por el segundo aspecto de este nivel, el estudiante lógicamente confrontará dificultades para realizar las tareas que le encomendemos y si nos quedamos en la primera etapa al estudiante le faltará preparación para enfrentar el quinto nivel de generalización, que trataremos a continuación y el cual debe alcanzar todo estudiante de ingeniería.

Después de todas las consideraciones anteriores, se puede enfocar el quinto y más complejo nivel de generalización, que consiste en la generalización con desarrollo de un nuevo modelo. Según S.L. Rubinstein: “La generalización descubre las conexiones necesarias sujetas a la ley de los fenómenos y faculta explicar las diversas manifestaciones de sus relaciones internas.” Rubinstein S. L. (1959)
Realmente es así, pero este proceso pasa a través de la modelación del fenómeno, de forma que este (el fenómeno) pueda ser desbrozado de sus atributos no esenciales, y se pongan de manifiesto aquellas relaciones internas fundamentales para su estudio. La capacidad de orientación hacia lo esencial del material, es uno de los elementos que determina la capacidad

de aprendizaje; por lo cual debe ser desarrollada tanto como sea posible, y como planteamos está asociada a la capacidad de desarrollar nuevos modelos para estudiar nuevos fenómenos. Aunque es por todos conocido que la habilidad de modelar es difícil de desarrollar en los estudiantes, pero también se tiene consenso de que es una habilidad que debe alcanzar todo estudiante de ingeniería; aunque por su complejidad está claro que le resulta muy difícil al estudiante lograrla directamente, por lo que es necesario el desarrollo de los niveles precedentes de generalización, para que el estudiante se encuentre en condiciones de arribar a esta meta.

Se puede decir que el estudiante está en este último nivel de generalización, cuando es capaz de obtener por sí mismo el nuevo modelo que le permite estudiar la nueva situación. Evidentemente este cambio de modelo tiene sus graduaciones propias, la nueva situación puede estar más o menos cerca de las situaciones y modelos conocidos por el estudiante, y este distanciamiento entre lo conocido y lo nuevo se logra vencer de forma efectiva si se desarrolla gradualmente la capacidad de generalización.

En el presente trabajo se demuestra que los estudiantes presentan dificultades en la evaluación de funciones, y se relaciona esta dificultad con pobres niveles del pensamiento teórico de los estudiantes, esta relación no se hace de manera empírica, la misma es resultado de investigaciones precedentes de los autores y de consideraciones teóricas derivadas de la bibliografía existente, en particular se pueden citar los trabajos de D. Tall.

Este autor, por su parte hace otro tipo de clasificación compatible con la de Blanco R., ya que tiene un sentido diferente, la clasificación de Tall (2002) plantea:

- La generalización extensiva.
- La generalización reconstructiva.
- La generalización disyuntiva.

En el primer tipo los diferentes casos se incorporan en el esquema establecido sin necesidad de transformar el esquema original. Este tipo de generalización es el que posibilita la apropiación de un concepto.

En el segundo, el sujeto tiene que reconstruir el esquema que posee del concepto, para poder identificar nuevos objetos que pertenecen al mismo. En el caso del concepto de función el sujeto tiene que reconstruir el esquema que tiene, para incluir el caso de la función definida por dos fórmulas.

En el último caso, el sujeto reconstruye el esquema, pero no logra incorporar esta reconstrucción al esquema original y conserva al esquema original y su reconstrucción, como dos esquemas con relativa independencia entre ellos. El sujeto ve como diferentes la función definida por una fórmula y la definida por más de una.

Por otra parte no se plantea que el desarrollo de la generalización teórica sea la solución radical para que los estudiantes evalúen correctamente las funciones, los problemas que se presentan en el proceso enseñanza aprendizaje, no se derivan de causas únicas. Pero los estudios realizados hasta la fecha nos permiten asegurar que la generalización teórica tiene un peso considerable en la habilidad de los estudiantes para evaluar funciones.

Conclusiones

El presente trabajo señala una dirección en la que se debe trabajar para lograr que los estudiantes mejoren sus posibilidades de usar el lenguaje matemático, lo cual es indudablemente un componente importante en el aprendizaje de esta ciencia.

Un manejo adecuado del concepto de función propicia tanto que el estudiante comprenda las ideas matemáticas, sino también que pueda expresar sus propias conclusiones y lo que es más importante aún materializar su pensamiento, para poder profundizar en el estudio del fenómeno.

Por último debemos agregar que el desarrollo de la generalización teórica es un elemento fundamental, no solo para el aprendizaje de la Matemática, también es básico para el desarrollo intelectual del estudiante, resulta imprescindible para su formación como profesional en la era del conocimiento.

Referencias bibliográficas

Blanco R. (1998) Necesidad y fundamento del desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes. Revista Pedagogía Universitaria de la Dirección de Formación del Profesional. MES Vol 3 No.2

Canestri J. Oliva S. (2000) Sobre el origen intrasíquico de la Matemática. Revista de Psicoanálisis. No.4.

Cordero F. (2005). La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18. México. CINVESTAV, IPN.

Genicio M. R. et al (2005), Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza. Facultad de Ingeniería, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18, Argentina, Universidad Nacional de Jujuy.

Hernández Y., Armando de Pedro L. (2005), Métodos Participativos, Un Arma Poderosa para el Aprendizaje. Departamento de Teoría de Funciones, Facultad de Matemática y Computación, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18. Cuba, U. H.

Mitchell J. M. (2001) Interactions Between Natural Language and Mathematical Structures: The Case of "Wordwalking" Institute for Field-Based Teacher Education California State University, Monterey Bay MATHEMATICAL THINKING AND LEARNING, *3*(1), 29–52

Sfard A. (2000) On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. Faculty of Education. Mathematical Thinking and Learning 2(3) 157-189, The University of Hayfa. Israel.

Rubinstein S.L. (1959). El pensamiento y los caminos de su investigación. Edit. Pueblos Unidos S. A. Uruguay.

Tall D., Akkoc H. (2002) The Simplicity, Complexity And Complication Of The Function Concept. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick, CV4 7AL, U.K.

<h.akkoc@warwick.ac.uk>, david.tall@warwick.ac.uk

METODOLOGÍA PARA LA IMPARTICIÓN DE TÓPICOS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES EN LA ENSEÑANZA PREUNIVERSITARIA EN CUBA

Larisa Zamora Matamoros, Isabel Alonso Berenguer
Universidad de Oriente. (Cuba)
larisa@csd.uo.edu.cu, ialonso@csd.uo.edu.cu
Campo de investigación: educación continua. Nivel educativo: medio
Palabras clave: estadística, probabilidades, enseñanza, currículo

Resumen
En el trabajo se presenta una síntesis de la importancia que se atribuye a formar una cultura estadística en los ciudadanos, se caracterizan los programas de Matemática para décimo y duodécimo grado en Cuba, los que contemplan contenidos de Estadística Descriptiva y Probabilidades; así mismo, se valoran estos contenidos y se presenta una metodología encaminada a orientar a los profesores de la enseñanza media superior en lo referente a la organización y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística y las Probabilidades.

Introducción

Como plantea Batanero (2002b) la Estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. También es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan conocimientos básicos del tema y su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.

En los últimos años se ha acelerado la incorporación de la enseñanza de la Estadística al currículo de escuelas, institutos y diferentes carreras universitarias en muchos países, debido a su carácter instrumental y a su importancia en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de grandes volúmenes de información. En Cuba se comienzan a dar los primeros pasos en esta dirección, a través de la inserción en el currículo de la enseñanza preuniversitaria y técnica profesional (ETP) de dos unidades: una dedicada a la Estadística Descriptiva, que se comienza a impartir en el curso 2004-2005 en décimo grado y primer año de la ETP, y la otra dirigida al estudio de la Teoría Combinatoria y las Probabilidades, que la han comenzado a recibir los estudiantes de duodécimo grado en el presente curso 2005-2006.

En este trabajo se presenta un análisis crítico, desde la óptica de profesores universitarios, de los contenidos que se imparten en la enseñanza media superior y que deben constituir la base para futuros estudios sobre la Teoría de las Probabilidades y la Estadística, cuando los estudiantes ingresen en la universidad. Se presenta además una propuesta de perfeccionamiento de los mismos y una metodología para su impartición.

Importancia de formar una cultura estadística

Como plantea Delgado (1999), en el mundo actual se reconoce la aplicabilidad, cada vez mayor, de la Estadística y la utilidad de este conocimiento para los profesionales y no graduados universitarios, lo que está determinado por la necesidad creciente de su aplicación en la vida real. Este mismo autor plantea que la Estadística es una disciplina dirigida a lograr un mejor entendimiento del mundo que nos rodea, con el objetivo final de que todos tengamos una vida más completa y con un mayor entendimiento de la misma.

Batanero (2002a), por su parte, plantea que: además del carácter instrumental de la Estadística para otras disciplinas, se reconoce el valor del desarrollo del razonamiento estadístico en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y la necesidad de tomar decisiones en ambientes de incertidumbre.

Como señala Godino (1995) "la enseñanza de los contenidos referidos a la Estadística y la Probabilidad se incrementa en los nuevos planes de estudio de diferentes países. Este interés se explica por la importancia que la Estadística ha alcanzado en nuestros días, tanto como cultura básica, como en el trabajo profesional y en la investigación, debido a la abundancia de información a la que el ciudadano, el técnico y el científico deben enfrentarse en su trabajo diario. El rápido desarrollo de la Estadística y su difusión en los últimos años se ha debido, en gran medida, a la influencia de las computadoras, que también han contribuido a la acelerada cuantificación de nuestra sociedad y al modo en que los datos son recogidos y procesados".

Batanero (2002a), al citar a Holmes, plantea que él y su equipo, mostraron que era posible iniciar la enseñanza ya desde la escuela primaria, justificándola por las razones siguientes:

- La Estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.
- Es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan conocimientos básicos del tema.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Las autoras de este trabajo concuerdan con lo citado por Batanero (2002a) que asegura que "lo que se pretende es proporcionar una cultura estadística que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante".

Todos estos resultados son muestras irrebatibles de la necesidad de crear una cultura estadística en la población en general, y en los futuros profesionales universitarios en particular, la cual puede iniciarse mediante la inserción de determinados contenidos básicos de esta disciplina en el currículo de los estudiantes de la enseñanza secundaria y preuniversitaria, y por qué no en la enseñaza primaria también.

Caracterización y valoración del programa actual de Probabilidades y Estadística para la enseñaza preuniversitaria cubana

Como se ha dicho, a partir del curso 2004-2005 comienzan a darse los primeros pasos para incorporar ciertos contenidos de las Probabilidades y la Estadística a la enseñanza preuniversitaria cubana. Esto se hace mediante la incorporación al programa de décimo grado y primer año de la Enseñanza Técnica y Profesional, de una unidad dedicada a la Estadística Descriptiva. Dicho proceso continuó perfeccionándose, y en el curso 2005-2006 se añade al programa de duodécimo grado la unidad dedicada a la Teoría Combinatoria y a las Probabilidades.

En el primer programa, se dedican 32 horas de clases a la impartición de la "Estadística Descriptiva", teniendo entre sus objetivos: reconocer el objeto y las tareas de la Estadística Descriptiva y su importancia para la sociedad, identificar los tipos de escalas y los recursos que se pueden utilizar con cada una de ellas, así como describir datos mediante tablas,

gráficos y algunas características, haciendo uso de las facilidades de una hoja electrónica de cálculo.
Para dar cumplimiento a estos objetivos, el programa bajo análisis prevé el siguiente sistema de conocimientos: La importancia del trabajo con datos para la sociedad, población y muestra, objeto de la Estadística y en particular, de la Estadística Descriptiva, variables cualitativas y cuantitativas, discretas y continuas, tipos de escalas. Representación de datos simples mediante tablas y gráficos, distribuciones empíricas de frecuencias. Representación de datos simples mediante tablas y gráficos de barras y de pastel. Interpretación de pictogramas. Representación de datos agrupados mediante tablas, histogramas y polígonos de frecuencia. Medidas de tendencia central para datos simples. Media aritmética para datos agrupados. Clase mediana y clase (es) modal (es) para datos agrupados. Varianza y desviación típica. Ventajas y limitaciones de estas medidas.
El programa de duodécimo grado, por su parte, le dedica 20 horas de clases a la impartición de la unidad "Combinatoria y Probabilidades". Sus objetivos son: resolver problemas de conteo y de determinación de la probabilidad de sucesos simples, aplicando el principio de la multiplicación, diagramas de Venn y las fórmulas para el cálculo del número de permutaciones, variaciones y combinaciones. Comprender el principio de inducción completa y su aplicación a la demostración de propiedades de la teoría de números, el álgebra y la geometría y la determinación del término n-ésimo de una sucesión. Realizar cálculos sencillos utilizando el teorema del binomio. Este último objetivo sólo está presente en el programa de los estudiantes que han solicitado carreras de Ciencias Técnicas, Naturales o Matemáticas.
El sistema de conocimientos contempla el papel de la deducción y la inducción en el pensamiento matemático. Principio de inducción completa. Demostración de proposiciones de la teoría de números, el álgebra y la geometría. Sucesiones. Determinación del término n-ésimo de una sucesión mediante inducción completa. Combinatoria y probabilidades. Principio de multiplicación. Diagramas conjuntistas en problemas de conteo. Concepto de probabilidad. Permutaciones, variaciones y combinaciones. Fórmulas para calcular su número. Aplicación a problemas de conteo y a la determinación de la probabilidad de sucesos. Para el caso de los estudiantes que han solicitado carreras de Ciencias Técnicas, Naturales o Matemáticas se le adiciona el teorema del binomio, la determinación del desarrollo de la potencia de un binomio y el triángulo de Pascal.
Es opinión de las autoras de este trabajo, que el estudiante una vez que culmine los estudios correspondientes a la enseñanza media superior debe poseer conocimientos básicos de la Teoría de las Probabilidades y la Estadística, ya sea para enfrentarse a niveles superiores de estos conocimientos en la enseñanza universitaria o para estar mejor preparados para afrontar situaciones prácticas que se presentan en la actividad diaria de cualquier ciudadano y que requieran de un análisis estadístico. Sobre la base de esta convicción se presenta una valoración de los contenidos estadísticos y probabilísticos que contemplan los programas de la enseñanza preuniversitaria cubana.
En primer lugar coincidimos con los contenidos que aparecen en la unidad dedicada a la Estadística Descriptiva para décimo grado. Sin embargo, consideramos que éste puede perfeccionarse en cuanto a la introducción y precisión de algunos contenidos. El programa de duodécimo grado, a nuestra consideración, queda muy escueto en lo referente a las Probabilidades y no se precisa la definición de probabilidad que se debe impartir.

La bibliografía que se recomienda para el trabajo con los estudiantes en décimo grado es escasa y ninguna en el programa de duodécimo grado, excepto lo que al respecto aparece en el libro de texto de Matemática para este grado.
El programa no hace alusión al empleo de paquetes interactivos para la enseñanza de los contenidos de Estadística y Probabilidades, a pesar de la importancia de los mismos.

Diagnóstico sobre el estado actual de la preparación estadística

Con el objetivo de estudiar si se reconoce la importancia de tener un conocimiento estadístico y probabilístico básico, como cultura general, así como los principales contenidos que se requieren para formar dicho conocimiento, se desarrolló un diagnóstico en una población vinculada al proceso docente educativo de la enseñanza media y superior de Santiago de Cuba. Este diagnóstico estuvo conformado por encuestas dirigidas a profesores, profesores principales de Matemática y estudiantes de la enseñanza preuniversitaria del municipio Santiago de Cuba y a profesores de la Universidad de Oriente.
Al analizar los resultados obtenidos del estudio realizado, se pudo constatar que tanto los profesores y estudiantes de los preuniversitarios visitados como los profesores universitarios encuestados, reconocen la necesidad de que todos los ciudadanos posean una cultura estadística. Un aspecto curioso en este sentido es que la mayoría de los profesores universitarios asocian esta necesidad a las ventajas que para el desempeño profesional representa el carácter instrumental de la Estadística y muy pocos la ven vinculada a la cultura general de un ciudadano que vive en una sociedad cada vez más informatizada. También se observó que los profesores preuniversitarios coinciden en cuanto a la importancia del aprendizaje de los contenidos previstos en los programas, excepto en el caso del concepto de varianza, que de manera general, no reconocen deba ser dominado por los estudiantes. Así mismo, sólo unos pocos consideran que los estudiantes deben realizar representaciones de datos haciendo uso de los diagramas de barras y de pastel. Al respecto los docentes universitarios consideran que el estudiante debe llegar a la universidad con todos estos conocimientos básicos aprendidos. Del diagnóstico desarrollado también se pudo precisar que dichos conocimientos deben comenzarse a impartir desde la enseñanza secundaria.
Teniendo en cuenta el análisis valorativo hecho sobre los actuales programas y los resultados del diagnóstico, se propone una metodología encaminada a orientar a los profesores de la enseñanza preuniversitaria para la organización y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística y las Probabilidades, de manera que se comience a formar una cultura estadística en los estudiantes de este nivel de enseñanza. La metodología se concibe de manera tal que en su desarrollo se planteen orientaciones para la preparación, ejecución y evaluación del proceso.

Metodología

El proceso debe comenzar organizando y preparando metodológicamente los contenidos para lograr efectividad en su desarrollo. Dicha preparación debe estar encaminada a la concepción y organización del sistema de actividades docentes a realizar, así como de la bibliografía y los paquetes computacionales a emplear, la selección y solución de los problemas a utilizar para el trabajo con los estudiantes, la determinación de los principales métodos a usar en el desarrollo de las actividades docentes, la organización del trabajo independiente y el diseño de un sistema de evaluación adecuado.
Es recomendable la realización de un diagnóstico para determinar el conocimiento previo de los estudiantes. Los resultados del mismo permitirán a la vez que reajustar y completar la

preparación metodológica de la asignatura, planificar y desarrollar el trabajo diferenciado con alumnos de alto aprovechamiento y alumnos con dificultades.
Ya en la ejecución del proceso, en que se lleva a cabo el trabajo directo con los estudiantes para la formación de la cultura estadística, deberá lograrse una motivación hacia dicha actividad, mostrando la importancia y aplicabilidad que tienen los contenidos y desarrollando el interés por investigar y realizar análisis estadísticos y/o probabilísticos de hechos y noticias, en los que se empleen los conocimientos estudiados. Además debe tenerse en cuentas el perfeccionamiento del programa de décimo grado en cuanto a:

- Introducir el concepto de error de observación.
- Enfatizar en la precisión con que se explican los conceptos de media, moda, mediana, varianza, dispersión, así como cuándo y para qué emplearlos.
- Resolver problemas sencillos, de forma manual y antes del empleo de una hoja electrónica de cálculo, para que el estudiante, a la vez que aplique los conceptos estudiados, reconozca la importancia y utilidad de los mismos.
- Tener presente, a la hora de explotar las facilidades de una hoja electrónica de cálculo para el procesamiento de la información, que la creciente disponibilidad de programas de ordenador para el análisis de datos nos obliga a una reflexión sobre sus implicaciones en la enseñanza de esta materia.
- Extender al caso de la moda, los cuartiles y percentiles, las orientaciones metodológicas que aparecen en el programa para la determinación de la mediana por métodos gráficos. Se debe llegar a estos conceptos empleando métodos de elaboración conjunta profesor-estudiante.

Por otro lado, debe mejorarse el programa de duodécimo grado a partir de:

- Comenzar explicando cómo surgió la Teoría de las Probabilidades y dar algunos ejemplos de su aplicación a los juegos de azar.
- Dar la definición de experimento aleatorio, evento elemental o simple y relaciones entre eventos, las cuales pueden expresarse haciendo uso de la Teoría de Conjuntos.
- Impartir las definiciones clásica, geométrica y estadística de probabilidad, mostrándole al estudiante las dificultades de la definición clásica y geométrica y cómo estas son salvadas por la estadística.
- Motivar el estudio posterior de la Teoría de las Probabilidades con el hecho de que a pesar de que la definición estadística supera las dificultades de las que le precedieron, ella presenta aún ciertas dificultades las cuales fueron salvadas por Kolmogorov en 1933, con la definición axiomática de Probabilidad.
- Impartir primero la unidad referente a la Geometría del Espacio, y luego la de Combinatoria y Probabilidades, ya que de esta forma el estudiante sistematiza algunos conocimientos de la geometría y recibe otros que podrá luego emplear para calcular probabilidades de sucesos mediante la definición geométrica.
- Cuando se estudie la fórmula del binomio, debe retomarse el concepto de varianza o dispersión para motivar al alumno a que investigue y descubra otra vía más sencilla de cálculo.

La evaluación estará encaminada a la valoración de los resultados obtenidos y a la recolección de opiniones y experiencias que resulten de utilidad para el posterior perfeccionamiento de los programas y del proceso. En este punto, los estudiantes y profesores podrán valorar el nivel de adquisición de conocimientos, la capacidad del profesor para organizar, dirigir y evaluar el proceso, la calidad de la bibliografía y los paquetes computacionales empleados y el uso hecho de los mismos. Los resultados obtenidos permitirán además poder determinar cuáles de estos temas pueden ser abordados en la enseñanza secundaria, y tal vez en la primaria, así como formas de impartirlos en estos niveles. La aplicación de la metodología deberá ser dinámica y flexible, en correspondencia con las características de los estudiantes y la preparación de los profesores.

Conclusiones

En el presente trabajo se han expuesto algunas consideraciones acerca de la importancia de la enseñanza de la Estadística desde niveles medios debido, entre otros factores, a la creciente necesidad de un razonamiento estadístico en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y la necesidad de tomar decisiones en ambientes de incertidumbre. Así mismo, se caracterizaron y valoraron los programas vigentes en Cuba encaminados al cumplimiento de este objetivo, se expusieron los resultados de un diagnóstico realizado a estudiantes y profesores del municipio Santiago de Cuba y por último, se propuso una metodología dirigida a orientar a los profesores de la enseñanza media superior en la organización y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística y las Probabilidades.

Se pudo apreciar la necesidad de potenciar, en el país, el desarrollo de la enseñanza de los contenidos referidos a la Estadística y las Probabilidades en los planes de estudio, no sólo de la enseñanza preuniversitaria y técnica y profesional, sino investigar la posibilidad de ir incorporando ciertos elementos en el currículo de la enseñanza secundaria y primaria. Evidentemente este empeño requerirá del trabajo en conjunto, no solo de los educadores de estos niveles de enseñanza, sino que deben involucrarse además las universidades, centros de trabajos, psicólogos, etc.

Se debe trabajar por desarrollar softwares educativos para impartir los contenidos de ambos programas, los cuales deben ser especialmente diseñados para el nivel en el cual se impartirán los contenidos.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2002a). *Presente y Futuro de la Educación Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. En: *http://*www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/doc/Bataneromallorca.doc (Citado el 20 de Febrero de 2005)

Batanero, C. (2002b). *Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Conferencia inaugural. También en http://www.indec.mecon.gov.ar/proyectos/sae/losretos.pdf. (Citado el 20 de Febrero de 2005)

Delgado, F. M. (1999, Septiembre). Contribución a la Difusión de la Cultura Estadística en Cuba. En Actas da Conferência Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estadística-Desafíos para o Século XXI", Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

Godino, J. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística? Revista UNO, 5, 45-56.

Ministerio de Educación (2004). Programa de Matemática para décimo grado y primer año de la ETP. MINED, República de Cuba.

Ministerio de Educación (2005). *Programa de Matemática para duodécimo grado*. MINED, República de Cuba.

Ministerio de Educación (2005). *Tabloide de Estadística para uso del profesor*. MINED, República de Cuba.

INGENIERÍA DIDÁCTICA REFERIDA AL CONCEPTO DE FRACCIÓN

Yaneth Ríos García
Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Facultad de Humanidades y Educación.
Universidad del Zulia. (Venezuela)
yanrios@cantv.net

Campo de investigación: números racionales y proporcionalidad. Nivel educativo: superior
Palabras clave: representaciones, situaciones didácticas, ingeniería didáctica y fracciones

Resumen
Tomando en consideración las diversas interpretaciones que tiene el concepto de fracción, el traslado entre cada una de ellas y los diversos sistemas de representación externa que pueden ser utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se plantea la posibilidad de aplicar una Ingeniería Didáctica para estudiar estos aspectos. Esta ponencia pretende presentar algunos resultados del análisis preliminar de una Ingeniería que está en proceso, en su dimensión cognitiva, de las preconcepciones que tienen los alumnos con respecto al concepto de fracción; la población utilizada fue variable 48 ó 189 alumnos (se especifica en el análisis de los resultados) del primer semestre de la Licenciatura en Educación, año 2004, Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de La Universidad del Zulia.

Introducción

Uno de los conceptos para el cual los alumnos presentan diversas dificultades de comprensión, es el de fracción. Muchos autores coinciden que las dificultades de su aprendizaje se deben a las diversas interpretaciones (acepciones, representaciones, concepciones, constructos) que admite este concepto. Entre estas acepciones tenemos: la de parte todo (sub-área), razón (subconjunto), reparto (división indicada), operador, número racional y número decimal (cociente), entre otros.

Considerando la diversidad de interpretaciones que tiene el concepto de fracción, sería interesante preguntar ¿Es necesario que el alumno las domine todas?, sobre todo el alumno que está siendo formado para ser educador en el área de Matemática. Se acepta que la respuesta es afirmativa, debido a que todas las situaciones problemas que involucra el concepto de fracción no son resolubles con una sola representación. Habrá situaciones que podrán ser resueltas por algunas interpretaciones y por otras no; además el conocer y aplicar varias concepciones permitirá al alumno desarrollar procesos mentales tales como la comparación, análisis, síntesis y planteamiento de inferencias, procesos que son propios del razonamiento matemático. Por otro lado, el futuro docente debe ser conocedor, en la medida de lo posible, del saber sabio[******], pues el dominar más contenido del que se va a enseñar le permite tener una visión más amplia de cómo enseñar, así como hacer conexiones entre los diversos saberes matemáticos a enseñar

En otro orden de ideas, para entender algún concepto matemático o cualquier otro, primeramente el individuo debe hacer representaciones externas del mismo; pero las que se adquieren en el sistema escolarizado, en muchas oportunidades son producto de las experiencias previas del alumno y/o son el resultado de la combinación de éstas con las experiencias vividas en aula, que no tienen una organización sistemática y mucho menos se establecen relaciones entre ellas.

Ante tal panorámica, surge la inquietud de diseñar situaciones didácticas para enseñar el concepto de fracción, desde los diversos sistemas de representación externas y que considere

[******] Conocimiento científico aceptado por la comunidad científica

las diversas interpretaciones del concepto de fracción, y así mejorar lo referente al conocimiento didáctico matemático de la fracción.

En la Universidad del Zulia, ubicada en Venezuela estado Zulia, desde el año 2001 hasta los actuales momentos, se viene aplicando una Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción; esta metodología de investigación esta compuesta por tres etapas dentro de las cuales se considera en la primera etapa, el análisis preliminar, específicamente la dimensión cognitiva, la cual toma en cuenta el componente cognitivo de la población que va a ser sometida a la Ingeniería, especificando las concepciones que tienen los estudiantes respecto al concepto de fracción. En este sentido, el presente trabajo tiene como propósito presentar una breve diagnosis de la población sometida al estudio.

Representaciones externas o sistemas de representación e interpretaciones del concepto de fracción

En Matemática, partiendo de lo que nos refieren Pérez (1995) y Castro y Castro (1977, citados por Blásquez y Ortega, 2001), para poder razonar, recordar o comunicar las ideas matemáticas, es necesario primero hacer una representación interna o interpretación de éstas para que la mente pueda operar sobre ellas. Además para poder comunicar alguna noción matemática es necesario servirse de dibujos o símbolos que expresen los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades.

A estas expresiones, dibujos o símbolos es lo que se denomina representación externa o sistemas de representación. Éstas constituyen un aspecto fundamental en la enseñanza, pues ellas permiten la representación interna, con lo que se puede razonar; así pues, para lograr los procesos del pensamiento y aumentar la capacidad cognitiva es adecuado que se logre una variedad de representaciones externas del mismo concepto. Eso lo sugiere Romero (2000, citado por Blázquez y Ortega, 2001), pues las representaciones se complementan y muestran diversos aspectos de un mismo concepto con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros.

Cuando la representación externa de un concepto se realiza siempre de la misma manera, provoca errores en el aprendizaje. En lo que respecta a esta investigación, las fracciones, en nuestro sistema educativo la representación externa que por predilección se trabaja es la formal aritmética y simbólica.

Por otro lado, otra variable que se consideró en el diseño de situaciones didácticas para los docentes en formación fueron las diversas interpretaciones que tiene el concepto de fracción, tales como reparto, operador, división indicada, razón, número decimal y porcentajes, entre otras, que al ser desconocidos por los estudiantes no les permite resolver problemas donde se necesite el conocimiento de estas interpretaciones. Así mismo, como lo asegura Segovia y Rico (1999) se deben además establecer conexiones entre las diferentes interpretaciones, porque como lo afirma Azcarate (1995), estos procesos no son espontáneos en los estudiantes, muy por el contrario, son procesos elementales que los profesores deben ayudar que sus alumnos adquieran. En nuestro sistema educativo las interpretaciones que prevalecen son las de parte todo y el número decimal; la primera interpretación permite dotar a la fracción de un significado gráfico en unidades continuas y la segunda, permite entenderlas como divisiones, es decir dota a las fracciones de significado procedimiental.

Según Duval (1993, citado por Blázquez y Ortega, 2001) las representaciones internas, es decir las interpretaciones, se desarrollan al interiorizar las representaciones externas y esto lo refirman Castro y Castro (1997, Blázquez y Ortega, 2001) cuando aseguran que dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y sus respectivos

significados, operar con las reglas internas de cada representación externa y detectar cual es la representación más ventajosa para trabajar determinadas propiedades.
Son diversas las clasificaciones que se han realizado de las representaciones externas, para efectos de esta investigación utilizaremos la de Maza (1995), el cual considera: el lenguaje informal, las representaciones manipulativas, las representaciones icónicas, el lenguaje formal y las representaciones simbólicas.

Metodología
El tipo de investigación aplicado fue descriptivo. La población utilizada fue la de 32 alumnos que ingresaron a la carrera de la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física en el año 2004. Las técnicas utilizadas para la recolección de la información y el análisis de los datos, consistió en el análisis cualitativo del contenido de las producciones de los estudiantes del cuestionario anexo, para el cual se determinaron unas categorías de análisis que se muestran a continuación:
TABLA DE OPERACIONALIZACIÓN DE CATEGORÍAS

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍAS	PROPIEDADES
Interpretación de la fracción	Como parte-todo	Tipo de representación y de error
	Como reparto	Tipo de representación y de error
	Como operador	Tipo de representación y de error
	Como razón	Tipo de representación y de error
	Como medida	Tipo de representación y de error
	Como número decimal	Tipo de representación y de error
	Como número racional	Tipo de representación y de error

Fuente: Ríos (2006)

Pre-concepciones del concepto de fracción
Interpretación de la fracción como parte todo (ítem 1, respondido por 48 alumnos)
Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en la primera parte son los siguientes: escriben 1/4, determinando con este símbolo cada parte en que ha sido dividida la unidad; escriben 1/3, determinando con el uno la parte no subrayada, y con el tres el área subrayada; escriben 4/3, determinando con el numerador las partes en que ha sido dividida la unidad, y el denominador el área subrayada; y escriben 3, contando la cantidad de partes subrayadas
El nivel de complejidad de la segunda pregunta, en cuanto a los números mixtos o fracciones impropias, aumenta pues por las producciones de los alumnos se observa que se les dificulta comprender que unidades completas pueden ser entendidas como parte de una fracción; para algunos prevalece la idea que la fracción se refiere a un área menor que el área total de la unidad. Se observa que esta pregunta presenta un nivel de dificultad mayor que la anterior, pues para la primera parte de la pregunta, 34 alumnos (70,85%) responden correctamente, mientras que para la segunda parte de la pregunta, 20 alumnos (41,66%) responden correctamente. Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en la segunda parte son los siguientes: escriben 4/6, con el numerador identifican el área rayada y con el denominador las partes en que ha sido dividida las dos unidades. En este caso, la unidad es entendida como los dos rectángulos; escriben 4/2, donde el numerador indica el área rayada y el denominador el área no rayada; escriben 3 1/3, donde el entero cuenta las partes rayadas y el 1/3 simboliza correctamente la fracción propia del número mixto correspondiente; escriben 3/3 2/3, donde el entero identifica correctamente

la unidad completa, pero la fracción propia identifica con el numerador el área no rayada; escriben 1/3, determinando el área rayada en la segunda unidad; escriben 6/4, con el denominador identifican el área rayada y con el numerador las partes en que ha sido dividida las dos unidades. En este caso, la unidad es entendida como los dos rectángulos nuevamente; escriben 2/4, donde el denominador indica el área rayada y el numerador el área no rayada; escriben 3/3 1/1; y escriben ¾ ¼

Interpretación de la fracción como reparto (ítem 2, presentado por 48 alumnos)

En las producciones de los alumnos, se observó la utilización de una variedad de representaciones externas; la gran mayoría utilizó las representaciones gráfica, complementando éstas con otras. En las producciones de los alumnos, en la primera pregunta, prevalece la representación gráfica sobre la simbólica, escrita, algebraica y aritmética; la representación gráfica es realizada por 21 alumnos, 43,75%; la representación aritmética por 16 alumnos, 33,33%; la escrita por 14 alumnos, 19,16%; la simbólica por 9, 18,75%; y la algebraica por un alumno.

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos son los siguientes: dividen las dos pizzas en la misma cantidad de partes (10, 8, 5), ya sean iguales o desiguales, y especifican la cantidad de pedazos que le toca a las cinco personas. En este caso, aun y cuando mantienen la división para las dos unidades, la respuesta es dada de manera intuitiva, pareciese que no se conoce el símbolo correspondiente a la respuesta; dividen una pizza en la misma cantidad de partes (4, 3 y 5) y la otra en otra cantidad de partes (6, 2, 10), y especifican la cantidad de pedazos que le toca a las cinco personas. No mantienen las divisiones en las dos unidades, lo importante es que la suma de los pedazos sea múltiplo de 5, para poder hacer la repartición. Al igual que en el caso anterior, pareciese que no se conoce el símbolo correspondiente a la respuesta, pues las respuestas son dadas en forma intuitiva; grafica correctamente, pero especifica como respuesta 2/10. En este caso nuevamente establecen como la unidad las dos pizzas; y especifican como respuesta 5/2. En este caso, invierten los elementos de la fracción respuesta

Los errores referidos a la elección inadecuada de la estrategia de solución, se evidencia cuando los alumnos al graficar la situación dividen las unidades en cantidades diferentes. Un alumno comete el error de tipo teórico cuando plantea mal la ecuación

Interpretación de la fracción como operador (ítem 3, presentado por 189 alumnos)

En las producciones de los alumnos prevalece la representación aritmética sobre la simbólica, gráfica y la escrita; la representación aritmética es realizada por 65 alumnos, 34,39%; la representación simbólica por 57 alumnos, 30,15%; la gráfica por 5 alumnos, 2,64% y la escrita por 3 alumnos, 1,58%

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem se manifiestan cuando escribe un alumno, $\frac{300}{1/3} = 100$; 100x2=200. Los errores debido a la ejecución de las tareas, se traducen cuando establecen la operación correcta, pero la respuesta es incorrecta; 200/300, 600/900 y 298/3. Para el primer caso establecen la razón de la respuesta con respecto a la totalidad, en el segundo caso aplican erradamente la multiplicación de un entero por una fracción, multiplicando ambos elemento por el número natural; y el tercer caso aplican lo siguiente: (300-2)/3. Los errores debido a la incomprensión de la pregunta se manifiestan cuando los alumnos establecen respuestas como las siguientes: 2/3, 52,6; $2x10^6$, 20/5, 150, 8 y descomposición del 300 en factores primos.

Interpretación de la fracción como medida (ítem 4, presentado por 48 alumnos)

En las producciones de los alumnos, prevalece la representación simbólica sobre la escrita; la representación simbólica es realizada por 35 alumnos, 72,91% y la representación escrita por un alumno

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: escriben 3/5; estos alumnos entienden la pregunta al revés, es decir qué parte de B cabe en A; escriben 1/3 y 2/3; escriben 3/3; estos alumnos no conciben las fracciones mayores de la unidad como partes de la totalidad; para éstos una parte de la totalidad debe ser menor que ésta; y escriben 3 partes; esta respuesta muy parecida a la anterior, pero mas intuitiva, pues no logran establecerla mediante símbolos

Interpretación de la fracción como número decimal (ítem 5, presentado por 48 alumnos)

En las producciones de los alumnos prevalece la representación escrita sobre la aritmética; la representación escrita es realizada por 26 alumnos, 54,16% y la representación aritmética por un alumno.

Los errores referidos a la deficiencia teórica, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: escriben que uno es decimal y el otro, fracción; estos alumnos establecen diferencias en cuanto a la forma del número; y escriben que representan la misma cantidad, pero no justifican su respuesta

Interpretación de la fracción como razón (ítem 6, presentado por 189 alumnos)

En las producciones de los alumnos prevalece la representación simbólica sobre las demás; la representación simbólica es realizada por 97 alumnos, 51,32%; la representación aritmética por 6 alumnos, 3,17%; la escrita por cuatro alumnos, la gráfica por 3 alumnos, y la algebraica por dos alumnos.

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: escriben 25/15 y 5/3; estos alumnos confunden los elementos de la fracción respuesta; escriben 25:15; además de confundir los elementos de la respuesta utilizan la interpretación de fracción como división indicada; escriben 15x5/3=25; estos alumnos tratan de establecer el operador que le permite transformar un número en otro.

Los errores debido a la incomprensión de la pregunta se traduce cuando los alumnos escriben 10, lo que le falta a 15 para ser 25

Interpretación de la fracción como número racional (ítem 7, presentado por 189 alumnos)

En las producciones de los alumnos, en la primera pregunta, prevalece la representación simbólica sobre la escrita y la aritmética; la representación simbólica es realizada por 32 alumnos, 16,93%; la representación escrita por 31 alumnos, 16,4% y la aritmética por 7 alumnos, 3,7%.

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: establecen los elementos de la potencia: la base y el exponente; expresan que los exponentes negativos no existen; escriben que es equivalente a -2, porque el exponente es negativo; expresan que se invierte el número, pero no lo hacen; y escriben 2/1 y -1/2.

Conclusiones

Por la naturaleza de las preguntas, las representaciones externas de las respuestas dadas por los alumnos para las interpretaciones como medida y parte todo, son exclusivamente simbólicas; en la interpretación reparto la gráfica y la simbólica son muy parejas en su uso; en la interpretación como operador la aritmética y la simbólica son las que prevalecen; en la interpretación como número decimal prevaleció la escrita; en la interpretación como razón la

representación simbólica está por encima de las demás representaciones; en el caso de los números racionales, se usan en igual medida las representaciones simbólica y escrita.
Se observa que más del 78% de la muestra desconocen la interpretación como número racional; la interpretación como medida de la fracción propia es la más conocida, por más del 92% de la muestra, y le sigue la interpretación como parte todo para la fracción propia con un 87%, y las otras interpretaciones son desconocidas entre el 20% y 41% de la muestra. Se concluye que para los alumnos, la interpretación que tiene mayor grado de complejidad es la de número racional.
Los errores que se evidencian en todas las interpretaciones, menos la decimal son debido a la complejidad del símbolo; la de mayor porcentaje fue la interpretación como medida impropia (70%), le sigue parte todo impropia (47%), luego reparto impropia (43%), le sigue racional no entero (42%), reparto propia (38%), medida propia (37%), razón (34%), racional entero (26%), parte todo propia (19%) y operador (2%). En esta última, se presentan errores en cuanto a la especificidad de la respuesta (41%) e incomprensión de la pregunta (19%).

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación*, Revista UNO. Didáctica de las Matemáticas*, 4, 53-61

Blázquez s. y Ortega T. (2001). Sistemas de representación en la enseñanza de límite, *Revista Relime,* 4 (3), 100-120

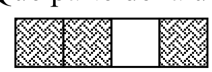
Maza, C. (1995). Representaciones externas, En Maza, C., *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales* (pp: 119-130), México: Paidos

Pérez, A. (1995). La representación en la resolución de problemas en Matemática, *Revista Laurus*; 2 (1), 20-25

Segovia I. y Rico L. (1999). Unidades didácticas. Organizadores, *Revista de Educación Matemática*; 13 (2), 83-104.

Anexo: cuestionario

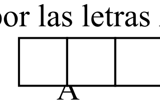
1. ¿Qué parte de la unidad representa la parte rayada?

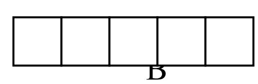
a)  ________ b)  ________

2. Se tienen dos pizzas y se quieren repartir en partes iguales, entre 5 personas ¿Cuánto le toca a cada uno? Haz una representación gráfica. Si realizas alguna operación, escríbela

3. ¿Cuántos bolívares representan los 2/3 de 300 bolívares? Si realizas alguna operación, escríbela

4. Cada una de las siguientes piezas, se representan por las letras A y B
   a) ¿Qué parte de A cabe en B? ______________
   b) ¿Qué parte de B cabe en A? _____________





5. Se sabe que 0,5 y ½ representan la mitad de la unidad. Explique cuál es la relación entre los dos números. Si realizas alguna operación, escríbela

6. Se tienen en un aula 25 estudiantes ¿Qué fracción representan las hembras, si hay 10 varones? Si realizas alguna operación, escríbela

7. ¿Qué simboliza 2^{-1}? Explica tu respuesta

LA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TRANFERENCIAS DE REGISTROS

María Lourdes Rodríguez González, Louremy Ricardo Rodríguez, Cila Mola Reyes
Universidad de Camagüey. (Cuba)
Dirección Provincial de Planificación Física. (Cuba)
maria.rodriguez@reduc.edu.cu, cila.mola@reduc.edu.cu
Campo de investigación: pensamiento geométrico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: representación, transferencia de registros

Resumen
En este trabajo se ofrece un estudio sobre la habilidad de representar en la Matemática desde la perspectiva de la transferencia de registros; se parte de hacer un análisis de diferentes puntos de vista de lo que significa representar y se muestran a través de ejemplos como las autoras de este trabajo han abordado en clase diferentes formas de representación. Al considerar que un objeto matemático se representa por una expresión algebraica, por una forma tabular, por una gráfica o por una palabra requieren de un conocimiento y del manejo correcto de los entes geométricos para interpretar la relación entre la ciencia matemática y la realidad objetiva.

Introducción

Con el surgimiento de la existencia humana desde hace muchos milenios aparece la comunicación. Con el desarrollo del tiempo surgió la necesidad de contar con formas más efectivas para establecer una relación más estrecha unos con otros y de manera más eficaz se llega al lenguaje hablado, el uso de la palabra como medio más importante de comunicación mediante la cual se desarrolla y se materializa el pensamiento.
A medida que fue desarrollándose el conocimiento humano, se hizo necesaria la escritura para transmitir información. Los pueblos antiguos buscaban un medio para registrar el lenguaje, pintaban en las paredes de las cuevas para enviar mensajes y utilizaban signos y símbolos para designar una tribu o pertenencia. Al desarrollarse estos elementos ideográficos, el símbolo no sólo representaba el objeto, sino también ideas y cualidades asociadas a él. Esta forma de comunicación no verbal, es conocida con el nombre de representación.

Desarrollo

Existen tres tipos de problemas geométricos, a saber: de demostración, de cálculo y de representación. Los problemas geométricos de representación espacial, son aquellos en que se plantea realizar una modelación de la realidad objetiva ya sea en la mente del estudiante o materializada a través del dibujo o en objetos constructivos, para destacar relaciones de posición, de orden, de tamaño, de continuidad, de igualdad y otras; así como movimiento de cuerpos en el espacio.
Las autoras de este trabajo asumen lo expresado por la Dra. María L. Rodríguez en su tesis doctoral cuando plantea que: “La *representación geométrica espacial* se puede clasificar en: *Mental:* le permite al estudiante prever situaciones, estimar distancias y tamaño; así como orientarse en el espacio físico. Y *Manual:* Los objetos concretos son una guía para comprender las propiedades de las figuras geométricas” (Rodríguez, 2003).

Por otro lado según el Dr. Quintero distingue que: “El *dibujo* no es más que un lenguaje gráfico que surge a partir del lenguaje verbal, el dibujo, en tanto es proceso de comunicación, se basa en un código o lenguaje que debe ser conocido por el emisor y el receptor del mensaje, si se desconoce o no se sabe interpretar ese código, el proceso de comunicación no se concreta. Y la *figura* es un objeto ideal que se puede representar por medio de un dibujo” (Quintero, 2002).

¿Que es representar?

En psicología, se entiende por representar a aquella imagen que la mente humana crea como parte de los procesos del pensamiento y las percepciones del mundo exterior, en nuestra mente nos representamos un objeto.
En filosofía, se entiende por representar a aquella imagen reflejada idealmente en la cabeza del hombre sin que el objeto de la representación este presente.
La representación deviene realidad mediante la práctica multilateral del hombre, es decir, la representación adquiere en plasmación real diversas formas, una de las cuales es el modelo, por lo tanto el modelo ya sea en su aspecto teórico o empírico concreto (maquetas, dibujos, gráficas, pinturas, esculturas, etc.) es el resultado de la objetivación de las imágenes en su forma sensible.
Las autoras de este trabajo coinciden con el Dr. Joaquín Álvarez cuando expresa que: “la habilidad de representar es una macrohabilidad” (Álvarez, 2002), ya que la Matemática como ciencia abstracta y compleja le esta asociada a esta habilidad las habilidades siguientes para su comprensión y apropiación:
Identificar: Distinguir el objeto de estudio matemático, sobre la base de sus rasgos esenciales. Determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan características distintivas.
Interpretar: Atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate.
Modelar: Asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos.
Codificar es un sistema de transmisión de la información en que el sentido que esta está expresada en códigos matemáticos
Recodificar: Transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. A veces puede interpretarse como transformar el objeto.
Definir: Establecer mediante una proposición las características necesarias y suficientes del objeto de estudio.
Graficar: Representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde un punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas y recíprocamente, colegiar las relaciones existentes a partir de su representación gráfica.

Por otro lado; Duval plantea que existen: “diferentes registros de representación semiótica relacionado con el funcionamiento cognitivo del pensamiento” (Duval, 1998).
Luego para que el estudiante logre la adquisición de las habilidades antes mencionadas y logren la macrohabilidad de representar deben realizar ejercicios geométricos asociados a las diferentes transferencias de registros. Según la forma de expresión escogida para el

tratamiento de la información, se puede hablar de diferentes formas de Representar asociada a las transferencias de Registros; ellas son:
Transferencia del registro verbal- simbólico (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica palabras y términos claves que transforma el lenguaje verbal al simbólico en una determinada etapa de resolución de un problema).
Transferencia del registro simbólico - gráfico (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica términos simbólico del problema que resuelve que transforma a otro modelo matemático simbólico equivalente en una determinada etapa de su solución).
Transferencia del registro gráfico- gráfico (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica términos simbólicos del problema que transforma a otro modelo matemático simbólico equivalente en una determinada etapa de su resolución).
Transferencia del registro gráfico- símbolo (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica aspectos geométricos correspondientes al problema que resuelve, los transforma al lenguaje simbólico en términos de un modelo equivalente en una determinada etapa de resolución del problema).
Para que el proceso enseñanza aprendizaje sea efectivo hay que motivar al estudiante y llevarlo a situaciones que simulen la futura actividad profesional. Por ejemplo en la Introducción de una clase a modo de motivación la misma puede comenzar con una actividad implementada a través de la simulación de una situación, que expone el concepto que se pretende enseñar.
Esto tiene como objetivo introducir al alumno en el problema desde una "situación práctica", que lo conduzca de forma intuitiva hacia el concepto que debe aprender.

Un ejemplo de tarea dejado en la clase anterior con la que puede comenzar la clase de sólido puede ser el siguiente:
Dadas las siguientes superficies: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 16$; $X^2 + Y^2 = 4$; $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$; $Y = 1$; $X = 0$; $Y= 0$; $Z = 0$; $Y = X$; $X + Z = 4$; $Z = 2$.
a) Identifique cada ecuación. b) Seleccione como mínimo 6 de ellas.
c) Represéntelas en un mismo sistema.
d) Determine la curva de intersección de las superficies tomando dos a dos.
e) ¿Lo que usted representó determina un cuerpo?
A partir de aquí el profesor conjuntamente con sus estudiantes introduce las técnicas de representación de un sólido. Luego define que es un sólido.
Otro ejemplo de motivación que pudo haber dejado como estudio independiente es la construcción de un cuerpo elegido por ellos y la técnica de construcción por lo que observan ellos de la realidad. Con esta actividad se pretenden enriquecer el lenguaje grafico de los estudiantes y su relación con el verbal y el algebraico. Con ejemplos como los anteriores los estudiantes no ven la construcción de sólido como algo impuesto por le profesor sino como una necesidad después el profesor realiza las diferentes observaciones para que el sólido quede correctamente construido. Por lo tanto para construir un sólido se siguen diferentes metodologías en dependencia de la forma de representar el sólido y del tipo de transferencia de registro que se presente.
La transferencia de registro más común en los libros de textos de Matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría para Ciencias Técnicas es la de *Transferencia del registro algebraico al gráfico*. La cual se muestra a continuación.
En la misma se tiene la expresión analítica de un sólido y su metodología en general para su representación es la siguiente:

1. La selección del sistema grafico de representación.
2. Identificar las superficies que delimitan el sólido.
3. Representar en el sistema seleccionado las superficies identificadas
4. La determinación y trazado de las aristas rectas o curvas de intersección de las superficies tomadas dos a dos.
5. Determinar cual es la región comprendida por el sólido, con ayuda de la expresión analítica del mismo.
6. Reforzar el contorno del sólido con líneas gruesas, continuar las aristas visibles y discontinuas para las aristas no visibles, teniendo en cuenta los principios de visibilidad.

Ejemplo1: Dada la expresión analítica del sólido.

$W = \{(x, y, z) \in R^3: X^2 + Y^2 \leq 4;\ 0 \leq Z \leq 4;\ 0 \leq Y \leq X\}$. Constrúyalo.

Para la construcción del mismo se siguen los siguientes pasos metodológicos:

1. La selección del sistema gráfico de representación que fundamentalmente. En matemática se utiliza el sistema axonométrico usando el dibujo de perspectiva caballera.
2. Se identifican las superficies que lo limitan.
3. Se representan las porciones de cada superficie que hacen falta, en el sistema cartesiano rectangular del espacio, se toman dos a dos las superficies para determinar las aristas de intersección de las caras del sólido. (Anteriormente se explicó la forma de determinar las aristas curvas de intersección entre dos superficies, aquí no se usarán planos auxiliares para no sobrecargar la representación)
4. Haciendo un análisis de las desigualdades de la expresión analítica se determina en que parte del espacio tridimensional es que se va a encontrar el sólido. (Generalmente se toman puntos sobre los ejes coordenados y se analizan las superficies que intervienen) En nuestro caso el sólido se encuentra en la región anterior izquierda superior (1er Octante).
5. Identificándose por último cual es el sólido (se trazan con líneas gruesas y continuas la parte visible y con líneas gruesas y discontinuas las no visibles).

Sin embargo no se realizan de forma general *Transferencia del registro gráfico al algebraico* que contribuye a que el estudiante desarrolle la habilidad identificar correctamente las superficies que limitan a un sólido

Ejemplo 2: Se le puede dar la representación gráfica de un sólido para que escriban su expresión analítica. a) Haciendo un análisis de las generatrices (trazas sobre los planos coordenados) o de las directrices (que pueden ser también trazas) además, de las aristas de intersección entre las superficies, el sólido queda determinado por las superficies.

Supongamos que el sólido dado este limitado por las siguientes superficies:

$X^2 + Y^2 - Z^2 = 4$ Hiperboloide de una hoja

Z=1 Plano proyectante básico paralelo al plano XY

Z=3 Plano proyectante básico paralelo al plano XY

Z=0 Plano coordenado XZ; Y=0 Plano coordenado XZ

b). Es importante que el estudiante sepa identificar la región del espacio el cual ocupa el sólido en el espacio real: El estudio anterior nos informa que el sólido se encuentra en la región superior izquierda anterior (Primer Octante). Además se encuentra en la región posterior del hiperboloide de una hoja $X^2 + Y^2 - Z^2 = 4$, en la región superior al plano Z=1 y en la región inferior al plano Z=3

c). Después de haber realizado el estudio de las superficies y de la región que ocupa el sólido representado el estudiante puede escribir su expresión analítica que es la siguiente:

$W = \{(x, y, z) \in R^3: X^2 + Y^2 - Z^2 \leq 4;\ 1 \leq Z \leq 3;\ X \geq 0;\ Y \geq 0\}$

En oportunidades se tienen las diferentes vistas o proyecciones ortogonales de un sólido y se quiere obtener su expresión analítica, el procedimiento es construirlo y luego hacer el análisis anterior, en este tipo de ejercicio se pone de manifiesto la *Transferencia del registro gráfico al gráfico.*

Ejemplo 3: Dado el sólido en su forma gráfica, determine las proyecciones ortogonales o vistas del mismo. (Se da en el ejercicio la representación gráfica del sólido)
La metodología de trabajo para realizar es la siguiente:
1. Aplicación de la tríada de conceptos básicos referentes a caras y aristas, en los casos convenientes.
2. La determinación de los cilindros o planos proyectantes que la determinan.
3. Aplicar los principios de visibilidad para las proyecciones ortogonales es decir, identificar las caras y las aristas que están visibles u ocultas en las tres vistas.

Otra transferencia que desarrolla la expresión y el lenguaje de la matemática es la *Transferencia del registro verbal al gráfico.*
La misma se puede expresar con el siguiente ejemplo 4: Represente la región del espacio comprendida en el primer octante, interior al cilindro $X^2 + Y^2 = 9$, su parte superior esta limitada por el plano $Z = 4$, y esta a la derecha del plano $Y = X$.
Cuando en las clases de construcción de sólido se realizan ejercicios en los cuales se ejercitan las diferentes habilidades y el profesor verifica que sus estudiantes las han adquiridos; es que puede orientar la realización de *Ejercicios de generalización.*
A continuación se muestran algunos tipos de estos ejercicios:

1. Dadas las proyecciones gráficas de un poliedro.
   - Escriba las expresiones analíticas de las mismas.
   - Construya el poliedro o el sólido que origina dichas proyecciones gráficas.
   - ¿Qué expresión analítica tendrá el poliedro o sólido obtenido?
   - Enuncie usted el problema, si lo que tiene es la proyección de forma analítica del poliedro o del sólido y quiere buscar sus proyecciones ortogonales de forma gráfica.
2. Ejemplos de aplicación a la especialidad (Arquitectura): Las paredes de una casa están soportadas por las superficies siguientes: $X = 0$; $Y = 0$; $Y = 2$; $X^2+ Y^2 = 9$ y el piso por $Z = 0$.
   - Seleccione una o varias superficies para soportar el techo de dicha casa de las siguientes: $Y^2 + Z^2 = 9$; $X^2 + Y^2 + Z^2 = 9$; $Z = 4$; $x + y = 4$; $y + z =4$.
   - Represente en Isométrico o Perspectiva Caballera la configuración de la casa, haciendo abstracciones de las ventanas y demás detalles de la casa.
   - Escriba la expresión analítica del sólido obtenido.
   - Determine una proyección tanto gráfica como analítica.

3. Estudio Independiente para la casa. Diseñe la planta de un sencillo apartamento (o vivienda).

   a) Represente la elevación principal (vista de frente).
   b) Represente la elevación que corresponda a la vista lateral (vista lateral).
   c) Construya la volumetría.
   d) Haga un análisis geométrico donde: identifique por sus ecuaciones cada superficie que conforman las paredes, piso y techo de dicho apartamento.
   e) Escriba la expresión analítica del sólido que se obtiene al realizar el diseño de dicho apartamento.

4. Dibuje el sólido definido por: $S = \{(x, y, z) \in R^3; x+z \leq 10, X - Z \leq 5, 0 \leq y \leq 20, x \geq 0, z \geq 0\}$
Antes de comenzar a dibujar se deben realizar algunas aclaraciones para especificar las diferencias entre la forma de dibujar el AutoCad y cómo lo hace en la geometría convencional. En AutoCad no se pueden representar planos indefinidos por lo que es imprescindible trabajar con las trazas de dichos planos. Para representar los sólidos se debe partir de un volumen inicial definido como sólido del cual se obtendrá, por medio de cortes sucesivos, el sólido pedido.
<u>Por ejemplo</u>: Partir de un cubo del cual por medio de cortes sucesivos se obtendrá otro sólido.
En relación con el tema, se obtiene que el problema que plantea la representación de sólidos se centra en cómo dibujar en dos dimensiones un objeto tridimensional y cómo, a partir de la representación en dos dimensiones de un objeto, se puede reconstruir en sus tres dimensiones reales, este proceso se hace complejo, ya que no se dibuja sólo para sí, sino que en ciertas etapas se hace necesario comunicar a otros alguna característica del objeto en cuestión y debe ser entendido correctamente.

Conclusiones

De las ideas elaboradas anteriormente, se puede destacar que: "la habilidad de representar, en el caso de la matemática es una habilidad en extremo compleja, que desencadena una fuerte actividad interna y externa y que se desarrolla en ciclos sucesivos y simultáneos de acción interna y externa, por lo que su estudio, para su aplicación a un diseño didáctico para su enseñanza y aprendizaje, debe enfocarse como un proceso".
Por todo lo antes mencionado se puede concluir: Primero, que las diferentes formas de representación desarrollan diferentes destrezas cognoscitivas. Segundo, la selección de una forma de representación influye no sólo lo que uno es capaz de representar, influye en lo que uno es capaz de ver. Tercero, las formas de representación pueden combinarse para enriquecer el conjunto de recursos a los cuales los alumnos pueden responder. Y cuarto, cada forma de representación puede ser usada de diferentes maneras y cada manera requiere el uso de destrezas y formas de pensamiento diferentes.

Referencias bibliográficas

Álvarez. J. (2002). El desarrollo de la representación grafica en el arquitecto. Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas. Camagüey. Cuba.
Rodríguez M. L. (2003). Modelo holístico para el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría para arquitectos. Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas. Camagüey. Cuba.
Quintero. R. N. (2002). Metodología para perfeccionar el desarrollo de las habilidades de interpretar y representar de los estudiantes en los centros politécnicos industriales de la provincia de Camagüey durante el aprendizaje del dibujo. Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas. Camagüey. Cuba.
Ballester P. S. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Ministerio de Educación. Editorial Pueblo y Educación.
Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de *Régistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitifvde la pensée* 1993.

UN MODELO MATEMATICO DEL CONTENIDO DE PLANES DE ESTUDIO UNIVERSITARIOS

José Manuel Ruiz Socarras, Gaspar Barreto Argilagos, Ramón Blanco Sánchez
Universidad de Camagüey. (Cuba)
Jose.ruiz@reduc.edu.cu, jruizsocarras@yahoo.es
Campo de investigación: modelos matemáticos. Nivel educativo: superior
Palabras clave: modelo, organización, contenido, currículum, grafo

Resumen
El objetivo del trabajo fue elaborar una metodología que facilite una organización flexible del contenido de planes de estudio universitarios, fundamentada en un modelo teórico elaborado al efecto. Se utilizó fundamentalmente el método sistémico estructural funcional, con un enfoque matemático que utiliza elementos de la Teoría de Grafos para modelar matemáticamente el contenido del plan de estudio mediante un grafo, lo que permite distribuir las diferentes agrupaciones o arreglos de contenido como un todo, identificándolo con un problema secuencial que puede ser resuelto mediante métodos secuenciales.

El Modelo

Al modelar la organización del contenido de planes de estudio universitarios, se aprecia que la misma se compone de dos tipos de organización: de tipo espacial y de tipo temporal, cronológico o en el tiempo. En el primer tipo, se producen diferentes agrupaciones o arreglos de contenido, que en su conjunto conforman el contenido del plan de estudio como un todo; mientras que en el segundo tipo se produce el ordenamiento en el tiempo de dichas agrupaciones, a partir de determinados tipos de relaciones que se dan entre tales agrupaciones.
A partir de tales ideas el autor realiza las siguientes definiciones:
Definición: Un macrocomponente es la unidad básica de contenido, considerada como elemento que no es divisible respecto a la organización del contenido del plan de estudio, en el espacio y en el tiempo; que respeta la lógica de la ciencia y que es portador de conocimientos, habilidades y valores necesarios para el logro de los objetivos que se persiguen en diferentes momentos del proceso de formación del profesional.
De la anterior definición se destacan los siguientes aspectos esenciales que caracterizan a un macrocomponente:

- *El macrocomponente como necesidad para el logro de objetivos*, expresa la relación dialéctica entre las categorías didácticas de Objetivo y de Contenido.
- *El macrocomponente compuesto por conocimientos, habilidades y valores,* significa que debe permitir el desarrollo de habilidades y la formación en valores.
- *El macrocomponente respecto a la lógica de la ciencia*, significa que se respeta la lógica de la ciencia tanto hacia el interior del macrocomponente, como hacia su exterior en relación con las dependencias e independencias (vínculos) que pueden existir entre diferentes agrupaciones de contenido que se quiere transcurran paralelamente a dicho macrocomponente, en determinado momento del proceso de formación del profesional.
- *El macrocomponente como unidad básica de contenido (elemento indivisible) para la organización del contenido del plan de estudio*, significa que la organización tanto en el espacio como en el tiempo del contenido del plan de estudio se realiza a través del macrocomponente.

Por otra parte, la existencia o no de dependencias entre los diferentes arreglos de contenido, se traduce ahora en hablar de dependencia o independencia entre macrocomponentes, las que obviamente se generan a partir de las relaciones intermaterias que se establecen entre los conocimientos y habilidades que conforman a los diferentes macrocomponentes, pero que toman un significado especial en el contexto del profesional que se quiere formar en una carrera en particular. Es decir, el autor considera que este tipo de relación intermateria a nivel de la lógica de la ciencia de la que se nutre, puede variar en el marco de una profesión, atendiendo a sus particularidades y por tanto el autor introduce la siguiente definición de relación de necesidad entre macrocomponentes.

Definición: Entre dos macrocomponentes x_i y x_j existe la relación de necesidad (x_i,x_j), si para el estudiante aprender al menos una porción de x_j, debe haber aprendido al menos una porción x_i, en cuyo caso se dice, de forma simplificada, que x_j necesita de x_i. En caso contrario, se dice que entre ambos macrocomponentes no existe relación de necesidad o que x_j no necesita de x_i.

Esta definición permite diferenciar la posición que ocupa cada macrocomponente como parte del contenido del plan de estudio, lo que a su vez clasifica las relaciones de necesidad en dos tipos:

- Relación de necesidad que es de precedencia o simplemente relación de precedencia, en cuyo caso el macrocomponente x_i está obligado a preceder al macrocomponente x_j.
- Relación de necesidad que no es de precedencia o simplemente relación de no precedencia, en cuyo caso el macrocomponente x_i no está obligado a preceder al macrocomponente x_j pero si está obligado a no sucederlo o sea a no sobrepasarlo en el tiempo.

Pero no todas las relaciones de necesidad tienen igual significado o incidencia en el proceso enseñanza aprendizaje, es decir, no tienen igual intensidad, de ahí que el autor introduzca el concepto de Peso de la Relación para significar a través de una escala la incidencia que tiene dicha relación en el proceso enseñanza aprendizaje.

De esta forma la organización tanto espacial como en el tiempo del contenido del plan de estudio, permite al estudiante abordar dicho contenido a través de una sucesión en el tiempo de periodos o niveles, conformados cada uno por macrocomponentes y de manera que un macrocomponente se encuentra ubicado en un solo nivel, lo que llevó al autor a las siguientes definiciones de Nivel de Organización del contenido y Esquema o formato del plan de estudio.

Definición: Un Nivel de Organización es un intervalo de tiempo en el que se ubican uno o más macrocomponentes como objeto de enseñanza aprendizaje simultáneamente y de manera que un macrocomponente no puede ubicarse en más de un nivel. Por su parte el conjunto de los niveles de organización del contenido del plan de estudio conforman el Esquema o formato del plan de estudio.

Como se puede apreciar, el autor concibe la organización del contenido del plan de estudio en macrocomponentes distribuidos en el tiempo, genera un *esquema o formato del plan de estudio*, conformado por un *sistema de niveles de organización*, que es el que se asume para la carrera. Debe notarse que el número de estos niveles para una carrera dada, no está preestablecido, sino que se obtiene en el propio proceso de organización y en general varía de una carrera a otra. La duración en el tiempo de cada nivel es también en general variable, así como el número de macrocomponentes que en él se ubican.

El problema de distribuir los macrocomponentes de manera que se satisfagan la mayor cantidad posible de relaciones de necesidad, pero con flexibilidad, es un problema difícil y

complejo de solucionar, dado por el número de macrocomponentes y de relaciones entre ellos, por lo que se requiere del empleo de métodos que permitan obtener la solución sobre una base cada vez más científica.
Según Kaufmann (1978) en el estudio de los fenómenos de organización, la teoría de las redes o Teoría de Grafos, puede ser eficaz en la resolución de ciertos problemas secuenciales, o sea, problemas que consisten en colocar en cierto orden cronológico operaciones que no son generalmente independientes y que hacen intervenir disponibilidades y recursos, aplicación de técnicas y distribución de tiempos. Ciertas operaciones elementales no pueden efectuarse más que con la condición de que ciertas otras hayan sido terminadas, pero varias operaciones pueden ser simultáneas. Se supone que ninguna de las operaciones puede ser fraccionada y que el intervalo de tiempo transcurrido entre la iniciación de una operación y la iniciación de la siguiente es determinado y conocido. Una red así construida no debe contener ningún circuito, de lo contrario el problema no tendría sentido.
Como se observa, el problema de la distribución de los macrocomponentes, se puede identificar a la luz de la Teoría de Grafos como un problema secuencial y puede ser resuelto mediante la utilización de métodos secuenciales.
La utilización de la Teoría de Grafos como modelo matemático del contenido del plan de estudio, tiene sus bases, en la relación sistema - modelo, como parte de uno de los diferentes enfoques de los que se han nutrido desde sus inicios los intentos por crear una Teoría General de Sistemas: el enfoque matemático. El enfoque matemático de la Teoría General de Sistemas (TGS) presupone considerar al sistema como un modelo matemático de las relaciones entre sus componentes. Ha aportado a la TGS tanto las ventajas como desventajas propias de la utilización de la Matemática en cualquier disciplina.
Como ventajas está la precisión de las formulaciones, la brevedad de la exposición, el rigor de la deducción y en la toma de decisiones, la facilidad en la realización de inferencias. Para Langefors (1982) la Matemática indispensable para la descripción formal y el análisis más fundamental de los sistemas es tan sencilla que parece muy justificado que se familiarice con ella todo aquel que desee estudiar o aplicar métodos de sistemas. Artola (1989) señala que la necesidad de optimizar las decisiones que son adoptadas en los sistemas organizativos de gran complejidad dio lugar, en los últimos decenios, al nacimiento y desarrollo de nuevas corrientes científicas. En particular han alcanzado un notable auge disciplinas como la Investigación de Operaciones y la Teoría de Sistemas. En los sistemas organizativos es posible la adopción de decisiones óptimas a partir de un criterio formulado para todo el sistema, pero – continua Artola - la aplicación práctica de esta idea se ha visto limitada entre otras cosas porque la toma de decisiones se ha venido definiendo con la ayuda de la intuición humana.
Como desventajas de este enfoque está que en muchos sistemas es difícil especificar de forma precisa sus estados y postular las leyes dinámicas que determinan su progresión, cuestiones estas necesarias para poder definir con precisión el sistema mediante el enfoque matemático, mientras que a veces se puede decir mucho más acerca de los sistemas si no se intentan tales especificaciones precisas y se hacen valer las ventajas de procedimientos heurísticos especiales. Otra desventaja está en el peligro que suponen ciertas simplificaciones que hay que hacer para lograr el empleo de ciertos métodos matemáticos, lo que puede alterar el grado de generalidad de la teoría y por otro lado se corre el riesgo de confundir la exactitud de la matemática con la del sistema que se representa, suponiéndose que el resultado matemático es identificable a una conclusión teórica. Langefors plantea que el tratamiento matemático completo solo es posible para ciertas clases de sistemas pues hay sistemas complejos que no

admiten aplicar el enfoque analítico, sino solo el razonamiento conceptual e informal porque sus propiedades son excesivamente complejas o indefinidas.
Debe aclararse que el autor comparte el criterio de Sosa (1970) al expresar que el modelo matemático puede ser usado para representar algunos aspectos de un modelo teórico, lo cual no significa ni que el modelo matemático es un modelo teórico, ni que el modelo teórico sea reducible a un modelo matemático.
En resumen, en este trabajo se entiende por organización del contenido del plan de estudio, un proceso que comienza con un diseño inicial de los macrocomponentes, que a través de sucesivas aproximaciones conducen a su diseño final. Este proceso de aproximaciones sucesivas se produce a través de la distribución de los macrocomponentes en el tiempo que dura la carrera, teniendo en cuenta satisfacer la mayor cantidad posible de relaciones de necesidad, pero con flexibilidad que permita satisfacer también determinados requerimientos pedagógicos, las características del CES en donde se desarrolla el proceso y propiciando la participación activa del estudiante. El proceso concluye con la determinación de variantes de esquemas o formatos para el plan de estudio que se generan en el propio proceso de organización y se lleva esto a una negociación Institución-Estudiante.
Este tipo de organización que se propone, se diferencia de la forma tradicional de realizar la organización en los siguientes aspectos que la caracterizan:

- Se adapta el esquema o formato del plan de estudio a la organización en el tiempo de los macrocomponentes y el cumplimiento de un sistema de principios didácticos.
- Esquema o formato heterogéneo: cantidad de macrocomponentes por nivel y duración de los niveles, variables.
- Existencia de diferentes esquemas a negociar para un mismo grupo estudiantil, que participa activamente de la organización.

Observe que la forma tradicional de realizar la organización se caracteriza por:

- Esquema o formato preestablecido: la organización en el tiempo de los macrocomponentes se adapta o está condicionada por dicho formato.
- Esquema homogéneo: igual o muy poca diferencia en la cantidad de macrocomponentes por nivel y además igual esquema para carreras diferentes o sea con diferentes contenidos.
- Esquema único: no se le brinda al estudiante diferentes esquemas, a negociar cual o cuales asumir para un mismo grupo estudiantil.

La forma de realizar la organización que el autor propone, tiene en cuenta los siguientes factores:

- La lógica de la profesión, toda vez que en el diseño inicial de los macrocomponentes se tiene en cuenta los diferentes objetivos o propósitos a alcanzar en los diferentes momentos del proceso de formación del profesional.
- La lógica de la ciencia, toda vez que la organización en el tiempo de los macrocomponentes se hace sobre la base de satisfacer la mayor cantidad posible de relaciones de necesidad.
- La lógica pedagógica, por cuanto se atiende al cumplimiento de determinados principios didácticos.
- La participación activa del estudiante, al permitirles negociar el orden de cursar determinadas macrocomponentes.

- Los intereses del Centro de Estudios de Educación Superior (CES), por cuanto el profesor al negociar con el estudiante y tomar decisiones, tiene en cuenta las fortalezas, debilidades y en general las características del CES en que se realiza la organización.

De esta forma la organización propuesta se caracteriza por:

- Mayor respeto a la lógica de la ciencia
- No se adapta a un esquema o formato preestablecido, sino que el esquema se adpata a ella.
- Esquema heterogéneo: cantidad de macrocomponentes por nivel y duración de los niveles, variables.
- Aumento del número de niveles y disminución del número de macrocomponentes por nivel, así como la duración de cada nivel.
- Diferentes esquemas a negociar con un mismo grupo de estudiantes, sin afectar la calidad de la organización.

Este tipo de organización tiene como ventajas:

- Permite una participación activa del estudiante, así como un mayor protagonismo profesional.
- El estudiante alcanza mayores niveles de autonomía, compromiso, motivación e interés.
- El profesor puede realizar un mayor y trabajo diferenciado con los estudiantes.
- Se propicia la permanencia del estudiante en la carrera, la no repitencia y los porcentajes de graduados.
- Existen menos violaciones de precedencias y simultaneidad entre macrocomponentes.
- Se concentra el trabajo docente en periodos de menor tiempo.
- Se propicia la adaptación del proceso docente educativo a las características del CES.

La Metodología

Una metodología basada en el modelo anterior, para la organización del contenido, consta de las siguientes etapas:

Etapa de Diseño

Objetivo: Determinar los macrocomponentes.

Acciones principales.

- Definir esquema o formato inicial del plan de estudio.
- Definir propósitos por niveles del esquema inicial.
- Determinar los macrocomponentes.
- Determinar las relaciones de necesidad con sus correspondientes pesos de la relación.

Etapa de Distribución

Objetivo**:** Obtener el esquema del plan de estudio sobre la base del cual se negociará con el estudiante.

Acciones principales

- Determinación y rompimiento de circuitos.
- Distribución de los macrocomponentes por niveles.
- Reducción de niveles.
- Satisfacción de nuevas relaciones de necesidad.

- Negociación de diferentes variantes de organización.

Etapa de Precisión

Objetivo: Obtener los objetivos por niveles.

Acciones principales: Precisión de los propósitos y definición de objetivos.

Conclusiones

Es posible y conveniente modelar la organización del contenido de planes de estudio universitarios, como un proceso que comienza con un diseño inicial de los macrocomponentes, que a través de sucesivas aproximaciones conducen a su diseño final.

Este proceso de aproximaciones sucesivas se produce a través de la distribución de los macrocomponentes en el tiempo que dura la carrera, teniendo en cuenta satisfacer la mayor cantidad posible de relaciones de necesidad, pero con flexibilidad que permita satisfacer también determinados requerimientos pedagógicos, las características del CES en donde se desarrolla el proceso y propiciando la participación activa del estudiante.

El proceso concluye con la determinación de variantes de esquemas o formatos para el plan de estudio que se generan en el propio proceso de organización y se llevan a una negociación Institución - Estudiante.

El proceso de organización requiere del concepto matemático de Grafo, como modelo matemático del contenido del plan de estudio, dado la complejidad de dicho proceso, al mismo tiempo que le aporta cientificidad a la toma de decisiones respecto a la organización que se asuma.

Referencias bibliográficas

Álvarez, C. (1988). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil amplio*. Universidad Central de Las Villas.

Cruz, S. (1998). *Modelo de Actuación Profesional: una propuesta viable para el diseño curricular de la educación superior*. Santiago de Cuba: Universidad de Oriente.

MES (2003). Documento base para la elaboración de los Planes de estudio D. Cuba: MES.

Fuentes, H. (2000). *Modelo Curricular con base en competencias profesionales*. Santa Fe de Bogotá:

Gimeno, J. (1996). *El currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Ediciones Morata.

González, L. (1977). *Introducción a la teoría y aplicaciones de las redes*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Jaramillo, M. (2004). La importancia de la negociación para el diálogo político: experiencias de formación en América Latina. *Perspectivas*. XXXIV (2):69-82.

Salgado, J. (1979). Importancia de las relaciones intermaterias y su preparación con métodos matemáticos en el aumento de la calidad de la enseñanza. *Educación*. IX (32):71-98.

Tyler, R. (1986). *Cómo organizar las actividades para un aprendizaje efectivo*. En *Principios básicos del currículo*. (pp.85-106). Buenos Aires: Troquel.

Zapata, P. (2001).Una aplicación de la teoría de conjuntos, la lógica de proposiciones y la teoría de grafos al análisis de mapas conceptuales. *TED Tecne, Episteme y Didaxis*. (10):79-88.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON UTILIZACIÓN DE CONOCIMIENTOS DEL MUNDO REAL[††††††]

Marger da Conceição Ventura Viana, Marcos Paulo Freitas Gomes
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). (Brasil)
margerv@terra.com.br, marger@iceb.ufop.br

Campo de investigación: resolución de problemas. Nivel educativo básico
Palabras clave: conocimiento matemático, problemas verbales de aritmética, resolución de problemas, conocimientos del mundo real

Resumen

Este trabajo analiza el uso y el aprovechamiento de los conocimientos del mundo real en la resolución de problemas verbales de aritmética (RPVA) por alumnos brasileños. Fue administrado el test de Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) a 88 alumnos del quinto grado de la Enseñanza Fundamental de las redes de enseñanza municipal, estatal y privada de la ciudad de Ouro Preto, provincia de Minas Gerais- (MG) - Brasil. Los tests fueron corregidos y analizados de acuerdo con los criterios elaborados por los autores del test, para la clasificación de las respuestas. Se constató que la mayoría de los los alumnos investigados resuelve los problemas sin tener en cuenta la realidad del contexto expresado en el enunciado. El estudio tenía también el objetivo de investigar la existencia de diferencia significativa en cuanto al éxito en la RPVA en el contexto escolar por los alumnos de las tres redes de enseñanza investigadas. La estadística del qui-cuadrada mostró que no ha habido diferencia significativa. Del trabajo constan la justificativa, la fundamentación teórica, la metodología utilizada, el análisis de los datos obtenidos de los tests administrados, las conclusiones y referencias.

Introducción

La utilización de la resolución de problemas (RP) en la Educación Matemática es considerada una buena estrategia para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Pero no como aplicación de un tema después de estudiarlo, o en paralelo, sino como un proceso que proporcione contexto(s) en los cuales, conceptos y habilidades puedan ser aprendidos. Así entendido, el problema debe ser siempre un desafío para el alumno, que no pueda ser resuelto por medio de cuentas aisladas. Son situaciones en las que los estudiantes tendrán que descubrir estrategias y procedimientos propios y originales.

Según Onuchic (1999), Polya, en 1944, ya indicaba la RP como actividad importante para desarrollar el razonamiento del alumno. Su libro "El arte de resolver problemas" contiene indicaciones y sugerencias a los profesores acerca de RP, incluso sugiere cuatro etapas muy conocidas para ayudar al resolvente en el proceso de resolución.

Para Onuchic (1999), las investigaciones acerca de RP comenzaron bajo la influencia de Polya en Estados Unidos en la década de los sesenta, y a nivel mundial en los años setenta. A partir de la década de los ochenta, la RP pasó a tener atención en casi todos los congresos internacionales, pasando a ocupar un espacio importante en los currículos de Matemática de muchos países, incluso en Brasil. Investigadores brasileños se han preocupado con el tema, investigando, discutiendo y publicando resultados en congresos y periódicos.

Infelizmente, esto no ocurre en gran parte de las salas de clase. Los problemas, en general, aparecen como aplicaciones de contenidos enseñados, o para fijarlos.

Hay incluso modelos para resolución, pero los modelos hacen que los alumnos piensen que la solución de un problema se deduce a algoritmo o cuenta. En realidad, lo que ocurre es la

[††††††] En este trabajo se considera utilización de conocimientos del mundo real, cuando el estudiante al determinar la respuesta a un problema planteado al realizar procedimientos algorítimicos, la analice desde el punto de vista lógico de la realidad en que vive.

memorización de algoritmos. También que la respuesta es única y siempre posible. En general se presentan ejercicios repetibles y sin conexiones con la vida del alumno.
Según resultados de investigaciones realizadas, ese tipo de enseñanza no contribuye para un mejor aprovechamiento de esa actividad en el aprendizaje de las matemáticas.
Por el contrario, puede provocar dificultades como no utilizar conocimientos del mundo real (contexto) cuando la modelación del problema lo exige[‡‡‡‡‡‡]. Esto fue constatado por Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) en niños de 11-13 años. Esta investigación originó otros estudios en diversos países: en Bélgica (Verschaffel, De Corte y Borghart 1997), Japón (Yoshida, Verschaffel y De Corte, 1997), Suiza (Reusser y Stebler, 1997), Venezuela (Hidalgo, 1997) y Singapur (Lee y Yee, 2004). Los resultados de estos estudios muestran que los sujetos no utilizan conocimientos del contexto cuando resuelven problemas verbales de aritmética en la sala de clase. La investigación de Hidalgo es la única realizada en Latinoamérica (que conocemos), además de la de Souza (2004), en la ciudad de Mariana, MG-Brasil. Debido a la importancia de la resolución de problemas para el aprendizaje de matemáticas y a la escasez de investigaciones en Brasil sobre RPVA, decidimos replicar el test de Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) para verificar si otros estudiantes de Brasil reaccionan de modo similar o no, frente a problemas que exigen activaciónde conocimientos del mundo real (contexto). De esta forma, el objeto de investigación fue analizar el uso y el aprovechamiento de los conocimientos del mundo real por alumnos de quinto grado cuando están resolviendo problemas verbales de aritmética en la sala de clase. Se trata de un estudio de caso exploratorio donde se utilizó análisis cualitativo y cuantitativo, realizado en la ciudad de Ouro Preto-MG, Brasil.

Fundamentación teórica

Los problemas verbales pueden ser definidos como una descripción de alguna situación, una descripción de sucesos que utiliza el lenguaje común. Para resolverlos, el alumno debe hacer una matematización utilizando el sistema de códigos de las matemáticas. Así, los problemas verbales constituyen una importante área de la matemática educativa porque presentan interacción entre matemáticas y realidad.
Para Reusser y Stebler (1997), los problemas verbales ofrecen oportunidad para estudiar la interacción entre proceso lingüístico, proceso matemático, raciocinio y (e) inferencia situacional, además de posibilitar que los niños lidien con el buen sentido y el proceso de matematización (estructuración de la realidad a través de medios matemáticos), en especial la modelación. Para Polya (1962, p. 59), "al resolver un problema verbal por medio de ecuaciones, el estudiante traduce una situación real en términos matemáticos: tiene una oportunidad para verificar que conceptos pueden ser relacionados con la realidad, pero tales relaciones deben ser trabajadas con cuidado".
En Brasil, las directrices para la enseñanza de las matemáticas ofrecen sugerencias acerca de RP, como se puede ver en los Parámetros Curriculares Nacionales-PCN's (1998, pág.31): "La RP no es una actividad para ser desarrollada en paralelo o como aplicación del aprendizaje, sino que el aprendizaje en Matemática debe ser orientado en una perspectiva de RP, el problema ofrece el contexto donde se pueden aprender conceptos, procedimientos y actitudes matemáticas".

[‡‡‡‡‡‡] Aquí el significado de modelación es el de matematización, es decir, uso del sistema de códigos de las matemáticas para cambiar el lenguaje verbal para matemática.

Por otra parte, para Onuchic (1999), aunque resolver problemas sea un buen camino para enseñar Matemáticas el trabajo con RP en sala de clase aún no está teniendo resultados satisfactorios en el sentido de hacer que el alumno adquiera conocimiento.
Además, la falta de acuerdo de lo que significa problema, apuntada por Ferreira (2001), dificulta las discusiones acerca de RP. Según esa autora, algunos definen problema como actividad cognitiva, otros como tarea abierta, para algunos tarea intelectual, otros como relacionado con el aprendizaje, etc.
En este artículo consideramos problema según Lester (1982) apud Viana (2002): "Es una situación en que el sujeto o equipo desea o necesita resolver y no tiene camino inmediato y rápido para llegar a la solución". Así, es fácil diferenciar problema de ejercicio, pues si el medio ya es conocido no se trata de problema. Además, lo que es problema para alguien puede no serlo para otro, ya que el otro puede no necesitar, o no desear resolverlo, o entonces ya disponer de medios para solucionarlo. De esta manera, aunque un alumno sepa que objetivo alcanzar, y lo quiera, pero no tenga los medios inmediatos para obtenerlo estará enfrentando un problema. Por lo tanto, un problema matemático es algo que invita al estudiante a investigar, buscar estrategias, descubrir nuevas informaciones. Para eso, es necesario que la situación exija algo que sea coherente con los conocimientos del alumno para permitir que vaya adelante.
La compilación de resultados de investigaciones de diversos autores sobre resolución de problemas verbales realizada por Reusser y Stebler (1997) apunta evidencias de que las recomendaciones acerca de la RP para la enseñanza de las matemáticas no hagan (hayan) tenido los efectos esperados, es decir, la práctica de RP no está siendo asociada con las ideas de matematización y modelización. Por ejemplo, autores ya citados, en investigaciones recientes en Educación Matemática han demostrado evidencias de una tendencia de los estudiantes, de diferentes países, a olvidar que los datos forman parte del contexto y que deben ser analizados. En general, los niños trabajan con los datos numéricos para obtener una respuesta. Es decir, muchos estudiantes resuelven problemas en la sala de clase, sin relacionar las situaciones reales con las operaciones aritméticas que realizan. Para ellos, la Matemática de la vida parece ser diferente de la practicada en sala de clase.
Así, tendremos en cuenta los resultados de las investigaciones realizadas en la línea de Verschaffel que utilizaron cuestionarios con los problemas (test) de la investigación realizada por Verschaffel, De Corte y Lasure (1994). Los tests fueron administrados colectivamente a alumnos de 11-13 años, para seren **(ser)** resueltos con lápiz y papel. Los resultados obtenidos, en todas **las** investigaciones citadas, muestran que en la RPVA los alumnos utilizan poco los conocimientos del contexto para solucionarlos. En cuanto al test, está compuesto por 20 problemas verbales de aritmética, involucrando las cuatro operaciones fundamentales: adición, sustracción, multiplicación y división. De estos, diez son problemas simples (denominados PS), cuya solución envuelve solo adicionar, sustraer, multiplicar o dividir los datos del problema. Los otros diez problemas, además de las cuentas, envuelven también el análisis de las realidades del contexto indicadas en el enunciado del problema. Estos fueron denominados PP. Los problemas están agrupados en parejas compuestas por un problema PS y un PP. Vamos a ilustrarlos con los problemas PS7 y PP7.
Problema PS7: El abuelo de Gisele, André, Inês y Mauricio les regaló una caja conteniendo 14 barras de chocolate que deben ser divididas equitativamente entre ellos. **¿**Cuántas barras de chocolate recibirá cada uno?
Problema PP7 "Un abuelo regala a sus cuatro nietos una caja conteniendo 18 globos que deben ser divididos equitativamente entre ellos. ¿Cuántos globos recibirá cada niño?"

Para solucionar el PS7 es suficiente hacer una división, sin embargo, la solución del PP7 no se resume a una división.

El objetivo de nuestra investigación está en el contexto de problemas verbales. El principal fue analizar el éxito de los alumnos brasileños en los problemas PP del test de Verschaffel, De Corte y Lasure (1994). De acuerdo con los resultados de investigaciones similares obtenidos por investigadores en otros países y los de Souza (2004), en Mariana, MG-Brasil, sospechamos que los de Ouro Preto también presentarán resultados parecidos. Así, tenemos las hipótesis:

H1: Los alumnos presentan respuestas no realistas a los problemas verbales de aritmética propuestos en la escuela.

H2: No hay diferencia significativa entre las respuestas de los alumnos de las tres redes de enseñanza respecto a las consideraciones realistas en la resolución de problemas verbales de aritmética propuestos en la escuela.

Metodología

Procedimientos y Población. Las escuelas fueron invitadas a participar en la investigación. Cuando las escuelas se dispusieron a participar, el investigador fue presentado a los profesores y a las clases para un contacto inicial. Los alumnos fueron informados que la actividad formaba parte de una investigación sobre el proceso de enseñanza aprendizaje a través de la RP para la elaboración de una monografía para el curso de Especialización en Educación Matemática de la UFOP (Gomes, 2005).

Así, fueron investigadas tres escuelas de Enseñanza Fundamental, siendo una de la red estatal, que denominamos "E" una municipal "M" y otra de la red particular "P".

Las clases fueron seleccionadas por la dirección, supervisión escolar y los profesores, teniendo en cuenta el horario disponible del investigador y de las clases, así como la concordancia de los alumnos para resolver el test.

De cada escuela, con la colaboración del profesor, fue investigada una clase. De la red estatal participaron 31 alumnos, de la municipal 25 alumnos y de la particular 32. En total participaron de la investigación 88 alumnos.

Instrumento - Como el objetivo de la investigación era verificar si los alumnos tienen en cuenta sus conocimientos del mundo real (contexto del problema), cuando resuelven problemas verbales de aritmética en la escuela, utilizamos la versión portuguesa del test escrito, elaborado y aplicado por Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) en su investigación. La versión portuguesa fue encontrada en Souza (2004, pág. 24-25) que utilizó el test en su investigación, habiendo hecho su validación.

En cuanto a la aplicación, los tests fueron aplicados en dos clases (consecutivas) de matemática. Los estudiantes fueron informados de que no deberían preocuparse por las notas, pues el objetivo era verificar como resolvían los problemas y las dificultades encontradas. Y, también de que debajo del enunciado de cada problema había dos cuadros: un para la solución del problema y otro para comentarios, si él lo considerase necesario.

Análisis de los datos

Las soluciones de los problemas fueron analizadas teniendo en cuenta si eran realistas (utilización de conocimientos del contexto) o no.

Las respuestas dadas por los alumnos a los problemas PS fueron evaluadas para ser comparadas con los resultados de los problemas denominados como PP, cuya solución depende de la interpretación realista de los datos. Fueron tenidos en consideración los cálculos, los resultados y los comentarios hechos por los alumnos.

Las respuestas a los problemas PP (cálculos, resultados y comentarios) fueron clasificadas y analizadas, de acuerdo con las cinco categorías adoptadas por Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) en su estudio: RR (respuesta realista), RN (respuesta no-realista), ET (error técnico), SR (sin respuesta) y OR (otra respuesta).
Para mejor explicar las categorías adoptadas por los autores del test, vamos a ilustrarlas con respuestas al problema PP7.
Respuesta realista (RR): muestra que el alumno tuvo en cuenta su conocimiento relativo al mundo real y, más específicamente, del contexto presentado en el enunciado del problema. En el caso del problema PP7 la *respuesta realista* (RR) será: "4 globos y sobran 2", pues es necesario dividir los 18 globos equitativamente entre los niños, y como medio globo no vale nada, sobraron 2. *Respuesta no realista* (RN): respuesta coherente, donde se puede constatar que la modelación matemática fue hecha de forma adecuada, que los cálculos fueron bien efectuados, más que el alumno no tuvo en cuenta el contexto real del problema. Por ejemplo, la respuesta para el problema PP7 "cada niño recibirá 4,5 globos", resultado de la división de 18 por 4 es una respuesta fuera de la realidad, es decir, no-realista pues ¿para qué sirve medio globo? *Error técnico* (ET): respuesta donde se puede constatar que la modelación matemática se hace de forma apropiada, pero el alumno comete errores de cálculo. Es el caso, por ejemplo, de alguien que al resolver el problema PP7, comete un error al dividir 18 por 4 y responde más de 3,15 globos. *Sin respuesta* (SR): el alumno no da respuesta o afirma que él no puede, no desea o no sabe realizar esta división. *Otra Respuesta* (OR): respuesta no clasificada en las categorías anteriores o respuesta totalmente alienada, por ejemplo, hacer multiplicación en lugar de división en el problema PP7.
Los comentarios proporcionados por cada problema serán utilizados para distinguir dos subcategorías de cada una de las precedentes en los problemas PP. La señal + indica que el alumno hizo aparentemente referencia a sus conocimientos del mundo real y la señal – indica lo contrario. Esas subcategorías serán utilizadas en el análisis de las respuestas dadas a los diez problemas denominados PP. En resumen, serán consideradas respuestas realistas todas las pertenecientes a una de las subcategorías: RR^+, RR^-, RN^+, ET^+, SR^+ y OR^+.

Resultados obtenidos en los problemas

En cuanto a los problemas PS, las respuestas de estos fueron analizadas para comprender mejor las ofrecidas a los PP, cuya solución exige que el sujeto considere el contexto revelado en el enunciado del problema. Las categorías consideradas para los problemas PS son: RC (repuesta correcta), ET (error técnico), SR (sin respuesta) y OR (otra respuesta).
En cuanto a los problemas PP, reuniendo todas las respuestas de los alumnos, clasificadas realistas, se obtuvo el 6,5%, porcentaje muy bajo, peor que el de Souza (2004) que obtuvo el 8,9% de respuestas clasificadas realistas.
Es cierto que los alumnos tuvieron más éxito en los problemas PS pues hubo un 60% de respuestas correctas, en cuanto que solamente 6,5 % de las respuestas a los problemas PP de los 88 alumnos fueron consideradas realistas. Estos resultados son similares a los de las investigaciones estudiadas, aunque los sujetos de otros países presentaron índices superiores a los de los brasileños.

Conclusiones

De los datos obtenidos se puede constatar que los alumnos investigados activan muy poco sus conocimientos del mundo real para solucionar problemas. De hecho solo 55 (o sea-el- 6,5 %) de las 880 respuestas pudieron ser consideradas realistas. Además, muchos problemas no tuvieron ninguna respuesta realista. Así, es posible considerar que nuestra primera conjetura

es verdadera, es decir, los alumnos presentan respuestas no realistas a los problemas verbales de aritmética propuestos en la escuela.
En cuanto a la otra conjetura, fueron comparados los resultados generales obtenidos en el test por los alumnos de cada una de las redes de enseñanza investigadas. Ninguna diferencia significativa fue encontrada. Las tres presentaron índices de respuestas realistas abajo del 6,5%. Estadísticas del qui-cuadrada fueron calculadas para cada uno de los diez problemas. Ninguna diferencia significativa (p =0,05) fue encontrada. Estos resultados confirman la segunda conjetura: no hay diferencia significativa entre las respuestas de los alumnos de los tres equipos de las tres redes de enseñanza respecto a las consideraciones realistas en la resolución de problemas verbales de aritmética propuestos en la escuela.

Referencias bibliográficas

Ferreira, A. A., (2001). Concepções de Professores de Matemática acerca da Formulação de Problemas e Resolução de Problemas: Processos de Mudança. Belo Horizonte: UFMG, (Tese de Mestrado em Educação).

Hidalgo, Mirian C. (1997). L'activacion des connaissances à propôs du monde réel dans la résolucion de problèmes verbaux em arithmétique. Faculte de Sciences de L'Education, Université Laval, Quebéc.

Gomes, Marcos Freitas, (2005). Estudo da ativação de conhecimentos do mundo real na resolução de problemas verbais de aritmética no contexto escolar, segundo teste de Verschaffel. Ouro Preto: UFOP, (Monografia de Especialização em Educação Matemática).

Lee, Koay Phong; Yee, Foong Pui. Do Singapure pupils apply common sense knowledge in solving realistic mathematics problems? Available from www.aare.edu.au/96pap/koayp96.470. citad:13 mar. 2004.

Lester, F. & Randall, C., (1982). Teaching Problem Solving: What, Why & How. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Onuchic, L. de La R., (1999). Ensino -Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. En : Investigação em Educação Matemática: Concepções e perspectivas. Org. Maria A.V. Bicudo. São Paulo: UNESP.

Parâmetros Curriculares Nacionais.(1999). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília:MEC/SEF.

Polya,G. (1962). Mathematical discovery. New York:Wiley.

Polya,G. (1978). A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro, Interciência.

Reusser, Kurt; Stebler, Rita, (1997). Every word problem has a solution- the social rationality of mathematical modelling in schools. Great Britain, Learning and Instruction, v. 7, n. 4, p.309-327.

Souza, Anilda Celestina, (2004). Considerações realistas na resolução de problemas verbais em aritmética. Monografia apresentada ao curso de Especialização em Educação Matemática Ouro Preto: UFOP, 60 p.

Verschaffel, L., De Corte, E. & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. Learning and Instruction, 4. 273-294.

Verschaffel, Lieven; De Corte, Erik; Borghart, I.,(1997). Pre-service teachers conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. Great Britain. Learning and Instruction V. 7, n. 4, p.339-357,

Viana, M. C. V., (2002). A Matemática Através de Problemas. Texto Didático. Curso de Especialização em Educação Matemática. Ouro Preto: Departamento de Matemática. 10 p.

Yoshida, H.; Verschaffel, Lieven; De Corte, Erik. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: do japanese and belgian children have the same difficulties? Great Britain, Learning and Instruction v.7, n. 4 p. 329-328.

REALIDADES E DESAFIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA OS TICUNAS DA COMUNIDADE DO UMARIAÇU – TABATINGA/AMAZONAS

Lucélida de Fátima Maia da Costa, José Camilo Ramos de Souza
Universidade do Estado do Amazonas. UEA. (Brasil)
celiamaia5@hotmail.com

Campo de investigação: Etnomatemática. Nível educativo: superior.
Palavras chave: aculturação, aprendizagem significativa, ensino de matemática, Ticunas

Resumo
O ensino no Brasil passa por mudanças, com a finalidade de melhorar a qualidade do processo educativo e conseqüentemente a aprendizagem. Esta situação está presente em todas as classes sociais, bem como nas comunidades indígenas. Dentre o problema de ensino, visualiza-se a situação da Matemática, ensinada nas comunidades indígenas. Neste caso trata-se da Escola Estadual "Almirante Tamandaré", que se encontra dentro da reserva indígena ticuna do Umariaçu/ Tabatinga/ Amazonas. A escola não procura associar o conhecimento milenar matemático dos índios, em detrimento de um currículo dissociado da realidade desses estudantes. Neste trabalho, mostramos possibilidades de ensino, a ser oferecido aos estudantes ticunas com o intuito de viabilizar mudanças positivas rumo a uma evolução sistemática de seu próprio conhecimento matemático.

Introdução

O ensino da matemática é pauta de discussões em todo Brasil, comumente, voltada para a análise de novas metodologias e sua aplicabilidade. No entanto, não é perceptível, nestas discussões, preocupação com o ensino da matemática na escola indígena. No que se refere à educação indígena; pode-se dizer das mudanças e das transformações trazidas pela legislação, viabilizando a criação de leis mais favoráveis à educação diferenciada e específica para os povos indígenas.

Ressalta-se, no entanto, que apesar da educação escolar indígena ser respaldada legalmente, quanto a sua especificidade, na prática, esbarra em entraves próprios do mundo dos não indígenas e, isso se evidencia quando se observa, por exemplo, a forma como a Matemática é ensinada aos estudantes da comunidade Ticuna do Umariaçu.

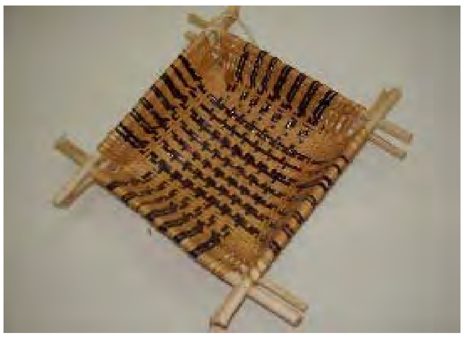
Ensinar matemática não se resume a simples exigência de memorização de fórmulas prontas e acabadas e, muito menos a uma lista de exercícios que ajude o aluno a decorar passos de um manual, mas proporcionar ao estudante compreensão e sentido do que está sendo ensinado, principalmente no que diz respeito ao uso e aplicabilidade desses conhecimentos no seu cotidiano. Mas, muitas vezes, isso se torna uma tarefa geralmente difícil, pois o currículo de matemática, no ensino fundamental e no médio, está repleto de conteúdos de alto nível de abstração que não possuem ligação com a vida dos estudantes, dificultando, dessa forma, o trabalho do professor que freqüentemente não consegue desenvolver na sala de aula o método indutivo ou fazer experimentações. Esse fato, talvez reflita traços da sua própria formação, pois segundo Freire (1998, p.49) "Se estivesse claro para nós que foi aprendendo que percebemos ser possível ensinar, teríamos entendido com facilidade a importância das experiências informais nas ruas, nas praças, no trabalho, na sala de aula [...]"

Esta dificuldade do ensino da Matemática que transcende a realidade brasileira, está evidente na realidade local da cidade de Tabatinga, principalmente na escola Estadual Almirante Tamandaré, localizada na comunidade Ticuna do Umariaçu II, reserva indígena ligada à cidade de Tabatinga/Amazonas. Esta escola não consegue conceber a realidade vivida por seu estudante, porque o conhecimento ensinado, de acordo com o programa do Estado, está dissociado do conhecimento aprendido pelo indígena junto aos membros da família e da própria comunidade.

É importante ressaltar a não observância do conhecimento existente e repassado pelos mais velhos aos mais jovens, evidenciado nos trabalhos artesanais, vislumbrados apenas como objeto de arte na escola, ficando despercebida a riqueza matemática neles existente.

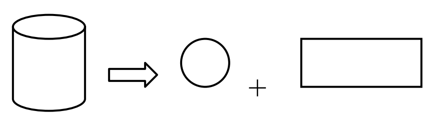
Mostrando possibilidades de ensino

Nesse contexto pontuamos alguns temas que poderiam ser explorados a partir desses ornamentos:

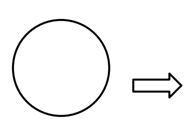


Utilizando essa peneira, o professor poderia trabalhar a presença ou a ausência de simetria, noção de paralelismo, contagem e até medida de capacidade.

Este cesto usado para guardar papéis, poderia ser utilizado na contextualização do cálculo de área, capacidade e volume de sólidos cilíndricos:

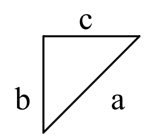


A partir desse tapete, há, por exemplo, a possibilidade de se trabalhar as noções de circunferência, círculo seus elementos (raio, diâmetro, corda) e sua área.



A = $r^2 \times \pi$

A presença de triângulos na pintura dessa máscara é dominante gerando a oportunidade de usá-la no ensino de tipos e semelhança de triângulos, e até para o estudo do Teorema de Pitágoras:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

É importante lembrar que a educação de um povo é um fenômeno em constante desenvolvimento e transformação e que para compreendê-la é necessário examinar suas raízes e conhecer sua história, como diz Marrou (1965, p.36): "Como representante de uma espécie biológica, o homem de tal sociedade, de tal meio de civilização, é filho do seu passado (é mesmo aqui que se tem direito de falar de uma herança dos caracteres adquiridos)!: as revoluções mais inovadoras não conseguem abolir toda essa herança [...]". Sendo assim, é de se esperar que o Ticuna reflita em todo o seu processo educacional escolar os conhecimentos adquiridos em suas origens e raízes culturais. Tais reflexos, são muitas vezes incompreendidos na escola não-indígena, principalmente, quando o ensino nessa escola mostra a Matemática como uma ferramenta de filtragem de lideranças, e que privilegia e reproduz apenas o conhecimento da linguagem simbólica, das generalizações e do método dedutivo, o que acarreta um processo de desvalorização do conhecimento trazido pelo ticuna para a escola e o enfraquecimento de sua própria identidade. Nesse sentido, Ubiratan D'Ambrósio afirma que:

Se isso pudesse ser identificado apenas como parte de um processo perverso de aculturação, por meio do qual se elimina a criatividade essencial ao ser (verbo) humano, eu diria que essa escolarização é uma farsa. Mas é pior, pois na farsa, uma vez terminado o espetáculo, tudo volta ao que era, ao passo que na educação o real é substituído por uma situação que é idealizada para satisfazer os objetivos do dominador. O aluno tem suas raízes culturais, parte de sua identidade, e, no processo, essas são eliminadas. Isso é evidenciado de maneira trágica, na educação indígena. O índio passa pelo processo educacional e não é mais índio, mas tampouco branco (D'Ambrósio, 1996, p. 114).

No processo de aprendizagem dessa Matemática, o ticuna começa a sofrer conflitos ocasionados pela prática educacional que lhe é imposta. As inquietações aqui apresentadas dizem respeito à aprendizagem matemática realizada pelos índios ticuna, que possuem ou possuíam sua própria Matemática e sua forma de aprender, como também de ensinar. Diante desta realidade, surgem indagações: que Matemática nós brancos temos para oferecer? Que Matemática queremos ter? Como e para que ensinar Matemática para os índios? Como facilitar a aprendizagem dessa ciência aos índios?

O processo educacional, na maioria das vezes, no que se refere ao ensino da Matemática, é caracterizado pelo distanciamento do conteúdo oferecido em relação à realidade desse povo, assim como pela dificuldade de comunicação entre professores brancos e estudantes ticuna,

inclusive no que se refere à língua. Reforça-se, assim, uma tendência mais geral de enfraquecimento da cultura dessa comunidade, incluindo uma possível perda de domínio de sua própria língua.
Ressalta-se a importância de perceber como o conhecimento matemático é construído no seio dessas comunidades, para depois associar ao programa matemático produzido pelo branco.Isto fica patente em relação à Matemática escolar ensinada nas escolas da comunidade que é resultado do pensamento do branco e não do índio, dificultando a aprendizagem, o valor, o sentido e a importância da Matemática para a vida do estudante indígena, que passa a conceber e construir novos saberes para poder fortalecer sua identidade cultural, a partir, do que lhe é ensinado na escola e do que é aprendido na convivência comunitária.
Diante do conflito estabelecido no estudante, a partir do ensino de matemática, há de considerar a característica, o rigor e o formalismo da exigência da ciência exata, cabendo ao professor quebrar essa condição do ensino de fórmula para o ensino de contexto, sem perder de vista o conhecimento produzido na sociedade Ticuna.
Dessa forma, a linguagem matemática utilizada em sala de aula é decisiva para a aprendizagem do estudante, como afirma Pais (2002, p.21): "[...] A formalização precipitada do saber escolar, por vezes, através de uma linguagem carregada de símbolos e códigos, se constitui em uma possível fonte de dificuldade para a aprendizagem". Logo, pode-se dizer que o ato de ensinar é estar provocando situações, instigando o estudante, para poder desencadear possibilidades de aprendizagem.
Pressupõe-se que a linguagem, assim como todo o conhecimento trazido pelo estudante, servirá de ponto de partida para os trabalhos a serem desenvolvidos, mas essa preocupação, nem sempre é constante ao se tratar de estudante indígena, geralmente, ignora-se o seu conhecimento.
Nesse sentido, D'Ambrósio (1996, p.117) diz que:

> *[...] isso se faz com povos, em especial com os indígenas, seja na linguagem, seja nos sistemas de conhecimento em geral, e particularmente na matemática. Sua língua é rotulada, inútil, sua religião torna-se "crendice", sua arte e seus rituais são folklore, sua ciência e sua medicina são "superstições" e sua matemática é "imprecisa" e "ineficiente", quando não "inexistente.[...]".*

Saviani (1980, p.23), expressa-se sobre o ato de refletir, que é o ato de retomar, reconsiderar os dados disponíveis, revisar, vasculhar numa busca constante de significados. É examinar detidamente, prestar atenção, analisar com cuidado. Essa reflexão se faz necessária ao observar a dinâmica de trabalho escolar desenvolvida com os estudantes ticunas do Umariaçu, onde, nem os professores, nem os estudantes, percebem a causa e o momento em que o conhecimento matemático trazido pelo ticuna torna-se descartável ou é ignorado no processo de construção do conhecimento científico. Dessa forma, se faz necessário motivar e viabilizar a descoberta do "porque" o professor do Ensino Fundamental, insiste em não aproveitar a base matemática apresentada pelo ticuna para sistematização desse conhecimento, possibilitando assim, a interpretação e a atribuição de significado. A Matemática sem significado, sem contextualização, torna-se abstrata, imperceptível e conseqüentemente inútil à vida do estudante.
A educação escolar deve se iniciar pela vivência do aluno, mas isso não significa que ela deva ser reduzida ao saber cotidiano. No caso da Matemática, consiste em partir do conhecimento dos números, das medidas e da geometria, contextualizados em situações próximas do aluno.

O desafio didático consiste em estruturar condições para que ocorra uma evolução desta situação inicial rumo aos conceitos previstos (Pais, 2002, p.28).

Muitos estudantes ticunas se destacam nos cálculos e geralmente são exímios desenhistas. A maioria tem aptidão para a arte (desenho, escultura e pintura) o que poderia ser explorado para o trabalho com a Geometria, por exemplo, mas geralmente o professor não explora tal aptidão e nem a relaciona com o conteúdo matemático a ser trabalhado.
As atividades comerciais desenvolvidas dentro e fora da comunidade e o trabalho de transporte de pessoas de uma margem a outra do igarapé do Umariaçu, ou seja, do Umariaçu I ao Umariaçu II, também constituem elementos de ensino, mas que geralmente passam despercebidos nas aulas de matemática.

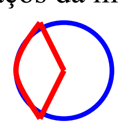
Foto: Lucélida Maia
Estudantes ticuna transportando pessoas no igarapé do Umariaçu

Esses elementos podem ser ilustrados por exemplo, no preço cobrado pelos ticunas na travessia do igarapé, que varia de R$ 0,10 a R$ 0,50 por passageiro transportado.

Nas margens desse igarapé também desenvolvem relações comerciais ao vender seus produtos, aceitam o dinheiro brasileiro (real) e o dinheiro colombiano (pesos), sem se confundirem com os valores, resolvem as operações matemáticas implícitas nas relações de câmbio, na necessidade de devolver o troco ao cliente e lidam sem grandes dificuldades com o sistema de pesos e medidas. Mas, ao chegar à escola, muitos têm dificuldades em trabalhar com frações, números decimais, e operações que envolvam o conhecimento do sistema métrico decimal.
Ainda no contexto das relações desenvolvidas a partir do igarapé, é possível, numa simples observação do trânsito de pessoas nele existente, perceber a oportunidade de explorar o ensino de assuntos matemáticos, tais como: Arcos e Ângulos.

Foto: Camilo Ramos

Observe o arco formado pelos braços da menina:



É possível também, visualizar o ângulo entre o remo e a canoa.

Considerações finais

A valorização da Matemática ticuna e a importância de se realizar pesquisas que revelem os conhecimentos matemáticos gerados, transmitidos e mantidos pelos índios é urgente, pois tais conhecimentos são ignorados ou simplesmente substituídos, nas escolas das aldeias, pela Matemática veiculada pelos livros didáticos vindo dos grandes centros urbanos.

Muitos são os desafios quando se trata de educação matemática para os ticunas e de nada adianta substituir o professor não-indígena pelo indígena, se este continuar a desenvolver a mesma prática pedagógica, como é o caso de muitos que estão atuando nas séries iniciais do Ensino Fundamental, na Comunidade do Umariaçu.

Essa comunidade, assim como as outras onde as populações indígenas estão presentes constituem um grande campo de estudos que pode revelar conhecimentos matemáticos próprios que poderiam servir de base para a estruturação escolar da Matemática a ser ensinada para esses estudantes.

É nesse sentido, que acreditamos na valorização do ensino da Matemática como possibilidade de crescimento intelectual útil para o índio, não pelo rigor científico da disciplina, mas, pelo respeito ao conhecimento do estudante ticuna na reconstrução de seus saberes e na implementação de sua visão de cidadão no mundo.

Referências bibliográficas

Brasil (1998). *Ministério da Cultura e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN. Matemática* – 5ª à 8ª séries. Brasília: MEC.

Brasil (1998). *Ministério da Cultura e do Desporto. Referencial Curricular Nacional para as escolas indígenas – RCN. Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

D'Ambrósio, U. (1996). E*ducação Matemática: Da teoria à prática*. São Paulo: Papirus.

D'Ambrósio, U. (1998). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar ou conhecer*. São Paulo: Ática.

Freire, Paulo. (1998). *Pedagogia da Autonomia: sabres necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Marrou, H. I. (1965). *Historia de la educación en la antigüedad*. Trad. José Ramón Mayo. São Paulo: Herder.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Saviani, D. (1980). *Educação: do senso comum à consciência filosófica*. São Paulo: Cortez.

COMPRENSIÓN DE LAS IDEAS DE COVARIANCIA, CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR

Ignacio Delgado Escobar; Ana María Ojeda Salazar
U.A.E.M., Morelos. (México). DME, Cinvestav, I.P.N. (México)
nachock@hotmail.com ; amojeda@yahoo.com
Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: superior

Resumen
La presente investigación estudió el papel de tres estrategias de enseñanza —tradicional, basada en el análisis exploratorio de datos, y con uso de un programa de cómputo— en las respuestas a preguntas sobre covariancia, correlación y regresión a la media, planteadas a estudiantes de nivel superior. El análisis consideró los registros semióticos (Duval, 1998) utilizados y se refirió a los tipos de conocimiento (Pollatsek et al, 1981) identificables en las respuestas de los estudiantes, aportadas en cuestionarios aplicados después de la enseñanza. El estudio, cualitativo, tuvo tres fases: documental, exploratoria y de investigación. Respecto a los conceptos citados, el enfoque de análisis exploratorio de datos obtuvo los mejores resultados, con evidencia de conocimientos funcional y analógico; luego, el uso del programa de cómputo resultó en conocimiento funcional, y el tradicional en el de cálculo.

Introducción

La poca importancia que se otorga al desarrollo conceptual de la Probabilidad y Estadística en todos los niveles del Sistema Educativo Mexicano, orienta el proceso de enseñanza de estas ramas a la de la operación de fórmulas para calcular algún parámetro estadístico y omite la interpretación. Las dificultades de comprensión de sus ideas fundamentales se revela con la manifestación de razonamientos incorrectos frente a situaciones aleatorias, particularmente con errores que se cometen en el medio social, debidos al uso de algunas heurísticas que desatienden normas de la lógica y de la suficiencia de los datos para inferencias (por ejemplo, Kahneman et al., 1982).
La comprensión de los conceptos de covariancia, correlación lineal y regresión es de interés por varios motivos. El primero es que los conceptos son relevantes en el currículum de Estadística desde el nivel medio superior para comprender otros métodos tales como análisis de varianza y análisis multivariado.
En este foro presentamos algunos resultados de un proyecto de investigación sobre la comprensión por los estudiantes de nivel superior y maestría de las ideas de covariancia, correlación y regresión a la media.

Elementos teóricos

El estudio de conceptos y técnicas de estadística incluye al tratamiento de datos y a las reglas y procedimientos de cálculo, pero a menudo los profesores que imparten esta materia no ponen énfasis en la diferenciación entre los procedimientos y reglas de cálculo y la significación de los datos, lo que provoca una confusión en el estudiante que redunda en la operación de fórmulas sin comprensión del concepto que les subyace (Pollatsek et al, 1981). Por otra parte, Batanero et al (1996) argumenta que el concepto de asociación y causalidad es de relevancia para la educación matemática, porque es fundamental para muchos métodos estadísticos que permiten modelar numerosos fenómenos en diferentes ciencias.

El fin principal en muchas de estas aplicaciones es encontrar explicaciones causales que nos ayuden a comprender nuestro entorno. Sin embargo, la asociación no implica necesariamente una relación causal. A veces existe "correlación espuria" entre variables debida a la influencia de factores concurrentes sin que haya un vínculo causal. Aparte de esta dificultad epistemológica, investigadores en la rama psicológica, como Kahneman et al (1982), han mostrado que la habilidad para emitir juicios de asociación no se desarrolla intuitivamente, que las personas adultas a veces basan sus juicios en creencias previas sobre el tipo de asociación que debería existir entre las variables, en lugar de en las contingencias empíricas presentadas en los datos, y finalmente que la existencia de tales preconcepciones en las situaciones aplicadas es otra de las dificultades de la enseñanza de la asociación.
Desde un punto de vista más general, Frawley (1999) asevera que la ciencia cognitiva argumenta abierta y descaradamente sobre representaciones mentales internas, de cálculos y de otras operaciones realizadas con base en estas representaciones internas (pág. 38).
La comprensión es un término que connota la síntesis, la habilidad para hacernos de una representación concreta y analógica. Es el modo fundamental del conocimiento para toda situación que implique subjetividad y afectividad; es el conocimiento que ejerce todo aquel que se percibe como individuo, o sea como sujeto. Se ha definido la comprensión como un proceso en que la representación de cada cosa como un pensamiento se asemeja a algo que ya conocemos. Siempre que el funcionamiento interno de una nueva cosa es bastante extraño o complicado, representamos sus partes en términos de signos más familiares. De este modo, hacemos que la novedad parezca similar a algo más común (Minsky, 1986, pág. 57; citado en Esté, 1997, págs. 189 y 190); así los sujetos pueden utilizar y aplicar los conceptos en situaciones más complicadas.
Pollatsek y sus colaboradores (1981), luego de un estudio realizado respecto a la comprensión de la media, han propuesto tres tipos tipos de conocimiento relacionados con la comprensión de un concepto, a saber, el conocimiento de cálculo, el funcional y el analógico. El primero concierne a la identificación en la expresión simbólica de un concepto de los elementos y operaciones implicados y al desarrollo de algoritmos; el segundo atañe a la advertencia de los elementos implicados en un concepto, sus relaciones y su función como unidad; el tercero interpreta la función de un concepto en diferentes contextos.
En tanto el despliegue de la actividad matemática requiere de un soporte semiótico, Duval (1998) ha caracterizado ese soporte para que constituya un registro semiótico de representación, con el señalamiento de tres actividades cognitivas de las que debe ser expresión: su producción, el tratamiento al interior de un registro dado, y la conversión de un tipo de registro a otro.
Erickson y Nosanchuk han señalado, en el primer capítulo de su obra (1977), las ventajas de la exploración de datos, *leyéndolos* mediante el uso de operaciones aritméticas básicas, de las cuales la gran arma es la substracción, y el uso de gráficas (pág. 2); se realiza esta exploración para *dar sentido* a los datos en mano antes de proceder a los cálculos o al uso de programas de cómputo, lo cual ya tendrá razón de ser.
Una de las ventajas del uso de la hoja electrónica de cálculo es la identificación de los elementos en la expresión simbólica de una entidad conceptual (Landín, 1996). Por otro lado, la presentación de gráficas con un programa de cómputo tal sugiere el uso de éste en la enseñanza luego de la propuesta de Duval citada.

Preguntas de investigación

¿Qué papel juega el tipo de enseñanza —con el uso de la hoja electrónica de cálculo, la tradicional y la basada en el análisis exploratorio de datos— en la comprensión de la covariancia, la correlación y la regresión a la media?
¿Qué dificultades manifiestan los estudiantes en tareas de producción, tratamiento y conversión de registros semióticos de representación, referidas a la covariancia, a la correlación y a la regresión a la media?
¿Qué dificultades presentan los estudiantes con referencia a los tipos de conocimiento funcional, analógico y de cómputo de la covariancia, la correlación y la regresión a la media luego de su enseñanza?
Los objetivos perseguidos fueron:
Identificar bondades y desventajas de tres enfoques de enseñanza de la covariancia, la correlación y la regresión a la media para su comprensión por los estudiantes.
Identificar los tipos de conocimiento que los estudiantes manifiestan de la covariancia, correlación y regresión a la media luego de su enseñanza.
Indagar sobre el recurso a, y entre, diferentes registros semióticos en referencia a la covariancia, correlación y regresión a la media, y sobre métodos y estrategias que los estudiantes emplean ante situaciones dadas que atañen a esos conceptos.

Métodos y procedimientos

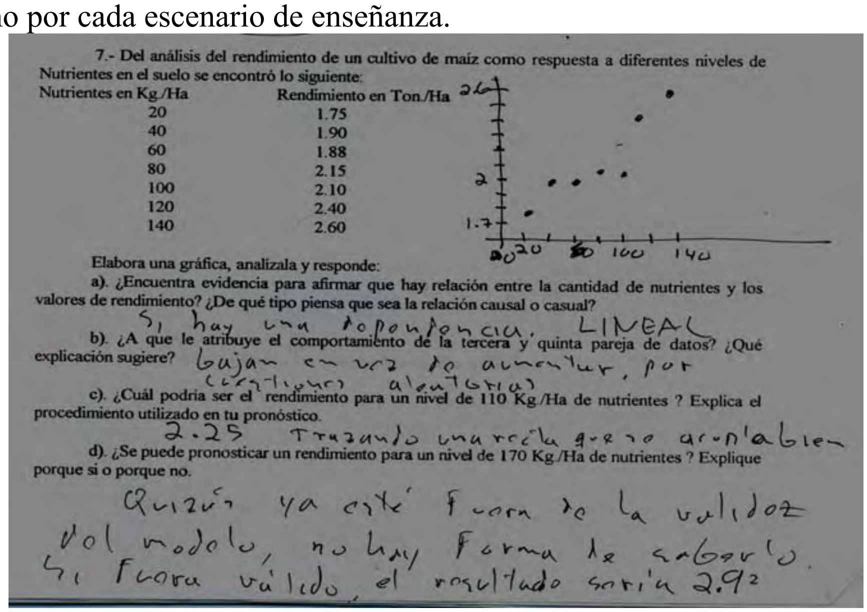
Las interrogantes de la investigación se estudiaron, de manera consecuente, en tres escenarios de enseñanza de la estadística. El escenario tradicional, es decir, el correspondiente a la enseñanza desarrollada por el docente como expositor, con el uso del pizarrón para plantear los elementos teóricos y la resolución de problemas a modo de ejemplos, con la propuesta a los estudiantes de otros adicionales a manera de ejercicios con el uso de la calculadora. El escenario con el recurso a la hoja electrónica de cálculo, que tiene lugar en el aula de cómputo. El escenario con enfoque en el análisis exploratorio de datos (Erickson et al, 1977).
Dada la importancia para el estudio de los procedimientos efectuados por los estudiantes, más allá de la consideración solamente de la corrección de las respuestas que otorgaron, el enfoque de la investigación propuesta fue cualitativo. El diseño de los instrumentos de recolección de datos y el tipo de análisis de ellos, por tanto, respondieron a la búsqueda de cualidades en los procedimientos efectuados para contestar cuestiones de los conceptos en mira principalmente, aunque algunos aspectos se atendieron en lo cuantitativo. Los instrumentos de investigación fueron guiones de clase, cuestionarios a contestar en lápiz y papel y guiones de entrevistas individuales audiograbadas semiestructuradas. Más específicamente, de las respuestas en cuestionarios y entrevistas identificamos tipos de conocimiento funcional, analógico y de cómputo de los conceptos de interés y las dificultades que manifestaron con la formación, tratamiento y conversión de un registro semiótico de representación a otro.
Merriam S. (1998) señaló, sobre los métodos cualitativos que, primero, la clave consiste en entender el fenómeno de interés desde las perspectivas de los participantes y no del investigador. Segundo, el investigador es el instrumento primario para la colección de datos y análisis. Tercero, la investigación cualitativa se refiere al estudio de casos. Cuarto, emplea la estrategia de investigación inductiva. Quinto, se enfoca en los procesos, significados y entendimiento; el producto del estudio cualitativo se enriquece descriptivamente.

Organización de la investigación y criterios de análisis

El estudio comprendió tres fases. En la primera se efectuó una revisión y análisis de contenidos temáticos de cursos de probabilidad y estadística en cursos de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos y el Instituto de Estudios Superiores de Monterrey “campus” Morelos, así como de los principales textos recomendados en éstos. La segunda fue de exploración y la tercera de desarrollo de la investigación. Para la de exploración se diseñaron dos cuestionarios con cuatro y doce ítems, que fueron respondidos por tres grupos de estudiantes, veintiuno de Maestría y diecisiete de licenciatura, sin realizar entrevista alguna.
La fase de investigación se dividió en dos etapas: 1) Curso como escenario de investigación, cuestionarios con nueve y once ítems, aplicados a tres grupos de veintidós, dieciocho y dieciséis estudiantes de maestría y licenciatura, respectivamente; y 2) tres cuestionarios con once, diez y diez ítems, aplicados a cuatro grupos con trece, veintitrés, treinta y trece estudiantes, una entrevista video grabada y doce entrevistas audio grabadas.
La obtención de los datos se llevó a cabo en el aula para las enseñanzas tradicional y con análisis exploratorio de datos; y en el aula de cómputo, para la enseñanza mediada por la hoja electrónica de cálculo. Las clases fueron impartidas en seis sesiones de dos horas en un curso completo de estadística, por el presente investigador.
Para el análisis de las respuestas interesó su corrección o incorrección y tipos de errores, y en la revisión de la justificación se consideró la interpretación del enunciado hecha por el respondiente, el tratamiento a registros de representación, y los tipos de razonamiento (heurísticas, relaciones de tipo causal, entre otros) expresados. Por limitaciones de espacio nos referiremos sólo a estos dos últimos aspectos.

Análisis y resultados

Con referencia a la fase de investigación, en este trabajo solamente se informa del análisis de tres ítems, uno por cada escenario de enseñanza.


7.- Del análisis del rendimiento de un cultivo de maíz como respuesta a diferentes niveles de Nutrientes en el suelo se encontró lo siguiente:

Nutrientes en Kg./Ha	Rendimiento en Ton./Ha
20	1.75
40	1.90
60	1.88
80	2.15
100	2.10
120	2.40
140	2.60

Elabora una gráfica, analízala y responde:

a). ¿Encuentra evidencia para afirmar que hay relación entre la cantidad de nutrientes y los valores de rendimiento? ¿De qué tipo piensa que sea la relación causal o casual?

Si hay una dependencia. LINEAL

b). ¿A que le atribuye el comportamiento de la tercera y quinta pareja de datos? ¿Qué explicación sugiere?

bajan en vez de aumentar, por (condiciones aleatorias)

c). ¿Cuál podria ser el rendimiento para un nivel de 110 Kg./Ha de nutrientes ? Explica el procedimiento utilizado en tu pronóstico.

2.25 Trazando una recta que se acomodara bien

d). ¿Se puede pronosticar un rendimiento para un nivel de 170 Kg./Ha de nutrientes ? Explique porque si o porque no.

Quizás ya esté fuera de la validez del modelo, no hay forma de saberlo. Si fuera válido, el resultado sería 2.92

Figura 1. Respuesta de estudiante que utilizó análisis exploratorio (ítem 8).

En este ítem el estudiante puso en juego el tratamiento del registro tabular, al poner en relación los datos de una variable con la otra, luego la conversión al diagrama de dispersión y también exhibió tratamiento de éste; mediante la lengua natural evidenció identificación de las variables, de la escala, la variación aleatoria y la asociación (dispersión y pendiente) (Duva1, 1998). Esta información indica que el sujeto posee un conocimiento funcional, por lo menos, acerca de la correlación y regresión lineal, ya que puso en relación el concepto en una situación específica. El conocimiento de cálculo lo exhibió en el tratamiento gráfico.

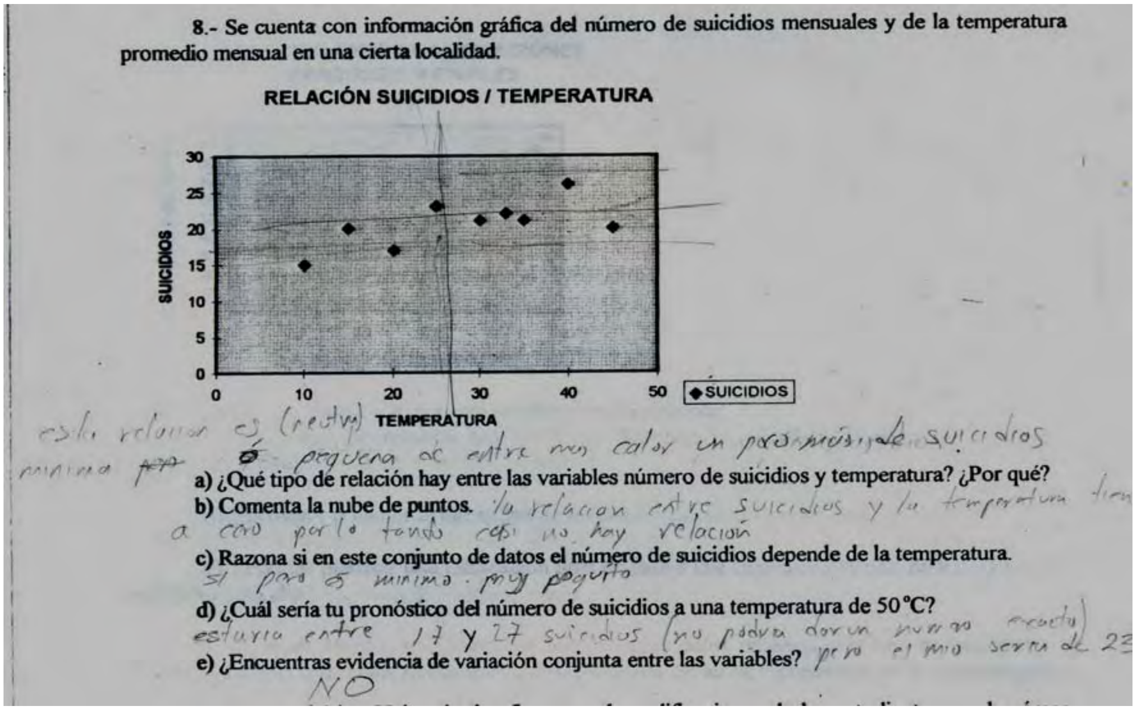
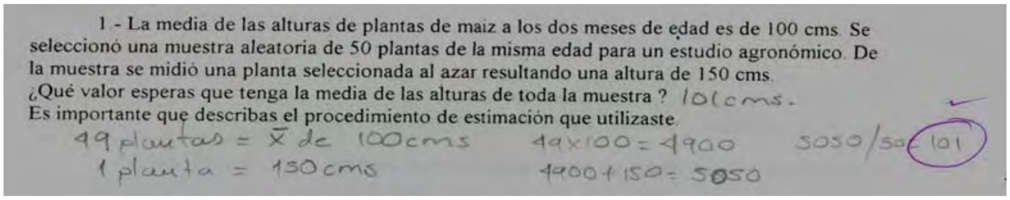


Figura 2. Respuesta de estudiante que utilizó la hoja electrónica de cálculo (ítem 11).

El estudiante, cuyas respuestas proporcionó en lengua natural principalmente, ubicó de manera aproximada el centro de gravedad de la nube de puntos en el diagrama de dispersión para responder las preguntas; por otro lado, efectuó la conversión entre el registro gráfico y la lengua natural. De acuerdo con Pollatsek et al (1981) evidenció el conocimiento de cómputo del diagrama de dispersión y el conocimiento funcional, ya que, identificó las variables dependiente e independiente en el diagrama de dispersión, y advirtió el grado de asociación mediante la estimación de la pendiente y la dispersión de los puntos a una recta.

En lo que concierne a la enseñanza tradicional, ésta resultó principalmente en conocimiento de cálculo de los conceptos de interés. La figura 3 corresponde a la respuesta de un estudiante a un problema referido a la media; evidenció en su contestación conocimiento de cómputo y funcional de la media en la solución de acuerdo al contexto del problema.

Por otro lado, no manifestó el uso de la heurística de representatividad, de acuerdo con (Kahneman el al., 1982).



1.- La media de las alturas de plantas de maiz a los dos meses de edad es de 100 cms. Se seleccionó una muestra aleatoria de 50 plantas de la misma edad para un estudio agronómico. De la muestra se midió una planta seleccionada al azar resultando una altura de 150 cms.
¿Qué valor esperas que tenga la media de las alturas de toda la muestra ? 101cms.
Es importante que describas el procedimiento de estimación que utilizaste.

49 plantas = $\bar{x}$ de 100cms 49x100 = 4900 5050/50 = 101
1 planta = 150cms 4900+150 = 5050

Figura 3. Respuesta de estudiante con una enseñanza tradicional (ítem 16).

Conclusiones

Se puede afirmar que, respecto a registros semióticos de representación, los estudiantes con enseñanza de análisis exploratorio (Erickson, 1977) tuvieron el mejor desempeño: el 70% con la formación, tratamiento y conversión de las representaciones semióticas (Duval, 1998); les siguieron los estudiantes cuya enseñanza recurrió al uso de la hoja electrónica de cálculo, quienes únicamente ejecutaron tratamiento y conversión de registros semióticos. Los estudiantes con enseñanza tradicional, en menor proporción realizaron el tratamiento y la conversión de registros.

En virtud de esos resultados, los estudiantes que utilizaron el procedimiento de análisis exploratorio dieron evidencia de conocimiento analógico, funcional y de cómputo en dicho orden, mientras que los que utilizaron la hoja electrónica de cálculo, sólo evidenciaron tener conocimientos funcional, analógico y de cómputo en dicho orden; finalmente en los estudiantes con enseñanza tradicional se advirtió en mayor medida conocimiento de cómputo.Los estudiantes cuya enseñanza recurrió al uso de la hoja electrónica de cálculo entendieron mejor el carácter funcional o el significado de la regresión a la media en relación con sucesos naturales; mientras que los estudiantes con enseñanza de análisis exploratorio sólo aplicaron la herramienta para la solución de problemas.

Referencias bibliográficas

Batanero, C.; Estepa, A.; Godino, J.; Green, D. (1996). Intuitive Strategies and Preconceptions about Association in Contingency Tables. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 27. No 2, 151-169.

Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* México: Grupo Editorial Iberoamérica, (pp. 173-201).

Erickson, B.; Nusanchuk, T. (1977). *Understanding Data*. Open University Press. GB.

Esté, A. (1997). *Cultura replicante: el orden semiocentrista*. Ciencias cognitivas/Semiótica. Barcelona: Editorial Gedisa. (pp. 189-190).

Frawley, W. (1999). *Vigotsky y la Ciencia Cognitiva. Cognición y Desarrollo Humano.* Vol. 36. Paidós.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment Under uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.

Landín, P. (1996). *Variable Aleatoria y Distribución Binomial: Epistemología, Estrategias Didácticas y Desempeños de Estudiantes Bachilleres*. Tesis de maestría sin publicar. ICE, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, PNFAPM.

Merrian, S. B. (1998). *Qualitative Research and case Study. Applications in Education*. Jossey-Bass Publishers, San Francisco.

Pollatsek, A.; Lima, S.; Well, D. (1981). Concept or Computation: Students´ Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics* 12, 191-204. Reidel, Holanda.

UTILIZANDO LA ESTADÍSTICA COMO HERRAMIENTA PARA EL ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN SOCIOCULTURAL, Y LABORAL DE ALUMNOS PERTENECIENTES AL NIVEL POLIMODAL DE ESCUELAS TÉCNICAS, DE LA PROVINCIA DE TUCUMÁN Y DE SUS RESPECTIVAS FAMILIAS

Mario Avila, Ana Ibañez, Hilda Motok, Juan Carlos Pérez, Graciela Abraham, Mabel Rodriguez Anido, Norma Campos, Marta Ronveaux, Carolina García
Facultad Regional Tucumán. Universidad Tecnológica Tucumán. Tucumán. (Argentina)
academica@frt.utn.edu.ar , anaibanez@arnet.com.ar
Campo de investigación: estudios socioculturales. Nivel educativo: medio
Palabras clave: valorización de la educación, nivel polimodal, rendimiento escolar, nivel académico familiar, situación laboral familiar, relación con la institución, compromiso con la institución

Resumen
En el marco de la convocatoria desde la Secretaria de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de la República Argentina para realizar proyectos cuya meta el Apoyo a las Escuelas Medias, se presentó desde la Facultad Regional Tucumán – Universidad Tecnológica Nacional, el proyecto "Desarrollo de un Sistema de Vinculación e Innovación para Mejorar la Relación entre la Propuesta Educativa de la Escuela Media, y el Mundo del Trabajo en las Comunidades de Inserción de las Instituciones Involucradas".
Para obtener información sobre la comunidad educativa involucrada en el Proyecto, se decidió diseñar diferentes encuestas a ser aplicadas a los alumnos, docentes , graduados y directivos.
Este trabajo aporta, entonces, una descripción de los resultados obtenidos en la encuesta aplicada a los alumnos de las diferentes escuelas participantes en el Proyecto.

Objetivos generales:

- Conocer la franja etárea de los alumnos.
- Analizar la situación socioeconómica del alumno.
- Investigar la conformación del grupo familiar.
- Analizar la situación laboral de las familias de los alumnos.
- Conocer el nivel académico de sus padres.
- Investigar el rendimiento escolar del alumno.
- Analizar la relación del alumno con la Institución y su nivel de compromiso con la misma.

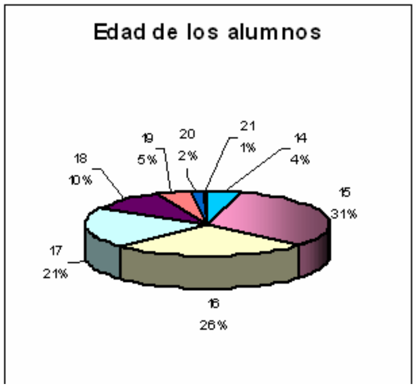
Escuelas involucradas: Escuela de Educación Técnica Nro 1- Tafí Viejo – Tucumán, Instituto Lorenzo Massa – S.M. De Tucumán, Escuela de Artes y Oficios Obispo Columbres, Escuela de Educación Técnica Nro. 2 – Obispo Colombres – S.M. de Tucumán, Escuelas de Educación Técnica Nro. 5 - S.M. de Tucumán.

Fundamentos

A los propósitos del proyecto general, resulta esencial conocer las características de la población objetivo del mismo, puesto que a partir de tales características será posible diseñar acciones de intervención pertinentes.
Para la elaboración de la encuesta se tuvieron en cuenta los diferentes aspectos relacionados con los alumnos, y su entorno familiar. Es por ello, que para la encuesta se seleccionan los siguientes componentes: A) Datos Personales; B) Situación Económica; C) Grupo Familiar – Situación Laboral – Nivel Académico; D) Rendimiento Escolar – Relación con la Institución. Cada uno de estos componentes contiene un número determinado de preguntas relacionadas con las variables propias de tal componente. En general son preguntas cerradas y de opción múltiple.

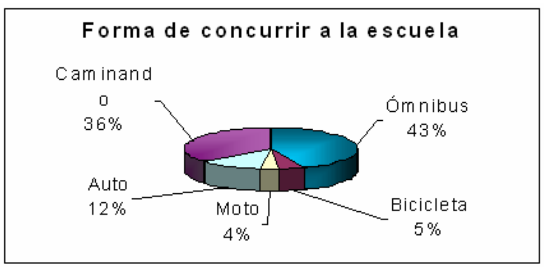
Esta encuesta fue aplicada a los alumnos del nivel Polimodal de las cinco escuelas técnicas participantes en el proyecto.
Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Datos Personales



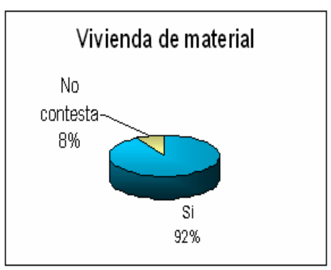
El nivel Polimodal abarca a los adolescentes comprendidos entre los 15 y los 18 años. Se observa que la mayoría de los encuestados se encuentra comprendido dentro de ese nivel. Algo para destacar: la mayoría de los alumnos son varones. Esto puede deberse a que las escuelas intervinientes son escuelas técnicas, que durante muchos años sólo permitieron el ingreso de varones.

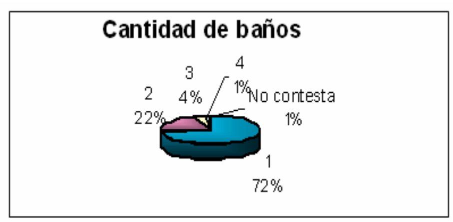
Situación Económica



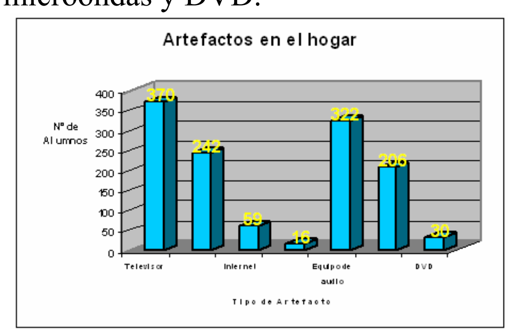
La mayoría de los alumnos concurre a la escuela caminando o en ómnibus. De esto se infiere que hay un porcentaje elevado, 36% que vive cerca de la escuela y que hay otro porcentaje, 43% que proviene de barrios alejados y debe realizarlo en ómnibus.

La mayoría de los alumnos vive en casa de material, con tres dormitorios y un baño.

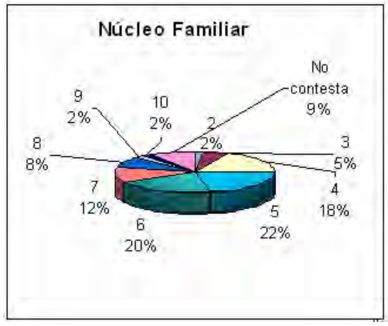


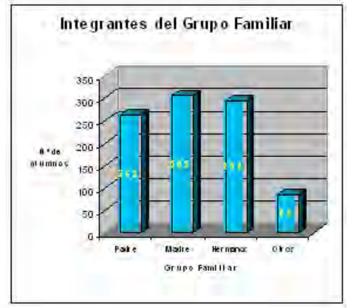


Prácticamente todos tienen televisor, computadora, equipo de audio y video cable. Hay muy pocos que poseen Internet, microondas y DVD.



Grupo Familiar

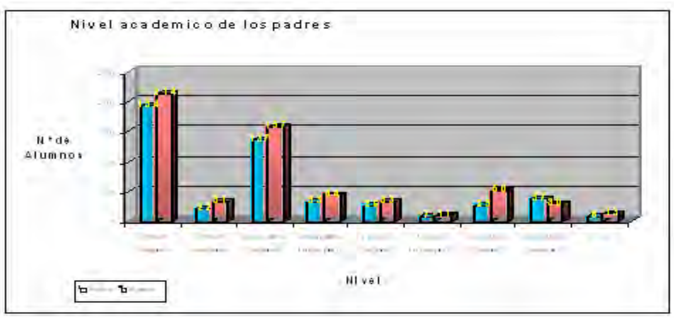




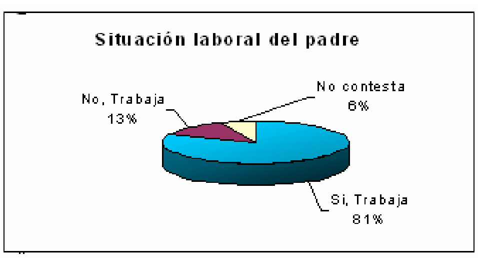
La cantidad de integrantes del grupo familiar oscila entre 4 y 6 personas. La mayoría de los alumnos vive con sus padres o por lo menos con uno de ellos. La ausencia de algunos de sus progenitores puede darse por factores externos al alumno mismo (fallecimiento, separación). Con respecto a la situación laboral de los hermanos podemos deducir que el mayor porcentaje de los que trabajan corresponde a la franja de más de 22 años. Solamente el 6% de los hermanos comprendidos entre los 14 y 18 años, trabajan.

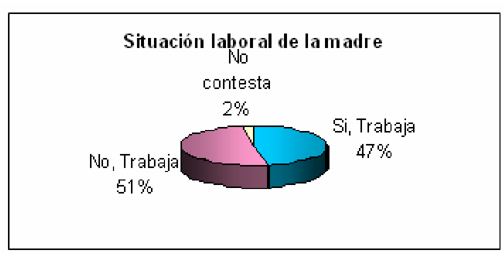
La mayor cantidad de padres de los alumnos ha alcanzado los niveles de estudio Primario y Secundario Completos. Se observa además que hay muy pocos padres que lograron completar sus estudios universitarios

En el caso de las madres, también se observa que la mayoría alcanzó los estudios Primario y Secundario completos. Sin embargo hay una cantidad mayor, con respecto a los padres, que logró finalizar sus estudios universitarios



Situación Laboral

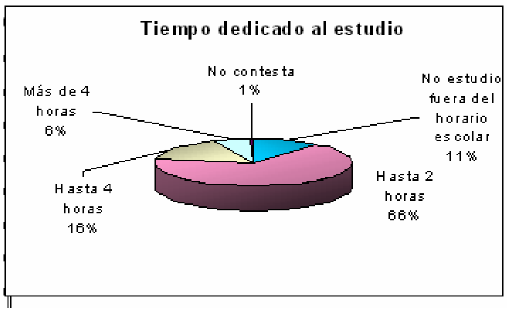


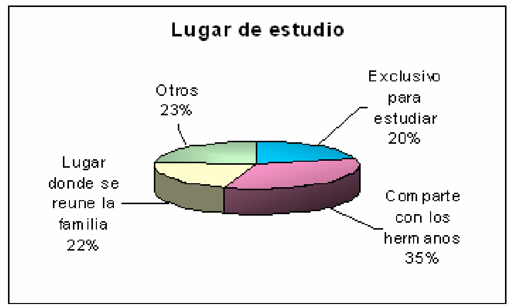


Familiar

Hay un porcentaje muy alto de padres que trabajan. No ocurre lo mismo con las madres, de las cuales sólo trabaja el 47%. Esto puede deberse a que muchas madres, a pesar de poseer un título habilitante, deciden no trabajar para dedicarse a su hogar. Sólo un 24% de las familias de los alumnos encuestados son beneficiarios de un plan social, lo que indica que las familias poseen una solvencia económica que les permite educar a sus hijos.

Rendimiento Escolar





Tenemos acá dos resultados que se deben destacar

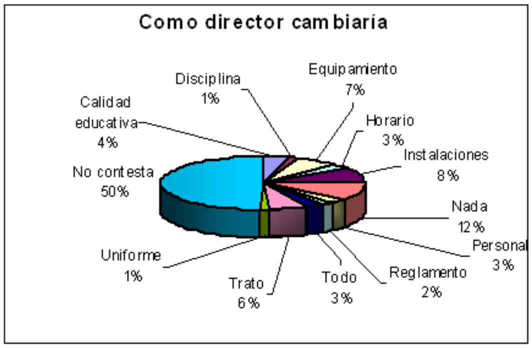
Hay un 77% de alumnos que a lo sumo dedican 2 horas a estudiar, del cual se desprende un 11% que no estudia fuera del horario escolar. Existe un 22% de alumnos que estudian 4 o más horas por día. En cuanto al lugar en que estudia, se observa que hay un 55% que lo hace en un espacio apropiado; mientras que el resto estudia en cualquier lugar de la casa.

Relación con la Institución

Existe una buena relación de los alumnos con sus docentes.

Esta relación mejora aún más cuando se trata sus pares.

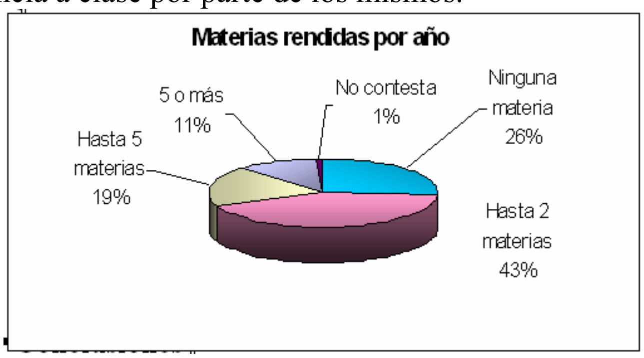
Un poco más del 50% considera que la escuela posee un edificio apropiado. La misma opinión tienen los alumnos con respecto al material didáctico.



Se observa una falta de compromiso por parte del alumno para ser autor de los cambios que se necesitan realizar en la Institución Educativa. Son muy bajos los porcentajes de los que proponen cambios en algunos aspectos. Sin embargo deberían ser tenidos en cuenta a la hora de querer producir algunas modificaciones.

Rendimiento del Alumno

Hay un alto porcentaje de alumnos que consideran que lo aprendido en clase le es útil y hay una muy buena asistencia a clase por parte de los mismos.



Conclusiones

✓Las edades de los alumnos encuestados pertenecen a la franja etárea correspondiente al Nivel Polimodal.
✓Pertenecen a hogares de clase media o media baja.
✓Hay un 69% que vive con ambos padres y un 30% que vive solo con uno de ellos. Constituyen todavía lo que se llama la familia tradicional.
✓Hay muy pocos que tienen hermanos menores de 18 años que trabajan. Esto habla también del nivel social medio al que pertenecen
✓Es importante destacar que un poco más de la mitad de los padres (54%) completó sus estudios primarios y un (39%) los estudios secundarios. El porcentaje de padres que realizó estudios universitarios es pequeño (12%). Esto se relaciona con el hecho que hay muchos padres y madres que trabajan.

✓Analizando el tiempo dedicado al estudio, hay un factor importante que destacar y es el hecho que un 77% de alumnos dedican al estudio a lo sumo 2 hs. por día. Esto merece un análisis más profundo ¿qué pasa con los alumnos? ¿considerarán que es un tiempo suficiente? ¿hay algún problema adicional que no se detecta de la encuesta, que impide un mayor tiempo de estudio?

✓Sin embargo, no son alumnos que rindan muchas materias, ya que un 69% rinde a lo sumo 2 asignaturas y sólo un 11% rinde 5 o más.

✓El alumno está conforme con la construcción edilicia y los materiales didácticos que utilizan, sin embargo, hay muchos otros temas inherentes al funcionamiento de la comunidad educativa que querría cambiar. Esto sugiere que se le debería dar mayor intervención en las decisiones que se toman en la institución educativa o, por lo menos, requerir su opinión sobre los diferentes temas.

✓El buen rendimiento por parte de los alumnos está relacionado con el hecho que considera que lo aprendido en clase es, por lo menos, útil (92%). Respecto a esto, hay que aclarar que son todas Escuelas Técnicas, de las cuales se reciben con un título técnico que los habilita para trabajar. Es decir, la actitud del alumno de una Escuela Técnica es diferente a la del alumno que asiste a las Escuelas No Técnicas.

Estas primeras conclusiones constituyen una invitación para trabajar las representaciones que docentes, alumnos y padres construyen acerca de las escuelas técnicas en el marco de las nuevas condiciones socio-culturales en las que se desenvuelven las instituciones y los sujetos.

Las estrategias de intervención pedagógico-curricular que se definan a partir de la re-lectura de las conclusiones precedentes, constituirían una apuesta al mejoramiento de la educación media ya as u democratización.

Referencias bibliográficas

Eco, Humberto (1995). *Cómo se hace una tesis*. Barcelona: Gedisa

De Souza Minayo, M. C. (1996). *Investigación Social* (Teoría, Método y Creatividad). Brasil: Editorial Lugar.

V.E. Gmurman, V. E. (1975). *Teoría de las Probabilidades y Estadísticas*. Moscú: Mir. Toranzos, Fausto.(1971). *Probabilidades y Ejercicio de Estadística*. Buenos Aires: Moschi.Fernández Díaz, M.;García Ramos, J.; Muñoz, I.; Fuentes Vicente, A. (1992). *225 problemas de estadística aplicada a las Ciencias Sociales*. Madrid, España: Síntesis.Aaker, D.; Day, G. (2001). *Investigación de Mercados.* Chile: McGraw-Hill.Rama, Claudio (2006). *La Tercera Reforma de la Educación Superior en América Latina.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Tanti Fanfani, E (Comp) (2003). *Educación media para todos. Los desafíos de la democratización del acceso.* IIPE-UNESCO. Buenos Aires: Edit Altamira, Fundación OSDE.

ACCIONES PARA EL DESARROLLO DE LAS HABILIDADES PARA EL APRENDIZAJE EN ESTADISTICA UNA PROPUESTA EN LA CARRERA DE BIBLIOTECOLOGÍA Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Doris Prieto Valdés, Raúl Báez Olazábal, Dominica Legañoa Ferrá, Irma Gonzáles Jiménez, Raúl Báez Prieto
Universidad de Camaguey. (Cuba)
raul.baez@reduc.edu.cu, doris.prieto@reduc.edu.cu
Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: superior

Resumen
Con el objetivo de Incorporar distintas perspectivas en la Enseñanza Aprendizaje de la Estadística Matemática se realiza este trabajo para desarrollar habilidades para el aprendizaje, teniendo en cuenta el sistema de acciones para el desarrollo de las habilidades para el aprendizaje en La Educación elaborado por Lic. Dominica Legañoa Ferra y para dar respuesta a la teoría de búsquedas de conocimiento nuevo como necesidad de plantear una situación didáctica en el marco de las producciones contemporáneas en Didáctica de la Matemática según la línea desarrollada por Brousseau y sus seguidores, se orientan actividades para el trabajo independiente de los estudiantes proponiendo una vía alternativa a través de situaciones didácticas centradas en la lectura individual (aunque guiada) y comprensivo activo de guías de estudio textos plataformas interactivas, elaboradas por el equipo docente para el tratamiento de los diferentes temas estudiados de Probabilidades y Estadística.

Desarrollo

La carrera de Bibliotecología estudia los objetivos, principios, contenidos y uso social de los libros, aunque se ocupa además de la colección, almacenamiento y distribución de los registros impresos que forman parte de las bibliotecas, así como de investigar las leyes del desarrollo bibliotecario. Su objeto de estudio está marcado por la circulación bibliográfica y su utilización, en tanto medio de educación social; mientras que su tema de estudio analiza las regularidades del comportamiento y desarrollo de su objeto, es decir, la circulación y el uso de las fuentes presentes en la biblioteca.

Con el objetivo de Incorporar distintas perspectivas en la Enseñanza Aprendizaje de la Estadística Matemática se realiza este trabajo para desarrollar habilidades para el aprendizaje, teniendo en cuenta el sistema de acciones para el desarrollo de las habilidades para el aprendizaje en La Educación elaborado por Lic. Dominica Legañoa Ferra [(1)] y la teoría de búsquedas de conocimiento nuevo como necesidad de plantear una situación didáctica en el marco de las producciones contemporáneas en Didáctica de la Matemática según la línea desarrollada por Brousseau[(2)] y sus seguidores. Se orientan actividades para el trabajo independiente de los estudiantes proponiendo una vía alternativa a través de situaciones didácticas centradas en la lectura individual (aunque guiada) y comprensivo activo de guías de estudio textos plataformas interactivas, así como revisión de materiales como páginas web. elaboradas por el equipo docente para el tratamiento de los diferentes temas estudiados de Probabilidades y Estadística.

En la Teoría de Situaciones Didácticas de *G. Brousseau* se define que una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (que puede incluir instrumentos o materiales) y el profesor, con un fin de permitir a los alumnos aprender -esto es, reconstruir- algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo. Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno.

Por otro lado, debido a la peculiar característica del conocimiento matemático, que incluye tanto conceptos como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, es preciso contemplar varios tipos de situaciones:

- SITUACIONES DE ACCIÓN, sobre el medio, que favorecen el surgimiento de teorías (implícitas) que después funcionarán en la clase como modelos protomatemáticos.
- SITUACIONES DE FORMULACIÓN, que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos. En estas suelen diferenciarse las situaciones de comunicación, que son las situaciones de formulación que tienen dimensiones sociales explícitas.
- SITUACIONES DE VALIDACIÓN, requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas, con medios que subyacen en los procesos de demostración.
- SITUACIONES DE INSTITUCIONALIZACIÓN: que tienen por finalidad establecer y dar un status oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase. En particular se refiere al conocimiento, las
- representaciones simbólicas, etc., que deben ser retenidas para el trabajo posterior.

Según Naraskeviens. M [3] entiende dentro de los materiales de enseñanza la guía de estudio como textos didácticos especialmente elaborados por los docentes para promover en circunstancias específicas, la lectura comprensivo-activa como vía de aprendizaje y de desarrollo de habilidades intelectuales.

Desde una perspectiva constructivista, el aprendizaje procede mediante la interacción de los sujetos con su entorno, en un proceso que articula, o intenta articular, las nuevas experiencias con el conocimiento previo, en actividades que se desarrollan mediante la interacción social y el uso de los medios, materiales y simbólicos, que les proporciona su ambiente sociocultural (Cole, 1985; Mugny ; Resnick, 1987; Vygotsky, 1996). [4]

Debe aplicarse la técnica de lectura de leer sin perder detalle y sin perderse en los detalles para ello debe ubicar las palabras clave y determinar lo que conoce y desconoce , actuando oportunamente mediante revisión de temas previos, orientándose con ejemplos, así reconoce el vínculo entre un enunciado teórico , definición, enunciado de teorema, etc) y un ejemplo en el cual las variables se hayan sustituido por números u otras expresiones, utilizando así la retroalimentación que se da mutuamente entre la teoría y la practica.

Con este trabajo contribuimos al mejoramiento de estrategias metodológicas es decir las técnicas, métodos, procedimientos y recursos (incluidas las relaciones entre ellas) que el docente utiliza para facilitar el proceso de enseñanza.

También se desarrollan habilidades lingüísticas (como comprensión y el empleo de nomenclatura matemática, comprensión o denominación de operaciones matemáticas y la codificación de problemas representados con símbolos matemáticos) habilidades perceptivas (como el reconocimiento a la lectura de símbolos numéricos o signos aritméticos , y la agrupación de objetos en conjunto) , habilidades de atención(como copiar figuras correctamente en las operaciones matemáticas (seguimientos de secuencias de cada paso en operaciones matemáticas) .

La aparición de las nuevas tecnologías de la información junto a la cada vez mayor disponibilidad de grandes bancos de datos para su análisis ha posibilitado un importante cambio en la forma de concebir la enseñanza de la Estadística. En la integración horizontal, la informática es pensada como un medio o como una herramienta pedagógica al servicio de los procesos de enseñanza y aprendizaje en distintos campos del saber. Si bien ella necesita, como condición previa, el dominio de ciertas habilidades informáticas básicas, la atención está puesta en la contribución que puede efectuar a ambientes de aprendizaje en diferentes asignaturas. El uso de las computadoras en educación ha seguido un camino evolutivo que se caracteriza por una clara inclinación a considerarlas como herramientas puestas a disposición de los alumnos, con el rol de facilitadoras para la indagación y la adquisición de conocimiento, en ambientes de aprendizaje colaborativos e interactivos (De Corte, 1996. En general, las tecnologías de la información han acelerado el avance hacia un enfoque constructivista en la enseñanza de la Estadística. En efecto, hoy en día existe una demarcada tendencia a entender el aprendizaje de la Estadística como una labor personal del alumno, en la que éste es considerado el protagonista, o al menos un participante activo (véase por ejemplo, Peña [(5)] et al., 1990; Peña, [(6)] 1992; Garfield, [(7)] 1995; Marasinghe [(8)] et al., 1996).

Sistema de acciones para el desarrollo de las habilidades para el aprendizaje de las Probabilidades y Estadística.

Objetivos a realizar por los estudiantes	**Actividades a desarrollar por los profesores y estudiantes.**
1- Diferentes tipos de lectura. TEMAS 1- Probabilidades 2- Distribuciones de probabilidad. 3- Distribuciones de frecuencias. 4- Regressión.	**1- seleccionar los tipos de lecturas a realizar.** -fichas bibliográficas. -lectura de familiarización. -lecturas de búsquedas en Internet y Plataforma interactiva Moodle. -lectura de conferencias pagina Web. -lectura de conferencias, ejercicios resueltos en el texto. 2- **comprender la lectura.** - identificación del tema principal. - Lectura por parte, identificación de relaciones entre las partes. -procesamiento de la información. - selección de palabras clave. - lectura de símbolos numéricos o signos aritméticos. -Elaborar síntesis de cada parte. Permite interpretar lo leído en contrapocision a la repetición mecánica de este acto. **3- comprender y retener la lectura Dausereau** (1978) • Crear la dispocisión de ánimo para el estudio. • Leer para comprender, haciendo énfasis en las ideas importantes y difíciles. • Recordar el contenido sin acudir al texto.

	• Resumir lo leído. Hacer formulario. • Ampliar los conocimientos auto preguntándose.
2- Adiestrar al estudiante en técnicas de estudio para el aprendizaje.	Orientar el método OPLER, a través de una actividad práctica donde se estudie un capítulo de un texto o un artículo científico de la literatura especializada. - ubicar palabrea claves y nuevas. - lenguaje matemático de la representación y ligado a ello el proceso de la sustitución. - desarrollar ejercicios donde varíen sus características por ejemplo variando el signo de los números o desigualdades y contrastar sus respuestas sacando conclusiones. - Practicar el reconocimiento de estructuras lógicas por parte del estudiante. - Ejemplo. Ho: μ‹ 22 H1: μ> 22 Decisión. Si se cumple la región critica , se rechaza Ho y se acepta H_1
3- Diagnosticar la situación que presentan los estudiantes en los procedimientos auxiliares para el estudiante eficiente.	Revisar las notas de clase de los estudiantes para comprobar su eficiencia o no. Escribir argumentos completos. Titular, simbolizar, codificar grupos de notas Anotar ideas esenciales, subrayar. Organizar la información. Elaborar resúmenes, esquemas, cuadros. Graficos.
4- Reforzar estrategias cognitivas.	Orientar actividad independiente de los estudiantes en función de las estrategias cognitivas para el procesamiento de la información. Una perspectiva de aprendizaje Ejemplo Analizar los datos. Organizar los datos (utilizar esquemas, cuadros sinópticos o tablas.) identificar datos claves e importantes las relaciones entre ellos. Seleccionar herramientas adecuadas para procesar loa datos. Calcular indicadores estadísticos (coeficientes, medidas descriptivas y otras magnitudes que sintetizan los datos. Reelaborar los datos. Analizar los datos. Seleccionar variantes para la comunicación de los resultados. Elaborar la comunicación.

5- Saber usar aparatos de búsquedas de Instituciones de la Información y diferentes fuentes documentarias.	Analizar tratamiento de la información en diferentes fuentes. Monografías. Publicaciones.
6- Registrar con los datos precisos las fuentes de Información consultadas y ambientes telemáticos.	Orientar y exigir el registro bibliográfico Consultado e Internet.

Conclusiones

Con este trabajo se contribuye a la formación y desarrollo de la habilidad de interpretar en la asignatura fundamentada en la interrelación del vínculo teoría –práctica y la utilización del aprendizaje basado en problemas logrando actividades para el trabajo independiente de los estudiantes propuestas por los profesores y estudiantes,

Referencias bibliográficas

Brosseau, G. (1991). Fondements et Methodes le Didactique de Mathematiques.

Cole, M. (1985). The zone of proximal development: Where culture and cognition create each other, en Wertsch, J.V. (Ed.) *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives*, pp. 146-161. Cambridge: Cambridge University Press.

De Corte, E. (1996). Aprendizaje Apoyado en el Computador: una Perspectiva a Partir de la Investigación acerca del Aprendizaje y la Instrucción, *en Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Barranquilla, Colombia: Servicio Nacional de Aprendizaje.

Legañoa Ferrá, D. (2000). *Camaguey. Sistemas de acciones para el desarrollote las habilidades para el aprendizaje en la Educación Superior.* IINFOCUR Camagüey

Legañoa Ferrá, D. (2000). *Técnicas De registros bibliográficos para el estudio y la investigación*. Camaguey

Garfield, J(1995). *How Students Learn Statistics,* International Statistical Review, 63, 1, pp. 25-34.

Martine, R. D. La integración de la computadora a un ambiente de enseñanza y aprendizaje.Facultad de Ciencias Exactas. Universidad de Mar del Plata. Argentina.

Marasinghe, M.G., Meeker, W.Q., Cook, D. y Shin, T.S. (1996). *Using Graphics and Simulation to Teach Statistical Concepts*. The American Statistician, 50, 4, pp. 342-351.

Mugny G. y Doise, W. (1983). *La construcción social de la inteligencia*. México: Trillas.

Peña, D., Prat, A., y Romero, R. (1990). *La Enseñanza de la Estadística en las Escuelas Técnicas*, Estadística Española, 32, 123, pp. 147-200.

Peña, D. (1992). *Reflexiones sobre la Enseñanza Experimental de la Estadística.* Estadística Española, 131, pp. 469-490,

Resnick, L.B. (1991) Shared Cognition: Thinking as Social Practice, en Resnick, L.B., Levine, J.M. & Teasley, S.D. (Eds.) *Perspectives on Socially Shared Cognition*. Washington DC: American Psychological Association.

Torroella González, G. (1984). *Método OPLER: Cómo estudiar con eficiencia.* La Habana: Ed. de Ciencias Sociales. (Psicología social). – p.127

Vygotsky, L.S. (1996) *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. Barcelona: Crítica.

MATEMÁTICA CON LITERATURA

Irene Zapico, Silvia Tajeyan
Institución: Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". U.I.D.I. Unidad Interdepartamental de Investigaciones. (Argentina)
stajeyan@yahoo.com.ar

Campo de investigación: resolución de problemas, pensamiento algebraico, pensamiento geométrico.
Nivel Educativo: medio
Palabras clave: literatura, operaciones, geometría, actividades

Resumen

Tomando como inicio el contexto de la Matemática para su enseñanza, encontramos que existen múltiples relaciones entre ella y diferentes ramas del Arte.

El tema que presentamos en este taller es ilimitado. Presentaremos algunos "matemáticos-escritores", algunos autores del género "Matemática Recreativa" y otros ejemplos de famosos científicos que incursionaron en la Literatura o famosos literatos que incursionaron en la Matemática.

En definitiva, se trata de mostrar, brevemente, algunos vínculos entre la Matemática y la Literatura, ya que estos textos pueden utilizarse como disparador para la introducción de nuevos contenidos.

La Matemática suele aparecer ante los ojos de quienes no se especializan en ella (adultos, adolescentes o niños) como "algo" desconectado de la realidad, que no se sabe cuándo surgió, cómo ni para qué. Cabe preguntarse si los procesos de enseñanza y aprendizaje son responsables, al menos en parte, del desinterés de los alumnos por esta asignatura. Consideramos que la enseñanza descontextualizada es una de las causas de esta situación.

David Wheeler nos dice: "Si observamos que la enseñanza de la Matemática parece generar a menudo temor o ansiedad en los niños y adolescentes podemos desear humanizarla de manera de eliminar esos acompañantes. A su vez, esto puede sugerir cambios específicos en nuestras maneras de enseñar que permitan alcanzar ese resultado." (Wheeler, 1980).

En el presente trabajo hemos desarrollado y elaborado estrategias y actividades, para la enseñanza de la Matemática en la Escuela Media, para lograr esos cambios que Wheeler menciona. Hemos investigado tanto los orígenes y el desarrollo de la Matemática como sus relaciones con la Arquitectura y la Pintura a lo largo de la Historia del hombre y podrá ser utilizado por los docentes, para mostrar a sus discípulos que la Matemática no sólo ha formado y forma parte del mundo que habitamos, sino que es una creación propia de los seres humanos; ha despertado y aún despierta pasiones, es motor de la ciencia y la técnica, la utilizan distintas ramas del arte o hacen referencia a ella y es una fuente de placer intelectual si se la aprende enfrentando desafíos, descubriendo nuevos conceptos y métodos, resolviendo, demostrando y encontrando distintos modos de solucionar un mismo problema.

En cuanto a las diversas ramas del Arte, nos hemos centrado en la Literatura seleccionando épocas y autores en los que la presencia de los contenidos de la Matemática es fácilmente observable, para edades diferentes, con temáticas distintas.

Hubo, y hay, matemáticos atraídos por la literatura que incursionaron con éxito en ella. Aún desde la Matemática, otros orientan su talento hacia la divulgación científica y el entretenimiento, transformándose en autores de verdaderas piezas literarias en las que aparecen interesantes personajes y argumentos. Mientras, desde lo estrictamente literario, hay creadores que han amado la Matemática, la han estudiado, le han dado un lugar en sus obras.

Los escritores y los matemáticos desarrollan su talento, su capacidad creadora y su imaginación; no debe extrañarnos, entonces, que una misma persona tenga las condiciones necesarias para interesarse en ambas actividades.
Nuestra propuesta es tomar obras literarias (o fragmentos de ellas) convenientemente elegidas y llevarlas al aula para realizar actividades que permitan presentar o desarrollar conceptos matemáticos, su historia y sus aplicaciones en otras disciplinas, como son las artísticas en los alumnos. De esta manera, intentamos sumar el interés, dejando en claro que sólo enseñamos Matemática, aunque sus atractivos son diferentes a los que ofrece nuestra materia
Tradicionalmente, las Ciencias Exactas y Naturales se estudian desprovistas de su historia. En otras ramas del conocimiento no sucede lo mismo. Por ejemplo, en Literatura y en las demás manifestaciones artísticas, cada obra se estudia acompañada de la biografía de su autor, el movimiento al que perteneció, el lugar y la época en que vivió, el ambiente social, cultural y político en que su obra fue gestada.
Citando a Schöenfeld: "de bien poco sirve saber lo fundamental, si no se sabe cómo ni cuándo usarlo", agregaríamos que la posibilidad de usarlo requiere conocimientos previos que permitan reconocer un concepto matemático en una situación "no-matemática", como por ejemplo al observar un cuadro de Mondrian o de Leonardo. (Schöenfeld, 1985).
¿De qué manera es posible llevar esto a la práctica? ¿Cómo adquirir conocimientos a través de la actividad? Poniendo el acento en el proceso de aprendizaje más que en el de enseñanza y resaltando que "hacer Matemática" es entre otras cosas, resolver diferentes problemas, utilizando los mismos contenidos matemáticos en distintas áreas, pero también es resolver; demostrar, compartir, cuestionar, integrar, argumentar, criticar, confrontar, comunicar ...
Para lograrlo no basta la formación académica específica, interesa la actitud del docente hacia sus alumnos, hacia la Matemática y hacia el Saber en general.
Como no es posible saber qué contenidos serán necesarios o útiles a nuestros alumnos dentro de veinte o treinta años, debemos transmitirles es el amor al conocimiento; que será una llave para su futuro. Dicho amor debe ser cultivado por el docente para brindarlo a sus alumnos.
En cuanto a la Enseñanza de la Matemática, en particular, y a los sentimientos que ella despierta, nos interesa lo que algunos de sus creadores han expresado.
En primer lugar, tomamos palabras de Bertrand Russell: "Contempladas en sus auténticos valores, las matemáticas no sólo poseen verdad, sino suprema belleza, una belleza fría y austera, como la de la escultura, que si no presenta atractivos para las partes más débiles de nuestra naturaleza y carece de las brillantes galas de la pintura o de la música, es sublimemente pura, y susceptible de la perfección severa que sólo el arte más grande puede exhibir. El verdadero espíritu de deleite, la exaltación, el sentido de ser más que hombre, piedra de toque de la más alta excelencia, con toda seguridad puede hallarse en las matemáticas al par que en la poesía."
Russell compara a la Matemática con la Poesía, resaltando hasta qué punto en ella se expresan aspectos elevados y sublimes del pensamiento humano, que se trata de un "cosmos ordenado" donde el pensamiento puede habitar, olvidando "los lastimosos hechos de la naturaleza" y las limitaciones de la vida práctica. Para él, es un espacio donde la razón y el espíritu pueden ejercer su libertad, sin reparos. (Russell, 1967).

Uso del lenguaje simbólico

***Una confusión cotidiana* - Franz Kafka (1883-1924)**

Un incidente cotidiano, del que resulta una confusión cotidiana. A tiene que concertar un negocio importante con B en H. Se traslada a H para una entrevista preliminar, pone diez minutos en ir y diez en volver, y se jacta en su casa de esa velocidad. Al otro día vuelve a H, esta vez para cerrar el acuerdo. Como probablemente eso le exigirá muchas horas, A sale muy temprano. Aunque las circunstancias (a lo menos en opinión de A) son precisamente las de la víspera, tarda diez horas esta vez en llegar a H. Llega al atardecer, rendido. Le comunican que B, inquieto por su demora, ha partido hace poco para el pueblo de A y que deben haberse cruzado en el camino. Le aconsejan que espere. A, sin embargo, impaciente por el negocio, se va inmediatamente y vuelve a su casa.

Esta vez, sin poner mayor atención, hace el viaje en un momento. En su casa le dicen que B llegó muy temprano, inmediatamente después de la salida de A, y hasta se cruzó con A en el umbral y quiso recordarle el negocio, pero que A le respondió que no tenía tiempo y que debía salir en seguida.

A pesar de esa incomprensible conducta, B entró en la casa a esperar su vuelta. Ya había preguntado muchas veces si no había regresado aún, pero seguía esperándolo siempre en el cuarto de A. Feliz de hablar con B y de explicarle todo lo sucedido, A corre escaleras arriba. Casi al llegar, tropieza, se tuerce un tendón y, a punto de perder el sentido, incapaz de gritar, gimiendo en la oscuridad, oye a B –tal vez muy lejos ya, tal vez a su lado– que baja la escalera furioso y que se pierde para siempre.

Actividades sugeridas para el aula

Una confusión cotidiana - Franz Kafka

1) ¿Quién fue Franz Kafka? ¿De qué otras obras es autor?

2) Respondan las siguientes preguntas, de acuerdo al texto:

a) ¿Quiénes son A y B?

b) ¿Qué es H?

c) ¿Es posible pensar, de acuerdo al texto, que A y B son lugares y H es una persona?

d) ¿Cómo el autor nos induce a interpretar correctamente los símbolos: A; B y H?

e) ¿Existe un único elemento para reemplazar a cada uno de ellos?

f) ¿Por qué habrá utilizado estos símbolos, en lugar de nombres propios?

g) ¿Encuentran alguna similitud entre este modo de utilizar los símbolos y la manera en que se enuncian, habitualmente, propiedades y fórmulas matemáticas?

Características de los sistemas de numeración

***Funes el memorioso* (Fragmento) - Jorge Luis Borges (1899-1986)**

La voz de Funes, desde la oscuridad, seguía hablando.

Me dijo que hacia 1886 había discurrido un sistema original de numeración y que en muy pocos días había rebasado el veinticuatro mil. No lo había escrito, porque lo pensado una sola vez ya no podía borrársele. Su primer estímulo, creo, fue el desagrado de que los treinta y tres orientales requirieran dos signos y tres palabras, en lugar de una sola palabra y un solo signo.

Aplicó luego ese disparatado principio a los otros números. En lugar de siete mil trece, decía (por ejemplo) Máximo Pérez; en lugar de siete mil catorce, El Ferrocarril; otros números eran Luis Melián Lafinur, Olimar, azufre, los bastos, la ballena, el gas, la caldera, Napoleón, Agustín de Vedia. En lugar de quinientos, decía nueve. Cada palabra tenía un signo particular, una especie de marca; las últimas eran muy complicadas ... Yo traté de explicarle que esa rapsodia de voces inconexas era precisamente lo contrario de un sistema de numeración. Le dije que decir 365 era decir tres centenas, seis decenas, cinco unidades; análisis que no existe en los "números" El Negro Timoteo o manta de carne. Funes no me entendió o no quiso entenderme. Locke, en el siglo XVII, postuló (y reprobó) un idioma imposible en el que cada cosa individual, cada piedra, cada pájaro y cada rama tuviera un nombre propio; Funes proyectó alguna vez un idioma análogo, pero lo desechó por parecerle demasiado general, demasiado ambiguo. En efecto, Funes no sólo recordaba cada hoja de cada árbol de cada monte, sino cada una de las veces que la había percibido o imaginado. Resolvió reducir cada una de sus jornadas pretéritas a unos setenta mil recuerdos, que definiría luego por cifras. Lo disuadieron dos consideraciones: la conciencia de que la tarea era interminable, la conciencia de que era inútil. Pensó que a la hora de la muerte no habría acabado aún de clasificar todos los recuerdos de la niñez. . .

Actividades sugeridas para el aula

Funes el memorioso (Fragmento) - Jorge Luis Borges

1) ¿Quién fue Jorge Luis Borges? ¿Qué obras suyas conocen?
2) Subrayar y buscar en el diccionario las palabras del texto cuyo significado no conozcan.
3) ¿A quién se refiere Borges cuando dice: *Locke, en el siglo XVII, . . .*? Investiguen quién fue este personaje. Sugerencia: un diccionario enciclopédico es suficiente.
4) Describir, en pocas palabras, al protagonista de este cuento de Borges.
5) a) ¿Cuáles son las tres características que definen a nuestro sistema de numeración?
b) ¿Cuál es el origen de dicho sistema?
6) ¿Qué otros sistemas de numeración conocen? ¿Qué características tienen?
7) Comparando los distintos sistemas de numeración, ¿cuál o cuáles les resultan más aptos para realizar las operaciones fundamentales?
8) El sistema de numeración ideado por Funes, ¿tiene alguna de las características mencionadas? ¿Cuáles?
9) ¿Qué crítica hace el narrador de la historia a Funes? ¿qué comparación?

Secciones cónicas

***A través de las puertas de la llave de plata* (Fragmento) - Howard Phillips Lovecraft (1890-1937)**

“... Las figuras que se obtienen al seccionar un cono parecen variar según el ángulo del plano que los secciona, engendrando el círculo, la elipse, la parábola o la hipérbola, sin que el cono experimente cambio alguno; y del mismo modo, los aspectos locales de una realidad inmutable e infinita parecen cambiar con el ángulo cósmico de observación.“

“... Le hicieron saber que cada figura espacial no es más que el resultado de la intersección, en un plano, de una figura correspondiente que posee además otra dimensión; como el cuadrado resulta de la sección de un cubo, o el círculo de la de una esfera. El cubo y la esfera, con sus tres dimensiones, corresponden a su vez a la sección de otra figura de cuatro dimensiones, que los hombres conocen sólo por sueños y conjeturas; y éstas a su vez, son sección de otras figuras de cinco dimensiones, y así sucesivamente, hasta remontarse a la inalcanzable infinitud arquetípica.”

Actividades sugeridas para el aula

A través de las puertas de la llave de plata (Fragmento) - Howard Phillips Lovecraft

Howard Phillips Lovecraft (1890-1937)

1) ¿Quién fue H. P. Lovecraft?
2) Leer el cuento “A través de las puertas de la llave de plata”, de Howard P. Lovecraft.

3) ¿Qué nombre reciben, en general, las "figuras" que se obtienen al seccionar un cono?
4) ¿Con qué ángulo se compara el ángulo de incidencia con que el plano secciona a la superficie cónica?
5) ¿Qué se obtiene, como intersección, según sea mayor, igual o menor que él?
6) La circunferencia es un caso articular de una de las secciones cónicas, ¿de cuál de ellas?
7) ¿Qué es un "lugar geométrico"?
8) ¿Cuáles son las definiciones, como lugares geométricos, de la elipse, la hipérbola y la parábola?
9) ¿Cuáles, de estas tres curvas, pueden definirse como funciones?
10) En caso de que la parábola sea función, ¿cuál es su dominio natural?
11) ¿Qué quiere decir el autor al expresar: "...los aspectos locales de una realidad inmutable e infinita parecen cambiar con el ángulo cósmico de observación."
12) ¿Qué relación encuentras entre la frase anterior y la forma en que se definen la elipse, la hipérbola y la parábola como secciones cónicas?

En el segundo párrafo:
1) ¿Qué otros ejemplos pueden dar de figuras que pueden obtenerse seccionando cuerpos?
2) Hacer los dibujos correspondientes a los ejemplos hallados.
3) ¿Cómo se genera, según Lovecraft, la "inalcanzable infinitud arquetípica"?

Operaciones con números naturales
***El hombre que calculaba* - Malba Tahan (1895-1974)**
Los cuatro cuatros

Al ver a Beremiz interesado en comprar el turbante azul, le dije:
- Me parece una locura ese lujo. Tenemos poco dinero y aún no pagamos la hostería.
- No es el turbante lo que me interesa, respondió Beremiz. Fíjate en que esta tienda se llama "Los cuatro cuatros". Es una coincidencia digna de la mayor atención.
- ¿Coincidencia? ¿Por qué?
- La inscripción de ese cartel recuerda una de las maravillas del Cálculo: empleando cuatro cuatros podemos formar un número cualquiera...

Y antes de que le interrogase sobre aquel enigma, Beremiz explicó mientras escribía en la arena fina que cubría el suelo:
- ¿Quieres formar el cero? Pues nada más sencillo. Basta escribir: 44 - 44
Ahí tienes los cuatro cuatros formando una expresión que es igual a cero.

El hombre que calculaba - Malba Tahan (1895-1974)
Los cuatro cuatros
"Y Beremiz, a continuación, va formando los números del 1 al 10, del siguiente modo:

$$\frac{44}{44}=1 \qquad \frac{4}{4}+\frac{4}{4}=2 \qquad \frac{4+4+4}{4}=3 \qquad 4+\frac{4-4}{4}=4 \qquad \frac{4x4+4}{4}=5$$

$$\frac{4+4}{4}+4=6 \qquad \frac{44}{4}-4=7 \qquad 4+4+4-4=8 \qquad 4+4+\frac{4}{4}=9 \qquad \frac{44-4}{4}=10$$ "

Actividades para los alumnos

1) a) Describir a Beremiz, en pocas palabras.

b) ¿Qué relación tiene Beremiz con la Matemática?
c) ¿En qué lugar y en qué época se pueden ubicar los hechos narrados por Malba Tahan?
2) Escribir todos los números del 0 al 10 utilizando las operaciones fundamentales y cuatro cuatros para cada uno.
3) a) Cambiando el 4 por el 9, investigar qué números, del 0 al 10, es posible obtener en forma similar.
b) ¿Qué ocurre utilizando otro número de una cifra, en lugar del 9?
4) Observando el modo en que Beremiz obtuvo el $2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$, resulta que para cualquier $n \neq 0$ es: $\frac{n}{n} + \frac{n}{n} = 2$. ¿Ocurre lo mismo en algún otro caso?
5) Escribir, con cinco números 2 y las cuatro operaciones fundamentales, los números del 0 al 10.

En los puntos señalados que mostramos, no hemos agotado las posibilidades existentes; pero sí hemos preparado material adecuado e interesante, para ser utilizado en el aula, que despertará el interés de los alumnos. Creemos que el trabajo realizado tiende a fortalecer la enseñanza de los contenidos curriculares de la Matemática en la Escuela Media. Es un aporte concreto a la Metodología de la enseñanza de nuestra ciencia y puede ser utilizado por los docentes de dicho nivel, y en algunos casos para un nivel superior, teniendo en cuanta que se deberán adaptar convenientemente.
Cambia la visión tradicional de que la Matemática es una disciplina acabada, fría e inhumana, mostrando, con nuestras propuestas, que es una creación del hombre y está íntimamente relacionada con sus actividades.

Referencias bibliográficas

Borges, J. L. (1971). *Ficciones*. Barcelona, España: Planeta.
Brown, D (2003). *El Código Da Vinci*. Barcelona, España: Umbriel.
de Guzmán, Miguel. (2000, agosto-septiembre). *La Matemática entra en la novela*. Madrid, España: SABER/Leer
Díaz Godino, J. Batanero, C. (2000) *Contenidos teóricos y metodológicos para la formación de investigadores en Didáctica de la Matemática.* Granada, España: Universidad de Granada.
Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números.* Barcelona, España: Ediciones B.
Kafka, Franz. (1979).*El buitre y otros relatos.* Buenos Aires, Argentina: Librería La Ciudad.
Lovecraft, Howard (1973).*Viajes al otro mundo. Ciclo de aventuras oníricas de Randolph Carter*. Madrid, España: Editorial Alianza.
Russell, Bertrand (1967). *Misticismo y lógica y otros ensayos.* Buenos Aires, Argentina: Paidos,
Smullyan, Raymond (1989). *¿Cómo se llama este libro?* Madrid, España: Ediciones Cátedra, S.A.
Schöenfeld, Alan (1985). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*, Madrid, España: M.E.C.
Tahan, Malba (1976). *El hombre que calculaba*. Barcelona, España: Vosgos.
Wheeler, David (1980). Humanización de la Educación Matemática. *Conceptos de Matemática.* Buenos Aires, Argentina 55, 7-14.

CATEGORÍA 2:

El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

LA RELME A SUS VEINTE AÑOS

Ricardo Cantoral
Cinvestav IPN. (México)
rcantor@cinvestav.mx

Campo de investigación: educación continua, formación de profesores.
Nivel educativo: básico, medio, superior
Palabras clave: Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, comunidad, movimiento, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame

Resumen

La evolución de la Matemática Educativa como disciplina científica, puede ser narrada desde un punto de vista particular, aquel que brinda el curso de sus estrategias gregarias. El crecimiento y diversidad de sus reuniones académicas, la riqueza y profundidad de sus publicaciones – principalmente las revistas especializadas y los instrumentos de intervención en sus sistemas didácticos, la formación de nuevos especialistas al nivel de posgrado y, sobre todo, en la medida que podamos reconocer sus efectos en la sociedad en los espacios didácticos naturales. Se trata pues de narrar la evolución de una comunidad, de un rico proceso dinámico de carácter multinacional y culturalmente situado. Vivimos en una economía globalizada que nos reclama del ingenio en el diseño de estrategias para el acercamiento entre colegas, comunidades e instituciones de diversos países y regiones con identidades históricas y culturales marcadas por su geografía y su pasado. En nuestro caso esto queda claramente sintetizado por las lenguas y las tradiciones. Los países latinoamericanos comparten además de lengua y cultura, desafíos semejantes entre sí, en este sentido, el movimiento de Matemática Educativa encara tales retos de manera multinacional, regional, histórica y culturalmente situada.

Una mirada sobre la historia de las Relme

El principal objetivo de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa ha sido, invariablemente, el de establecer puentes entre comunidades, estrechar lazos de amistad, solidaridad y aquellos propios de la actividad profesional a fin de facilitar los intercambios de experiencias entre iguales.

La Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, más conocida en el mundo académico como «*la Relme*», cumple este 2006 su vigésimo aniversario de vida. Este trabajo presenta un panorama de corte histórico que brinde un sentido evolutivo a dichas reuniones.

En primer término quisiera iniciar este trabajo con una nota exculpatoria, pues *la historia* es, en principio siempre sólo *una historia*. Es decir, en virtud de que asumo la inexistencia de la objetividad histórica como tal, sé que disponemos entonces sólo de interpretaciones. De este modo es que habremos de conformarnos con llegar a la "verdad histórica" de la mano de la subjetividad de quien la cuenta. Por tanto esta historia no será neutra, sino estará cargada de momentos de vida, de visiones de coyuntura y de la mirada de alguien que si bien pudo asistir a sus primeras veinte reuniones, también es alguien que decidió jugar, conjuntamente con muchas y muchos colegas más, un papel activo en su conformación, en su creación y en su consolidación.

Se seguirá en un orden cronológico la evolución de *las Relmes* y nos ubicaremos al nivel local de los momentos específicos o las singularidades en que se desarrollaron sus estadios. Podemos considerar que la primera etapa de esta evolución puede ser llamada la etapa oficial. En tanto que las reuniones dependían de estructuras oficiales y de financiamiento institucional. La segunda de la resistencia activa, o también de la construcción de identidades autónomas; la tercera etapa, de la institucionalización o de la visibilidad internacional, y la cuarta, la de la profesionalización o consolidación disciplinar. Esta última, por razones específicas será dividida en dos fases, la fase del movimiento y la fase de la organización.

La distinción entre etapas se hace con base en algunos indicadores visibles, como financiamiento, volumen y diversidad de los participantes, edad promedio de los asistentes y las temáticas tratadas. Aunque estos indicadores no serán explícitos en el curso de las argumentaciones que brindaremos en seguida, estarán siempre en el trasfondo de nuestras afirmaciones. Mientras que las dos fases que dividen la última etapa se parcializan respecto del carácter explícito de los mecanismos de organización profesional o disciplinar.
Empecemos con un recuento de las reuniones, *las Relmes* como son llamadas actualmente:

- Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Mérida, Yucatán, México. 1987.
- Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Guatemala capital, Guatemala, CA. 1988.
- Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. San José, Costa Rica, CA. 1989.
- Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Acapulco, Guerrero, México. 1990.
- Quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Tegucigalpa, Honduras. 1991.
- Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Cuernavaca, Morelos, México. 1992.
- Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Ciudad de Panamá, Panamá. 1993.
- Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. San José, Costa Rica. 1994.
- Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba. 1995.
- Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Cayey y Ponce, Puerto Rico. 1996.
- Décimo primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Morelia, Michoacán, México. 1997.
- Décimo segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Bogotá, Colombia. 1998.
- Décimo tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Santo Domingo, República Dominicana. 1998.
- Décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Panamá, Panamá. 2000.
- Décimo quinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Buenos Aires, Argentina. 2001.
- Décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Santiago de Chile, Chile. 2002.
- Décimo séptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. La Habana, Cuba. 2003.
- Décimo octava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. 2004.
- Décimo novena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Montevideo, Uruguay. 2005.
- Vigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Camagüey, Cuba. 2006.

- Vigésimo primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Maracaibo, Venezuela. 2007. (Próxima reunión).
- Vigésimo segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Monterrey, México. 2008.

Etapa 1. *Rasgos de los comienzos*

Durante muchos años, la comunidad de matemática educativa careció de proyectos continentales o regionales identitarios, si bien algunas iniciativas nacionales fueron sumamente exitosas y otras, las internacionales, eran promovidas desde países del primer mundo sin mucho éxito, los intentos de globalización cobraron cierta fuerza regional, y estos estuvieron marcados por los esfuerzos de reformas en la enseñanza planeadas fuera del ámbito latinoamericano con claras intenciones de globalizar la enseñanza y los sistemas educativos al nivel de su estructura. El nombre asignado a esas iniciativas era sintomático, pues Latinoamérica no es Interamérica. El antecedente de *las Relmes*, son las Reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Un rasgo distintivo de este periodo inicial fue el hecho de que las actividades más visibles solían estar centradas, identificadas o dirigidas, en "personalidades", no tanto así en comunidades diversas y dinámicas. La investigación científica en nuestro campo era escasa y estaba dominada por paradigmas clásicos: psicologismo o pragmatismos. Fuera de nuestro ambiente, la visibilidad disciplinar era escasa, digamos que la enseñanza de la matemática era vista más como una arena de interacción entre profesiones (profesores, matemáticos, físicos, economistas, ingenieros, contadores, etc.), que como una verdadera actividad disciplinar, en consecuencia existían muy pocos posgrados especializados en Matemática Educativa y los estudiantes de dichos programas solían ser profesores con varios años de servicio docente que buscaban una profesionalización para su práctica cotidiana. Al nivel de las comunidades, éstas era más bien reducidas y desestructuradas y los primeros graduados al nivel de doctorado estaban "volviendo a casa" después de sus estancias en EUA o Europa, en consecuencia, no habían asumido aun el rol de liderazgo correspondiente.

Durante la primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa se contó con un número pequeño de participantes. El evento estuvo auspiciado por el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, programa financiado por la Secretaría de Educación Pública mexicana. En este programa participaban un gran número de instituciones nacionales de educación superior. Los enfoques clasificados en el evento en aquellos años, ponían el énfasis en la naturaleza teórica o práctica de la investigación o del aporte que se presentaba y señalaban además que estos podrían ser histórico – epistemológico o estudio clínico de casos. Esta dualidad obedecía a una mirada extendida en la época.

Si bien en las reuniones siguientes, sobre todo la segunda y la tercera, se ampliaron considerablemente los enfoques y la presencia de profesores en activo con un cúmulo de experiencias nuevas, esto se expresó mayormente en las temáticas y los enfoques, pues se vivió un crecimiento tanto en temas de aula como en la diversidad de enfoques teóricos.

La reunión contaba con un comité organizador nombrado por los convocantes al evento. Normalmente este pequeño grupo tomaba bajo su responsabilidad la planeación, la evaluación de las ponencias y el desarrollo del evento. Esta limitación en el esquema organizador mostró una crisis durante la transición entre la cuarta y quinta Reunión Centroamericana.

Etapa segunda. *La resistencia*

Fue en la reunión de Tegucigalpa, Honduras, que se hizo explícita la falta de apoyo institucional de parte de instancias financiadoras y quedó en evidencia la ausencia de una comunidad mejor organizada que pudiese dictaminar sobre las ponencias, decidir sobre la estructura y los cambios pertinentes que el evento exigía, conseguir recursos económicos para sustentar el evento y lograr capitalizar el capital humano formado en la región. La reunión contribuyó a poner en el centro del debate la noción de autonomía, noción que rápidamente evolucionaría hacia la de autogestión.

Se plantea entonces en el curso de esta reunión, la necesidad de formar comités especializados para garantizar la estabilidad del evento. Esa reunión tuvo problemas considerables de financiamiento y planeación. Se forman a partir de entonces comités encargados de la evaluación de las propuestas académicas, de la determinación de futuras sedes, de la orientación de un movimiento en ciernes, simplemente nace la figura de comités que organicen el evento, que busquen financiamiento y otros más que pudieran tomar forma de organización en un futuro. Los delegados por país se organizan en redes académicas e impulsan con mayor fuerza las reuniones de delegaciones nacionales donde eran elegidos democráticamente sus representantes, se rompe el rito de inicio del nombramiento por la institución o por la designación de las personalidades. Emerge entonces una nueva generación de líderes naturales con posibilidades de acción independiente de su institución y con la mirada puesta en la autogestión de un movimiento disciplinar.

Estos años fueron cruciales para la consolidación del movimiento Clame, pues el reconocimiento de su propia fuerza dio a esta generación la confianza en un futuro claramente gregario. Esta etapa exigió de un sin número de acciones de resistencia, pues tanto las presiones nacionales – vía las instituciones, o las internacionales – a través de organismos estuvieron en ascenso pidiendo una mayor injerencia en la toma de decisiones en el evento. Para ese entonces un reducido grupo de personas había ya asumido compromisos identitarios explícitos, el movimiento pasaba de ser local: Institucional y Centroamericano, a uno con identidad continental, pues se asumía a América Latina como el espacio natural de crecimiento y desarrollo. Se discutió entonces el papel de las y los colegas latinos que trabajan en los EUA y cuál sería su participación en este movimiento.

Es entonces que se habla de la necesidad de creación de una estructura visible con carácter continental, un Comité Latinoamericano que se encargara de organizar y conducir el proceso de autogestión. Esta idea no se consolida sino años después una vez que el corpus del movimiento fue estabilizando sus prácticas e incrementando su número, su fuerza y su presencia. La inercia y la falta de cohesión de los participantes al nivel regional fueron factores que impidieron constituirlo desde entonces.

Etapa tercera. *La institucionalización o de la visibilidad internacional*

Es en la reunión de 1993 en Panamá cuando se discute en pequeños círculos la posibilidad de contar con una revista de investigación del más alto nivel y de una organización de naturaleza continental. Se forman las primeras comisiones para evaluar la factibilidad de tales iniciativas. Se inician procesos de socialización de la idea misma que cristaliza en la reunión de 1994 en Costa Rica. Sin embargo hubo que esperar a que el proceso de socialización alcanzara niveles mayores de consenso, situación que ocurrirá en los siguientes años.

Para ese entonces, era usual que el evento albergara representantes de casi todos los países latinoamericanos, de diversas escuelas del pensamiento y con mayor vinculo a los programas de posgrado nacionales. Es decir, se había consolidado una comunidad que estaba dispuesta a hacer de *las Relmes*, su espacio natural de crecimiento. Este hecho exigía también de una internacionalización aun mayor, posibilitar la participación a colegas de diferentes partes del mundo a fin de diversificar, tanto las miradas teóricas como los nexos con el "extranjero". Siendo todavía un evento cuyo nombre aludía a Centroamérica y el Caribe, los participantes eran cada vez más latinoamericanos en el doble sentido de la palabra: de geografía y de convicción. Esta composición facilitó la creación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. En su primera parte como un comité de gestión y organización y en su segunda como una plena estructura orgánica.

Entre 1993 y 1996 se toma la decisión de crear, mantener y fortalecer un medio de comunicación que diera cohesión teórica e identitaria al movimiento. El reto fue grande, generar una revista latinoamericana del más alto nivel académico. Siempre se supo que el reto era muy grande y complejo, bastaba con observar cómo muchas iniciativas morían en el intento. Se pensó que tendría que ser un reflejo del movimiento sin dejar de mirar al mundo. Habría que darle a la revista una cierta autonomía respecto del evento, pero a la vez, y esto fue un gran reto, tendía que vivir en y para *la Relme*. Se encargó esta labor a una destacada colega cuya visión académica, fortaleza intelectual y capacidad de liderazgo garantizaría la consolidación de esta iniciativa, fue así que la doctora Rosa María Farfán Márquez, diseña y organiza la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), cuyo fin fue el de articular a una comunidad emergente, estableciendo un puente académico entre Latinoamérica y el mundo. Este nombre fue discutido y modificado en comisiones.

Al día de hoy, la *Relime* es una de las revistas con mayor reconocimiento internacional y la una de las más leídas en nuestra región. Es por así decirlo, una hija del movimiento Clame que ha madurado en alto grado. Fue entonces en la reunión de Morelia, México, que se lanza al mundo el *número cero*. Número que reflejaba el mítico símbolo mesoamericano.

El proceso de maduración de *las Relmes* se vio enriquecido considerablemente por la presencia de *Relime*, los enfoques teóricos fueron evolucionando de los paradigmas clásicos a los modernos, para dar lugar a un fortalecimiento de las experiencias de aula y se diversifican los estudios cualitativos al tiempo que se equilibran los entonces dominantes estudios cuantitativos. Se inicia también con la exploración sobre el empleo de recursos tecnológicos para la enseñanza, la enseñanza basada en problemas o en proyectos, y toma una particular fuerza la denominada enseñanza problémica así como los enfoques epistemológicos y didácticos; también ingresa lentamente la didáctica fundamental, la pedagogía crítica y hacen su aparición los primeros encuadres teóricos que vieron la luz en Latinoamérica al seno de este movimiento, la Aproximación Socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa; se profundiza la discusión de más marcos teóricos, como el enfoque Ontosemiótico, la Antropología Cultural, la Etnomatemática y se hacen intentos por articular unos con otros con los enfoques teóricos Antropológicos, Semióticos, Sociales y Críticos.

Etapa cuarta. *La profesionalización o consolidación disciplinar*

Las corrientes fundadoras del movimiento se tornan paulatinamente más y más visibles en el ámbito internacional, su capital académico se incrementa y eso induce o fomenta la participación de jóvenes investigadores en las iniciativas de Clame. Se torna usual el que un

joven recién egresado de una licenciatura, o aun durante el curso de sus estudios, entre en contacto con esta comunidad. El promedio de edad del movimiento se reduce y con ello crecen sus posibilidades de desarrollo futuro. La creación y lanzamiento del Premio Simón Bolívar de Investigación en Matemática Educativa dio a los jóvenes investigadores una ventana al mundo, un impulso muy interesante que ha permitido localizar talentos y fomentar su participación en diferentes foros especializados.
En esta etapa se pasa de Clame como movimiento, al Clame como organización civil. Se discutió mucho en asambleas de la organización si la modalidad adecuada tendría que ser una ONG o una AC. El debate miraba sobre todo al futuro. No fue fácil para los participantes tomar decisiones al respecto, se optó por la segunda figura y se registró como Asociación Civil con posibilidades de acción internacional. Quedó registrada en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, en México.
Este periodo tiene un rasgo distintivo, se crean Clames regionales, como el pujante Clamed en República Dominicana y se fortalecen a la par los posgrados regionales y sus relaciones. Nace el primer posgrado latinoamericano en Matemática Educativa con modalidad a distancia con sede en el Instituto Politécnico Nacional de México. Este posgrado si bien institucional, ha sido un elemento clave en la etapa de consolidación del movimiento Clame, pues puso al nivel de posgrado a una comunidad que quizá, nacionalmente, no hubiera tenido oportunidad de estudiar maestría y doctorado en Matemática Educativa.

Mirando hacia el futuro...

Un incipiente proceso de internacionalización de la comunidad lleva a sus miembros hacia Europa, Asia, África, Norteamérica, Oceanía a través de estudiantes de posgrado, de intercambios académicos o de conferencistas invitados. El próximo ICME 11, que tendrá lugar en México en 2008, tiene una fuerte presencia de miembros de la comunidad Clame.
Hoy día se viven ajustes de crecimiento, revisiones de las prácticas, relevos naturales en los liderazgos y consolidación de iniciativas prometedoras.
Sé muy bien que las Relmes seguirán vivas por muchos años y confío en que las nuevas generaciones harán de este movimiento una verdadera historia de éxito. Al día de hoy se habla de lo que todavía parece un sueño: la creación del Centro Latinoamericano de Investigación en Matemática y del Observatorio de Matemática Educativa… Nuestra historia siempre fue esa, pasar de los sueños a las realidades… hemos aprendido *a dar tiempo al tiempo*.

Referencias bibliográficas

Alfaro, T., Murillo, M., Peralta, T. (Eds.). (1994). *Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Universidad de Costa Rica. San José: Costa Rica.

Ardila, A., Castillo, T., Agard, E. (Eds.). (1993). *Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Universidad de Panamá: República de Panamá.

Beitía, G. (Ed.). (2001). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 14. México: Clame – Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R., Imaz, C. (Eds.). (1992). *Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Cuernavaca: México.

Crespo Crespo, C. (Ed.) (2002). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 15. Tomo 1 y 2. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cruz, T., Torres, W., Rodríguez, J., Planchart, O. (Eds.). (1996). *Memorias de la décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Universidad de Puerto Rico: Puerto Rico.

Delgado, R. (Ed.). (2003). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 16. Tomo 1 y 2. México: Clame.

Díaz, L. (Ed.). (2004). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 17. México: Clame.

Farfán, R. (Ed.). (1995). *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* Programa Editorial del Área de Educación Superior del DME – Cinvestav. La Habana: Cuba.

Farfán, R. (Ed.). (1995). *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Tomo 1 y 2. México: Cinvestav.

Farfán, R. (Ed.). (1998). *Memorias de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (Ed.). (1999). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 12. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (Ed.). (1997). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 11. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia: Michoacán.

Farfán, R. M., Matias, C. E., Sánchez D. y Tavarez, A. (Eds.). (2000). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 13. Universidad Autónoma de Santo Domingo. Santo Domingo: República Dominicana.

García, G. (Ed.). (1998). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 12. Universidad Nacional, Bogotá: Colombia.

Hitt, F., Bonilla, E., Figueras, O. (Eds.). (1987). *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Mérida: México.

Hitt, F., Figueras, O., Radford, L., Bonilla, E. (Eds.). (1988). *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Guatemala: Guatemala.

Hitt, F., Imaz, C. (Eds.). (1990). *Memorias de la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Acapulco: México.

Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, J. G. (Eds.). (2005). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 18. México: Clame.

Martínez Sierra, G. (Ed.). (2006). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 19. México: Clame.

Membreño, T., Membreño, D., Galeano, M. (Eds.). (1991). *Memorias de la Quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Tegucigalpa: Honduras.

Oviedo, J., Tsijli, T., Sanabria, R., Quesada, A. (Eds.). (1989). *Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Universidad de Costa Rica. San José: Costa Rica.

Sitio oficial del Clame, http://www.clame.org.mx

Principales tendencias que se revelan en los trabajos presentados en las RELME

Luis Campistrous
SEAC. Academia de Ciencias de Cuba.
Vicerrectoría Académica del ISCF Manuel Fajardo. La Habana. (Cuba)
luis.campistrous@infomed.sld.cu

Introducción

Esta conferencia surge por una solicitud del Comité Organizador de esta reunión interesada en hacer un balance de la trayectoria recorrida en estos 20 años desde que se iniciaron las reuniones. La idea en esta conferencia es analizar las tendencias, en los trabajos didácticos, que pueden ser aisladas mediante el análisis de los trabajos presentados y publicados en dichas reuniones. Dado el alcance de las reuniones, que se extiende a todo lo largo y ancho de nuestro continente, la diversidad de formas y métodos de trabajo que encontramos en el mismo y la pasividad de presentaciones, la búsqueda de todas las tendencias presentes es una tarea mayor que requiere mayor tiempo y el concurso de diversos investigadores con diferentes puntos de vista. Teniendo en cuenta estas razones, esta conferencia sólo pretende iniciar un trabajo, que debe ampliarse posteriormente, para lo cuál se concentrará en revelar algunas de las principales tendencias que se pueden apreciar en estos 20 años y determinar, a partir de ellas, algunas líneas de acción para futuros trabajos.
Al preparar esta conferencia nos apoyamos en dos antecedentes que están presentes en nuestras reuniones, el análisis realizado por Germán Beitía en la reunión de Panamá 2000 y los resultados de un grupo de trabajo que sesionó en la reunión de la CUJAE 2002

Metodología empleada

Antes de comenzar la búsqueda y discusión de las tendencias que se presentan en las reuniones, es necesario precisar que vamos a entender por tendencia, de forma tal que todos interpretemos de la misma forma los resultados a que se arribe. Según el diccionario de la Academia de la Lengua Española:
Tendencia. (De tender, propender). f. Propensión o inclinación en los hombres y en las cosas hacia determinados fines. || 2. Fuerza por la cual un cuerpo se inclina hacia otro o hacia alguna cosa. || 3. Idea religiosa, económica, política, artística, etc., que se orienta en determinada dirección.
De estas acepciones la que vamos a utilizar es la número 3 ya que buscamos ideas de tipo científico que se orientan a un determinado fin.
De acuerdo con esta acepción del término, para encontrar las tendencias que se revelan en las reuniones es necesario analizar los trabajos publicados en las actas de dichas reuniones; dado que se trata de analizar documentos, es la metodología del análisis de contenido es adecuada y las unidades de análisis pueden ser las reuniones.
Lo ideal es incluir en el análisis todas las actas pero, dado que se trata de un trabajo inicial y teniendo en cuenta el tiempo disponible, es conveniente seleccionar una muestra. En esta muestra se consideró necesario incluir intencionalmente tres reuniones: la primera disponible Acapulco 1990 (52), la última publicada al momento del análisis Chiapas 2005 (110) y la que marca la transformación de las reuniones al alcance latinoamericano Morelia 1997 (77). Además, se seleccionaron al azar dos reuniones entre Acapulco y Morelia, Costa Rica 1994 (92) y Habana 1995 (75), y otras dos entre Morelia y Chiapas, Santo Domingo 1999 (75) y Cujae 2002 (120); estas 7 reuniones representan el 39% de las reuniones celebradas. Entre

paréntesis al lado de cada reunión hemos incluido la cantidad de trabajos publicados en cada edición de las Actas, en total se estudiaron 602 trabajos.
Para seleccionar las categorías de análisis se realizó una lectura exploratoria de actas tanto de las seleccionadas en la muestra como las no seleccionadas; esta exploración permitió comprobar que las categorías utilizadas en las actas y las propuestas por la comisión que sesionó en la reunión de la CUJAE son un gran número y presentan una amplia dispersión. Tomando en cuenta este resultado, se decidió considerar categorías de análisis que no constituyen criterios de clasificación de los trabajos, sino que representan aspectos que de una u otra forma están presentes en todos los trabajos. Producto de la exploración inicial se consideró un grupo de categorías que fue ampliado y precisado a medida que se realizaba el análisis.
Las categorías a que se arribó finalmente fueron:

1. Nivel.
2. Área.
3. Tipo.
4. Enfoque.
5. Aspecto.
6. Naturaleza.
7. Orientación.

Algunas de estas categorías se explican por si mismas, otras requieren una explicación y aclaración del significado; en el parágrafo siguiente se discuten todas las categorías y los resultados obtenidos, antes de hacerlo es necesario discutir la forma de proceder con el análisis.
Para el análisis se realizaron dos procedimientos, un primer acercamiento en el que se cuantificó la presencia de cada uno de los valores de cada categoría en las diferentes unidades de análisis; la cuantificación se realizó utilizando la frecuencia relativa de los valores de cada categoría en una escala porcentual y para tratar de buscar tendencias a lo largo de las reuniones se construyeron series de tiempo con los valores en esta escala porcentual, a partir de estas series se determinó la línea de tendencia en cada caso.
Además se utilizó un segundo procedimiento, con un acercamiento más cualitativo, en el que se buscaron líneas más complejas que incluyen diferentes categorías y que permiten arribar a conclusiones que a veces pueden ser verificadas cuantitativamente y a veces no.

Resultados por categoría

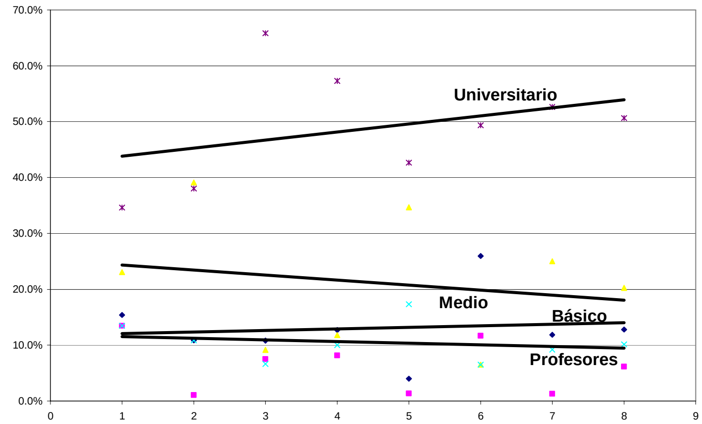
1. Nivel

Esta categoría hace referencia al nivel escolar al cual pertenecen los trabajos. Dada la diferencia entre países del continen te al determinar el nivel primario y la existencia de muchos trabajos que se sitúan en los límites de la primaria y la secundaria elemental, no resultó adecuada la consideración del nivel primario en forma independiente sino que se utilizó el nivel básico que incluye el primario y el medio básico. Los valores de esta categoría son:

- Básico.
- Medio.
- Universitario.
- Profesores.
- General.

En esta lista Medio es una abreviatura para medio superior ya que el elemental se incluye como parte del nivel básico, el valor Profesores hace referencia a los trabajos que se destinan a la formación o capacitación de profesores y el valor General incluye aquellos para los que no es posible precisar el nivel o se refieren a más de uno.
Los resultados del análisis se recogen en el gráfico 1.

Gráfico 1. Tendencias por nivel



Como se puede apreciar a lo largo de las reuniones incluidas en el análisis la mayoría de los trabajos se refieren al nivel universitario y la tendencia histórica de los mismos es creciente, el nivel básico tiene poca presencia y muestra una tendencia ligeramente creciente. Los trabajos de los restantes niveles tienen tendencia decreciente.

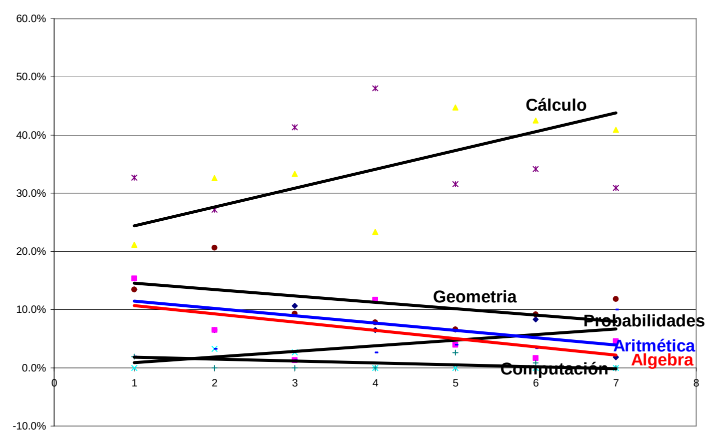
2. Área

Esta categoría se refiere a la disciplina mate mática sobre la que se realiza el trabajo, en el estudio realizado se encontraron, en número no despreciable, trabajos cuyo centro no estaba en la disciplina (entendida en sentido clásico) sino en temas afines como la lógica y la computación, o en las aplicaciones de la Matemática. Teniendo todo esto en cuenta, los valores de esta categoría al final son:

1. Aritmética.	4. Probabilidades.	7. Cálculo.
2. Álgebra.	5. Lógica.	8. Aplicaciones.
3. Geometría.	6. Computación.	9. General.

Bajo la denominación de general se catalogan trabajos que no se incluyen de manera clara en una de las áreas o que se refieren a más de una. Dado que representar nueve valores en una gráfica puede confundir más que aclarar, no hemos representado en la gráfica 2 que recoge los resultados del análisis ni Lógica, ni Aplicaciones, ni General y hemos dejado la ilustración de los temas más clásicos.

Gráfico 2. Tendencias por Área



Como se puede apreciar en el gráfico, la mayoría de los trabajos han estado referidos siempre al Cálculo que, además, muestra la tendencia creciente más fuerte. Todas las restantes áreas, excepto Probabilidades, muestran tendencia a decrecer. En el caso de las probabilidades hemos agrupado, como es costumbre, todos los trabajos referidos tanto a Probabilidad como a Estadística, es decir, todo lo referido al pensamiento estocástico.

3. Tipo

En esta categoría se analizaron los trabajos según su objeto y estructura, con independencia de la forma que asumen: conferencia, ponencia, presentación, etc., encontramos que se pueden agrupar en tres categorías atendiendo a estas características:

1. Informe investigación 2. Exposición 3. Curso

En la primera categoría se reúnen aquellos trabajos en los q ue se trata de exponer una investigación, sus resultados y proceso. Esto significa que todo el trabajo está centrado en la investigación, incluso en muchos casos se utilizan las formas que corresponden a los informes de investigación. Lo dicho no quiere decir que sólo se haga referencia a investigaciones en este tipo de trabajos, puede que en otros tipos se hable de investigaciones y resulta-dos pero la idea de la exposición se apoya en ellos sin centrarse en su exposición.

Las exposiciones corresponden a trabajos en los que el autor expone sus ideas sobre temas o aspectos de la Matemática Educativa, en esta exposición puede (y la mayoría de las veces así es) usar investigaciones como fundamento de sus ideas pero sólo son referidas y no descritas ni en el proceso ni en los resultados.

Los cursos agrupan a los trabajos en los que el objetivo es trasmitir experiencias o conocimientos establecidos y han sido siempre parte importante de la composición de las reuniones. En esta categoría se pueden considerar trabajos presentados como talleres si su objeto y estructura se corresponde con lo dicho.

En la gráfica se puede apreciar que la tendencia desde el inicio de las reuniones es al crecimiento de los trabajos de investigación, lo que apreciamos como un efecto positivo del accionar de la comunidad a lo largo de estos años.

4. Enfoque

Con la categoría enfoque hacemos referencia a la intención principal del trabajo realizado por el ponente, es decir que pretende al abordar el tema que presenta. En el análisis encontramos que estas intenciones se pueden agrupar en tres grupos:

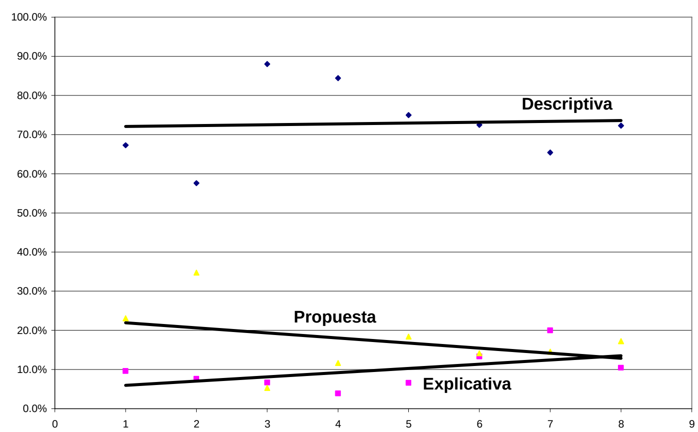
1. Explicativo 2. Propuesta 3. Descriptivo

Cuando hablamos de un enfoque explicativo hacemos referencia al hecho de que el autor busca encontrar y trasmitir la explicación del fenómeno estudiado, esta explicación puede buscarla por la vía de la investigación o de un análisis de tipo epistemológico o socioepistemológico o, incluso, mediante una discusión teórica.

Hablamos de un enfoque de propuesta cuando el autor hace una propuesta didáctica o pedagógica, que puede incluso someter a un experimento didáctico, pero no trata de encontrar explicaciones del fenómeno.

Por último, hablamos de un enfoque descriptivo cuando el autor describe el fenómeno o una teoría, pero se limita a esa exposición.

Gráfico 4. Tendencias del enfoque.



Como vemos en el gráfico, lo más notable en esta tendencia es que se observa un incremento en la categoría explicativa, es decir, aumenta la búsqueda de explicaciones de los fenómenos en estudio, en detrimento de la simple realización de propuestas no fundamentadas y su comprobación experimental.

5. Naturaleza.

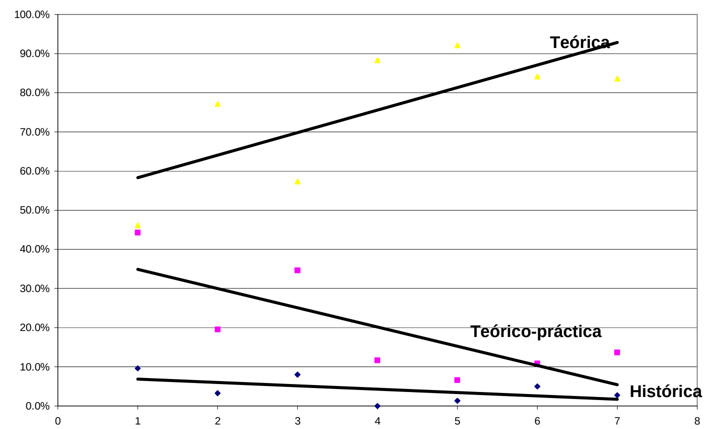
Esta categoría de análisis se explica por sí sola, encontramos trabajos con tres tipos de naturaleza diferentes:

1. Histórica 2. Teórica 3. Teórico-práctica

En el grupo de trabajos de naturaleza histórica incluimos tanto los de corte puramente histórico (en los que se habla de la historia de un aspecto de la Matemática o de la Didáctica) como los de corte epistemológico o socio-epistemológico que realizan un análisis histórico del fenómeno en estudio.

Al incluir el grupo de trabajos de naturaleza teórica, no estamos contraponiendo teórico y experimental, sino que nos referimos a trabajos cuya fundamentación fundamental está en la teoría, por último la naturaleza teórico-práctica se refiere a trabajos en los que se tratan de problemas encontrados en la práctica del aula y que en algunos casos incluyen aspectos de la teoría.

Gráfico 5. Tendencias Naturaleza



Tal y como se aprecia en el gráfico, las investigaciones de naturaleza teórica muestran una tendencia ascendente, mientras que las restantes muestran tendencia decreciente.

De nuevo esto significa que la acción de la comunidad en los últimos años ha producido un aumento en el componente teórico de las investigaciones que se realizan en ella, lo que muestra un incremento de la calidad de los trabajos realizados.

Lo que hemos dicho en el análisis de las categorías de enfoque y naturaleza nos hace meditar acerca de la presencia de la investigación positivista en nuestras reuniones y comunidad.

Cuando hablamos de investigaciones de corte positivista, nos referimos al modelo, en boga en los años 50, que reproducía en la investigación educativa el modelo de las ciencias naturales al inicio del siglo XX: intervención "experimental" comprobación empírica. Con respecto a las categorías que hemos establecido, se pueden distinguir porque representan propuestas que conllevan una intervención y en las que no aparece como característica re-levante el análisis teórico.

En el gráfico 6 hemos aislado la tendencia de las investigaciones propuesta-intervención (corte positivista) y propuesta-teórica (no positivista).

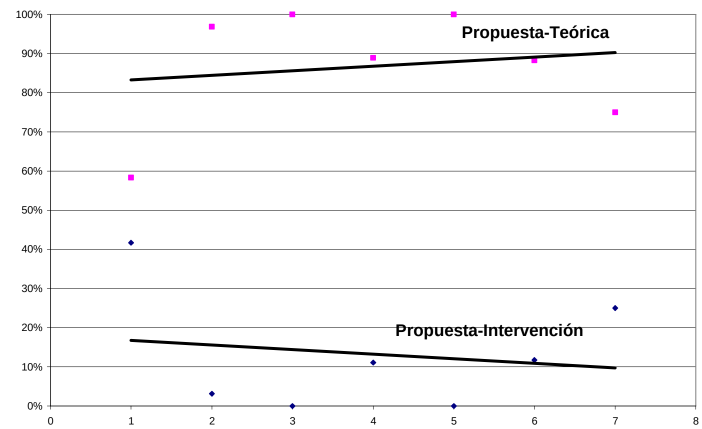
Como se puede apreciar la tendencia de estas investigaciones es decreciente, mientras las propuestas avaladas por un fundamento teórico tiende a aumentar, esto representa otro logro positivo del trabajo de la comunidad en estos años de reuniones.

3.6. Aspectos

En esta categoría incluimos el análisis de los dif erentes aspectos de la Matemática Educativa a los que se dirigen los trabajos incluidos en las actas. Los aspectos que aparecen son los siguientes:

1. Demostraciones
2. Problemas
3. Construcción
4. Gráficos
5. Pensamiento Matemático
6. Currículo.
7. Textos.
8. Investigación.
9. Medios.
10. Recreativo.
11. Evaluación.
12. Contextualización.
13. Comunicación.
14. General.

Gráfico 6. Tendencia tipo positivista



Los valores de esta categoría son conocidos y se explican por sí solos, en este caso nos referiremos solamente a uno de estos valores el pensamiento matemático para el cuál es preciso que aclaremos lo que entendemos bajo el nombre.

En este sentido, el conocido investigador A. Schoenfeld considera lo siguiente:

Pensamiento matemático

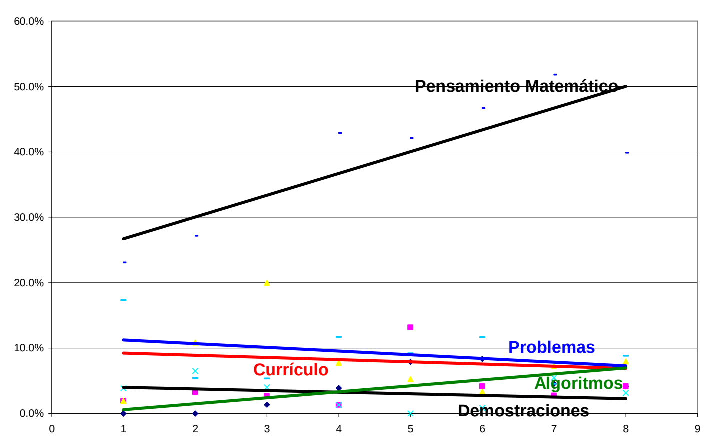
1. *Desarrollar puntos de vista matemáticos, valorando los procesos de matematización y sintiendo predilección por aplicarlos.*
2. *Dominar las herramientas de la profesión y usarlas al servicio del objetivo de comprender la estructura (sentido matemático) (*Schoenfeld, 1992)

Desde luego esta visión no es compartida por todos los investigadores y, sin hacer de este punto una discusión central en esta conferencia citamos otra posición que es compartida por el autor:

Pensar matemáticamente

- *Interpretar datos de la vida diaria y tomar decisiones en función de esa interpretación.*
- *Usar la Matemática en forma práctica desde simples sumas algorítmicos hasta análisis complejos (incluyendo estadísticos) y usar la modelación.*
- *Poseer un pensamiento flexible y un repertorio de técnicas para enfrentarse a situaciones y problemas nuevos.*
- *Poseer un pensamiento crítico y analítico tanto al razonar como al considerar razonamientos de otros.*

Gráfico 7. Tendencia aspectos



Sobre esta categoría hay que destacar que si se trata de representar la tendencia de todos sus valores se obtiene un gráfico demasiado atestado y que es difícil de leer, por esa razón sólo representamos los más importantes. Resulta de una ojeada superficial que los trabajos referentes al pensamiento matemático (en las acepciones aquí mencionadas), representan los más numerosos y con una tendencia claramente creciente; en cambio los trabajos relativos a la resolución de problemas y demostraciones (que en cierto momento eran muy abundantes) presentan una tendencia decreciente. Algo interesante es la tendencia creciente de los trabajos relativos a algoritmos y el desarrollo de habilidades de cálculo.

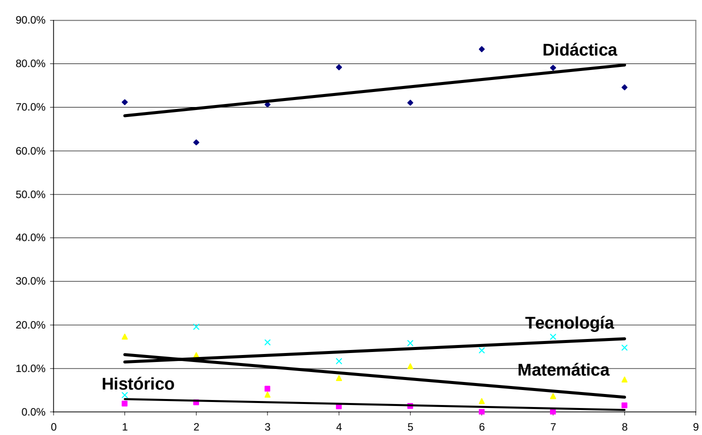
7. Orientación.

En esta categoría se hace referencia a la rama a la cuál se orienta fundamentalmente el trabajo; se encontraron trabajos orientados a:

1. Didáctica 2. Tecnología 3. Matemática 4. Historia

Los valores de esta categoría se explican por si mismos, sólo haremos notar la tendencia decreciente de los trabajos dirigidos a la Matemática pura y los aspectos históricos puros. En cuanto a los referidos a la tecnología que muestran una tendencia creciente, es necesario destacar que en su mayoría se refieren no a la tecnología como medio, sino a la tecnología como instrumento didáctico y para desarrollar el pensamiento.

Gráfico 8. Tendencia orientación



Conclusiones

Las conclusiones del trabajo podemos resumirlas en la forma siguiente:

1. Tendencia al crecimiento en trabajos de

a) Nivel Universitario	c) Investigación	e) Teóricos
b) Cálculo	d) Pensamiento Matemático	f) Didáctica

2. Disminución de las investigaciones propuesta-medición estadística
3. Decrecimiento de las investigaciones matemáticas e históricas puras
4. Surgimiento y crecimiento del enfoque socio-epistemológico
5. Predominio del uso de la tecnología orientada al desarrollo del pensamiento matemático

Hay una serie de aspectos que no pudieron ser analizados en esta ocasión y que se conservan como líneas para una continuación futura:

1. Análisis de modelos de investigación.
2. Relación entre propuestas e ingeniería didáctica.

3. Relacionar las tendencias con la procedencia.
4. Precisión de la evolución de las investigaciones epistemológicas y socio-epistemológicas

Por último queremos destacar que este inicio de la reflexión sobre el quehacer científico de nuestra comunidad en las reuniones, muestra un saldo positivo y nos permite sentirnos optimistas respecto a la continuación de su desarrollo.

Referencias bibliográficas

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 11. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1998

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 13. Grupo Editorial Iberoamérica. México 2000

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 16. CLAME. Habana 2003.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 18. CLAME. México 1997

Beitía, Germán (2001) Algunas tendencias de la Matemática educativa en Latinoamérica. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 14 pag. 14-17.

Campistrous, L. Rizo Celia. (2002) La calculadora y el desarrollo del pensamiento. Acta latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 15 tomo 2 Buenos Aires

Campistrous, Luis et al. (2003) Estado del Arte de la Matemática Educativa en Latinoamérica. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 16 Tomo 1 pag. 358-363

Memorias de la cuarta reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Facultad de Matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero. México 1992

Memorias de la novena reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Área de Matemática Educativa del IPN. México. 1995

Memorias de la octava reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Costa Rica.1994

Schöenfeld, A. (1992) Aprendiendo a pensar matemáticamente. Libro para investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Mac. Millan. New York.

PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y SUS CONCEPCIONES: EL CASO DE LOS PARÁMETROS DE LA PARÁBOLA

Mario Sánchez Aguilar
PROME, CICATA del IPN. (México)
mosanchez@ipn.mx

Campo de investigación: educación a distancia, formación de profesores, visualización.
Nivel educativo: superior
Palabras clave: ideas de profesores, función cuadrática, tecnología, educación a distancia

Resumen
En este artículo se presentan los resultados de una investigación realizada en México, que busca fortalecer nuestro conocimiento acerca de las modificaciones que experimentan las organizaciones matemáticas dentro de un escenario escolar, cuando éste se encuentra insertado en un espacio virtual de instrucción a distancia. En particular, estudiaremos aquellas transformaciones producidas por la utilización de software durante la planeación y resolución de actividades matemáticas particulares, las cuales forman parte de un proceso de profesionalización docente en el área de las matemáticas.

Introducción

Los dispositivos tecnológicos de los que se puede disponer en un escenario de instrucción a distancia modifican la manera en que se representan, se comunican y se analizan los contenidos a enseñar.
En el presente escrito buscaremos caracterizar dichos cambios, en particular nos enfocaremos en aquellos producidos al utilizar software para la realización de actividades matemáticas no habituales, esto es, actividades que normalmente no formarían parte de un discurso matemático escolar tradicional debido al tipo de cuestiones al que hacen referencia; en este caso nos referiremos a una actividad en la que es necesario descifrar información gráfica asociada a un objeto matemático. Para lograr lo anterior, estudiamos dos grupos de profesores que se encuentran involucrados en un proceso de profesionalización docente (en esta situación ellos juegan el rol de estudiantes). Estos grupos se encuentran insertados en dos diferentes escenarios de instrucción a distancia; uno hace uso del Internet y sus herramientas como principal medio de gestión y comunicación; mientras que el otro además del Internet hace uso de conferencias por televisión y comunicación telefónica.

Referentes Teóricos

Nuestro interés en este trabajo es estudiar la influencia y los posibles cambios que se presentan en las relaciones dentro de un sistema didáctico, cuando se hace uso de herramientas propias de un escenario de instrucción a distancia. En particular, nos interesa analizar las modificaciones provocadas por la utilización de software en la realización de actividades matemáticas no tradicionales. Por lo anterior, consideramos adecuado utilizar la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), la cual considera al saber matemático como una forma particular de conocimiento, que es el fruto de la acción humana institucional, es decir, que se produce, se utiliza o más generalmente se transpone en las instituciones. En el caso que nos atañe, nos referimos a una institución educativa a distancia cuyo objetivo es lograr la profesionalización de profesores de matemáticas en su práctica docente.

Una noción básica dentro de esta teoría, que es utilizada para describir la organización del conocimiento matemático dentro de una institución determinada es la denominada *praxeología matemática*. La praxeología matemática es un conjunto de cuatro elementos: el primero, es el tipo de *tareas* (T) en la que un objeto matemático dado se ve involucrado; el segundo, son las *técnicas* (τ) utilizadas para afrontar y resolver este tipo de tareas; el tercer elemento es la *tecnología* (θ), que consiste en el discurso matemático que introduce, justifica y permite entender una técnica particular; el cuarto y último elemento es la *teoría* (Θ), que es una fundamentación de la tecnología, o como algunos autores la denominan, es la tecnología de la tecnología.

Los escenarios y los sujetos de estudio

Para llevar a cabo este estudio se consideró a un conjunto de veinte profesores de matemáticas que se encontraban involucrados en un proceso de profesionalización docente, el cual se gestionaba en diferentes escenarios de educación a distancia.

Del primer escenario de instrucción se tomó una muestra de 11 profesores que laboran en el nivel medio superior. Estos profesores provienen de diferentes estados de México y se encontraban inscritos en un Diplomado de Matemática Educativa denominado "Estrategias para la enseñanza de las matemáticas"; este Diplomado era impartido y gestionado desde las instalaciones del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) en el Distrito Federal, México. Cada uno de los módulos que constituían al Diplomado incluían videoconferencias que eran transmitidas por televisión mediante uno de los canales de la Red Edusat (Edusat es un sistema de señal digital comprimida que se transmite vía satélite, siendo el más importante de su naturaleza en Latinoamérica; depende de la Secretaría de Educación Pública [de México], y su función principal es poner a disposición de los mexicanos una amplia oferta de televisión y radio con fines educativos). La comunicación con los profesores durante cada videoconferencia podía realizarse vía telefónica, la comunicación posterior a la videoconferencia, la asignación y entrega de tareas, y otros recursos necesarios, eran tramitados por medios electrónicos vía Internet tales como correo electrónico, plataforma virtual institucional y foros asincrónicos.

El segundo grupo de profesores constituido por 9 personas fue tomado de un escenario distinto. Estos profesores se encuentran inscritos en un programa a distancia de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (PROME, CICATA-IPN). Estos profesores laboran en los niveles medio superior y superior, y provienen de distintas regiones de México y Argentina. A diferencia del escenario anterior, la gestión y desarrollo de los cursos del posgrado se realiza sin la utilización de transmisiones televisivas, únicamente se utiliza el Internet y herramientas de comunicación asociadas como plataforma virtual, foros sincrónicos y asincrónicos, y correo electrónico.

Sobre el contenido matemático

Para lograr los fines de nuestra investigación era necesario involucrar un objeto matemático alrededor del cual giraran nuestras observaciones. La función de segundo grado de variable real de la forma $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ocupó ese lugar.

Con el fin de acotar nuestra investigación, decidimos enfocarnos en las ideas presentes en los profesores acerca de los efectos gráficos que producen los parámetros A, B y C sobre la representación gráfica de la función previamente mencionada. Nuestro interés en observar estas ideas de los profesores en contextos gráficos, fue motivada por la experiencia obtenida al participar en programas presenciales de profesionalización docente; esto es, comenzamos a percibir ciertos problemas para comprender y argumentar los efectos gráficos producido por los parámetros A, B y C sobre la gráfica de una función cuadrática. Sobre estas dificultades, queremos destacar dos aspectos: Primero, sabemos que existen diferentes grados de dificultad para identificar el efecto gráfico de estos parámetros. Mientras al parámetro A fácilmente se le reconoce como el causante de la concavidad tomada por la parábola, el efecto producido por B se plantea como el más "oscuro" para los profesores; segundo, es notable la diferencia existente entre el tipo de argumentos utilizados para justificar el efecto producido por cada uno de los parámetros. Para los parámetros A y C es común encontrar argumentos que hagan uso de elementos de naturaleza gráfica, como la concavidad o la intersección con el eje *Y*. En el caso del parámetro B es común que exista la presencia de elementos algebraicos dentro de los argumentos utilizados por los profesores

El diseño de la actividad matemática

La preparación de la actividad matemática que se busca aplicar es un paso muy importante en el proceso de la investigación, ya que debe diseñarse siempre teniendo en mente el tipo de información que se pretende obtener con su implementación.

Dado que la información buscada es de naturaleza gráfica (las ideas asociadas a los efectos gráficos producidos por los parámetros), la actividad debería estar planteada en el mismo contexto, por lo que en un primer momento se pensó en presentar a los profesores gráficas de funciones cuadráticas generadas en un software, y con base en éstas cuestionar a los profesores sobre el signo (negativo, positivo o cero) que poseen los parámetros en dichas representaciones. El cuestionar acerca del signo de los parámetros de la función es una forma de provocar la reflexión sobre sus efectos gráficos.

Otra variable a considerar en nuestro diseño era sin duda el escenario en el que éste se aplicaría, y sobre todo las herramientas disponibles en dicho ambiente. Los profesores que constituyeron nuestra muestra, eran libres de utilizar algunos paquetes de software matemático con capacidades gráficas, numéricas y algebraicas, para el estudio y resolución de las diferentes actividades matemáticas que se les presentaban a lo largo de los cursos. Estos paquetes estaban contenidos en un conjunto de programas de computadora previamente seleccionado por los instructores de los cursos y que se ponían a disposición de los profesores. Esta situación planteaba la necesidad de reconsiderar nuestro diseño inicial de la actividad.

En un análisis a priori de la actividad, se consideró que era posible que las características del gráfico desviaran la atención y las estrategias utilizadas por los profesores hacia un contexto algebraico; por ejemplo, el hecho de que los ejes aparezcan graduados, podría facilitar la identificación de las coordenadas asociadas a puntos pertenecientes a la parábola (por ejemplo aquellos correspondientes a las intersecciones de la gráfica con el eje de las abscisas y el de las ordenadas); con base en estos pares ordenados, fácilmente se podría utilizar algún software para realizar una regresión cuadrática que genere como resultado una expresión algebraica que aproxime a la función. A partir de esta expresión algebraica, fácilmente se podrían obtener información acerca de los parámetros de la función, lo cual nos impediría mirar las ideas de los profesores asociadas a los efectos gráficos de dichos parámetros.

Por lo anterior, decidimos utilizar gráficas que incluyeran ejes ordenados que no hicieran referencia a alguna escala numérica. La versión final de los gráficos utilizados se muestra en la figura 1.

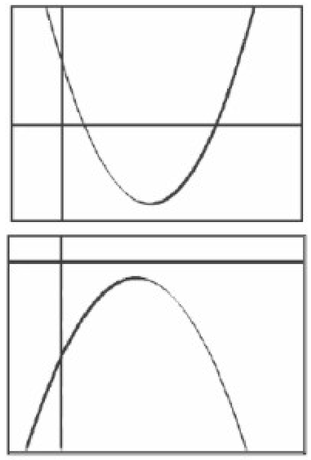


Figura 1. Gráficos 1 (arriba) y 2 (abajo), presentados a los profesores durante la actividad matemática exploratoria

Aplicación de la actividad y análisis de los resultados

La actividad discutida anteriormente fue distribuida en formato MS Word a los profesores de ambos grupos de la muestra mediante el uso de una plataforma en Internet; la actividad fue colocada en la plataforma de trabajo y los profesores se daban a la tarea de descargarla para su posterior resolución. Se solicitó que la resolución a la actividad fuera individual y que la versión final de ésta fuera entregada al asesor correspondiente vía correo electrónico, esta medida se tomó para tratar de reducir la posibilidad de que las respuestas fueran influenciadas y reflejaran las creencias personales sobre los contenidos matemáticos involucrados. Para analizar las respuestas de los profesores se optó por seguir dos rutas: una cuantitativa que nos ofreciera información acerca de los porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los parámetros; y otra cualitativa que nos permitiera indagar sobre el tipo de respuestas, estrategias y argumentos utilizados en la solución de la tarea. La información cuantitativa obtenida se concentra en la tabla presentada en la figura 2; los subíndices 1 y 2 utilizados para denotar los parámetros indican la gráfica a la que corresponden; por ejemplo: Con A1 se denota el efecto gráfico del parámetro *A* sobre la gráfica 1, que es la qie corresponde a la parábola que intersecta el eje de abcisas; asímismo, B2 denota el efecto del parámetro *B* sobre la gráfica de la parábola con soluciones no reales (ver figura 1).

Parámetro	Número de respuestas correctas	Porcentaje
A1	20	100%
B1	19	95%
C1	17	85%
A2	20	100%
B2	18	90%
C2	19	95%

Figura 2. Porcentajes de respuestas correctas asociados a cada uno de los parámetros

De esta tabla es posible observar que el parámetro B, del cual se esperaba obtener grandes dificultades por parte de los profesores, no se presenta tan problemático, al menos no en las proporciones esperadas. La siguiente mirada cualitativa a los datos puede proporcionarnos luz sobre esta situación: Después de observar y analizar el tipo de argumentos y estrategias utilizadas por los profesores de ambos grupos para construir sus respuestas, éstas se agruparon en cuatro categorías: gráfica, gráfica-algebraica, exploración de casos particulares y ausencia de argumentos. Un ejemplo de la exploración de casos particulares se muestra en la figura 3.

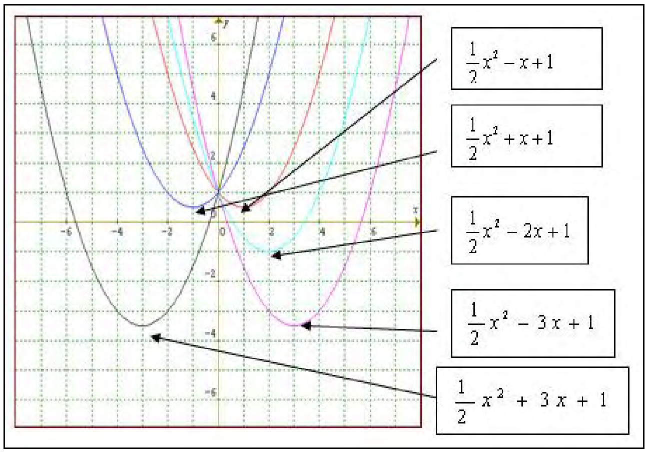


Figura 3. Ejemplo de la técnica "exploración de casos particulares"

Es interesante observar cómo, a pesar de la existencia de diferencias en los programas de profesionalización a los que pertenece cada grupo de profesores (en tiempo de instrucción, profundidad, características de los escenarios, etc.), el uso de software facilitó que los profesores pudieran realizar el análisis de casos particulares de gráficas de funciones y de esta manera obtener información sobre el comportamiento gráfico de la función con respecto a sus parámetros como se muestra en la figura 3. De hecho, fue la estrategia de solución más ampliamente utilizada por los profesores.

Uno podría fácilmente concluir que, el uso de software en un escenario de instrucción a distancia, influye de manera positiva en el desempeño de las personas involucradas en la resolución de actividades matemáticas, sin embargo, como se puede apreciar en la figura 4, la influencia que ejercen estas herramientas en las técnicas de resolución, pueden traer como consecuencia concepciones erróneas acerca del objeto matemático analizado. En esta situación, a pesar de que se utiliza la técnica del análisis de casos particulares, el profesor obtiene una conclusión equivocada sobre el efecto que produce el parámetro C sobre la gráfica de la función cuadrática. El profesor está estableciendo una relación entre el signo del parámetro C y la posición del vértice de la parábola, en otras palabras, el profesor concluye que si el valor de C es positivo entonces el vértice se encuentra por encima del eje de las abscisas, y si el valor del parámetro es negativo entonces el vértice estará situado por debajo de este eje. Si observamos la figura 4, veremos que esta afirmación sólo se cumple para el caso particular que está analizando, pero no de manera general.

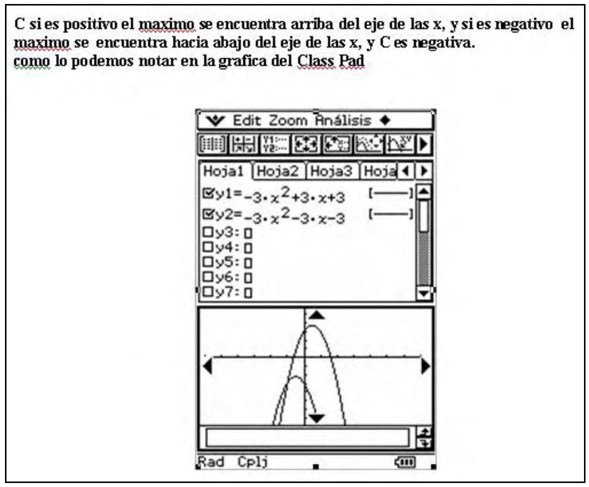


Figura 4. Conclusión errónea obtenida a partir del análisis de casos particulares

Conclusiones

El tipo de respuestas de los profesores a la actividad matemática, evidencian que la utilización de software matemático en un escenario de instrucción matemática a distancia propicia que surjan nuevas estrategias de exploración y solución que en un escenario de lápiz y papel serían difícil de desarrollar, en este caso nos estamos refiriendo a la exploración de casos particulares. Es importante señalar que la emergencia de esta técnica se presentó en los dos grupos considerados para el estudio (ILCE y CICATA), mientras que el caso que se ilustra con la figura 4, sólo se presento en uno de los profesores ascritos al ILCE. En términos de la teoría utilizada, podemos concluir que esta herramienta tecnológica facilitó la emergencia de nuevas técnicas, como generalmente sucede con la incorporación de este tipo dispositivos tecnológicos en otros escenarios de instrucción matemática (Lagrange, 2005). Sin embargo, como hemos mostrado, estas nuevas técnicas no siempre tienen una influencia positiva al momento de construir los conceptos asociados. Esto constituye una evidencia más de la relación existente e indisoluble entre las técnicas y los procesos de conceptualización de la matemática.

Con esta investigación, pretendemos señalar como un objeto de estudio de la Matemática Educativa a las herramientas tecnológicas utilizadas en la educación matemática a distancia, ya que consideramos que su utilización plantea no sólo la modificación de las organizaciones matemáticas existentes dentro de una institución, sino que también favorece la emergencia de algunas totalmente nuevas. Esta situación sin duda afecta la manera en que se estudia y se aprende la matemática en un escenario de instrucción a distancia.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: perspectives provided by an anthropological approach. En R. Douady y A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics* (pp. 131-167). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Lagrange, J.B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 113-135). E.U.A.: Springer.

FORMACIÓN DE PROFESORES. DIVERSAS CONCEPCIONES QUE AFECTAN EL QUEHACER DOCENTE Y COMPETENCIAS INICIALES DE PROFESORES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR[*]

Rosa María Farfán Márquez, Leticia Sosa Guerrero
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. (México)
lsosa19@hotmail.mx
Campo de investigación: formación de profesores Nivel educativo: medio
Palabras clave: concepciones, creencias, enseñanza, aprendizaje, competencias de profesores

Resumen
En este trabajo abordamos resultados preliminares de diversas concepciones que tienen algunos profesores de nivel medio superior acerca de la naturaleza de la matemática, la enseñanza y el aprendizaje de la misma (basadas en la clasificación que hace Ernest (1988) para la naturaleza de la matemática, en las de Carrillo (1998) para la enseñanza (tendencias didácticas) y las de Kuhs y Ball (1986) para las de enseñanza y aprendizaje[†]), así como de las competencias matemáticas iniciales de los profesores. La evaluación de las competencias se basa en las ocho competencias[‡] específicas identificadas por Niss (1999) y sus colegas daneses usadas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2000) en el proyecto del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés).

Introducción

En este trabajo nos proponemos estudiar el tipo de concepciones que tienen algunos profesores de bachillerato, acerca de la naturaleza de la matemática, la enseñanza y enseñanza y aprendizaje de la misma, pero también describir un primer acercamiento a las competencias matemáticas iniciales del profesor de bachillerato, entendiendo por competencia matemática, la definición utilizada por la OCDE en el proyecto PISA, traducida en Eduteka (2005). Cabe hacer mención de que este trabajo, dentro del campo de Formación de Profesores, es parte del proyecto de investigación "Diseño de estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento matemático a fin de favorecer una cultura científica y tecnológica", en el cual, uno de los objetivos es obtener un diagnóstico regional de la enseñanza actual en los diferentes tipos de bachillerato y donde el estudio de concepciones y la determinación de competencias matemáticas del profesor entre otros, forman parte del estudio para describir dicho diagnóstico.

Marco teórico

Para el desarrollo de este trabajo consideramos el marco teórico del paradigma del pensamiento del profesor para estudiar las concepciones del profesor. Y para las competencias matemáticas iniciales seguiremos el marco teórico expuesto por OCDE en el proyecto PISA tomada de la traducción realizada por Eduteka (2005) del documento "The PISA 2003 Assessment Framework" OCDE-PISA. Este enfoque está dirigido a la evaluación de competencias matemáticas de personas, aquí lo usan en particular para los estudiantes, sin embargo, en este estudio se usará para la evaluación de competencias matemáticas iniciales del profesor.

---

[*] *Esta investigación forma parte del proyecto financiado por el Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Chiapas*, Diseño de estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento matemático a fin de favorecer una cultura científica y tecnológica. Clave CHIS030362.

[†] Se hace una distinción entre enseñanza (entendida como tendencia didáctica) y enseñanza y aprendizaje debido a la propia clasificación que usamos en el marco teórico, es decir, debido a las clasificaciones que consideramos, la de Carrillo (1998) y la de Kuhs y Ball (1986) respectivamente.

[‡] (Pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; utilizar ayudas y herramientas)

Los términos concepciones y creencias tienen el inconveniente de que pueden ser interpretados de maneras muy diferentes, lo que dificulta su investigación (Pajares, 1992), citado en Flores (1998). Nos referiremos a concepción como lo expuesto por Carrillo (1998),
"El conjunto de creencias y posicionamientos que el investigador interpreta posee el individuo, a partir del análisis de sus opiniones y respuestas a preguntas sobre su práctica" (Carrillo, 1998).
Para detectar las concepciones sobre la naturaleza de la matemática usamos las categorías de resolución de problemas, platónica e instrumentalista propuestas por Ernest, 1988; para las de la enseñanza (tendencias didácticas) las categorías tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa que hace Carrillo, 1998; y para las de enseñanza y aprendizaje las de Kuhs y Ball, 1986, enfocadas en el que aprende (constructivismo), en el contenido matemático con particular importancia en el entendimiento conceptual (platónica), en el contenido matemático pero centrado en la práctica (instrumentalista) y en un acercamiento formal al aula (formalista).
Entenderemos como competencia a la definición de competencia matemática que usa la (OCDE) en el proyecto PISA, tomada de la traducción realizada por Eduteka (2005) del documento "The PISA 2003 Assessment Framework",
La competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (Eduteka, 2005).
La evaluación de las competencias se basa en las ocho competencias específicas identificadas por Niss (1999) y sus colegas daneses (Pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; utilizar ayudas y herramientas).

Metodología

Para desarrollar esta investigación, empleamos un instrumento de investigación enfocado al profesor, donde primero se realizó la grabación de una clase del profesor, luego aplicamos dos cuestionarios elaborados con previa anterioridad, de tal forma que con el primero se obtuvieron indicios iniciales de las concepciones del profesor sobre la matemática, la enseñanza y aprendizaje de la misma además de algunos datos sobre el currículo actual y tecnología, con el segundo, se obtuvieron datos referentes a la capacitación y actualización del profesor, también aplicamos cuatro problemas de contenido matemático que incluyen algunos aspectos didácticos, para obtener datos sobre las competencias matemáticas iniciales del profesor, principalmente. Además, se realizó una entrevista con grabadora de voz, con un guión preestablecido (entrevista estructurada), tratando de detectar con más detalle las concepciones del profesor, principalmente sobre la matemática, la enseñanza y aprendizaje de la misma. Finalmente, se grabó un video corto donde se le pedía al profesor que describiera de manera general cómo imparte su clase, para tener más elementos sobre su tendencia didáctica, sobre su enseñanza en el aula.
Se consideraron cinco profesores en servicio del nivel medio superior de distintos subsistemas, que hubieran impartido o estuvieran impartiendo cálculo diferencial, pues consideramos que si el profesor ha impartido esa materia, estaría en mejores condiciones para responder a la mayoría de los problemas que se aplicaron a un profesor de cada uno de las siguientes instituciones en el Distrito Federal, México: Colegio de Bachilleres; Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), UNAM; Preparatoria del Gobierno; CECYT, IPN y Colegio

particular en el Distrito Federal. Además de ese requisito, era necesario que el profesor quisiera desarrollar todas las etapas del instrumento, consciente de que su información sería utilizada con meros fines de investigación y de lo cual no recibirían algún salario, es decir, lo harían de manera voluntaria y por "amor al arte", dispuesto a compartir con nosotras parte de sus experiencias como profesores.

Resultados

Haciendo un pequeño recuento de las concepciones acerca de la matemática, su tendencia didáctica y enseñanza y aprendizaje que tienen los profesores, de acuerdo a los pequeños indicios obtenidos de las respuestas a los cuestionarios y la entrevista con grabadora de voz, mostramos el siguiente cuadro,

Cuadro 1. Resultados obtenidos de los cuestionarios y la entrevista.

Concepción	**Profesor 1**	**Profesor 2**	**Profesor 3**	**Profesor 4**	**Profesor 5**
Matemática	Instrumentalista	Platonismo	Platonismo	Resolución de problemas Platonismo	Platonismo
Tendencia didáctica	Tradicional	Investigativa	---	---	---
Enseñanza y Aprendizaje	Instrumentalista	Platonismo Instrumentalista	Constructivista Platonismo Instrumentalista	Platonismo	Constructivista Platonismo

Obsérvese como predomina la concepción platónica para la concepción de la matemática y de la enseñanza y aprendizaje aunque en el caso de la concepción de enseñanza y aprendizaje también prevalece en gran medida la instrumentalista. Es decir, al parecer predomina la concepción platónica de ver a la matemática, a *groso modo*, como un cuerpo de conocimiento preexistente a descubrir, dotado de una estructura lógica, mientras que para la de la enseñanza y aprendizaje, a *groso modo*, aparte de centrar la atención en lo conceptual en las actividades en el aula, la práctica y manipulación de reglas y procedimientos que desarrolle el estudiante también son el centro de atención en las actividades del aula.

Podemos observar también que en el cuadro no contamos con la información suficiente acerca de la concepción de la tendencia didáctica, sin embargo en el siguiente cuadro, que trata sobre el análisis del video corto donde se le pidió al profesor que describa de manera general como imparte su clase, podemos obtener datos acerca de la tendencia didáctica o enseñanza de los profesores.

Cuadro 2. Aspectos importantes de las descripciones generales de cómo imparten su clase los cinco profesores de bachillerato

Profesor	**Aspectos importantes de las descripciones generales de cómo dan su clase los cinco profesores de bachillerato**
Profesor 1	... se pasa a un nuevo tema dando una exposición, una exposición de quince, veinte minutos a través de un ejemplo, y posteriormente al alumno se le integra en equipos para que realice un ejercicio, un ejercicio y este, conforme va pasando el tiempo los alumnos están elaborando estos ejercicios, uno va moderando, dándoles tips a cada uno de los equipos o a veces los alumnos preguntan y los tips se les dan. Y lo más bonito es de que conforme ellos van resolviendo sus ejercicios, uno va anotando en el pizarrón la solución (como guía) para que ellos se autoevalúen y así en la siguiente sesión voy elevando el nivel. Al terminar la unidad pues también se les hace antes una evaluación previa como ejercitación para que esté preparado para la evaluación normal aquí le llamamos evaluación sumativa.
Profesor 2	… se inicia el tema nuevo o se da continuidad al tema en el que se haya quedado la clase anterior, y me tardo veinte, a lo mucho veinte minutos en dar la explicación teórica en el pizarrón y posteriormente se les pone ejercicios a los alumnos para que ellos los hagan, cuando todos los alumnos están ocupados resolviendo esos ejercicios ya sea individualmente o a veces

	por equipo, empiezo a pasar individualmente a tomar participación, al pizarrón a cada uno de ellos y en la medida de lo posible paso a sus lugares también a ver si tienen algunas dudas.
Profesor 3	Trato de utilizar algunos modelos que me han servido, en particular uso el modelo ESCA (Explorar, Sistematizar, Consolidar y Aplicar) y el modelo ISCE (Investigar, Simplificar, Consolidar y Exponer) hay mas modelos que también aquí usamos por ejemplo el tradicional, que es cuando el profesor expone en el pizarrón y los "chamacos" ahí están captando y de esa manera se supone que con la repetición que el profesor hace aprenden.
Profesor 4	… en general comienzo mi clase dando el concepto, después este, trato de que ese concepto ellos lo puedan ver en varios registros, en el visual más que nada, me he enfocado mucho en el visual y el algebraico y ya al final hacemos ejercicios… combinando de los, donde lo puedan ver algebraicamente si se presta el concepto y también visualmente pero finalmente al que trato de darle más peso es al algebraico.
Profesor 5	Primero doy una introducción del tema, después modelo algunos ejercicios o aplicaciones sobre todo a fenómenos naturales o a fenómenos que sean de la vida cotidiana para ellos, que se les haga fácil el aprendizaje y después les dejo problemas para que los resuelvan individuales o en grupo de acuerdo al tema y aproximadamente cinco problemas, la mayoría de los problemas son de aplicación y trato de escoger problemas de la vida cotidiana o hacerlos.

Obsérvese como sobrevive la concepción de la tendencia didáctica tradicional y una enseñanza y aprendizaje de tipo instrumentalista donde el profesor expone, proporciona un ejemplo y luego propone una serie de ejercicios para que el alumno los resuelva de manera individual o en equipo, ejercicios donde se deben usar procedimientos que han sido propuestos por el profesor. En algunos casos aparecen mayores intentos por cambiar a otros modelos de enseñanza (tendencia didáctica) por ejemplo al modelo ESCA (Explorar, Sistematizar, Consolidar y Aplicar) y el modelo ISCE (Investigar, Simplificar, Consolidar y Exponer) o considerando ejercicios con características que estén más relacionados a la vida cotidiana de los alumnos.

En el siguiente cuadro se muestra la interpretación de las competencias matemáticas iniciales de los cinco profesores de bachillerato al dar solución a los problemas, en el encabezado de cada problema especificamos en el cuadro las competencias matemáticas iniciales a considerar, haciendo notar que sólo estamos considerando que desarrollen esas competencias matemáticas iniciales y no tanto si son correctas o no.

Cuadro 3. Interpretación de las competencias matemáticas iniciales de los cinco profesores de bachillerato, obtenida de sus respuestas a cada uno de los problemas.

Profesor	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5
Problema 1 Argumentar Comunicar	Argumenta ---	Argumenta Comunica	Argumenta ---	Argumenta Comunica	Argumenta Comunica
Problema 2 Pensar y razonar Comunicar Utilizar ayudas y herramientas	Piensa y razona --- ---	Piensa y razona Comunica ---	Piensa y razona Comunica Utiliza herramientas (tecnológica)	---[§] --- ---	--- --- ---
Problema 3 Argumentar Comunicar Utilizar ayudas y herramientas Utilizar lenguaje y operaciones	--- --- --- ---	Argumenta Comunica --- Utiliza lenguaje simbólico,	Argumenta Comunica Utiliza herramientas[**] ---	Argumenta Comunica --- Utiliza lenguaje simbólico,	Argumenta Comunica --- Utiliza lenguaje simbólico,

[§] En este caso, no significa que el profesor no piense y razone en el sentido común, sino más bien, que no muestra esta competencia específicamente en el último inciso del problema 2.

simbólicas, formales y técnicas		formal o técnico		formal o técnico	formal o técnico
Problema 4 Comunicar Modelar Plantear problemas Representar	 --- --- Plantea problemas Representa	 --- --- Plantea algunos problemas Representa algunos problemas	 --- --- Plantea algunos problemas Representa algunos problemas	 Comunica Modela Plantea problemas Representa	 --- Modela Plantea algunos problemas Representa algunos problemas

Este cuadro (en un primer intento por conocer las competencias matemáticas iniciales de profesores de bachillerato) es un pequeño reflejo de las competencias matemáticas que desarrollan algunos profesores de bachillerato al resolver un problema, con esto se pretende mostrar cuales competencias desarrollan más y cuales no.
En el problema 1 la mayoría de los profesores desarrolla las habilidades de argumentar y comunicar a excepción del profesor 1 y el profesor 3, algunos de los profesores que si comunican en este problema pero no siempre desarrollan esa competencia, como el Profesor 2 y Profesor 5 que en el problema 4 no desarrollan esa competencia, de manera similar el profesor 1 desarrolla la competencia de argumentar en el problema 1 pero en el problema 3 ya no. Nótese que sólo uno de los cinco profesores desarrolla la competencia de la utilización de herramientas tecnológicas, el profesor 3. Únicamente el profesor 2, el profesor 4 y el profesor 5 mostraron usar lenguaje simbólico, y sólo el profesor 1, profesor 2 y el profesor 4 dieron indicios del desarrollo de la competencia de pensar y razonar, como se muestra en el problema 2. Aunque todos parecen desarrollar las competencias de plantear problemas y representar sólo el profesor 4 y profesor 5 desarrollaron la competencia de modelar.
Al parecer unos profesores desarrollan más competencias que otros, lo cual podría esperarse, pero también podemos observar que ninguno de los cinco profesores desarrolla las ocho competencias (pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear problemas; representar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; utilizar ayudas y herramientas).

Conclusiones

Pudimos observar que un profesor puede presentar pequeños indicios de diferentes tipos de concepciones que de una sola, lo cual corresponde con lo expuesto por Thompson (1992), al considerar que los profesores adoptan entre varias opciones o cosas lo que mejor les parece respecto a creencias, valores, proposiciones y principios.
Conjuntando resultados observamos que a pesar de que en las concepciones acerca de la matemática predomina la concepción platónica, de ver a la matemática como un conocimiento que se descubre, no se crea, es decir, la matemática se concibe como un cuerpo de conocimiento preexistente a descubrir, dotado de una estructura lógica; en la tendencia didáctica predomina la tradicional, o sea, aunque el profesor conciba que la matemática es un conocimiento a descubrir, al momento de impartir su clase cae en mayor o menor medida a la forma tradicional en el aula; influenciado en parte, por su concepción platónica e instrumentalista acerca de la enseñanza y aprendizaje, es decir, teniendo como foco de atención el contenido matemático, con particular importancia en el entendimiento del estudiante acerca de las relaciones lógicas y el manejo de reglas y procedimientos que

** Geometría dinámica (mentalmente).

desarrolle el estudiante en las actividades del aula. Otra parte del instrumento de investigación, la grabación de la clase, nos sirvió para confirmar estas conjeturas.
Al analizar el cuestionario donde se le solicita al profesor información acerca de cursos de capacitación y actualización, existen varios indicadores de estas necesidades, por ejemplo, la mayoría de los cinco profesores dice no conocer los últimos avances del conocimiento acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel medio superior de la(s) asignatura(s) que imparte, sólo por mencionar un ejemplo, una muy pequeña muestra de sus requerimientos.
Respecto a las competencias matemáticas iniciales de los cinco profesores de bachillerato que participaron en este trabajo, observamos que fueron muy pocos problemas los que se aplicaron para poder estudiar dichas competencias, pero aún así resultó pesado (a opinión de algunos de los profesores) para el profesor, tal vez por las diferentes etapas de las que consta el instrumento de esta investigación.
Al parecer unos profesores desarrollan más competencias que otros, lo cual podría esperarse, pero también podemos observar que ninguno de los cinco profesores pudo desarrollar las ocho competencias (pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear problemas; representar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; utilizar ayudas y herramientas).

Referencias bibliográficas

Carrillo J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones. Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.*

Eduteka (2005). *Competencia en Matemáticas. Octubre 2005. Disponible en http://www.eduteka.org/Pisa2003MAth.php.Traducción del documento "The PISA 2003 Assessment Framewok" publicado (en inglés, en formato PDF, 1.7MB) por OECD/PISA http://www.pisa.oecd.org/)*

Ernest, P. (1988). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics. Paper prepared for ICME VI, Budapest, Hungary.*

Flores P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza. España: Editorial Comares, colección Mathema.*

Kuhs, T. M. y Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: mapping the domains of knowledge, skills and dispositions. East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.*

Niss, M. (1999). *Competencies and Subject Description, Uddanneise, 9, pp. 21-29.*

Pajares, M.F. (1992). *Teachers' beliefs and educational research: cleaning unp a messy contruct. Review of Educational Research Vol 62, nº 3, pp. 307-332*

Thompson_A. (1992). Teachers´ beliefs and conceptions: a synthesis of the research. D.A Grouws (Ed): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York, USA: MacMillan, pp. 127-146.

EL CÁLCULO ESCOLAR UNIVERSITARIO. UN ESTUDIO DE SU PROBLEMÁTICA EN UNA FACULTAD DE CIENCIAS

Eddie Aparicio
Universidad Autónoma de Yucatán. (México)
alanda@uady.mx

Campo de investigación: educación matemática Nivel educativo: superior
Palabras clave: cálculo, reprobación, profesorado, alumnos

Resumen
El escrito reporta los resultados de un diagnóstico sobre la situación de reprobación y rezago en cálculo de nivel superior y posibles factores académicos asociados a dicho problema. Particularmente, se discute sobre el tipo de dificultades que presentan estudiantes después de haber cursado y aprobado sus dos cursos de cálculo y las creencias del profesorado respecto a la asignatura de cálculo y su papel en los planes de estudio.

Introducción

La didáctica de la matemática (matemática educativa en México) en tanto disciplina científica de naturaleza social, toma como principal objeto de estudio, los fenómenos didácticos asociados a la comunicación (enseñanza) y producción (generación de aprendizajes) de conocimientos matemáticos a fin de impactar de manera eficaz en la educación matemática. En este sentido, se ha presenciado un importante crecimiento en la producción de teorías que buscan dar cuenta de complejidad que guardan tales fenómenos didácticos, tómese como ejemplo de estas teorías, la teoría cognoscitivita de Vergnaud, la teoría Antropológica de Chevallard, la teoría sociocultural de Brousseau, la teoría de las representaciones semióticas de Duval, la teoría APOE de Dubinsky por mencionar algunas.

Sin duda los recursos teórico metodológicos que ofrecen cada vez más la Epistemología, la Psicología, la Didáctica y la Sociología han permitido generar explicaciones más integradas sobre la naturaleza de los fenómenos que se producen en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Un ejemplo de ello es la emergente aproximación teórica Socioepistemológica que busca incidir en el *discurso matemático escolar* a partir del estudio sistémico de las problemáticas de aprendizajes matemáticos vía su enseñanza.

En décadas recientes, se ha fortalecido el interés de investigar sobre fenómenos ligados al aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Artigue (1995) señala, la complejidad de dicha problemática refiriéndose a sus inicios durante el siglo XX motivado por la masiva incursión de la enseñanza del cálculo en el bachillerato francés. Recientemente Hoffman, et al., (2004) discurren sobre una posible crisis en la enseñanza contemporánea del cálculo universitario y de la necesidad de un cambio de paradigma. Cambio que resulta de considerar las nuevas tecnologías de la información y muy especialmente de atender a las “bondades” que brinda la matemática computacional.

Pese a la creación de diversas teorías especializadas en didáctica de la matemática y a los desmedidos avances tecnológicos, en nuestras sociedades se sigues sufriendo el problema de una excesiva reprobación y rezago escolar en la educación general, y en matemáticas en particular. Si bien este problema de reprobación y rezago escolar en el área de matemáticas (indistintamente del nivel educativo del que se hable) pareciera para muchos algo que se ubica dentro lo “normal” para otros no lo es tanto. A mi modo de ver, este problema adquiere una connotación especial dentro la matemática educativa, pues una buena parte de sus génesis deviene del funcionamiento del sistema didáctico: *profesor* (o institución), *alumno* (o sociedad) y *saber* (currículo), de aquí que este estudio se refiera al problema desde un análisis local del funcionamiento del sistema didáctico extendido: *institución, alumnos y currículo.*

El problema de investigación

La reprobación en general y la reprobación en matemáticas en particular, es una de las causas que provocan el rezago y la deserción escolar en los niveles educativos y que finalmente terminan por cobrarles costosas facturas a la sociedad. Por ejemplo, en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), desertan el 30% de los 35,000 alumnos que ingresan a alguna de las 68 licenciaturas, y por tal motivo la Sociedad Mexicana pierde 262 millones 500 mil pesos anuales en alumnos que no concluyen su carrera profesional (Rodríguez, 2000). Datos ofrecidos por Díaz de Cosio (1998) citado en Martínez (2002) señalan que en promedio nacional, de cada 100 alumnos que inician estudios de licenciatura, entre 50 y 60 concluyen las materias del plan de estudios cinco años después, de los cuales, sólo 20 logran obtener su título. Así mismo, en el trabajo de Chaín (1999) se refiere que aproximadamente 25 de cada 100 estudiantes que ingresan al nivel universitario abandonan sus estudios sin haber promovido las asignaturas correspondientes al primer semestre; además, la mayoría de ellos inicia una carrera marcada por la reprobación. Cabe señalar que una buena parte de las asignaturas que presentan mayor índice de reprobación pertenecen al área de matemáticas.

Albert (1996) citado en Reséndiz (2003), menciona que es precisamente al momento de intentar llevar a las *aulas* el contenido teórico y práctico del cálculo que se observa una problemática propia de su enseñanza y aprendizaje, convirtiéndose en uno de los factores causales de la deserción estudiantil en instituciones públicas y privadas de nuestro país.

En este sentido, se puede decir que no es producto de la casualidad que los programas de curso en Ingenierías y Ciencias exactas otorguen mayor tiempo de estudio a la asignatura de cálculo y que las instituciones de educación superior (IES) realicen innumerables esfuerzos por mejorar los altos índices de reprobación y rezago e intentar mejorar el grado de aprovechamiento de los estudiantes, tal se ha indicado en el comunicado presentado por la ANUIES en el año 2001 en donde se señala que cada institución debe "diseñar estrategias e instrumentar acciones que tengan como propósito incrementar la calidad del proceso formativo integral de los estudiantes, aumentar su rendimiento académico, reducir la reprobación y la deserción escolar, y lograr índices de aprovechamiento y eficiencia terminal satisfactorios".

Sin duda, las IES han buscado desarrollar proyectos de investigación que ofrezcan información sobre las causas y comportamiento de dicho fenómeno, sin embargo y en mi opinión, dichos proyectos presentan una limitante, a saber, que al basar sus estudios en métodos y técnicas cuantitativas de investigación (recolección de datos a nivel masivo y con la aplicación de cuestionarios centrados en aspectos de tipo sociocultural, socioeconómicos, de orientación vocacional, de hábitos de estudio e incluso de infraestructura institucional), excluyen aspectos más específicos, por ejemplo, las prácticas de aula, el comportamiento de las y los estudiantes, las costumbres didáctica del profesorado, el análisis del discurso matemático escolar, la estructuración de contenidos temáticos, entre otros y que a mi entender, resultan cruciales en el estudio y tratamiento de tales problemas.

Bajo esta visión y de la consideración de que este tipo de problema encierra una naturaleza causal multifactorial, se desarrolló durante dos años, una investigación de carácter cualitativo sobre el fenómeno de reprobación y rezago escolar en la asignatura de cálculo en una facultad de ciencias exactas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México. La idea básica por desarrollar una investigación cualitativa fue a que como se señala en Sieburth (1993), esta tiene la característica de: 1) No contar con un solo método, sino variaciones de método; 2) Comprender múltiples realidades; 3) Ofrecer una visión holística del mundo; 4) Es interdisciplinaria; 5) Responde a situaciones de índole sociopolítico como proceso y producto de la investigación.
Coincidimos con la Autora al referir que los alcances de la investigación cualitativa no se ven limitados a la descripción o identificación de problemas educativos, sino a la generación de alternativas y de promoción de formas de participación social para transformar dichos problemas. Cabe decir que el trabajo que aquí se presenta es el resultado de un grupo de trabajo de profesores e investigadores en el área de Matemática Educativa como en Matemáticas que forman parte del personal académico de la facultad de ciencias en cuestión.

Aspectos metodológicos

La duración del proyecto fue de dos años y contempló tres etapas. En la primera se llevó a cabo un diagnóstico sobre posibles factores que pudieran tener incidencia directa en los asuntos de reprobación y rezago estudiantil en las 6 distintas licenciaturas que se imparten en mencionada facultad y de manera particular, en aquellos factores que pudieran estar ligados a la reprobación y rezago en la asignatura del cálculo.
En la segunda etapa, se contempló el diseño de estrategias que permitieran atender la reprobación en función de los factores detectados que tenían influencia sobre dicho problema.
La tercera etapa consideró la implementación de acciones y estrategias de tipo académico-administrativas para reducir los índices de reprobación y rezago en cálculo.
Durante el desarrollo de las etapas se realizaron diversas actividades, entre ellas: Análisis de los libros de texto respecto a la coherencia de los contenidos, enfoques y objetivos declarados en los programas de curso de cálculo; análisis de la forma en que está organizado el cálculo y los enfoques con el que se enseña; un estudio sobre el tipo de dificultades que presentan algunos estudiantes al momento de tratar contenidos específicos del cálculo, por ejemplo, límite, derivada y sucesiones, recolección, análisis y documentación de información cuantitativa sobre los índices de reprobación, rezago y deserción de la asignatura de cálculo de cuatro generaciones (2001- 2004).
Estas actividades y los resultados obtenidos en cada una de ellas, permitieron tener un panorama más amplio y preciso del problema de investigación. En lo sucesivo se expondrán algunos de los hallazgos logrados.

Resultados

Un indicador cuantitativo

El porcentaje de reprobación y rezago que la facultad ha presentado en los últimos años (cabe señalar que de dos años a la fecha ha habido una mejoría) ha oscilado entre el 25 y 30% al término del primer año de estudio. En este sentido, los indicadores de egreso no han sido nada alentadores, por ejemplo, la generación 2001-2005 correspondiente a la Licenciatura en

Enseñanza de las Matemáticas, sólo logró concluir sus estudios el 13.8% de un total de 36 alumnos. De igual manera, de la generación 2002-2006 de la misma licenciatura, sólo lograron concluir sus estudios en el tiempo designado, el 24% de un total de 29 alumnos. Véase también la siguiente tabla:

Tabla 1. Reprobación y rezago en las asignaturas de Cálculo I y Cálculo II de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, por generación

Generación	Cursos		Reprobados		Rezagados		Desertores	
	Cálculo I	Cálculo II	*Cálculo I*	Cálculo II	*Cálculo I*	Cálculo II	*Cálculo I*	Cálculo II
Sep 2001	*41*	26	*37*	25	*21*	14	*8*	12
Feb 2002	*36*	23	*28*	22	*25*	11	*11*	2
Sep 2002	*39*	32	*31*	14	*26*	5	*11*	2
Feb 2003	*34*	26	*22*	4	*17*	4	*4*	3
Sep 2003	*74*	69	*10*	35	*8*	23	*0*	

Sobre las dificultades en estudiantes

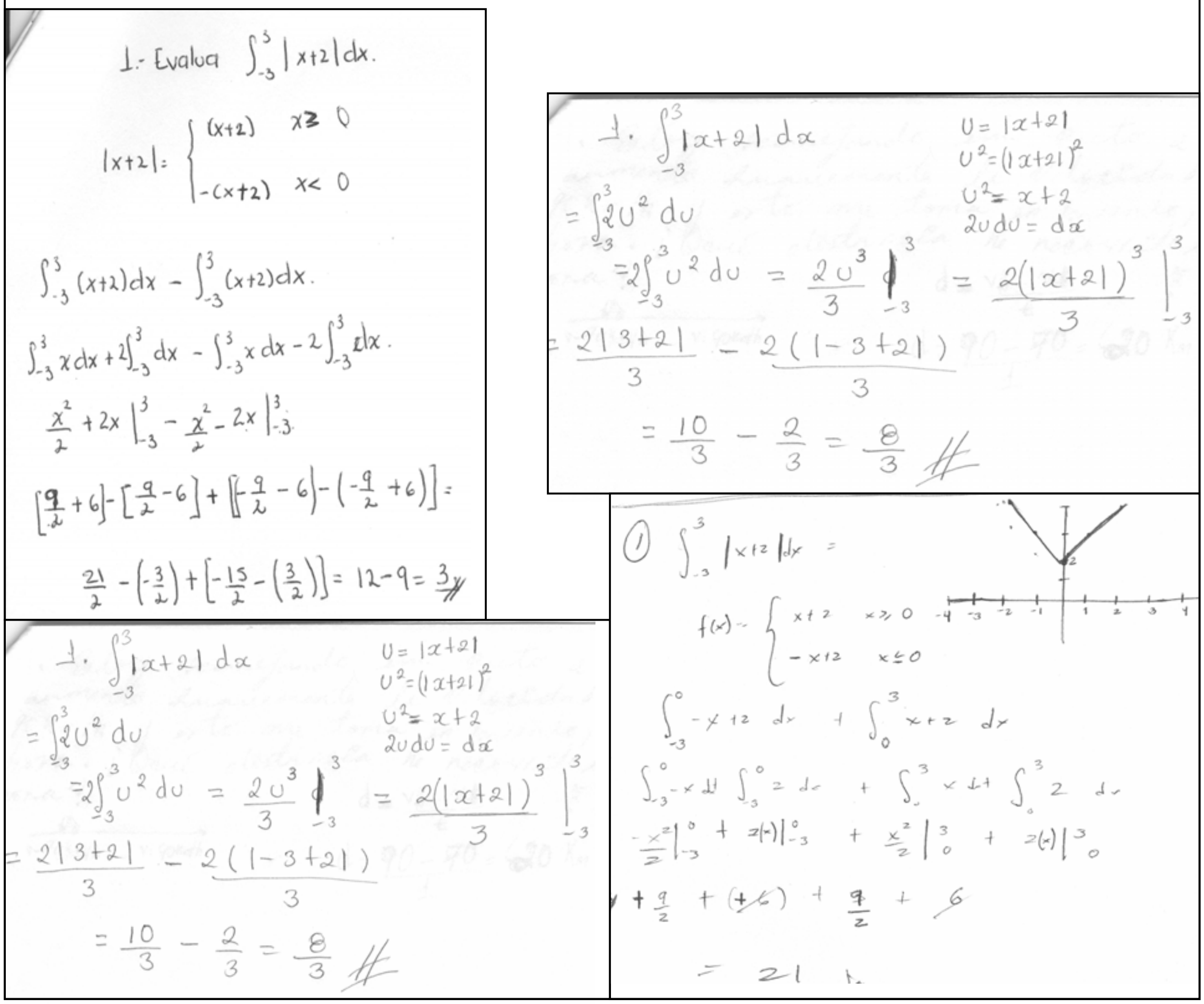
A continuación se mostrará mediante ejemplos, el tipo de dificultades y errores más comunes que presentaron estudiantes de las 6 licenciaturas al momento de resolver un cuestionario sobre ejercicios básicos de límite, derivada, integral y sucesiones. Citamos el caso en donde se les pide a 99 estudiantes:

$$\text{Evaluar } \int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$$

El ejercicio fue tomado del cuestionario utilizado por Eisenberg y Dreyfus (1966) en su trabajo de investigación sobre la resistencia que presentan graduados de cálculo para visualizar en matemáticas.

Los datos que obtuvimos quedaron de la manera siguiente: De los 99 estudiantes cuestionados, sólo 14 dieron una respuesta correcta!, 81 dieron una respuesta incorrecta y 4 estudiantes omitieron su respuesta. El escenario privilegiado fue el algebraico-analítico caracterizado por ser aquel en donde los estudiantes emplean recursos basados en una manipulación algebraica y métodos analíticos de resolución. El tipo de errores encontrados fueron clasificados en cuatro aspectos: aquellos errores asociados a los límites de integración, asociados al desarrollo de procesos algebraicos, al dominio gráfico y los asociados al dominio conceptual. Un dato adicional es que hoy estudiantes de ciencias exactas siguen mostrando una fuerte resistencia a visualizar en matemáticas, pues en efecto, de los 14 estudiantes que dieron una respuesta correcta al ejercicio planteado, únicamente 6 de ellos recurrieron a una estrategia de tipo visual. Véase el siguiente cuadro 1 en donde se muestra los errores y el tipo de procedimiento de resolución seguido por la mayoría de los estudiantes.

Cuadro 1. Procedimientos de resolución para el ejercicio 1



Los resultados obtenidos en los estudios de corte etnográfico desarrollados por García (2006a) y García (2006b) en las aulas de cálculo en la misma facultad y como parte de las actividades del proyecto, muestran que la manera en que los estudiantes tienden a plantear y resolver una actividad matemática escolar, no es ajena a la manera en como los contenidos matemáticos son desarrollados en el salón de clases. Por ejemplo, se detectó que los profesores poco recurren a recursos visuales y al desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes, que a juzgar por las evidencias reportadas en la literatura, resultan necesarios para lograr un mejor entendimiento y dominio del cálculo. La enseñanza de aula se caracteriza por una marcada tendencia en el uso estrategias expositivas-discursivas centradas en el profesor como responsable del contrato didáctico.

Sobre el profesorado y el currículo

Sin duda, con el paso del tiempo, cada dependencia educativa va gestando su propia "filosofía", sobre la educación y la forma de llevarla a cabo. Finalmente, es ésta filosofía y las creencias e ideas compartidas del profesorado (entorno a la matemática) que terminan rigiendo la práctica educativa institucional. En efecto, cuándo se les pidió a profesores que expresaran dos razones por las cuáles considera se estudia cálculo en las 6 diferentes licenciaturas de la facultad, sus respuestas fueron del tipo: *…es una herramienta para desarrollar aplicaciones en…,provee una formación básica para desarrollar el pensamiento lógico y científico…,es una herramienta básica de las matemáticas, proporciona un lenguaje para interpretar situaciones y técnicas para analizarlas…,es una asignatura básica…, conceptualiza ideas importantes del ingenio humano…*

Es claro que el profesorado posee ciertas creencias y concepciones sobre el cálculo y de su presencia en el currículo matemático. Por ejemplo, nótese cómo ellos refieren al cálculo como una herramienta básica, importante para cualquier licenciatura, sin embargo, desconocen en cierta forma, las aplicaciones propias para cada una de ellas. Asimismo, se observa que le atribuyen al cálculo una cualidad formativa, por ejemplo, enseña a pensar, desarrolla el pensamiento lógico. Tal cualidad ¿es exclusiva del cálculo? ¿tal cualidad resulta ser la más importante o central del cálculo y de su papel en el currículo matemático?

Conclusión

El estudio del funcionamiento del sistema didáctico al interior de las dependencias educativa, ha de considerársele como un punto de partida para los cambios deseados en la educación matemática y los problemas de reprobación y rezago intrínsecos a la misma.

Reconocimiento
Se agradece y reconoce el apoyo brindado por el proyecto de Fondos Mixtos CONACYT-Gobierno del Estado de Yucatán "Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: El caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán" Clave YUC-2004-C03-033.

Referencias bibliograficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México, D.F., México: Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 7*(2): 33 – 115

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* (Gilman, C. Trads.) Argentina: Aique. (Trabajo original publicado en 1991).

Eisenberg, T., Dreyfus, T. (1966). On Visual Versus Analytical Thinking in Mathematics. *Procedings PME-10* Congress, London, 153-158.

Hoffman, J., Johnson, C., Logg, A. (2004). *Dreams of Calculus. Perspectives on Mathematics Education*. Berlin, Germany: Springer.

Martínez, F. (2002). Estudio de la eficiencia en cohortes aparentes. En [Libros en línea] ANUIES, *Deserción, Rezago y Eficiencia Terminal en las IES: Propuesta metodológica para su estudio.*

LA MOTIVACIÓN Y EL USO DE ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS[††]

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco. Buenos Aires. (Argentina)
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Categoría: estudios socioculturales, etnomatematicas, números racionales y proporcionalidad, pensamiento algebraico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: motivación, estrategia, cognición, metacognición

Resumen
El objetivo del presente trabajo es plasmar las conclusiones obtenidas por el Grupo de Discusión desarrollado durante el RELME 20, a partir de nuestra experiencia en la Universidad Tecnológica (Argentina) y del intercambio con las experiencias recogidas en otros Centros de Estudio de características similares.
Se discutieron seis problemáticas diferentes, en pequeños grupos, relacionadas con la motivación de los alumnos y su vinculación con las estrategias cognitivas y metacognitivas de aprendizaje, así como otros aspectos que inciden en la motivación. Luego se recogieron las conclusiones y se elaboró una conclusión final globalizadora.

Introducción

Cada uno de los grupos abordó una diferente problemática a partir de una de las siguientes preguntas iniciales:

- ¿Cómo incide la motivación del alumno en el proceso de aprendizaje?¿Cómo adecuar el modo de enseñar a través de una serie orientaciones metodológicas concretas, para favorecer el aprendizaje estratégico?A partir de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, ¿los profesores se encuentran frente al desafío de tener que adoptar nuevas estrategias y estilos de enseñanza más centrados en el alumno?¿Cómo adecuar los contenidos curriculares para lograr un mejor aprendizaje de las ciencias?¿Qué importancia reviste el uso de analogías en el aprendizaje de las ciencias, en un entorno constructivista?¿Cómo mejorar la significatividad del aprendizaje de contenidos matemáticos a través de la resolución de problemas?

Al iniciar la puesta en común, un representante de cada grupo expuso las conclusiones a la cuales se sumaron nuevas consideraciones.
Los resultados se exponen brevemente en el presente trabajo.

Desarrollo

Los componentes motivacionales implicados en el aprendizaje de los alumnos universitarios y su vinculación con las estrategias de aprendizaje

[††] Se contó con la participación de: Pérez Díaz, Héctor (México); Hernández Conde, Roberto (Cuba); Nardín, Alexia (Cuba); Landa, Eddie (México); García, Estelita (México) ; García Torres, Erika (México) ; Carrasco Jiménez, Teresa (Cuba); Crespo Estrada, Miriam (Cuba); León Giniebra, Iván (Cuba); Badía Albanés, Valentina (Cuba); Hernández Rubio, Yolanda (Cuba), quienes contribuyeron con sus opiniones en la elaboración de este trabajo.

Alonso Tapia (1995 en Rinaudo, 2003) sugiere que la motivación parece incidir sobre la forma de pensar y con ello sobre el aprendizaje. Desde esta perspectiva se puede suponer que las distintas orientaciones motivacionales tendrían consecuencias diferentes para el aprendizaje.
Creemos que en algunas oportunidades la motivación tiene su origen en la propia actividad, considerada como un fin en sí misma y no como un medio para alcanzar otras metas. En otras, la acción está orientada a satisfacer otros motivos que no están relacionados con la actividad en sí misma, sino más bien con la consecución de otras metas que en el ámbito universitario suelen fijarse en aprobar las evaluaciones parciales, lograr pasantías rentadas o becas de estudio, evitar el fracaso, etc. Esta distinción corresponde a una *motivación intrínseca*, en el primer caso y una *motivación extrínseca* en el segundo. Rinaudo et al. (2003).
Por otras parte, siguiendo la idea de estos autores, pensamos que es posible que el alumno motivado intrínsecamente esté más dispuesto a aplicar un esfuerzo mental significativo durante la realización de sus tarea, a comprometerse en procesamientos más ricos y elaborados y en el empleo de estrategias de aprendizaje más profundas y efectivas. En contraposición, un estudiante motivado extrínsecamente seguramente se comprometa en ciertas actividades sólo cuando éstas ofrecen la posibilidad de obtener recompensas externas, y en ese sentido opten por aquellas tareas cuya solución les asegure la obtención de la recompensa.
Otros componentes motivacionales a tener en cuenta son: *la valoración positiva de las tareas*, lo cual podría conducir al estudiante a involucrarse más en el propio aprendizaje y a utilizar estrategias cognitivas más frecuentemente, *los sentimientos o creencias de autoeficacia y el grado de control que los estudiantes creen tener sobre su propio aprendizaje.*

La intervención del profesor en el desarrollo de estrategias de aprendizaje

La enseñanza estratégica de los contenidos procedimentales supone, ante todo, un modo de enseñar que debería concretarse en una serie orientaciones metodológicas concretas para favorecer la práctica educativa. (Montanero Fernández y León, 2003)
Consideramos que en el ámbito de la Matemática, una de las intervenciones más valiosas por parte del profesor, consiste en convertir las actividades del aula en auténticos problemas y no en meros ejercicios que el alumno resuelve, generalmente, de forma memorística, como producto de la aplicación mecánica de un algoritmo. La mayor parte de los procedimientos que se enseñan en Matemática están constituidos por algoritmos, es decir, por conjuntos de reglas que se aplican en orden secuencial. El algoritmo que se utiliza para factorizar expresiones polinómicas es un ejemplo correspondiente a la enseñanza media. Habitualmente los docentes dedican gran parte del tiempo escolar con el propósito de que los alumnos adquieran el mecanismo de la resolución de ejercicios sobre factorización y también habitualmente éstos últimos desconocen el verdadero sentido del proceso que están desarrollando, las razones por las cuales lo hacen y los casos en los cuales puede resultar valioso factorizar.
Por otra parte, es el profesor quien debe decidir el tipo y la magnitud de ayuda que proporcionará al alumno en el proceso de resolución.
Consideramos que se debe por una parte, tener en cuenta el uso de herramientas que se desean entrenar y que reflejen los diferentes elementos del problema, y por otra facilitar que el alumno decodifique o transforme el formato de la misma, organice y examine las variables,

recupere información relevante, planifique alternativas de resolución y extraiga o transfiera principios subyacentes. Además, en cuanto a las evaluaciones, es importante que el profesor propicie situaciones en las que el alumno realice la evaluación de los resultados a los que ha arribado, reforzando la reflexión, por encima de la rapidez de las respuestas.
Frente a esta situación, coincidimos con la posición de Rinaudo et al. (2003) en cuanto a la necesidad de ofrecer al futuro profesor universitario una formación pedagógica que favorezca visiones críticas acerca de la complejidad que entrañan los procesos de aprendizaje, de la multiplicidad de factores que intervienen en ellos y, sobre todo, de la necesidad de instrumentar prácticas pedagógicas que no sólo contemplen la enseñanza de los saberes disciplinares, sino que atiendan también a aquellos aspectos que pueden favorecer el aprendizaje de tales saberes. El reconocimiento de los factores motivacionales vinculados al aprendizaje, su incidencia en la calidad y el rendimiento académico suele ser uno de los aspectos más descuidados por los docentes universitarios. Los profesores, en general, no trabajan sobre los factores motivacionales ni consideren su influencia en el proceso de aprendizaje de los alumnos de tal manera de orientar la toma de decisiones en la enseñanza a partir de estos factores o como consecuencia de ellos; sino más bien consideran que una buena enseñanza es consecuencia directa del manejo fluído de los contenidos.
Consideramos que tal formación debiera también brindarse a los actuales profesores universitarios, muchos de ellos profesionales, que han incursionado en el ámbito educativo con el propósito de transmitir sus saberes disciplinares.

Selección y adecuación de los contenidos curriculares

El modo de aprendizaje de la ciencia, y de la matemática en particular en la escuela y también en la universidad es un problema no resuelto que requiere de una más precisa selección y adecuación de los contenidos curriculares.
"*La representación que los alumnos tienen acerca de un campo de conocimiento se construye en gran parte a partir de los contenidos que se tratan en los programas de asignatura*." *(Rinaudo y Donolo, 1999).*
Algunos autores (Galagovsky, 1999) consideran que existen básicamente tres modos de organizar los contenidos curriculares, entre los cuales nos detuvimos a analizar el tercero de ellos por su pertinencia. Éste modo supone considerar la existencia de una ciencia escolar que involucre una visión selectiva de contenidos conceptuales, pocedimentales y actitudinales, de tal forma que la selección requiera en un relevamiento de los conceptos estructurantes de las disciplinas científicas, adaptados a su máxima profundidad según las condiciones de entorno de cada situación de enseñanza-aprendizaje en particular (edad de los alumnos, recursos de diferente índole, condicionantes socioculturales, etc.) (Sanmartí e Izquierdo, 1997 en Galagovsky ,1999). Esta aproximación sugiere que cada alumno al final de la educación obligatoria tendría un grado aceptable de alfabetización científica y que los estudios universitarios en un área científica aportarían gran cantidad de conocimientos específicos al quehacer profesional en dicha área. Esta última posición parece ser muy promisoria, pero consideramos que en necesario tener en cuenta que la ciencia escolar no se limita a ser una mera simplificación de la ciencia, adaptada al nivel de maduración de los alumnos, sino que utiliza conceptos y modelos propios y originales, por cierto, que funcionan como facilitadores del acceso del alumnado a las formas más altas de representación científica.

El papel de las tecnologías de la información y la comunicación

Los profesores se encuentran frente al desafío de tener que adoptar nuevas estrategias y estilos de enseñanza más centrados en el alumno como principal protagonista del proceso de aprendizaje y, por consiguiente, a modificar de algún modo su habitual forma de enseñar. Si bien el impacto de la utilización de las TIC no constituye el tema central de este trabajo, nos parece importante la observación que realiza Rinaudo *et al*. (2003), en cuanto a la necesidad de investigar sobre diferentes aspectos relacionados con los modos de aprender y enseñar a través de entornos virtuales, fundamentalmente porque ésta, la educación virtual, será una modalidad de educación que cobrará cada vez mayor protagonismo, sobre todo, en la formación superior.

En el caso del profesor universitario, con la ayuda de las nuevas tecnologías, podrá ejercer un rol más de orientador y guía del aprendizaje, asistiendo a los alumnos en tareas de razonamiento y búsqueda. También, tendrá que desarrollar el rol de motivador y estimulador del aprendizaje, sirviéndose de los medios informáticos para mejorar el interés de sus alumnos. Por otro lado, la relación entre el profesor y el alumno deberá ser similar a los de co-investigador y co-aprendiz, (Valverde Berrocoso, J. y Garrido Arroyo M. 1999) con el fin de obtener conjuntamente recursos que amplíen la visión y enriquezcan el conocimiento, facilitando un estilo de aprendizaje que podría denominarse descubrimiento guiado.

Desde una posición diferente, si evaluamos el rol el profesor universitario, no sólo como creador de recursos para la enseñanza y el aprendizaje sino como el responsable de la implementación de los mismos, observamos que con frecuencia aparecen obstáculos que dificultan los logros propuestos, generalmente asociados a la falta de recursos adecuados.

La eficacia del cambio metodológico que produce la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los centros universitarios, se ha de apoyar en planes institucionales y no exclusivamente en voluntades individuales. Todo esto conlleva la necesaria reformulación de las funciones que ha de desarrollar el profesor universitario.

Valverde et al. (1999) sostienen que la adopción de las TIC en la universidad requiere tres elementos básicos: la adquisición de la tecnología apropiada, la provisión de recursos adecuados y la formación adecuada para los docentes; y que ninguno de los tres elementos, por sí sólo garantiza el éxito. Éste dependerá de la eficacia en la gestión del cambio.

Consideramos que el desarrollo y la implementación de una estrategia integrada de las TIC es uno de los principales retos a los que se deben enfrentar los gestores de las instituciones universitarias.

La analogía y su importancia en el entorno constructivista

Oliva, Aragón, Mateo y Bonat, (2001) definen a *las analogías* como comparaciones entre dominios de conocimiento que mantienen una cierta relación de semejanza entre sí. Estos autores hacen hincapié en que por una parte constituyen una herramienta frecuente en el pensamiento ordinario de las personas y por otro, ocupan un lugar importante en el ámbito de la enseñanza, en general, y de la enseñanza de las ciencias, en particular.

En cuanto a su utilidad, sirven para ayudar a comprender una determinada noción o fenómeno a través de las relaciones que establece con un sistema *análogo* y que resulta para el alumno

más conocido y familiar. Oliva et al. (2001) denominan ancla, base o fuente al sistema conocido y objeto, problema o blanco al sistema que se quiere conocer.
"Desde la perspectiva constructivista el razonamiento analógico es la llave que permitiría el acceso a los procesos de aprendizaje, ya que todo nuevo conocimiento incluiría una búsqueda de aspectos similares entre lo que ya se conoce y lo nuevo, lo familiar y lo no familiar". Pittman (1999), en Galagovsky et al., 2001:236).
En este sentido, el efecto de las ideas previas de los alumnos es enorme. "Estas son una especie de filtro conceptual que permite a los alumnos entender, de alguna manera, el mundo que los rodea...funcionan como marcos conceptuales, dirigen y orientan el procesamiento de la información que se estudia en los libros o la interpretación de las explicaciones del profesor...". (Campanario y Otero, 2000:157).
Del mismo modo se manifiestan en lo que habitualmente denominamos las preconcepciones científicas. En muchas oportunidades estas preconcepciones son erróneas y constituyen un factor clave que obstaculiza el aprendizaje significativo de los ciencias. Los alumnos desarrollan sus propias ideas, construyen significados para las palabras que se usan en ciencia y despliegan estrategias para conseguir explicaciones sobre cómo y por qué las cosas se comportan como lo hacen. Algunas de las ideas previas sobre fenómenos científicos tienen su origen en el uso de analogías defectuosas en el propio medio escolar. Esto es muy habitual en matemática. A modo de ejemplo: la descomposición de un número en factores primos se aprende a través de una analogía incorrecta en la escuela, basada en el orden de los números naturales. Esta preconcepción obstaculiza aprendizajes posteriores de conceptos estrechamente relacionados con la factorización y con los cambios de base en diferentes sistemas numéricos. Sin embargo, desde una posición contructivista, consideramos pertinente cuestionar la posibilidad de que las analogías sean siempre interpretadas por el alumno en los mismos términos que plantea el profesor. Más bien son reinterpretadas por ellos a partir de sus ideas previas, de ahí que no siempre sean entendidas en la dirección que se pretende y de ahí también que una de las condiciones básicas de su éxito sea que los estudiantes participen activamente en su construcción. Coherente con este planteamiento, deberíamos considerar la analogía como un proceso en el que los alumnos puedan y deban aportar sus opiniones, tomar decisiones y, en definitiva, contribuir abiertamente en su construcción.

La resolución de problemas

Consideramos que para resolver un problema, se requiere del uso de pausas, reflexiones y hasta es posible que surjan propuestas originales que el docente no había tenido en cuenta en anteriores oportunidades. Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, creemos que es prudente aclarar que esta distinción es relativa al nivel instruccional desde el que se aborda.
Uno de los principales objetivos a conseguir en el área de las matemáticas universitarias, consensuado por gran parte de los docentes, es que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas, con el propósito más ambicioso de mejorar la significatividad del aprendizaje de contenidos matemáticos (tanto de tipo conceptual, como en lo procedimental y en lo actitudinal). Carrascosa y Gil sostienen que los profesores a veces utilizan "una metodología de la superficialidad" (1985, citado en Campanario y Otero, 2000: 158),

refiriéndose a un modo acrítico de enfrentar las situaciones problemáticas, sin reparar en las inconsistencias de los enunciados y con una comprensión superficial de las preguntas.

Entre las *variables que inciden en conseguir que los alumnos aprendan a resolver problemas*, Pifarré y Sanuy, (2001) señalamos diferentes variables que hacen referencia tanto a la dimensión del aprendizaje como a la dimensión de la enseñanza. Ellas son: *a)* la importancia del conocimiento declarativo sobre el contenido específico del problema; *b)* el repertorio de estrategias generales y específicas que es capaz de poner en marcha el sujeto para resolver el problema concreto; *c)* el papel de las estrategias metacognitivas; y *d)* la influencia de los componentes individuales y afectivos.

La aplicación de la heurística de Polya (1995) favorece el desarrollo del razonamiento que permite al alumno resolver problemas, en el sentido de lograr comprenderlo activando los conocimientos previos, establecer un plan de acción, llevarlo a cabo supervisando los avances y evaluar los resultados; y además, la adquisición de *estrategias metacognitivas* como consecuencia de este proceso.

Referencias Bibliográficas

Alonso Tapia, J. (1995). *Motivación y aprendizaje en el aula. Cómo enseñar a pensar*. Madrid: Santillana.

Campanario, J y Otero, J. (2000). Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias,* 18(2), 155-169

Carrascosa, J. y Gil, D. (1985). La metodología de la superficialidad y el aprendizaje de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 3(1), 113-120.

Galagovsky, L y Adüriz Bravo, A. (2001). Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales. El concepto de modelo didáctico analógico. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 231-242

Montanero Fernández, M y León, J. (2003). El concepto de estrategia: dificultades de definición e implicaciones psicopedagógicas. *Contextos de Educación,* 4(5), 170-183

Oliva, J., Aragón, M. y Bonat, M. (2001). Una propuesta didáctica basa en la investigación para el uso de analogías en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 453-470

Pifarré, M y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 297-308.

Pittman, K. (1999). Generated analogies: another way of knowing?. *Journal of Research in Science Teaching*, 36, 1-22.

Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Rinaudo, M y Donolo, D. (1999). ¿Creatividad en educación? Retos actuales de la enseñanza universitaria. *Contextos de Educación*.1 (2)

Rinaudo, M, Chiecher, A y Danilo Donolo, D. (2003). Motivación y uso de estrategias en estudiantes universitarios. Su evaluación a partir del *Motivated Strategies Learning Questionnaire*. *Anales de Psicología*, 19 (1), 107-119.

Sanmartí, N. e Izquierdo, M. (1997). Reflexiones en torno a un modelo de ciencia escolar. *Investigación en la Escuela,* 32, 51-62.

Valverde Berrocoso, J. y Garrido Arroyo M.(1999). El impacto de las tecnologías de la información y la comunicación en los roles docentes universitarios. *Revista electrónica Interuniversitaria de formación del Profesorado,* 2 (1)

Recuperado de: http://www3.uva.es/aufop/publica/actas/ix/50-valverde.pdf

LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE Z EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

Parra S. Hugo
Universidad del Zulia. Zulia. (Venezuela)
parraortiz@cantv.net
Campo de investigación: formación de profesores Nivel: superior
Palabras clave: representaciones, conjunto Z

Resumen
El presente trabajo tiene como intención mostrar una propuesta de análisis de los sistemas de representación planteados por futuros profesores de matemática relativa a los números enteros. Los sistemas de representación constituyen en el proceso de enseñanza de las matemáticas las diferentes maneras como los docentes dan a conocer a sus alumnos un concepto matemático. Este análisis lo desarrollamos desde dos perspectivas, la primera referida a la clasificación de los sistemas de representación (Maza, 1995) y la segunda, relativa a las operaciones con los sistemas de representación (Gómez & Carulla, 2001; Segovia & Rico, 2001). En cuanto a las categorías establecidas en la clasificación mostramos las siguientes: no formal, manipulativa, icónica y formal. En cuanto a las operaciones se distinguen tres de ellas: la creación de signos y expresiones; las transformaciones sintácticas tanto variantes como invariantes y por último, la traslación entre sistemas de representación.

Introducción

El presente trabajo constituye parte de una investigación en desarrollo acerca del análisis del contenido puesto en juego por parte de estudiantes en formación inicial en el campo de la Educación Matemática. Parte de la investigación se refiere a las representaciones que exteriorizan los mencionados estudiantes.

Los sistemas de representación no siempre han sido entendidos de la misma manera (Goldin & Janvier, 1998) por ello se hace necesario aclarar qué entendemos por ello en el presente trabajo. En el presente trabajo asumimos como sistemas de representación la expresión específica de conceptos y procedimientos matemáticos mediante notaciones simbólicas o gráficas, destacando sus características y propiedades más relevantes (Segovia & Rico, 2001). Parte de la utilidad de estudiar los sistemas de representaciones en estos futuros docentes es que a través de ellos se pueden reconocer las diferentes actividades matemáticas que un docente se plantea desarrollar durante una clase de matemática.

Existen diversas maneras desde las cuales se podrían estudiar los sistemas de representaciones; una de ellas es el estudio desde la perspectiva de los modelos de enseñanza, esto es, indagar entre los docentes los sistemas de representación que ellos utilizarían en el desarrollo de cualquier objeto matemático, lo que nos permite aproximarnos a los modelos de enseñanza sustentados por los sujetos en cuestión (Bruno & Martinón, 1996).

Otra manera de estudiar los sistemas de representación podría ser analizando los tipos que se exteriorizan (Maza, 1995) y una tercera podría ser el análisis de las operaciones que se realizan con ellos (Gómez & Carulla, 2001). En este caso específico centraremos la atención en los tipos de representaciones que utilizan los miembros de la población objeto de estudio y en las operaciones que ellos se plantean En ambos casos nos delimitaremos a plantearlas en el marco de los números enteros (Cuadro 1)

Analizar los sistemas de representación relativos al conocimiento didáctico matemático en la adición de los números enteros por parte de los pasantes	• Tipos de representaciones • Operaciones	• No formal (fenomenológico) • Manipulativa • Icónica (gráfico) • Formal (aritmético y algebraico) • Creación de signos o expresiones • Transformaciones sintácticas variantes • Transformaciones sintácticas invariantes • Traducción entre sistemas de representaciones • Modelación

Cuadro 1. Análisis de los sistemas de representación.

Tipos de representaciones

El primer tipo de representaciones la denominamos *no formal*; ella se caracteriza por aquellas representaciones que de una u otra manera representan un fenómeno particular ligado a un objeto matemático, en nuestro caso, el número entero y sus operaciones. Caso típico es el ejemplo muy utilizado en las aulas como es el del ascensor.

Un segundo tipo de representación la podemos llamar *manipulativa*; ella se refleja a través de objetos. Un ejemplo de ello es el caso de las fichas de diferentes colores – por ejemplo, azules y rojas – podemos relacionar las fichas rojas como número negativo y las azules como números positivos.

El tercer tipo que podemos conseguir son las representaciones *icónicas*; ellas representan la idea matemática mediante diagramas o ilustraciones. En nuestro caso, podría ser el siguiente

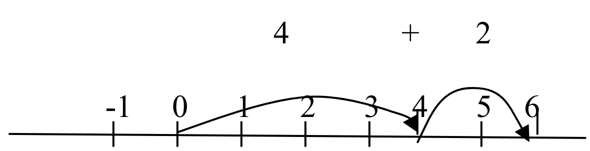


Gráfico 1. Representación icónica de números enteros

Por último tenemos las representaciones *formales*; en nuestro caso ellas utilizan signos de tipo aritmético o algebraico.

Operaciones con los sistemas de representación

Respecto a las operaciones que se plantean, podemos señalar que se pueden distinguir tres: creación de signos; transformaciones sintácticas, tanto variantes como invariantes y traslación entre dos o más sistemas de representación.

Creación de signos
Se refiere a la sintaxis, la cual se establece siguiendo las normas que regulan los sistemas de representación de las matemáticas. Estas representaciones aunque adaptadas al contexto de la matemática escolar, no deben contradecir lo establecido por las matemáticas. En el caso de los números enteros tenemos por ejemplo, desde los símbolos numéricos (-32; 67; 8; -5;…) hasta expresiones tales como:

$a + (b + c)\ \forall\ a, b, c \in Z$

También podría ser el caso de las operaciones en Z, tales como:
-3 + 7; 9x5;...
ó

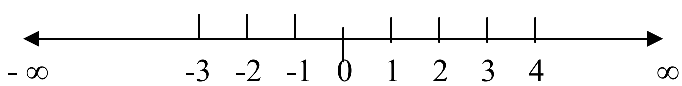


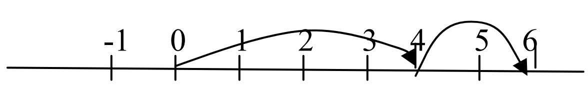
Gráfico 2. Representación de los números enteros en la recta numérica

Transformaciones sintácticas

Se refieren a las diferentes transformaciones que una expresión puede sufrir siempre y cuando esté aun comprendida en el mismo sistema de representación de origen. Un ejemplo pudiera ser la representación de la operación 3 + (5 + (-8)) en Z; podemos expresar esta misma operación como (3 + 5) + (-8) y en este caso en particular, como el objeto matemático es el mismo, se dice que esta transformación es de carácter invariante (Gómez & Carulla, 2001)

Sin embargo, pudiese ocurrir otro tipo de transformación como la que sigue $a + (b + c) = (a + b) + c;\ \forall\ a, b, c \in Z$, en este caso la operación puede variar dependiendo de los valores de a, b y c aun cuando se mantiene en el mismo tipo de representación (propiedad asociativa); en este caso se denomina variante

Traducción de sistemas de representación
Se trata del paso de un sistema de representación a otro. Por ejemplo, en el caso de los números enteros podemos tener la siguiente gráfica



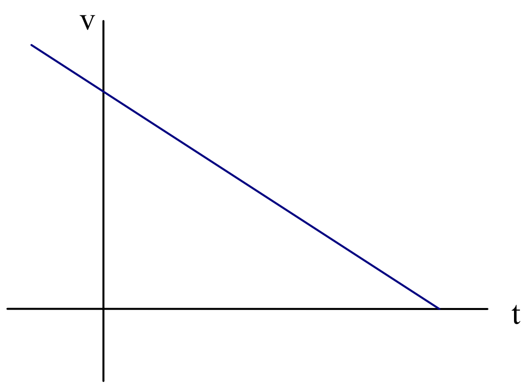
Esta gráfica podemos expresarla de otra manera como lo es
4 + 2 = 6

Modelación

Por último, contamos con la modelación que no es más que la representación de un fenómeno mediante expresiones y signos matemáticos (Segovia & Rico, 2001[‡‡]). Por ejemplo, el modelo matemático que representa la aceleración de un móvil lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$A = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Donde A, supongamos, es negativa (A < 0), y su gráfica respectiva podría ser la siguiente:



Gráfica 3. Modelo

Este caso no se refiere a un móvil en particular, lo cual implica una mayor abstracción, pero la expresión muestra la desaceleración de un móvil, no importando las características de éste.

A modo de conclusión

Al inicio expresábamos que la idea que proponíamos era presentar una manera de analizar los sistemas de representación referidos a los números enteros. En ese sentido podemos adelantar que cualquier propuesta que se haga siempre será insuficiente porque las maneras de analizar dependerán de los objetivos que la investigación se proponga, del objeto matemático a representar y de la población y contexto de estudio.

En nuestro caso particular planteamos dos maneras de abordar el análisis de los sistemas de representación; uno centrado en clasificarlos y el otro focalizado en las diferentes operaciones que se pudiesen plantear con los sistemas de representación. Esta manera de abordar el análisis deberá ser confrontada con las respuestas de los estudiantes, siendo ellas las que determinen finalmente cuanto de validez tendrá la categorización que planteamos. En definitiva, se trata de una propuesta preliminar que en principio sirva de referente para abordar el estudio de los sistemas de representación pero que finalmente los hechos tendrán la última palabra.

[‡‡] Los autores en realidad la denominan modelización; nosotros hemos asumido tal término porque pensamos que resulta más adecuado a la literatura actual de nuestra área de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Bruno, A. & Martinón, A. (1996). Números negativos: una revisión de investigaciones. *UNO.* 9, 98-108

Goldin, G. A. & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 1– 4.

Gómez, P. & Carulla, C. (2001). Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática. *Educación Matemática*. 13 (2), 31 – 54

Maza, Carlos (1995). *Aritmético y representación. De la comprensión del texto al uso de materiales.* Paidós. España.

Segovia, I. & Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En Castro, Enrique (Editor) *Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria. (pp. 83 – 104).* Síntesis. España

LOS DOCENTES COMO EVALUADORES DE UNA INSTANCIA DE EVALUACIÓN DOCENTE

Mercedes Anido, Héctor E. Rubio Scola
FCEE, FCEIA, CIUNR, Universidad Nacional de Rosario. Rosario. (Argentina)
erubio@fceia.unr.edu.ar

Campo de investigación: formación de profesores Nivel educativo: superior
Palabras claves: postítulo, cuestionario, materiales curriculares

Resumen
En este trabajo se describen los resultados de una evaluación realizada por docentes, en situación de alumnos, participantes en un “Postítulo en Matemática y Estadística” que se desarrolla en la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Una etapa de la evaluación de la calidad de este postítulo, objeto de nuestra investigación, se realizó por medio de un cuestionario que ha incluido un espacio abierto a reflexiones críticas.

Introducción

Ley Federal de Educación de la República Argentina, actualmente vigente, establece que la etapa profesional de grado no universitario debe estar articulada horizontal y verticalmente con la Universidad y que la educación cuaternaria debe estar a cargo de las Universidades. En concordancia con la misma y respondiendo a los requerimientos de docentes de distintos puntos de la provincia de Santa Fe se diseña y pone en marcha un Postítulo en Matemática y Estadística.

El Postítulo comprende dos años de duración con una carga horaria total de 600 horas. Tiene por finalidad la formación universitaria de docentes en ejercicio de nivel primario o secundario, que reúnan los siguientes requisitos: ser graduados de nivel terciario, egresados de Institutos oficiales o privados reconocidos, que posean título de Profesor de Matemática, Profesor en matemática, Física y Cosmografía, Profesor de Matemáticas y Computación o equivalentes, cuyo Plan de estudio tenga la organización curricular del título terciario, con eestructura del plan de estudio organizado por asignaturas, materias, disciplinas, núcleos, talleres seminarios y con una carga horaria mínima total de 2000 horas reloj.

En su diseño desde la Universidad se buscó la profundización en distintas áreas, del conocimiento específico en Matemática y Estadística y la actualización didáctica, con el fin de concretar la articulación entre el Sistema Educativo Formal y la Universidad.

Se pretende que constituya una alternativa transformadora respecto a una oferta diversificada y asistemática de cursos de actualización que, muchas veces no están integrados en proyectos y diseños curriculares específicos. Se asume, además, la necesidad de intervenir frente a la demanda expresada por los propios docentes.

Los contenidos de Matemática de la propuesta son temas que, en general, no han sido tratados o no han sido tratados con la suficiente profundidad en la formación de profesores y que, por otra parte, algunos de ellos son necesarios para el abordaje de cuestiones de Estadística. A esto se añade que los contenidos de esta última asignatura no han sido adecuadamente contemplados en los programas de algunos profesorados. Uno de los estímulos para despertar el interés de los docentes en el cursado de post-titulo de estas características es la adjudicación de un puntaje para su propia carrera docente.

El problema de investigación: objetivos y metodología

La investigación que se describe en este trabajo responde a la pregunta

¿Cómo valora el docente-alumno la formación que se ha buscado realizar y de la cual él es receptor?

Se trata de una “evaluación investigativa” en el sentido de (Cook y Reichard, 1995) que busca realizar correcciones curriculares y metodológicas necesarias para mejorar y actualizar la enseñanza en un nuevo en un segundo ciclo de Postítulo.
Esta investigación tiene como objetivos:

1. detectar situaciones de conflicto
2. promover la reflexión del docente sobre la transposición didáctica realizada en cada asignatura del Postítulo,
3. ayudar a evaluar la adecuación de los contenidos, nivel de tratamiento, materiales didácticos, sistemas de evaluación utilizados en diseño curricular y desarrollo de cada asignatura.

Si bien nuestro posicionamiento es interpretativo, en esta fase, recurrimos al enfoque plurimetódico (Medina Rivilla, A. y otros (1998).
Para dar respuesta a la pregunta de investigación se realiza un análisis estadístico de un cuestionario evaluativo (Fraenkel, J. Y Wallen, N. 1996) que ha tenido lugar al finalizar el segundo año del Postitulo.

Desarrollo de la experiencia
La recolección de datos
Las asignaturas a ser evaluadas, por los alumnos del presente curso de postitulo, son las que a continuación se detallan:

- Matemática Discreta;
- Estadística Descriptiva y Probabilidad;
- Laboratorio de Análisis Matricial;
- Teoría de la Integración;
- Inferencia Estadística;
- Política Educacional;
- Métodos Estadísticos;
- Didáctica de la Matemática;
- Didáctica de la Estadística;
- Desarrollo Histórico-Epistemológico de la Matemática;
- Taller de aplicación centrado en resolución de problemas.

Definiéndose como puntos de interés a tener en cuenta, al momento de realizar la evaluación para cada una de ellas, las siguientes afirmaciones:

- Los contenidos seleccionados en este curso son los adecuados.
- El nivel con que se han tratado estos temas ha sido satisfactorio.
- Los contenidos son realmente diferentes de los vistos en el postitulo.
- Los materiales facilitados (bibliografía, fotocopia de documentos, programas computacionales, apuntes, etc.) son adecuados.
- El sistema de evaluación utilizado ha sido adecuado.
- Se ha respetado la planificación inicial y las actividades programadas para el curso.

Cada una de estas variables es calificada por medio de una nota comprendida entre 1 y 7, intentando así, reflejar distintos niveles de acuerdo que puedan presentar cada uno de los encuestados, por medio de las siguientes calificaciones: (1) Totalmente en desacuerdo, (2) Bastante en desacuerdo, (3) Algo en desacuerdo, (4) No opino, (5) Algo de acuerdo, (6) Bastante de acuerdo, (7) Totalmente de acuerdo.

Se incorporan además, dos puntos de análisis que reflejan características de los encuestados: "Años transcurridos desde la finalización de los estudios" y "Motivos para la realización de este curso".
Si bien el cuestionario fue anónimo cada hoja de respuesta tenía un número que permitía diferenciar los criterios de evaluación individuales y relacionarlos con el espacio para expresión libre.

Etapas del proceso de análisis

Se realizó un primer análisis descriptivo para cada una de las asignaturas estableciendo las frecuencias de notas en cada afirmación, se obtuvieron 66 cuadros de análisis. Se observa la existencia una no total homogeneidad en la evaluación realizada por parte de los alumnos/docentes encuestados, lo cual podría deberse a distintos factores, como podrían ser, el nivel de conocimientos poseído por cada uno de los mismos antes del inicio, las expectativas que tenían sobre el curso, o bien, algún inconveniente personal surgido en el dictado del mismo. En relación a las asignaturas es posible apreciar un gran abanico de calificaciones alcanzadas por cada uno de los ítems en análisis.
En un segundo análisis global se consideró para cada asignatura una matriz de datos en la que en las filas se corresponden con las afirmaciones y las columnas con los evaluadores, permitiendo así ubicar la nota asignada por cada evaluador a la afirmación correspondiente. Como criterio de interpretación de las frecuencias, se consideró: desacuerdo a la notas 1, 2, 3 y acuerdo a las notas 5, 6 y 7 siendo el 4 correspondiente al no opino.
Se procedió a calcular dos porcentajes, uno que indica la presencia de algún grado de desacuerdo, en relación a la positividad de las afirmaciones y otro, para los que tienen algún grado de acuerdo acerca del mismo punto en evaluación, completándolo el porcentaje de respuestas iguales a 4 (No Opino).

	Desacuerdo (%)	Acuerdo (%)	No Opino (%)
Métodos Estadísticos	0,8	95,4	3,8
Inferencia Estadística	3,1	93,1	3,8
Matemática Discreta	7,6	84,8	7,6
Desarrollo Histórico-Epistemológico de la Mat.	9,1	80,3	10,6
Política Educacional	9,1	78	12,9
Taller de Aplicación centrado en resol. de problemas	20,4	74,3	5,3
Teoría de la Integración	20,5	71,9	7,6
Didáctica de la Estadística	15,9	71,2	12,9
Estadística Descriptiva y Probabilidad	23,8	70,1	6,1
Didáctica de la Matemática	50,7	38,7	10,6
Laboratorio de Análisis Matricial	62,1	28,8	9,1

Pudiéndose observar que las asignaturas "Métodos Estadísticos" e "Inferencias Estadística" presentan un nivel de acuerdo superior al 90% y el resto de las asignaturas se ubican entre el 70,1% y el 84,8% en el nivel de acuerdo, salvo las asignaturas "Laboratorio de Análisis Matricial" y "Didáctica de la Matemática" que el nivel de acuerdo alcanzado es de 28,8 % y 38,7% respectivamente, lo cual estaría indicando la existencia de algún tipo de conflicto en estas cátedras. El porcentaje de respuestas "No Opino" se encuentra entre el 3,8% y el 12,9% para todas las asignaturas. Se consideran pues puntos en conflicto las asignaturas "Didáctica de la Matemática" y "Laboratorio de Análisis Matricial".

El conflicto en el laboratorio de análisis matricial

Analizando el porcentaje de notas que están en desacuerdo y en acuerdo, es posible ver que un problema importante, es el nivel con que se han tratado los temas, dado que alcanza un 90,90% de no acuerdo; y el otro problema, también de relevancia, estaría dado en la pertinencia de los materiales facilitados (bibliografía, fotocopia de documentos, programas computacionales, apuntes, etc.) que fueron calificados con notas de no acuerdo de un 81,81%. Al mismo tiempo es notorio el nivel de respuestas de "No Opino" que registro el punto que hace referencia a si "Se ha respetado la planificación inicial y las actividades programadas para el curso", el cual alcanzó el 36,36%. Es importante destacar que un 68,18% opinaron que los contenidos son realmente diferentes de los vistos, como se presenta en la siguiente tabla:

LABORATORIO DE ANÁLISIS MATRICIAL	Desacuerdo (%)	Acuerdo (%)	No Opino (%)
Los contenidos son realmente diferentes de los vistos en el postitulo	31,82	68,18	0
El sistema de evaluación utilizado ha sido adecuado	59,08	36,37	4,55
Los contenidos seleccionados en este curso son los adecuados	68,18	22,73	9,09
Se ha respetado la planificación inicial y las actividades programadas	40,91	22,73	36,36
Los materiales facilitados son adecuados	81,81	13,64	4,55
El nivel con que se han tratado estos temas ha sido satisfactorio	90,9	9,1	0

¿Qué primer interpretación surge?: El laboratorio ha estado dirigido a la preparación del docente en la utilización de las herramientas computaciones, como herramientas cognitivas (Jonassen, 1995) en un área de conocimiento en donde se suponía ya adquirido el fundamento teórico. En los espacios para la expresión libre, se critica la utilización de materiales que si bien tienen una presentación didáctica, en relación a los contenidos matemáticos; de acuerdo al diseño curricular suponen la posesión de conocimientos básicos de los espacios vectoriales y del álgebra matricial. La mayoría de los asistentes no recordaban o no habían recibido en su formación de grado esos conceptos Otro factor fue la carencia de equipamiento informático adecuado y el desnivel en cuanto a conocimientos informáticos, como bien lo expresa uno de ellos en la hoja donde volcaron sus comentarios. "…no tengo mucho conocimiento de informática…". El querer construir conocimientos sin tener en cuenta las hipótesis previas de las cuales se parte, queda expresado en la siguiente acotación vertida por un alumno "...los docentes, que venían, no supieron jamás con que nivel contábamos…"

El conflicto en didáctica de la matemática

En esta asignatura se presentan como puntos a considerar en el proceso de revisión curricular el sistema de evaluación utilizado, dado que alcanzo "el acuerdo" únicamente al 27,27% de respuestas y, el otro punto parece ser el nivel con que se han tratado los temas, debido que solamente un 22,73% respondió estar de acuerdo. Los restantes puntos de análisis, se encuentran próximos al 40% de respuestas favorable, salvo los materiales facilitados en los que un 68,19% de respuestas son favorables. Cabe señalar, que esta asignatura, presento un porcentaje elevado de respuestas "No Opino", tal como se presenta en la siguiente tabla:

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA	Desacuerdo (%)	Acuerdo (%)	No Opino (%)
Los materiales facilitados son adecuados	31,82	68,19	0
Se ha respetado la planificación inicial y las actividades programadas	45,46	40,91	13,64
Los contenidos son realmente diferentes de los vistos en el postitulo	45,46	36,37	18,18
Los contenidos seleccionados en este curso son los adecuados	40,91	36,36	22,73
El sistema de evaluación utilizado ha sido adecuado	68,18	27,27	4,55
El nivel con que se han tratado estos temas ha sido satisfactorio	72,73	22,73	4,55

De acuerdo a lo conversado con los docentes de la cátedra y a lo expresado por los mismos alumnos/docentes en los espacios abiertos a la expresión libre, ha existido un "enojo" que se extendería, a los restantes ítem en evaluación, por la naturaleza del examen llevado a cabo al finalizar el curso. Este examen ha sido considerado, por los alumnos/docentes, excesivo en cuanto a exigir no sólo conocimientos didácticos impartidos, sino profundizar en las capacidades de reflexión, solidez de algunos conceptos matemáticos y capacidad de resolución de problemas. No obstante estos atributos y competencias docentes de cuya posesión el docente debe tomar conciencia, son indispensables en cualquier posicionamiento didáctico a que se recurra. Esto explicaría también la aparente contradicción en considerar adecuados los materiales (68%) y expresar solo un 22 % acuerdo con el nivel con que se han tratado los temas.

Resultados

Existe relación entre lo expresado en el espacio abierto y la asignación numérica al cuestionario. Se revela también así alguna "forma diferente de evaluar", por ejemplo un alumno muy crítico en la expresión verbal, utilizó también notas muy inferiores a las de los restantes compañeros. Esto llama la atención de manera muy marcada, en la asignatura Inferencia Estadística donde es el único que la "castiga", en contra de la opinión general.

Con respecto a la calificación favorable de todas las asignaturas que se encadenan en el área de Estadística, una de las razones atribuibles estaría dada en el hecho de que se parte en los contenidos de un nivel cero, lo que ha homogenizado los cursos. Además existe un generalizado interés profesional en los contenidos, por la reciente incorporación de parte de ellos a los programas de la escuela secundaria (nivel polimodal).

La evaluación llevada adelante, tuvo como objetivo fundamental poder evaluar la calidad del curso. Se pudo observar una gran heterogeneidad entre los alumnos que realizaron el curso, tanto en años de haber finalizado sus estudios, como del motivo que los impulsaron a realizarlo. En el análisis multivariado, aparecieron interesantes correlaciones entre la motivación para el postítulo y la forma de evaluar.

Es importante tener en cuenta que se presentaron alumnos/docentes que se habían recibido hacia un año o menos como así también aquellos que alcanzaban los 28 años desde su titulación, pudiendo ello influir en una sustancial diferencia a la hora de retomar conocimientos ya adquiridos. El 70 % de los mismos se había recibió hacia más de 4 años.

Cabe destacar que como motivación el 49 % de los encuestados realizaron el curso ya sea para actualizarse o capacitarse, y un 18 % lo hizo por obligación.

Se presento una elevada cantidad de individuos que no opinaron acerca de los contenidos seleccionados, como tampoco respecto al hecho deberse respetado o no la planificación inicial y las actividades programadas.
En cuanto a evaluación de los materiales facilitados encontramos un 72.7% de notas superiores a cuatro lo cual indicaría un grado importante de aceptación de los mismos en términos generales. El sistema de evaluación utilizado, también obtuvo un 72.2% de calificaciones con notas superiores a cuatro, lo cual estaría indicando que existió una aceptación importante con el sistema propuesto.
Es de remarcar que en general se considera que los contenidos del curso son realmente diferentes, respecto a los recibidos en el Profesorado según los resultados de la evaluación, dado que se obtuvo un 76.9% de notas superiores a cuatro.
El Postítulo se consideraría como un espacio apto para aquellos individuos que estén en búsqueda de capacitarse o adquirir nuevos conocimientos.
Si se procede a realizar un simple análisis de las notas alcanzadas en forma global, calculando la frecuencia de cada nota en el total de notas emitidas por todos los evaluadores en todas las asignaturas se obtiene.

Resultados Obtenidas	1	2	3	4	5	6	7	Total
%	4,5	6,2	9,6	8,2	15,4	25,0	31,1	100

En donde se desprende que el 20,3 % de las respuestas globales mostraron desacuerdo en las afirmaciones positivas y el 71,5 % mostraron una evaluación positiva y un 8,2 % de respuestas que no quisieron opinar.

Conclusiones

En términos globales, más del 70% del curso opino estar de acuerdo con distintos grados de positividad con lo desarrollado en el Postítulo, comprendiendo esta aprobación: contenidos, metodología, materiales curriculares, sistemas de evaluación y nivel científico con que los temas fueron tratados. Esto, en nuestra interpretación, es alentador pero mismo tiempo nos ha permitido detectar conflictos que se trata de solucionar y realizar las correcciones curriculares y metodológicas, dirigidas a un nuevo ciclo de Postítulo.
Se ha promovido además la reflexión del docente sobre los conocimientos adquiridos, detectado situaciones de conflicto y conocido su valoración en cuanto a la formación recibida que, en general, consideramos positiva.
Todo esto nos permite considerar que se han alcanzado los objetivos propuestos.

Agradecimiento Agradecemos a los alumnos de la FCEE - UNR Maldonado, Lucrecia, Martín, Norberto por su trabajo en el procesamiento estadístico.

Referencias bibliográficas

Fraenkel, J. y Wallen, N. (1996). *How to Desing and Evaluate Research in Education.* New York, USA: Mc Graw Hill Inc. pp. 405-417.
Cook, T.D. Y Reichard, CH. S. (1995). *Métodos Cualitativos y Cuantitativos en Investigación Evaluativa.* Madrid, España: Ed. Morata. pp. 27-79; 131-145.
Medina Rivilla, A. y otros (1998). *Evaluación de los Procesos y resultados del aprendizaje.* Madrid, España: UNED. pp.305-311.
Jonassen, D.H. (1995). “Computers as Cogniteve Tools: Learning with Technology. Not from Technology”. *Journal of Computing in Higher Education,* 6 (2). pp. 40-73.

LA NOCIÓN DE CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DE TEXTOS MATEMÁTICOS: SU USO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Vicenç Font, Juan D. Godino
Universidad de Barcelona. (España) y Universidad de Granada. (España)
vfont@ub.edu
Campo de investigación: formación de profesores
Palabras clave*:* configuración, epistémica, formación de profesores

Resumen
En este trabajo se argumenta primero que el análisis de libros de texto ha de ser una de las competencias contemplada en la formación de profesores. A continuación, se ilustra el análisis de textos matemáticos que resulta de la utilización del constructo *configuración epistémica*.

Introducción

Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, "por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores" (p. 201). El saber didáctico que progresivamente va produciendo la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los manuales escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores, y en cierta medida, los resultados de la investigación. En consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas. "La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva" (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202). Pensamos que entre estas herramientas deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente y las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas.
En el currículum de algunos países los tipos de "objetos matemáticos" que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una "ontología" demasiado simplista para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar. En nuestra opinión, es necesario contemplar una ontología más amplia formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas,…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc y 6) argumentaciones. Estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* (CE a partir de ahora) cuyo análisis nos informa de la "anatomía de un texto matemático"[§§].

[§§] Si además de la "estructura" interesa analizar su "funcionamiento" con alumnos son necesarias otras herramientas que no se comentan en este trabajo.

En este trabajo nos proponemos mostrar que estas nociones pueden ser útiles para describir las características de los textos matemáticos de distintas épocas y orientación epistemológica. Centraremos nuestra atención en un breve texto del enunciado y demostración de un sencillo teorema de geometría plana – caracterización de la mediatriz de un segmento. La finalidad es tratar de dar una respuesta a una cuestión planteada en el contexto de la formación de profesores de matemáticas: *¿Cómo pueden hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración?*

Un texto matemático como contexto de reflexión

Como contexto de reflexión para mostrar el tipo de aplicación que hacemos al análisis de textos del constructo *configuración epistémica* propuesto por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino 2002, Godino, Contreras y Font, 2006), vamos a utilizar (1) un texto correspondiente a la enseñanza media en Polonia y (2) la pregunta que hizo una formadora de profesores de matemáticas de este país a formadores de profesores de otros países (Polonia, Hungría, Italia, Holanda, Portugal y España) en el marco del diseño e implementación de un proyecto europeo para la formación permanente de profesores de matemáticas:

Cuestión: ¿Cómo podrían hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración?

Teorema: La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.
Demostración: Si AB es el segmento, *m* es su mediatriz y C pertenece a *m*, los segmentos AC y BC son simétricos respecto de *m*, de donde resulta que $|AC| = |BC|$. Con esto probamos que si el punto pertenece a la mediatriz del segmento está a la misma distancia de ambos extremos del segmento.
Mostraremos que si el punto no pertenece a la mediatriz entonces no está a igual distancia de ambos extremos del segmento. Consideremos que el punto C está fuera de la recta m (ver dibujo).

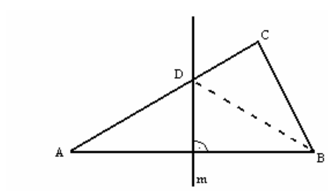


Figura 1

Unimos el punto c con los puntos A y B usando segmentos. Consideremos que C está situado al mismo lado de la recta m que el B. En este caso el segmento AC corta a la recta m en el punto D. Puesto que $|AD| = |BD|$ tenemos,

$$|AC| = |AD| + |DC| = |BD| + |DC| > |BC|.$$

De modo que $|AC| \neq |BC|$, lo que termina la demostración.

Configuración epistémica del texto sobre la mediatriz

Con relación a este texto podemos hacer, entre otras, las siguientes observaciones:

1) Se trata de un texto matemático que se debe enmarcar en una perspectiva "formalista" de las matemáticas de secundaria. Por tanto, es un texto matemático que nos presenta el "producto" acabado pero no el "proceso" que se ha seguido para obtener dicho producto, su razón de ser o motivación.
2) La estructura de este texto se puede representar por una configuración epistémica. En efecto, podemos considerar el enunciado no como un teorema demostrado sino como una situación- problema de demostración. Desde esta perspectiva lo que hay que hacer es conseguir demostrar el enunciado. El tipo de *situación-problema* implícita se puede describir como, ¿Qué argumento deductivo permite establecer que la proposición P es verdadera? ¿De qué conocimientos o proposiciones previamente establecidas debemos partir para establecer la verdad de P?

Para ello, hay que utilizar *conceptos* (la definición de la mediatriz, puntos extremos de un segmento; distancia, igualdad de segmentos). También se usan *proposiciones* del tipo "*si D es un punto del segmento AC, se cumple que* $|AC| = |AD| + |DC|$." o bien "si dos segmentos son simétricos respecto de una recta, tienen la misma longitud", dichas proposiciones se suponen demostradas anteriormente. Se usan también *argumentos* deductivos como el siguiente:"*Si* $|AD| = |BD|$ *entonces* $|AC| = |AD| + |DC| = |BD| + |DC|$.", etc. Por otra parte, puesto que el enunciado es la caracterización implícita de una definición es necesario probar dos proposiciones:

- Si una recta es mediatriz de un segmento entonces todos sus puntos equidistan de los extremos.
- Si un punto no está en la mediatriz de un segmento entonces las distancias a los extremos del segmento no son iguales.

Por tanto, hay al menos una *regla procedimental*: Para probar que un enunciado caracteriza a un objeto que se ha definido previamente hay que probar el teorema directo y el contrario ("Si C está en la mediatriz, entonces $|CA| = |CB|$"; "Si C no está en la mediatriz, entonces $|CA| \neq |CB|$".). Por último, también hay que utilizar un determinado *lenguaje* simbólico (por ejemplo $|BD|$) y gráfico (la figura del teorema), etc.

Por tanto, la estructura de este texto se puede representar por una configuración epistémica como la siguiente (figura 2):

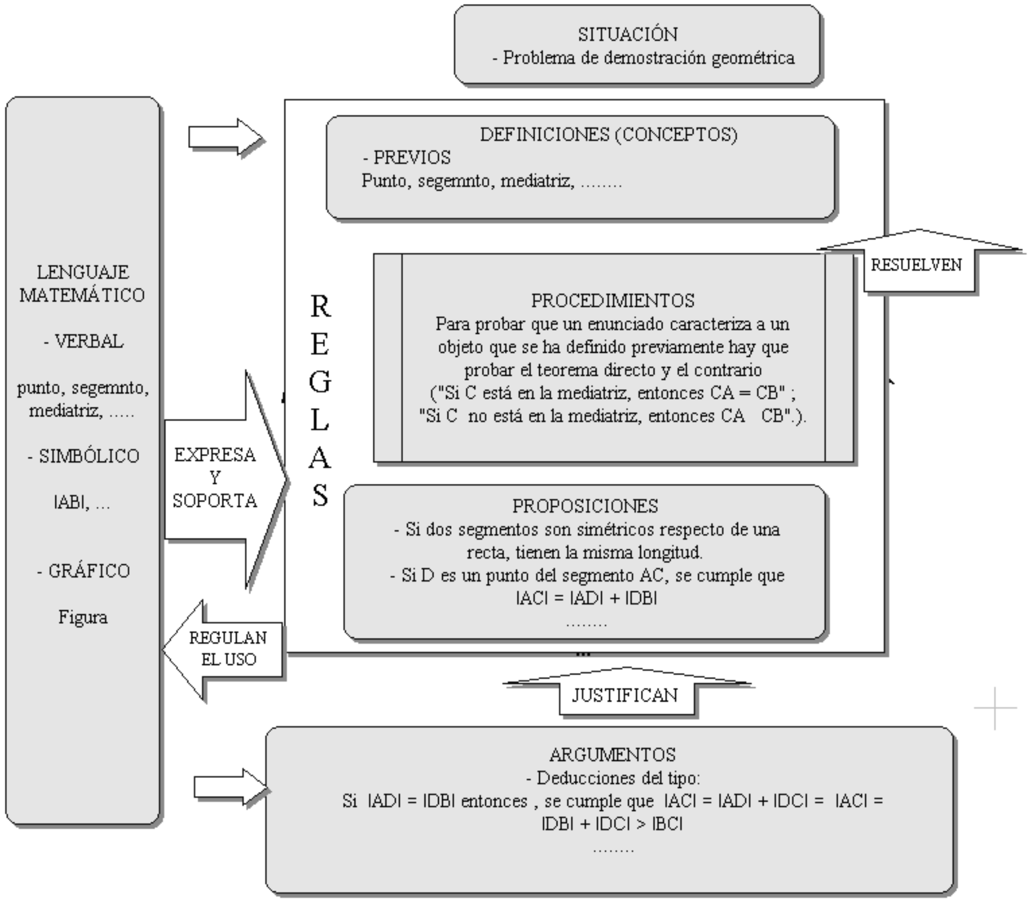


Fig. 2. Configuración epistémica asociada al texto de la mediatriz

3) Otra característica que hay que resaltar es la *conexión* entre los diferentes elementos de esta CE. Consideremos, por ejemplo, uno de los elementos del bloque "lenguaje", nos referimos a la figura 1 que aparece en el texto de la mediatriz. Nos podemos preguntar cuál es su función, o lo que en cierta manera es lo mismo, cómo se relaciona con los otros elementos de la CE.

La figura es estática pero, a pesar de ello, facilita el razonamiento con "elementos genéricos". El punto C por una parte es un punto particular, pero, por otra parte, lo que se dice de él se puede aplicar a cualquier otro punto del plano que no sea de la mediatriz (la cual debe permanecer como particular). Después el segmento AB (y su mediatriz) se puede considerar como un segmento (y su mediatriz) cualquiera. Dicho de otra manera la principal función que cumple la figura 2 es a) introducir un caso particular sobre el cual razonar y b) facilitar que este caso particular sea considerado como un elemento genérico (una cadena de elementos genéricos para ser más exactos).

5) Para comprender este texto matemático es necesario la activación de una configuración epistémica como la descrita anteriormente, pero que de esta configuración también pueden emerger nuevos "objetos" matemáticos. En concreto, a partir de este texto se construye una nueva definición de mediatriz y también se podría obtener un procedimiento de construcción de la mediatriz con regla y compás.

6) La modificación de alguno de los elementos de la CE repercute sobre los demás. Por ejemplo, si la representación de la figura se puede hacer con un programa

dinámico como el Cabri se está facilitando mucho el razonamiento con elementos genéricos. En concreto, se facilita no sólo la demostración del teorema (el producto) sino que, gracias a la abstracción reflexiva (si se toma como referencia a Piaget) o hipostática (si la referencia es Peirce), incluso se podría llegar a la formulación de aquello que se tiene que demostrar. Es decir, se podría modificar la situación problema para convertirla en una situación más rica ya que primero se podría proponer que se buscase aquello que se quiere demostrar y después, si se considera conveniente, pedir la demostración. Por ejemplo, podemos formular la siguiente pregunta a los alumnos:

Tarea: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio. A partir de la siguiente construcción geométrica realizada con el programa Cabri:

a) Halla una propiedad que cumplan todos los puntos de la mediatriz.
a) Demuestra esta propiedad.
b) Da una nueva definición de mediatriz.
c) Halla a partir de los apartados anteriores un procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.

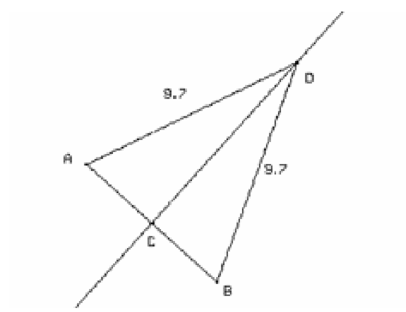


Fig. 3. La mediatriz con el Cabri

La configuración epistémica asociada es la siguiente:

LENGUAJE
Verbal mediatriz, segmento, recta perpendicular, punto medio etc. Gráfico - Figura geométrica dinámica Simbólico: A, B, …

SITUACIONES
- Problema descontextualizado de construcción geométrica en el que se ha de hallar y justificar una propiedad de la mediatriz.

CONCEPTOS
Previos
- Segmento, recta perpendicular, punto medio - Mediatriz (definida como recta perpendicular que pasa por el punto medio)
Emergentes
- Mediatriz (definida como recta formada por todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento)

PROCEDIMIENTOS	*PROPOSICIONES*
Emergente - Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz	- El punto medio divide al segmento en dos segmentos de igual longitud - La recta perpendicular forma un ángulo de 90º con el segmento - …. Emergente Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento

ARGUMENTOS
- Justificación visual de la propiedad "Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento". - Justificación de la propiedad utilizando elementos genéricos. - Demostración deductiva (?)

Tabla 1. Configuración epistémica "emergente" asociada a la mediatriz

En esta configuración destaca el papel central que juega la situación problema (de tipo intra matemático) y también que está orientada a la emergencia de nuevos objetos matemáticos (nueva definición de la mediatriz y nuevo procedimiento de construcción). Si bien este tipo de configuración epistémica puntual, orientada sobre todo a la emergencia de nuevos objetos, puede convivir con configuraciones epistémicas globales de tipo formalista, hay que resaltar que "viven" mejor en configuraciones epistémicas globales que no sean de tipo formalista, lo cual nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las configuraciones epistémicas globales alternativas a las formalistas? La respuesta es que la principal alternativa a las configuraciones epistémicas formalistas son las empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.).

Conclusiones

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que el constructo configuración epistémica resulta útil para el análisis de textos matemáticos, una de las competencias que debe contemplar la formación de profesores. También se ha puesto de manifiesto que los currículum de algunos países que consideran sólo dos tipos de objetos matemáticos: conceptos y procedimientos proponen una "ontología" demasiado simplista para analizar los textos matemáticos, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar.

Referencias Bibliografícas:

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237–284.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26, 1, 39-88.

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 66: 201-222.

LAS MATEMÁTICAS BÁSICAS: UNA EXPERIENCIA EN LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TAMAULIPAS

Evelia Reséndiz Balderas, Ramón Llanos Portales, Jorge Loredo Osti, Griselda Hdz. C.
Universidad Autónoma de Tamaulipas, México.
rllanos@uat.edu.mx, erbalderas@uat.edu.mx, jloredo@uat.edu.mx
Campo de investigación: formación de profesores. Nivel educativo: superior
Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, matemáticas, actualización

Resumen
En México, a mediados de los 70´s, la formación docente para el nivel superior inducía una concepción de la enseñanza como una subprofesión. Lo anterior motivó el estudio entre un grupo importante de profesores sobre la manera científica de tratar los problemas de la enseñanza de diversas áreas, entre ellas las matemáticas. Por otro lado, los altos niveles competitivos que imponen las tendencias globalizadotas en la actualidad, que requieren profesionales con una preparación de buena calidad en todos los ámbitos, incluidas las matemáticas, hace imprescindible contar con elementos didácticos, tecnológicos y metodológicos que le permitan al maestro hacer uso de estos de tal forma que faciliten su práctica docente y que el alumno pueda lograr la habilidad de razonamiento y dominio de las matemáticas. En el año 2000, la Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT) define en el Plan de Desarrollo Institucional encaminado a la actualización de los programas de estudio, con el propósito de que sean acordes con el perfil del egresado del cual se pretende responda a las necesidades que requiere una sociedad cambiante. En este punto la creación de las Academias es una de las prioridades. El presente documento ofrece un panorama del trabajo desarrollado por la Academia Universitaria de Matemáticas (AUM) de nuestra Universidad desde su inicio, la cual se formó con el fin de apoyar la labor docente en la búsqueda constante de modelos que permitan mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje en esta área en base a varias estrategias propuestas. El trabajo se ha desarrollado principalmente con docentes (134) que imparten materias afines a las matemáticas y con los alumnos de nuevo ingreso de cada generación. Por parte de la AUM, se han realizado diversos seminarios y cursos para la actualización y formación de profesores, se ha creado e implementado la asignatura de Matemáticas Básicas, ubicada como prerrequisito en primer semestre en toda la UAT, se editó el libro "Matemáticas Básicas: Aplicaciones" que ya está impreso en su segunda edición, el cual cuenta con un libro de ejercicios resueltos, con un video y un software interactivo como auxiliares del mismo y se elaboran reactivos que se utilizan en un examen tipo departamental para evaluar la asignatura. Actualmente, la UAT y la AUM están en una segunda etapa de reestructuración pedagógico-curricular denominada Milenium III.

Introducción

El acelerado crecimiento en la matrícula educativa en sus niveles medios y superiores durante la década de los setenta en México, aunada a la asunción, mecánica y simplista, de la llamada matemática moderna, trajo una profunda dependencia de modelos educativos importados, una intensa desvinculación de la matemática escolar con las necesidades de promoción y desarrollo social que la ciencia y la tecnología nos planteaban. Se produjo, además, un severo proceso de improvisación de la planta magisterial así como en la elección de los materiales didácticos pertinentes. También producto de carencia de planes de formación docente para los niveles medio superior y superior al seno de las instituciones educativas que induce una concepción de la enseñanza como una subprofesión. Los efectos de tal proceso pueden constatarse en cualquiera de los estudios sobre el funcionamiento de nuestro sistema escolar (Ornelas, 1995). La problemática anterior ha motivado, desde mediados de la década de los 70`s, el estudio entre un grupo de profesores sobre la manera científica de tratar los problemas que entraña la enseñanza de la matemática en México, de ahí la creación del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados; (Cantoral, 1990 b).
La humanidad se encuentra en una etapa de transición, en la cual el recurso estratégico no son ni las materias primas, ni el capital financiero, sino el capital humano que cada nación puede

generar y formar. Por otro lado, los altos niveles competitivos que imponen las tendencias globalizadoras en la actualidad, que requieren de profesionales con una preparación de calidad en todos los ámbitos.
Tomando en cuenta la antigua concepción, en nuestra universidad, de que no era necesaria la impartición de las matemáticas en todas las áreas del conocimiento provocó grandes problemas como la saturación de algunas carreras debido a que el estudiante se inscribía en las carreras donde el currículo de estas no contemplaba la asignatura de las matemáticas.
Considerando la importancia del la utilización de las matemáticas en los diversos campos del saber la UAT (Misión XXI, 2000) se propuso implementar un proyecto Universitario con la creación de Academias en la cual dio lugar a la formación de la Academia Universitaria de Matemáticas con la intención de apoyar distintos proyectos de desarrollo que se consideraban fundamentales, uno de ellos es el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas. De esta manera, nace la Academia conformada por todos los profesores de matemáticas de las Escuelas, Facultades o Unidades Académicas de nuestra Universidad.

Justificación

En la actualidad las instituciones de educación superior tienen una eficiencia terminal promedio de 53%, una cobertura no mayor del 15% de la demanda potencial, y ésta a su vez sufre desequilibrios y rezagos académicos. La Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior señala que el porcentaje general de eficiencia terminal de la licenciatura tanto de las universidades como de institutos tecnológicos fluctúan entre 51.2% y 62.0%. Igualmente el sector privado está en el orden de 57.4%.
En general la reprobación es elevada en todo el nivel de licenciatura y los índices más altos de reprobación se encuentran con mayor frecuencia en las llamadas “ciencias duras”. Este fenómeno repercute fundamentalmente en los costos financieros y en el tiempo que emplean los alumnos para realizar sus estudios.

Diagnóstico de la Formación de Profesores de Matemáticas

A partir de una encuesta aplicada a 134 docentes que imparten asignaturas de matemáticas en los diferentes programas académicos de la UAT a nivel licenciatura, se logró obtener los siguientes datos: un 50% de los maestros que imparten matemáticas estudiaron una ingeniería en las diferentes áreas del conocimiento; en Ciencias de la Salud un 21%, Administrativas 16%, C. Exactas 9%, y 2% C. Naturales y C. Sociales. Estos porcentajes reflejan la formación de los docentes que imparten asignaturas relacionadas con las matemáticas. En cuanto a la especialización a través de la maestría, las estadísticas son las siguientes: Administrativas 37%, C. Sociales 20%, Ingeniería y Tecnología 16%, C. Naturales 8%, C. Exactas 5% y no especificó 2%.
Tomando en cuenta lo anterior, se ha considerado necesario implementar cursos de actualización en cuanto a contenidos matemáticos, investigación en el aula, análisis de la práctica, para llegar a una profesionalización del docente. Por lo que se han estimado pertinentes algunas alternativas que podrían mejorar la práctica docente, estas son algunas de ellas:

a) La mejora de la calidad de la educación sólo es pensable si se da un proceso de profesionalización pedagógica.
b) Este proceso de profesionalización cualitativa puede instrumentarse con especial eficacia si se institucionaliza un esquema de renovación educativa sistemática, considerando tres aspectos básicos: el perfeccionamiento, la investigación en el aula y el análisis de la práctica por los mismos profesores.

Considerando éstas alternativas, la Universidad pretende que sus profesores de matemáticas lleguen a una real profesionalización.

Objetivo General

La formación de profesores de excelencia capacitados para desarrollar, planear y evaluar profesionalmente la docencia en matemáticas y que les permita facilitar a sus alumnos el acceso de manera eficaz el conocimiento y la utilización de las matemáticas. Todos los programas y acciones realizadas en esta línea de trabajo, tienen como objetivo final mejorar la calidad de la participación de los académicos en las diversas funciones y actividades desarrollada en la universidad, a través de procesos de formación que llevan implícito un doble propósito: solidez disciplinaria y desarrollo de una nueva cultura académica (fortalecimiento de la docencia-función investigación).

Objetivos de la Academia

Por parte de la Academia Universitaria de Matemáticas, se pretende dotar al docente de elementos didácticos, tecnológicos, metodológicos que le permita al maestro hacer uso de estos de tal forma que faciliten su practica docente y que el alumno pueda lograr la habilidad de razonamiento y dominio del lenguaje propio de las matemáticas (Pimm, 1991) teniendo a la mano el libro de Matemáticas Básicas. Aplicaciones, utilizado para el curso además de cuadernos de trabajo del mismo titulo cuyo objetivo es mostrar al alumno problemas con aplicaciones a la vida cotidiana.
Con estos materiales se busca contribuir como apoyo al mejoramiento de las acciones de enseñanza de la matemática en los ciclos escolares medio superior y superior de nuestra universidad, poniendo al alcance tanto de los estudiantes, así como de sus profesores, algunas ideas y los métodos de la matemática. Nuestra intención es sólo favorecer acciones de enseñanza que propicien aprendizajes más significativos (Díaz Barriga, 1999), de manera que los saberes entonces adquiridos se tornen funcionales y prácticos para los que hagan uso de estos materiales. Esta rica colección de ejercicios la hemos relacionado de manera sistemática y se han distribuido lógicamente los ejercicios en aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, para que el alumno obtenga el conocimiento como resultado de la práctica, en los aspectos de práctica-retención.

Metodología

La creación de las Academias es una de las prioridades definidas en el Plan de desarrollo institucional (Misión XXI, 2000). La Dirección de Desarrollo Académico, convocan por primera vez, en el año 2000, a todos los maestros que imparten materias de matemáticas y afines a ésta a organizarse en una Academia Universitaria de Matemáticas que a su vez coordinara cada una de las academias de las Unidades Académicas. En la primera reunión los puntos principales que se discutieron serían los objetivos generales, estructura de la academia, líneas de trabajo y la elección del coordinador general. Posteriormente se discutió la problemática existente en esta área por lo que se procedió a trabajar en la elaboración del programa de matemáticas básicas con las propuestas de los profesores. En la elaboración de los materiales se trabaja de manera colegiada con la aportación de ideas y sugerencias por parte de los maestros. Los cursos que se han impartido tanto por profesores de la institución como de otras instituciones son a sugerencia de los docentes, de acuerdo a las necesidades detectadas.

Metas

1.- La formación y mejoramiento permanente de los docentes del área de las matemáticas de la UAT en los niveles medio superior y superior, pensando en atender a los profesores en servicio y a los futuros profesores del sistema educativo.
2.- La consolidación de los cuerpos Académicos en el área de las matemáticas, para fomentar la investigación.
3.- La constante búsqueda de reducir los altos índices de reprobación y deserción escolar en esta área; que es un constante problema que aqueja a nuestra universidad y en general a nuestro sistema educativo mexicano.
4.- Pretendemos que los materiales ya editados sean una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas básicas y que también se compruebe su eficacia en las escuelas preparatorias de la UAT y las incorporadas a la misma.
5.- Se pretende localizar y estudiar las etapas que caracterizan el proceso de construcción social del conocimiento matemático avanzado y a los mecanismos y procesos de pasaje que permitan la formación del pensamiento y lenguaje variacional al interior de situaciones de enseñanza ampliamente socializadas.

Plan de Desarrollo Institucional

La UAT se propuso desarrollar el proyecto universitario de implementar las Academias de Matemáticas en cada una de las Facultades o Unidades Académicas. Con esta iniciativa, se formó la Academia Universitaria de Matemáticas, cuyo propósito ha sido el de apoyar distintos proyectos de desarrollo que se consideran fundamentales, uno de ellos es el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas (Proyecto Universitario Misión XXI). Así mismo atender la problemática de la enseñanza de las matemáticas debido a los altos índices de reprobación en la Universidad; esto ha sido un factor decisivo en la deserción escolar. En las reuniones de Academia se ha trabajado en lo que respecta a:

- Diseño y evaluación curricular

- Homogenización contenidos en la matemática básica que se imparte como materia cocurricular
- Elaboración del programa de matemáticas básicas
- Desarrollo de material didáctico
- Elaboración de reactivos
- Promoción de estudio de las matemáticas

La Academia Universitaria de matemáticas ha ofrecido diversos cursos para la actualización y formación de los profesores de matemáticas. Específicamente referidos a la enseñanza de la matemática del nivel medio superior y superior. Se han atendido ejemplos didácticos del uso de la tecnología en el salón de clase, el papel que juegan los textos escolares y numerosos ejemplos de tratamiento matemático del contenido curricular, los cuales han servido de apoyo para el diseño y evaluación curricular de los planes de estudio.

Con estos cursos se ha buscado estudiar aquellos elementos que ubicados en los contextos del contenido matemático y de su construcción, permitan abordar problemas como la construcción del conocimiento matemático en el salón de clase (Reséndiz, 2004) y la incorporación de las representaciones espontáneas de los estudiantes en la didáctica de la matemática. Todo este trabajo es apoyado en el proyecto Institucional de Desarrollo denominado MILLENIUM III que contempla los cambios de una nueva era con nuevos desafíos para la universidad y los universitarios, por lo que la reforma universitaria está en marcha.

Logros Alcanzados

Se logró conformar la academia universitaria de matemáticas, con la participación de 134 profesores de matemáticas o materias afines a éstas que laboran en la institución. En las reuniones de academia se ha abordado y trabajado los siguientes puntos: Diseño y evaluación curricular, en donde el objetivo es apoyar, coordinar y realizar actividades dirigidas a la actualización de los planes y programas de estudio, en coordinación con la instancia institucional, con el propósito de que sean acordes con el perfil del egresado de cada una de las carreras del cual se pretende responda a las necesidades que requiere una sociedad cambiante. La academia promueve y desarrolla la creación de materiales didácticos diversos para mejorar la enseñanza. Así mismo se elaboró: el programa de matemáticas básicas, se elaboran reactivos de opción múltiple que se utilizan para evaluar objetivamente, se aplica el examen de matemáticas básicas tipo departamental, y se ha editado el libro de “Matemáticas Básicas, Aplicaciones”, que está organizado en lecciones, donde cada lección cubre un contenido principal y uno o más contenidos relacionados, correspondientes al plan de estudios de la UAT. Los contenidos tratados en cada lección quedan explícitos desde el inicio, tanto para el profesor como para el alumno. Las lecciones tienen un alto grado de autonomía, de tal manera que el profesor puede determinar la secuencia general de los temas del curso, eligiendo para ello el orden conveniente de las lecciones y la guía de problemas resueltos, “Matemáticas Básicas. Aplicaciones”.

Con la formación de la academia de matemáticas se desarrollo un programa de estudio del curso de matemáticas básicas para todos los alumnos de la universidad y la edición del libro de matemáticas básicas con ejercicios propuestos y resueltos, intentado que sea, en la medida de lo posible, aplicaciones a la vida cotidiana ya que los profesores coinciden en que el alumno (y algunos docentes) conciben el conocimiento como una serie de recetas o fórmulas

que no son estimulantes para el proceso de aprendizaje, confinado en la memorización como única estrategia de aprendizaje. Con frecuencia, depende mucho de la figura del docente y no se responzabilizan de su proceso formativo; parece preocuparse más de la acreditación que del conocimiento. Con el libro anteriormente señalado, se trabajó para que los alumnos tuvieran un carácter autodidácta, por esta misma razón, se complementó con un video y un software interactivo. También se trabaja en un banco de reactivos propuestos por los profesores y del cual se elaboran y aplican exámenes tipo departamental en la universidad.
Se propuso la búsqueda de modelos que lleven al estudiante e interesarse por aplicar prácticamente los contenidos de la asignatura de matemáticas básicas, la cual forma parte del núcleo básico de formación universitaria en esta institución. El objetivo de este material es proporcionar al estudiante una secuencia de estudio en forma sintética, que enfatiza permanentemente una orientación práctica y que está encaminada a la solución de problemas a los que se enfrenta cotidianamente un profesionista, en los cuales utilice el lenguaje matemático desde su mismo planteamiento.

Bases Teóricas de la Propuesta

La serie Matemáticas Básicas. Aplicaciones, pretenden auxiliar al profesor en la tarea de introducir al alumno (primeros semestres de la licenciatura o ingeniería), en el estudio *razonado* y *significativo* de las matemáticas. Los autores se basan en el reconocimiento de que el alumno construye sus propios a partir de dos condiciones: Sus conocimientos previos, ya sean formales o producto de sus experiencias cotidianas y situaciones que despierten el interés del joven porque le plantean un reto intelectual cuya solución está a su alcance.

La resolución de problemas constituye un acercamiento a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, y de las ciencias en general, que ha sido estudiado por investigadores de todo el mundo; se reconoce hasta el momento como un método eficaz para propiciar un aprendizaje efectivo, de largo plazo y susceptible de extender y aplicar en situaciones muy diversas.

Referencias bibliográficas

Díaz Barriga, F. & Hernández R. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: McGraw-Hill.

Cantoral, R. et al. (1990b). *Calculus-Análisis: Una revisión de las investigaciones recientes en educación*. En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán & C. Imaz (Ed.), *Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* 2(1): 55-69. Cuernavaca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Misión XXI (2000). *Plan de Desarrollo Institucional*. Universidad Autónoma de Tamaulipas.

Millenium III (2004). *Plan de Desarrollo Institucional*. Universidad Autónoma de Tamaulipas.

Ornelas, C. (1995). El *sistema educativo mexicano: La transición de fin de siglo*. México: Fondo de Cultura Económica.

Pimm, D. (1991). *El lenguaje matemático en el aula.* Ministerio de educación y ciencia. España: Ediciones Morata.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores.* Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav-IPN, México.

LAS EXPLICACIONES DE LOS PROFESORES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR. UN ESTUDIO DE LA SEMEJANZA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

Hermes Nolasco Hesiquio, Santiago R. Velázquez Bustamante
CIMATE, Facultad de Matemáticas, UAG (México)
nolascohh@hotmail.com

Campo de investigación: formación de profesores. Nivel educativo: medio
Palabras clave: semejanza, contrato didáctico, explicaciones

Resumen
Esta investigación se propone responder a interrogantes iniciales que surgen en torno al planteamiento y ejecución de programas de actualización y capacitación, con la intensión de contribuir, en buena medida, a enriquecer nuestro conocimiento de lo que ocurre en el aula. En lo particular, centramos la atención en el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas cuando se pretende introducir conceptos geométricos, específicamente la noción de semejanza en el nivel medio superior. Consideramos un modelo de investigación cualitativa, basada en el método etnográfico que toma a la observación como técnica de registro. Los participantes en la investigación son profesores en servicio del nivel medio superior.

Introducción

En los últimos años, se ha incrementado notablemente el número de investigaciones que se han ocupado de estudiar la práctica del profesor de matemáticas. Con objetivos muy distintos. Algunas de éstas investigaciones están orientadas a la formación permanente de profesores, realizadas por el grupo de Cooney, (Cooney, 1984 y 1994; Jones, Anderson y Cooney, 1986; Brown y Cooney, 1985; Wilson, 1994). Estas investigaciones observaron y entrevistaron a los sujetos varias veces a lo largo de un período. Considerando como variable la actividad del profesor (Cooney, 1984), para inferir las concepciones en acción. Las investigaciones se complementan con estudios de casos.
Dentro las investigaciones que se vienen desarrollando en los últimos años sobre la formación de profesores (Llinares, 1998), existen trabajos centrados en los profesores en formación (Castro y Castro 1992; Llinares, 1993; Azcárate, 1996; Blanco, 1997; Contreras y Climent, 1999; Hernández, Palarea y Socas, 2000; Contreras y Blanco, 2002; Flores, 1998). Algunas otras están orientadas a identificar la influencia de los diferentes dominios del conocimiento del profesor en relación con la práctica (Ball, 1991; Escudero y Sánchez, 1999). Algunos trabajos adoptan un carácter más sociocultural, partiendo de una perspectiva de la enseñanza que "implica comprender y negociar significado a través de la comunicación". Estos trabajos han tratado de describir e interpretar la actividad de los profesores, buscando regularidades en las interacciones que desarrollan profesores y alumnos en la práctica diaria (Wood, 1995).
Con lo mencionado anteriormente nos ofrece un marco general para situar nuestra investigación, que se inscribe en la línea de investigación formación de profesores y en lo particular centramos la atención en el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas cuando se pretende introducir conceptos geométricos y específicamente la noción de semejanza en el nivel medio superior.
Comprender la práctica docente de los profesores constituye un vasto campo de investigación para la didáctica, puesto que los programas educativos son instrumentados por estos sujetos, cuyas experiencias van conformando día con día creencias y maneras de actuar, a partir de las cuales interpretan las propuestas de trabajo y organizan sus actividades. Por tanto, estudiar la práctica docente de los maestros permite, anticipar sus formas de proceder frente a sus

alumnos y ofrece información relevante para diseñar los programas de actualización pertinente a los esfuerzos institucionales que promueven su actualización y superación profesional.
En nuestra investigación entendemos que se deben hacer estudios de las competencias iniciales de los profesores e identificar las necesidades de capacitación estén orientadas al desarrollo didáctico de los docentes a partir de que reconozcan sus necesidades académicas y se decidan a participar en un programa permanente de capacitación (Velázquez, et. al. 2002 y 2005; Nolasco, 2003). Esta forma de entender la formación de profesores de matemáticas es un marco de referencia en el que situar nuestra investigación en relación a ese aspecto.
El trabajo de tesis de maestría *"Una propuesta para la enseñanza de la geometría de la educación primaria"* (Nolasco, 2003), y otros trabajos de investigación desarrollados dentro de nuestro grupo de investigación[1]. Nos han aportado además información relevante sobre la formación de maestros en nivel medio superior. El proyecto, *el desarrollo de habilidades matemáticas y la formación de profesores de educación secundaria*, uno de los objetivos fue analizar el estado de desarrollo de las habilidades matemáticas en profesores de educación secundaria y a la vez proponer un sistema de situaciones didácticas para ser aplicadas en cursos de formación y actualización de profesores. El proyecto, *programa de capacitación y actualización para profesores de matemáticas en el Nivel Medio Superior en Guerrer*o, en este estudio se hace un diagnóstico del desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas de los diferentes subsistemas del Nivel Medio Superior que asegura la caracterización de su perfil académico real y el perfil académico deseable de parte de los profesores. La caracterización de ambos perfiles se hace considerando la formación matemática, didáctica y de utilización de las nuevas tecnologías, con fines de detectar necesidades de capacitación a los profesores de matemáticas en el Nivel Medio Superior en le Estado de Guerrero.

El Problema de Investigación

Nuestra investigación parte de la problemática general de la práctica del profesor y se centra en el caso particular de la enseñanza de la noción de semejanza en la educación medio superior. Tomando como marco teórico fundamental la teoría de situaciones didácticas desarrollado por (Brousseau, 1972), nuestra problemática queda inscrita dentro del estudio de las interacciones desde la perspectiva del contrato didáctico situados en un contexto.
Un obstáculo en la evolución del concepto de semejanza ha sido la relación entre los aspectos figurativo y numérico (Escudero, 1999). La articulación de ambos registros y el peso que tienen cada uno de ellos en el tratamiento del tema (Lemonidis, 1991) es una de las componentes importantes que se deben tener presentes a la hora de considerar la semejanza como objeto de enseñanza aprendiza.
Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza, desde los que, a su vez, se pueden determinar tres aproximaciones a ella que creemos que deben tenerse presentes cuando se le considera como objeto de enseñanza:

[1] Docentes e investigadores del Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, que han desarrollado diversos proyectos de investigación orientados a la formación y actualización de profesores en servicio de educación secundaria y bachillerato (98-SIBEJ-03024, CONACYT), (GUE-2002-C01-4725-CONACYT).

a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.
b) Transformación geométrica vista como una herramienta. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en el mismo. Se utiliza la semejanza como una herramienta en la resolución de problemas gráficos.
c) Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la trasformación resultante de dos a más transformaciones.

Éstos son algunos de los referentes que consideraremos en el análisis de la semejanza cuando un profesor pretende abordar este contenido matemático en la escuela.
Para ello centramos nuestro interés: En querer comprender en está investigación cuál es el papel que juegan las explicaciones que se establecen entre profesor, alumno y contenido curricular al momento que interactúan alrededor de tareas que hacen necesaria la creación, la negociación, el intercambio y la difusión de conocimiento matemático.
El objetivo principal de la investigación es el comprender cuál es el papel que juegan las explicaciones al introducir la noción de semejanza en una situación de enseñanza particular. Observaremos y analizaremos las interacciones que se producen, el papel del profesor y el efecto de sus explicaciones, el papel del estudiante y su compromiso con el saber, las relaciones entre maestros y alumnos que conciernen a un saber regulado por la noción de contrato didáctico.
Preguntas de investigación:

¿Qué papel explicativo juega la noción de la semejanza en el discurso del profesor?
¿Cuáles son los efectos de las explicaciones del profesor en los estudiantes?
¿Cuál es el papel del estudiante y su compromiso con el saber?

Perspectivas Teóricas

La perspectiva teórica que nos va permitir estudiar las interacciones en la clase, es la perspectiva emergente descrita por Cobb y Yackel (1996) que contribuye a nuestras interpretaciones de los eventos en salón de clases, porque este modelo reconoce recíprocamente las influencias del profesor y estudiante, individual y colectivamente en la enseñanza en el contexto social del salón de clases.
Otro elemento que vamos a considerar es la teoría de las situaciones didácticas iniciada por Brousseau, en 1972, cuyo principio metodológico fundamental es *definir un conocimiento matemático mediante una situación*, esto es, por un autómata que modele los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima (Brousseau, 2000).
De este modo, el objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas es la *situación didáctica* (Brousseau, 1982, citado por Gálvez), que se define como un objeto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio –que comprende, eventualmente, instrumentos u objetos– y un sistema educativo representado por un profesor, con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Estas relaciones se establecen a través de una negociación entre maestros y alumnos, cuyo resultado ha sido designado como *contrato didáctico*, que se puede caracterizar como "el conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro" (Brousseau, 1984, 1986). Por otro lado, la noción de *contrato didáctico* regula las relaciones entre maestros y alumnos que conciernen a un saber, estableciendo derechos y obligaciones de unos y otros en relación con cada contenido escolar (Chevallard, 1988, citado por Ávila).

En nuestro caso particular estamos estudiando un fenómeno didáctico en el nivel medio superior mediante una aproximación sistémica, ya que consideramos al sistema didáctico (Maestro-alumno-saber) en la situación afectiva en la que se encuentra ubicado: la situación escolar, los sujetos en interacción (maestro y alumnos) son sujetos situados en un contexto (la institución escolar) que determina expectativas, códigos y comportamiento específicos.

Hemos utilizado los trabajos de Herbst (2002 y 2006) con relación al contrato didáctico para ayudarnos analizar las decisiones de los maestros en el sentido de la responsabilidad del maestro en ayudar a los estudiantes apropiarse de un cierto saber, en algunos instantes las decisiones pedagógicas del profesor dificultará algunos estudiantes cumplir sus responsabilidades dictado por el contrato.

Esta investigación propone explicar las interacciones (maestro y alumnos) desde la noción de contrato didáctico. Consideramos que, uno de los objetivos del docente es hacer comprender a los estudiantes los conocimientos matemáticos. Entre los esfuerzos que el profesor emprende son las *explicaciones.*

Por explicación se entiende aquellos recursos discursivos que tienden a comprender una noción o idea, un hecho, objeto, fenómeno (Reséndiz, 2004). La explicación es un medio explícito que dispone el profesor o el estudiante para unir o enlazar las ideas. La explicación es uno de los medios que utiliza el profesor para hacer comprender o "dar sentido", es el objeto de una comunicación, de un debate, o de una discusión.

Metodología

La investigación está enmarcada en el paradigma cualitativo, basada en el método etnográfico que toma a la observación como técnica de registro (Erickson, 1986). El enfoque etnográfico permite obtener información relevante del contexto de la clase que es relevante para su interpretación. Esta perspectiva teórica permite realizar un detallado estudio secuencial de las situaciones de enseñanza (Cantoral y Reséndiz, 2003). Lla perspectiva etnográfica que consiste en describir y reconstruir analíticamente los escenarios y grupos que protagonizan y participan de las prácticas educativas, en sus diversas formas, poniéndolas en un registro lingüístico que permita a sus lectores representárselos tal como apareció ante la mirada del investigador.

Los estudios de caso nos permitirán profundizar en aspectos particulares de la conceptualización de los profesores; para comprender mejor la complejidad del problema, para un mejor análisis nos apoyaremos con la información proveniente de las entrevistas personales; producciones escritas elaboradas por los profesores, observaciones de clase y notas de campo.

La información que se desprenda de la experimentación será obtenida por diversos medios, el más importante de ellas es la observación directa. Esta obtención de información se verá apoyada eventualmente por grabaciones y filmaciones. En la recopilación de los significados que se les dan a las actividades se obtendrá una copia de los apuntes, bocetos y trazos realizados en su cuaderno durante las sesiones de trabajo, como evidencias escritas que nos permita completar un registro de observación bien estructurado, y el análisis de los protocolos y de los materiales recopiladas.

Referencias Bibliográficas

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Educación Matemática 13* (3), 5-21.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática educativa*, 6(2), 133-154.

Cooney, T. (1984). The contribution of theory to mathematics teacher education. Paper prepared for sessions on Theory in Mathematics Education. V ICME, Adelaida.

Cooney, T. (1994). Research and teacher education: in search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 608-636

Brown, C. y Cooney, T. (1985). The importance of meanings and milieu in developing theories of teaching mathematics. Proceeding of the second TME–Conference Bielefeld.

Brousseau, G. (1986a). Fondaments et methods de la didactique des mathématiques, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática 12* (3), 25-45.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and contruction of situations in teaching and learning mathematics. In H. Steiner (Ed.), Theory of mathematics neducation (pp. 110-119). Occasional paper 54. Bielefeld, Germany: IDM.

Blanco, L. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Cuadrante. Revista teórica de investigaçao,* 6(2), 45-56.

Castro, E. y Castro, E. (1992). Concepciones sobre área y perímetro; volumen y capacidad detectados en profesores en formación. *Revista educación*, 6, 197-2006.

Contreras, L. y Climent, N. (1999). La formación de profesores de matemáticas. Estado de la cuestión y líneas de actuación. *Servicio de publicaciones de la Universidad de Huelva.*

Contreras, L. y Blanco, L. (2002). Aportaciones a la formación de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente. *Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Cáceres.*

Ericsson, F. (1986). Métodos cualitativos en investigación sobre la enseñanza. En Wittrock, (Ed.). *La investigación de la enseñanza II*. (pp. 195-301). Barcelona: Paidós.

Escudero, I. (1999). Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje. *Quadrante, Revista teórica e de investigaçao*, 8, 85-110.

Escudero, I. y Sánchez, V. (1999). The relationship between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity. *Proceeding PME 23, Vol II (pp. 305-312),* Haifa, Israel.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 39-50). Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador.

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(3), 176-203.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 313-347.

Lemonidis, C. (1990) Une analyse de la complexité cognitive de la notion d`homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 295-324

Llinares, S. (1993). Aprender a enseñar: reflexiones sobre la formación inicial de profesores de matemáticas. *Revista de enseñanza universitaria,* 5, 111-126.

Llinares, S. (1998). La investigación sobre el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula 10*, 153-179.

Nolasco, H. (2003). *Una propuesta para la enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Tesis de maestría no publicada. CIMATE, México.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México.

Velázquez, S, et al, (2005) *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior. Una experiencia de capacitación de profesores*. México, D.F: Santillana

Velázquez, S. Flores, C. García, G. Gomez, E Nolasco. H. (2001) *El desarrollo de habilidades matemáticas en situación escolar*. México. D.F: Grupo Editorial Iberoamerica.

Yackel, E. Y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

Wilson, M. (1994). One preservice secondary teacher`s understanding of function: the impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(4), 346-370.

Wood, T. (1995). An emerging practice of teaching. En Cobb & Bauersfeld (Ed.) *Mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp.203-227). NY: Lawrence Erlbaum Associates.

COHERENCIAS COGNITIVAS VS MATEMÁTICAS EN EL ESTUDIO DEL CAMBIO

Leonora Díaz Moreno
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. (Chile)
leonoradm@gmail.com
Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística. Nivel educativo: medio
Palabras clave: variación, tiempo, entendimientos psicosociales

Resumen
Se indaga en los desplazamientos entre herramientas de comunicación que ponen en juego profesores a la hora de comunicar qué y cómo cambia en una situación, en el marco de una línea de investigación en Pensamiento y Lenguaje Variacional (Proyecto Fondecyt Nº1030413 y Proyecto Diumce 06/07). Adscribimos a una mirada sistémica en la que entendemos a las matemáticas como una actividad humana en donde cobra vital importancia la persona haciendo matemáticas y no sólo el producto matemático. Por ello resulta relevante considerar -en la praxis educativa- las negociaciones y búsqueda de consenso entrelazadas éstas, con las acciones cognitivas de la persona al momento de enfrentarse a la solución de un problema. Asumimos una naturaleza de la noción de variación como red semántico-operacional transversal, que imbrica distintos contenidos escolares de ciencia experimental y de matemática, particularmente aquellos de tiempo y velocidad. Entendemos al tiempo cotidiano formado por una red compleja de intencionalidades y coordinaciones que se estructuran a partir de las necesidades de coordinación con lo otro, con los otros y de las proyecciones intencionales hacia un futuro y un pasado, y, al tiempo matemático en su calidad de parámetro y figurado sobre la base de la metáfora de una distancia horizontal. A continuación se analizan, desde ese marco conceptual, las herramientas a que recurren profesores para comunicar cambios en una situación específica desarrollada en el marco las actividades del Proyecto de Investigación *Las representaciones docentes del Cambio*.

Representaciones cotidiana y matemática del tiempo

Tiempo, en una primera acepción según la Real Academia de la Lengua, es una noción primitiva - algo análogo a la noción de punto en geometría euclidiana - no derivada de otras que permitan definirlo y ligada simbióticamente desde un inicio a cambio y a movimiento. En una segunda acepción, tiempo refiere a una magnitud física que permite ordenar la secuencia de los sucesos, distinguiendo entre éstos, sucesos anteriores, simultáneos y posteriores (el número del movimiento en el análisis fisicista de Aristóteles). Por su parte, los orígenes del sentido del tiempo en las estructuras de nuestro sentido común, se remontan a la etapa prebiológica, en la que ya existían procesos cíclicos, los ciclos de Morowitz en el marco de un ambiente lleno de periodicidades (noche/día, verano/invierno, bajamar/pleamar, entre otros). Esos ciclos imprimieron, desde sus orígenes, conductas rítmicas a los organismos, y los seres que lograron adecuarse al ciclaje temporal tuvieron ventajas evolutivas (Díaz, 2005).
El tiempo se puede detener o enlentecer en la experiencia de la psique humana. Repara Einstein: "La sensación *subjetiva* de un tiempo psicológico nos permite ordenar nuestras impresiones y decir que un evento precede a otro. Pero utilizar un reloj para conectar cada instante del tiempo con un número, o considerar el tiempo como un continuo unidimensional, es desde ya un capricho" (cita en Díaz, 2005, pp. 8-9). Levanta Einstein la noción de "punto-universo" para un punto espacial observable en un punto del tiempo y resignifica al "universo", entendiéndolo como la totalidad de los puntos-universos al que referimos hoy como el *espacio-tiempo*. De este modo entonces, de existir una realidad, ubicada allí afuera, esta es un continuo de cuatro dimensiones, donde *tiempo y espacio* están unidos indisolublemente constituyendo una realidad independiente. Bergson critica este tiempo

especializado de la relatividad como no apto para la vida. Con sus reflexiones inaugura al sujeto psicológico y da inicio a la psicología del tiempo.

La metáfora del río dota de significado al transcurrir del tiempo en la estructura del sentido común, semantizando al tiempo como una corriente en la que –por una parte- en todo momento el futuro vendría al presente y se alejaría al pasado, y –por otra parte- en todo momento se experimenta un avance progresivo desde el momento presente hacia el futuro. Toboso (Carrasco, 2006) revisa y mejora esta metáfora: más que un río lineal en que el flujo es constante, tenemos un vértice, una especie de recodo que articula los elementos constitutivos de la experiencia del tiempo en el sujeto, como son *el ahora* y *el momento presente*. El ahora refiere a la condición de experimentar el tiempo de una manera permanente: "(el sujeto se experimenta como) siempre uno y el mismo, y en ello radican la simultaneidad del mundo y la posibilidad de que lo existente se encuentre en el mismo ahora actual" (cita en Carrasco, 2006, p. 44). Nos reconocemos en esta faceta temporal del ahora al experimentarnos en esencia nosotros mismos, aún cuando instante a instante a su vez, vayamos cambiando. Por su parte, el momento presente es este momento fugaz en el que somos distintos al momento anterior, aún cuando seamos en esencia la misma persona. En esta segunda faceta de la vivencia de la temporalidad, nada cesa de cambiar y cada momento es diferente al anterior, marcando el cambio a la vez que dando sentido al pasado y al futuro. No se trata de un flujo continuo sino que se explica a partir de un vértice en un tal flujo. Vértice que marca a la vez la distinción y la relación entre la visualización psicológica de futuro y de pasado. El *ahora* se concibe como ese vértice que se mantiene fijo mientras la corriente temporal fluye. Y, a la conciencia de ese fluir temporal que nos cambia, se la concibe como el *momento presente* (ver figura).

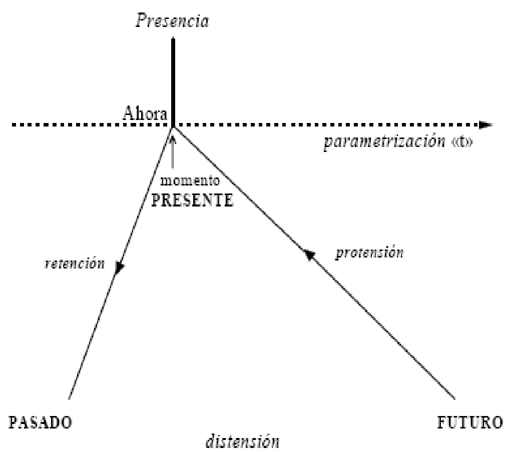


Fig. Estructura proyectivo-paramétrica de la vivencia del tiempo

Complementa Toboso su interpretación de la vivencia de la temporalidad –intrapersonal, situada en el sujeto- con ese tiempo cronológico que hoy medimos con relojes, tiempo que distingue las relaciones de anterioridad, simultaneidad y posterioridad entre los sucesos por lo que da paso a un tiempo metrizado, un tiempo que no es consecuencia de subjetividades presentes en el sujeto ante el acontecer de su vida sino que es una construcción social – interpersonal, situada fuera del sujeto. Este tiempo metrizado carece de la faceta de distensión temporal del tiempo subjetivo, constituyéndose en una superposición de estados presentes que se puede recorrer -como en una línea recta- hacia el pasado y hacia el futuro permitiendo una parametrización temporal de los fenómenos "en términos de la variable t como una representación concreta de ese tiempo `deshumanizado` al que aludiera Bachelard" (cita en Carrasco, 2006, p.) Esta concepción parametrizada del tiempo es una –entre otras- herramientas para la construcción de lo social posibilitando la coordinación de acciones entre otros aspectos. Este tiempo métrico da paso a la variable paramétrica t, variable que informa el sentido de aumento o disminución de la variable algebraica t. Se conforma entonces la experiencia personal del tiempo mediante la síntesis integradora de ambas dimensiones.

La figuración del devenir del tiempo matemático

Oresme es un hito crucial del proceso de construcción de herramientas de visualización de variaciones que inicia en la Edad Media. Levanta como instrumento visual, *un dibujo de la manera en que las cosas varían*, para responder a la pregunta por la figuración del devenir de las cualidades. Destacan en el Renacimiento Descartes quien -sobre la base de la geometría analítica- aporta visualizaciones de variaciones como secciones de curvas geométricas. Y Newton quien construye el cálculo a partir de estrategias geométricas sobre curvas, que son trazadas por un punto que se desplaza. Carrasco (2006) ilustra con los asertos de Gauss (siglo XIX) de que "*la matemática es la ciencia del ojo*" (op. cit. p. 15) y de Hilbert (principios de siglo XX) de que "*las figuras geométricas son fórmulas gráficas y ningún matemático puede prescindir de ellas*" (op. cit. p. 15) como esa figuración, naturalizada, se configura actualmente por un nutrido conjunto de herramientas que forman parte de la utilería cotidiana de la actividad matemática. En particular el aprendiz podrá acceder al pensamiento y lenguaje variacional sobre la base del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados (Cantoral y Farfán citados por Carrasco, op.cit.).

¿Cómo figuró Oresme?

La idea básica de Oresme es que toda cualidad que puede adquirir sucesivamente diferentes intensidades puede ser representada mediante una línea recta levantada verticalmente sobre cada punto de la entidad afectada por dicha cualidad. Sobre una línea horizontal se representa la extensión de esa entidad en la que se estudia la cualidad y en cada punto de esa línea, se levanta una recta vertical cuya altura sea proporcional a la intensidad de la cualidad. De ahí resultó una figura geométrica que ayuda a comprender con facilidad las características del fenómeno que se estudia, ya que, tal como Oresme mismo refiere, nuestro conocimiento se apoya en los sentidos y es ayudado mediante el recurso a la imaginación. La convicción que guió a Oresme es que todo lo que puede ser medido puede ser imaginado a la manera de una cantidad continua, tal como las líneas y las superficies (Artigas, 1989). Por eso, las intensidades que pueden ser adquiridas de modo sucesivo pueden ser imaginadas mediante una línea recta elevada verticalmente sobre cada punto del "lugar" o entidad al que afectan, de manera que la medida de esas líneas proporcionará la medida de las intensidades. Oresme inaugura así, la posibilidad de figurar el tiempo en un segmento horizontal.

El cómic, figuración cotidiana del tiempo

A continuación revisamos producciones fruto de llevar a cabo una actividad - en el marco de un curso en Relme 20 y que a su vez forma parte de las actividades del Proyecto de Investigación *Las representaciones docentes del Cambio* (Díaz, Ávila y Carrasco, 2005)- que indaga acerca de las herramientas de comunicación a que recurren profesores para comunicar cambios en una situación específica de cambio. En la actividad, la consigna al grupo fue que observaran atentamente los cambios presentes en ella para luego comunicar, por medio de un papelógrafo, a los participantes de otro grupo lo ocurrido y de modo que ellos se formen una

idea lo más cercana posible de lo sucedido para que, sin haberla presenciado, simulen la situación. El grupo elabora luego un papelógrafo para comunicar los cambios que han observado. Pueden usar relatos, gráficos, dibujos, tablas, entre otras herramientas de comunicación no oral. La experiencia procura una vivencia de lo qué varía y cómo varía en una situación de cambio de estilo cualitativo. Esta vivencia psicológica del tiempo se asume necesaria para el reconocimiento del tiempo como variable que covaría en una situación de cambio. En una primera actividad un grupo, luego de escuchar un audio, levanta sus registros de comunicación de lo observado y en una segunda, otro grupo, observa inflar dos globos.
Ambos grupos recurren a los cómics para comunicar cambios en las situaciones. En términos de Gubert (1987; p.222): "*Los cómics iconizan la temporalidad en forma de espacios cambiantes construidos por imágenes icónicas fijas*" Se trata de una forma de comunicación que construye su articulación narrativa por medio de imágenes fijas y textos complementarios. Habrá tantas escenas fijas como las "omisiones/novedades" que por un lado separan y por otro liguen a dos eventos consecutivos. Quien lee construye su conciencia de temporalidad atendiendo mentalmente a la sucesión de los hechos o eventos, su duración y la duración del intervalo entre ellos -a través de la omisión/novedad que separa y enlaza a dos dibujos consecutivos. Entonces el tiempo de la actividad será la agregación de la duración de cada evento y la duración de cada intervalo entre ellos, levantándose una estimación cualitativa de tiempos desde la conciencia temporal que favorece el cómic.

Descripción del cómic del audio

		
Comenzamos a escuchar la percusión de un tambor muy rítmico. El tambor toca un par de compases y se incorpora un cencerro.	Luego se agrega una guitarra siguiendo el ritmo de los demás instrumentos solo con punteos.	Finalmente se agrega el sonido de una flauta imitando a un pájaro, generando un ritmo que invita a bailar.

En la primera imagen concurren un rostro sonriente, de gran oreja, una radio que emite ondas y una "nube" –icono gráfico- que informa que en la vivencia intrapersonal de quien escucha están concurriendo a su vez, el sonido de un tambor, las corcheas y negra adjetivando a ese sonido de musical y un sujeto en movimiento indicado por dos segmentos curvos a cada lado de su figura. En la segunda se añaden a los elementos anteriores, un cencerro en la nube. En la tercera imagen aparece una guitarra y el sujeto en la nube tiene una de sus piernas más arriba respecto de la imagen anterior. Si bien hay tres textos y tres imágenes a las que complementan, una secuencia más ajustada entre imágenes y textos daría un conjunto de cuatro imágenes separando del texto que acompaña a la primera la frase *y se incorpora un cencerro* a la que corresponde la segunda imagen, quedando el cuarto texto *Finalmente se agrega el sonido de una flauta imitando a un pájaro, generando un ritmo que invita a bailar,* con su imagen por hacer. Los textos enriquecen la secuencia de eventos que narran las imágenes. En el primer evento el sujeto inicia escuchando la percusión de un tambor *muy* *rítmico (que) toca un par de compases*. Con esto nos informa la duración de dos compases para el primer evento secuencial, duración que no informa para los siguientes. Estos dos compases marcarán el ritmo y los tiempos de ingreso de los demás instrumentos. El segundo evento ocurre por integrarse el sonido de un cencerro. El evento tercero se constituye con la integración del sonido de una guitarra *siguiendo el ritmo de los demás instrumentos solo con punteos*. El cuarto evento inicia al agregarse el sonido de una flauta, *imitando a un pájaro, generando un ritmo que invita a bailar*. Por su parte, cada uno de los tres intervalos dura el instante entre la escucha de un conjunto de sonidos y la llegada de uno nuevo que se suma a los anteriores. Entonces la estimación cualitativa de tiempos arroja del orden de medio minuto, cifra cercana a la duración del audio en la actividad.

TABLA Estimación cualitativa de tiempo caso del audio							
Secuencia duración de eventos “d” e “I” longitud de intervalos entre eventos							t est.
Evento_1	Intervalo_1	Evento_2	Intervalo_2	Evento_3	Intervalo_3	Evento_4	**Σ**
2 compases	1 instante	1 compás	1 instante	2 compases	1 instante	2 compases	**di +I_j**
8 seg.	1 seg.	4 seg.	1 seg.	8 seg.	1 seg.	8 seg.	**31 seg.**

Descripción del cómic de los globos

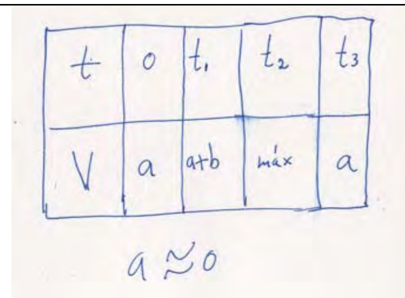
En su primera producción escrita el grupo levanta dos cómics para narrar lo acaecido, dibujando la cara del monitor y de los globos según una sucesión de eventos. Se acompaña cada escena con una descripción verbal. En el cómic del globo amarillo, la primera imagen muestra al globo en estado inicial. El texto complementa que es de color amarillo y está desinflado. Enseguida muestra la caricatura del monitor y un globo inflado sujeto a su boca, añadiendo que lo infló de forma continua. La tercera imagen muestra al globo en un estado final equivalente al inicial y el texto añade que lo desinfló *en el mismo tiempo aproximadamente*. Aunque no informa cuánto tiempo, se infiere que inflado y desinflado ocurren de modo semejante, con iguales duraciones. Cada uno de los tres intervalos da cuenta de los instantes requeridos para lograr el estado de la imagen siguiente. Una estimación cualitativa de tiempos arroja 15 s., cifra cercana a lo ocurrido (la estimación de inflado-desinflado del globo verde con 5 eventos es de 21 s.).

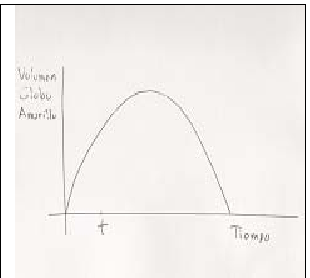
Globo amarillo	Globo verde

TABLA Estimación cualitativa de tiempo de inflado y desinflado del globo amarillo					
Secuencia duración de eventos “d” e “I” longitud de intervalos entre eventos					t est.
Evento_1	Intervalo_1	Evento_2	Intervalo_2	Evento_3	**Σ**
1 tiempo	6 instantes	1 tiempo	6 instantes	1 tiempo	**di +I_i**
1 seg.	6 seg.	1 seg.	6 seg.	1 seg.	**15 seg.**

El grupo continúa cuando uno de sus integrantes expresa oralmente *tenemos que ver qué contenidos matemáticos están en la situación*. Entonces construyen tablas en las que usan símbolos para indicar órdenes de magnitudes significativas al proceso sin recurrir a números y hacen gráficas para cada caso. Podemos establecer una coordinación entre escenas del cómic y los puntos de la tabla. Con las gráficas como herramientas de comunicación refuerzan los instrumentos del cómic y de tablas antes descritos.

e_0	Tomó globo amarillo desinflado
e_1	Infló de manera continua el globo
e_2	(Terminó de inflar el globo amarillo)
e_3	Desinfló globo amarillo en el mismo tiempo aproximadamente





Coordinación de registros de comunicación caso globo amarillo: Escenas Cómic - Puntos Tabla - Gráfico

A modo de cierre

El tiempo personal recuperando lo retenido de la experiencia y su figuración en cómics, el tiempo matemático y su figuración en una recta horizontal se hicieron presentes en la actividad de los globos. Cómics que permiten construir la conciencia de temporalidad, atendiendo mentalmente a la duración de los eventos ilustrados en una secuencia de escenas y a la duración del intervalo entre dos eventos. Sobre esta base se levantan tablas de estimación cualitativa de tiempos implicados en la actividad, eslabón que aporta significado a las tablas dibujadas por el grupo y desde las que se desplaza a las gráficas. El grupo figura al tiempo matemático en la recta horizontal de sus gráficas.

Referencias bibliográficas

Artigas, M. (1989) *Nicolás Oresme, Gran Maestre del Colegio de Navarra, y el origen de la ciencia moderna.* Publicado originalmente en *Príncipe de Viana* (Suplemento de Ciencias), año IX, nº 9, Suplemento Anual 1989, pp. 297-331. Tomado del sitio http://www.unav.es/cryf/nicolasoresme.html#texto15, con fecha 12 de octubre de 2004.

Carrasco, E. (2006) *Interpretación y Construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada. CICATA, México

Díaz, L. (jul.; 2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. En *Relime, Vol.8, Nº2*. Ciudad de México.

Díaz, L.; Ávila, J. & Carrasco, E. (2005) *Las representaciones docentes del Cambio* Proyecto de Investigación años 2006-2007. UMCE. Santiago de Chile.

Díaz, L.; Gutiérrez, E.; Ávila, J. & Carrasco, E. (2006) *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos.* Informe Final Proyecto Fondecyt Nº 1030413. Santiago de Chile.

Gubert, R. (1987) *La mirada opulenta: exploración de la iconósfera contemporánea*. GGMass Media. Barcelona.

LOS MÉTODOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. UNA EXPERIENCIA EN EL CONTEXTO HISTÓRICO-CULTURAL DE LOS ALUMNOS DE LA CARRERA DE EDUCACIÓN BÁSICA Y DE EDUCACIÓN MEDIA

Matías Pérez Carmen Evarista, Lesly A.Mejía R.
Universidad Autónoma de Santo Domingo. (República Dominicana)
carmen.matias@verizon.net.do, evaristam@gmail.com
Campo de investigación: formación de profesores. Nivel educativo: básico, medio
Palabras clave: maestros, didáctica, matemática, métodos, contexto

Resumen
A partir de la caracterización del contexto histórico cultural de la educación en América Latina, se describe la experiencia realizada en el curso de Didáctica Especial de la Matemática y Practica Docente III (PED.425), de la Universidad Autónoma de Santo Domingo. La experiencia es sustentada didácticamente en grupo de principios didácticos que se describen en la propuesta.
Tomado en cuenta las exigencias actuales del contexto histórico cultural de que la formación de maestros debe ser una educación en la vida, sustentada en la actividad docente y en la solución de problemas sociales, garantizando la integración de la teoría y la práctica, la integración de la escuela con la vida, el objetivo del trabajo es mostrar la necesidad de contextualizar los contenidos de los cursos de didáctica de la Matemática, para formar maestros comprometidos con la satisfacción de las crecientes necesidades sociales, acorde a los cambios sociales que el entorno competitivo demanda y a las exigencias actuales de la enseñanza de la Matemática en la República Dominicana.

Contexto histórico cultural

La situación actual en América Latina está caracterizada por los cambios económicos, políticos y sociales, gestados en los últimos años, en el ámbito internacional y nacional, que han impactado en la República Dominicana a la formación de maestros de Educación Básica y de Educación Media.
Como referencia teórica, para la caracterización del contexto Histórico-Cultural de los Alumnos de la Carrera de la Educación en América Latina, se considera fundamentalmente el trabajo de Crespo, M. Titulado "Las transformaciones de la Universidad ante el siglo XXI" (Crespo, M. 1997), ellos precisan que la educación en América Latina presenta un panorama influenciado por varios factores entre los que pueden destacarse como fundamentales: 1. La sociedad del conocimiento, caracterizada por el aumento del valor agregado al producto y no la materia prima, ni la mano de obra. 2. La globalización neoliberal, que combina: competitividad, desregulación y flexibilización. 3. La internacionalización de las profesiones y el desarrollo de "Normas Internacionales Mínimas de Profesionalidad". Estas normas definen el perfil profesional, que será valido en el ámbito mundial y la formación universitaria para hacerla homologable internacionalmente. 4. La competitividad entre los sistemas educativos, por gerenciar el conocimiento de punta. 5. El nuevo orden mundial basado en las civilizaciones, la política global, multipolar y multicivilizacional, genera el marco donde se hace necesario la solidaridad y la cooperación entre países culturalmente afines. 6. El nuevo papel de las universidades que desarrollan acciones para mercadear sus productos y participar en organizaciones internacionales, como redes de universidades, con creciente capacidad de lobbying que les permite posicionarse en el mercado de la educación superior.
La globalización neoliberal es un fenómeno que trae consigo la sustitución de los modelos de mercados nacionales por modelos internacionales, donde las naciones se insertan gerenciadas, no por sus necesidades, sino por las necesidades de dicho mercado internacional, para que cada nación produzca las magnitudes que éste requiere, es por eso que se impone e la formación de Maestros contextualizar los cursos de Didáctica de las Matemáticas.

El actual proceso de globalización se ordena, sobre la base de una mínima regulación del estado y una máxima competitividad de actores, grupos, empresas y/o instituciones. El estado facilita, compite y genera el marco necesario para satisfacer las necesidades funcionales del mercado.

Todas estas acciones se dan con un apoyo jurídico y de las políticas estatales; de apertura externa, de gasto público, de regulación del trabajo del capital, de ajuste, de desregulación, de ordenamiento financiero e impositivo, de seguridad.

El paradigma de la globalización neoliberal lleva implícita la estrategia de la competitividad, que se expresa en los distintos niveles territoriales, se produce entre naciones y al interior de estas, entre estados y ciudades, entre los distintos sectores y actores de la vida nacional y entre las universidades. La globalización implica a nivel universitario competir, aplicando políticas de mercadeo, para lograr la visión, atraer inversiones (del gobierno, de empresas e instituciones), mejorar las condiciones académicas, todo lo cual, supone que implica una mayor eficacia y productividad universitaria y contextualizar los contenidos de los cursos que se imparten en la formación de los profesionales.

Ferrer, M., plantea además, que la Revolución Científico-Técnica, como manifestación de la competitividad, está generando cuatro tipos de impacto: La destrucción de las barreras espacio-temporales como consecuencia de la revolución de los medios de la informática y comunicación, La coexistencia de procesos de valorización y desvalorización de especificidades locales a partir de las cuales se construye la competitividad entre naciones y las alianzas entre culturas afines, Fatalismo territorial (integración versus exclusión) que tiende a beneficiar un número limitado de regiones del mundo, con ambientes ricos en factores estratégicos para la expansión y la competitividad como acceso a información, innovación y al conocimiento, aspectos claves, que convergen en las Universidades, esta selectividad territorial se manifiesta, también al interior de los diferentes países, y por último, desbalance entre el desarrollo científico del país y el nivel de la tecnología importada, lo que representa un reto para las Universidades.

Otro antecedente teórico considerado es del Dr. Portuondo que plantea claramente que existen dos formas de actuación, con respecto a las reformas que hay que acometer, si una sociedad decide mejorar su actuación: el conformismo o prepararse en forma activa para el futuro "¿Cómo pueden los países prepararse mejor en el siglo XXI?. Nos enfrentamos a dos grandes dificultades que debe afrontar cualquier plan de reforma sistemática, las tendencias demográficas y medioambientales globales y el ritmo y la instrumentabilidad de las reformas desde un punto de vista práctico**"** ***(***Portuondo, P. Nani, G. 1998). La respuesta es clara y se viene planteando en las reuniones regionales de la CRESALC "La Universidad debe asumir el reto de ser pertinente socialmente, lograr la calidad necesaria, para preparar a la sociedad para que compita y salga victoriosa.

Para que las universidades latinoamericanas puedan cumplir la honrosa tarea que tienen asignada a la luz del siglo XXI, deben rescatar el tiempo perdido, por el no desarrollo de la función de investigación, además debe formar no sólo a los profesionales que el desarrollo demanda, sino debe, además, contextualizar los contenidos de los cursos que se imparten en la formación de los profesionales.

La universidad en este sentido debe asumir y liderar los procesos tendientes a mejorar los niveles de calificación y formación de la fuerza de trabajo profesional, brindar oportunidades para la formación en nuevas áreas y elevar la calidad de los niveles educativos.

En este contexto, la universidad asume un nuevo rol, que implica cambios en sus presupuestos teóricos y prácticos, para dar respuesta a los nuevos desafíos de la globalización. La

tecnología importada crea puestos de trabajos nuevos y elimina viejos; esto demanda un sistema nacional de formación y reeducación continua y requiere la alianza estratégica y la cooperación entre tres actores clave: universidad, sociedad y empresas, además la competencia demanda insertarle a la tecnología un valor agregado, para hacerla competitiva y esto demanda estudios profundos.
Lester Thurow, Profesor de Economía del Instituto Tecnología de Massachussets y autor de varias obras entre las cuales destacan: La Guerra del S. XXI y el Futuro del Capitalismo, durante su visita a Venezuela en 1996 alertó sobre un peligro inminente: "América Latina puede quedar fuera del juego en el siglo XXI... La gran cuestión a responder en América Latina, su gran problema, es la tremenda presión que existe sobre el sistema de educación. En el mundo existen 1,9 millardos de personas relativamente bien educadas, pero el problema de la región es que un gran porcentaje de su población no alcanza un nivel aceptable de educación, y por ello no están en capacidad de competir, sencillamente no pueden hacerlo..."
"Hay que hacer una distinción entre el gasto destinado al bienestar social (seguros de salud, pensiones, etc.) y aquel gasto social que es una inversión en educación y conocimiento. Si ustedes son un país pobre pueden darse el lujo de no asignar muchos recursos a las pensiones, por ejemplo, pero no pueden darse el lujo de no invertir una gran cantidad de dinero en educación, porque de esa manera no habrá ninguna posibilidad de competir en el siglo XXI..." (Álvarez, C. 1996).
A modo de conclusión del estudio de las teorías antecesoras, enumeraremos las exigencias para la educación: Competitividad, que implica egresados con independencia cognoscitiva y creatividad, Educación en valores para lograr que el estudiante este comprometido con la satisfacción de las crecientes necesidades sociales, Educación en la vida, en la actividad. en la solución de problemas sociales.

Experiencia en la enseñanza de "los Métodos en la enseñanza de la Matemática", en la Carrera de Educación Básica y de Educación Media de la Universidad Autónoma de Santo Domingo

La enseñanza "los Métodos en la enseñanza de la matemática", no puede ser alejada de la actividad de los futuros maestros (Bishop, A. 1999), más bien debe ser en la actividad y no como sumatoria de contenidos, como propone el modelo reproductivo de enseñanza. La misión de las Universidades es dirigir las acciones de los futuros maestros en su actividad transformadora, por lo que el debe formarse en esa actividad transformadora a través de la contextualización de los contenidos.
Es necesario lograr una base de conocimientos, pero el centro de la formación debe ser la propia actividad a través de la investigación del contexto donde tiene que producir ese maestro, para que el mismo pueda producir cultura transformando la realidad y transformándose a sí mismo acorde a las exigencias actuales que demanda el contexto donde actúa.
Principios didácticos que sustentan la propuesta (Álvarez, C. 1996):
Principio de la integración docencia - producción – investigación: El curso de Didáctica de la matemática se organiza de modo tal que incluya los componentes académico, laboral e investigativo de forma combinada y en la actividad del maestro, pero para que la actividad profesional sea profunda se hace necesario que lo académico y lo laboral se desarrolle a través de lo científico, por lo que es indispensable la integración de estos componentes. Este principio presupone que la práctica real de los profesores queda incluida como actividad académica del curso de Didáctica de la Matemática.

Principio de lo problémico: El curso debe estar centrado en la solución de problemas avanzados de la enseñanza de la Matemática. Existe la tendencia a separar el proceso docente-educativo de la solución de los problemas que emanan de las necesidades sociales. En lo problémico está la garantía de la integración de la teoría y la práctica, la integración de la escuela con la vida. Es por ello que el curso debe responder a solucionar los problemas reales de las escuelas de la República Dominicana, ya que en la solución de estos el maestro se forma como tal.
Principio del carácter científico: Este principio significa que el contenido del curso debe encontrarse en completa correspondencia con lo más avanzado de la ciencia contemporánea. El mismo se basa en el dominio del contenido de las disciplinas que enseña, que deben estar sistematizados en su intelecto y a través de ellos dar una explicación científica de los fenómenos relacionados con la enseñanza de la Matemática y con los sucesos y procesos que demanda esta profesión, además el profesor debe dirigir el proceso de forma científica.
Principio de la formación en valores: Las actividades del curso deben estar matizadas en los valores más puros de la sociedad, la honestidad, la sencillez, el respeto mutuo, la puntualidad, la laboriosidad, identidad nacional, etc.
Principio de la búsqueda de la excelencia: Se debe cuestionar y evaluar la calidad de las clases, los trabajos, investigaciones realizadas a través del curso, a través de un patrón.
Principio del trabajo colectivo con responsabilidad individual: Se deben determinar grupos de trabajo, pero siempre se darán responsabilidades individuales a los estudiantes.
Principio del carácter significativo de la enseñanza: Se estructurará un sistema de problemas para elección libre de los cursistas, manteniendo como eje integrador la investigación-acción, se adicionarán problemas específicos propuestos por los estudiantes producto de la investigación que realicen, siempre que estos sean problemas de la institución laboral de los mismos. Estos problemas deben ser resueltos en clases y talleres, acorde a los cambios sociales que el entorno competitivo demanda y a las exigencias actuales de la enseñanza de la Matemática en la República Dominicana.

Descripción de la experiencia

La experiencia se desarrolló con el curso de Didáctica Especial de la Matemática y Practica Docente III (PED.425), con los alumnos de la carrera de Educación media, mención Matemática de la Universidad Autónoma de Santo Domingo, a través del tema “Métodos de Enseñanza de la Matemática”, contextualizándolo en el contexto histórico cultural y basándonos en los principios anteriormente señalados.
Se analiza el contexto Histórico-Cultural de su formación como maestro y los métodos de enseñanza de la Matemática. Los aportes que realiza la Didáctica de la Matemática en la formación del profesor de educación media y la colaboración de estos a los homólogos de la carrera de educación básica, cuyo plan de estudio no incluye la Didáctica de la Matemática y el numero de asignaturas en el área de Matemática es reducido.
Es un experimento que se realizó en el segundo semestre del año 2005. Se preparo una jornada de 48 horas que incluyó prueba diagnostica, talleres de capacitación, elaboración de unidades didácticas, donde fungieron como facilitadotes de los talleres los alumnos de séptimo semestre de la Licenciatura en Educación Media, mención Matemática, que cursaban esta asignatura. Esta actividad fue un requisito para aprobar la asignatura.

- Objetivos referidos a los aprendizajes que los alumnos de este curso deben obtener: 1. Explorar los conocimientos de las categorías de la Didáctica Especial de la Matemática. 2. Analizar los métodos en proceso enseñanza y aprendizaje usado en el área de

Matemática. 3. Aplicar una intervención pedagógica a los estudiantes de a carrera de Educación Básica en el área de matemática.

- Contenido Didáctico tratado: Objetivos de la Didáctica de la Matemática, Metodología del proceso Enseñanza – Aprendizaje de la Matemática, Métodos lógicos. Métodos Didácticos – inductivo – Metidos históricos – Métodos investigativos – Métodos reproductivos. Exposición problemas – Elaboración conjunta – Método expositivo – Método analítico, sintético, analítico sintético – métodos genéticos, axiomáticos, Contenidos matemáticos del segundo ciclo 7mo y 8vo de la Educación Básica 1ro, 2do, 3ro y 4to Educación Media, Análisis de los Diseños curriculares de 7mo y 8vo curso de Educación Básica y 1ro, 2do, 3ro y 4to Educación Media. Cortes verticales. Panorámica del saber de los contenidos matemáticos estudiados modelar algunos contenidos matemáticos Didácticos a partir de las estrategias metodológicas, Investigación – Acción – Fundamentos de este concepto. Aplicaciones e investigación pedagógica en la clase de matemática, Elaboración del contenido para intervención pedagógica.

Actividades realizadas

1. Actividad de Exploración con los estudiantes: Auto presentación, Lugar donde trabaja, Identificación del sector público o privada, Sus opiniones sobre las dificultades que a su entender limitan el aprendizaje de la Matemática, Breve historia de la comunidad donde vive. 2. Formación de equipos de trabajos para la participación de los estudiantes en la docencia y la creación de un ambiente favorables a la docencia: Grupo de docencia/grupo de organización e higiene/ Grupo de evaluación y control de asistencia/grupo de festejo y armonía/grupo de recursos y apoyo de materiales didácticos. 3. Discutir la Practica Docente en planteles educativos. 4. Valorar las estrategias metodológicas de sus instituciones. 5. Explorar los conocimientos de las categorías de la Didáctica Especial de la Matemática. 6. Analizar los métodos en proceso enseñanza y aprendizaje usando en el área de Matemática. 7. Aplicar una intervención pedagógica a los estudiantes de la carrera de Educación Básica en el área de matemática.

Estrategias Metodológicas que se siguieron

En el uso de la estrategia metodológica se combina el estudio de las categorías de didáctica de la Matemática con el currículo de Educación media de la Republica Dominicana. Se analiza si los objetivos se corresponden con los planeamientos de autores que escriben sobre la Didáctica de la Matemática. Si los contenidos matemáticos se corresponden a las exigencias de cada nivel o grado, profundidad y aplicabilidad. Se examinan las estrategias metodológicas que presenta el currículo de Matemática. Si toma en cuenta, el desarrollo de las competencias en ese nivel. Se estudian los métodos usados en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática.

Los alumnos deben realizar prácticas docentes, donde preparan: Prueba diagnostica para los alumnos de Educación Básica, esta abarca los contenidos desde primer grado hasta octavo grado, Un curso taller sobre la metodología para el aprendizaje para maestros de Educación Básica, Un informe final sobre esta experiencia y Elaborar un material de apoyo a la docencia para el taller. Al final del taller se aplica nuevamente la prueba de diagnostica de los autores de taller para comparar los resultados.

Para la evaluación se siguen los siguientes criterios: Se considera la presencia de los alumnos en el salón de clase (10%), Los alumnos harán reporte de lectura, con claridad y precisión privilegiando los aspectos esenciales de las lecturas y sus respectivas interpretaciones (10%), Los alumnos participaran en paneles (20%), En equipos de trabajo los alumnos harán las intervenciones pedagógicas, como practicas docentes. (15%), Se evaluara el informe final de la intervención pedagógica (15%).

Resultados obtenidos

Con esta experiencia se logró que todos los alumnos analizaran el currículo de Matemática de la educación media de la República Dominicana, a través de los debates, discusiones evaluaciones escritas, observación de los avances de los alumnos. Se propició en los alumnos una gran sensibilidad social, al trabajar en equipos, al participar en talleres y debates.

Se resolvieron problemas específicos, de la República Dominicana, propuestos por los propios estudiantes. Estos problemas surgieron producto de la investigación que ellos realizaron en sus propias instituciones escolares y las soluciones propuestas dan respuesta al contexto socio cultural actual. Estos problemas fueron resueltos en clases y talleres, acorde a los cambios sociales que el entorno competitivo demanda y a las exigencias actuales de la enseñanza de la Matemática en la República Dominicana.

La solución de los problemas permitió que los estudiantes estudiaran el contenido más motivado, además, se garantizó la integración de la teoría y la práctica, la integración de la escuela con la vida. Con esta asignatura ellos desarrollan la competencia de la cultura Matemática en educación, tienen la oportunidad de conocer las opiniones de los compañeros del curso, se desarrolla en ellos el aprendizaje colaborativo. Se produce meta cognición a partir de los debates y reflexiones en el curso.

Conclusiones

La difusión de esta experiencia se ha sustentado en la preocupación porque los cursos de Didáctica de la Matemática en la formación de maestros en América Latina impliquen cada vez más que la motivación por la enseñanza de la Matemática, que los profesores adquieran más independencia cognoscitiva y creatividad, que se formen comprometidos con la satisfacción de las crecientes necesidades sociales.

La formación de maestros de matemática debe ser una educación en la vida, sustentada en la actividad docente y en la solución de problemas sociales.

Referencias Bibliografícas

Álvarez, C. (1996). *El Postgrado Ciencia o Docencia, Ponencia III Junta Consultivo sobre el Postgrado en Ibero América, La Habana, Cuba*.

Ballester, Sr. Sergio Ballester Pedroso, Hilario Santana de Armas, Silvio Hernández.

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática. Editorial Pardos, SAICF. Imperio en Barcelona, España.*

Crespo, M. (1997). *Las transformaciones de la Universidad en cara al siglo XXI. En la Educación Superior en el siglo XXI Visión de América Latina y el Caribe*, *Editorial CRESALC/UNESCO, Caracas, Venezuela.*

Portuondo, P. Nani, G. (1998). *El vínculo Universidad-Sociedad como principio de la Educación Superior Latinoamericana, Universidad Rómulo Gallegos,* Tesis de Doctorado no publicada. *San Juan de los Morros, Venezuela.*

EDUCACIÓN VIRTUAL USANDO TECNOLOGÍA DE REDES PARA LA FORMACIÓN A DISTANCIA, DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Gamboa Hinojosa Jesús, Ávila Godoy Ramiro
Instituto Tecnológico de Los Mochis. Universidad de Sonora. (México)
jgamboa@hotmail.com ,ravilag@gauss.mat.uson.mx
Categoría de investigación: formación de profesores. Nivel educativo: superior, postgrado
Palabras clave: formación de profesores, tecnología de redes

Resumen
El presente reporte corresponde a una investigación enmarcada dentro de un proyecto de investigación diseñado para indagar las ventajas y dificultades que se presentan al desarrollar un programa de educación virtual a distancia para formar y/o actualizar profesores de matemáticas de los niveles: superior y bachillerato; usando tecnología de redes. En particular, en este trabajo se reportan las dificultades que tuvieron los profesores al usar las nuevas tecnologías así como los cambios en las concepciones de la matemática, su aprendizaje y su enseñanza, observados en dichos profesores, originados por su participación en el mencionado programa y los efectos de tales cambios en el diseño y desarrollo de sus clases.

Introducción

El uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en educación matemática es un asunto que requiere ser estudiado a fin de optimizar su uso en beneficio de los aprendizajes de los estudiantes; en particular el uso de la tecnología de redes para el diseño y desarrollo de programas de formación de profesores de matemáticas, resulta muy necesario, dada la trascendencia de esta acción para mantener actualizados a los profesores, independientemente de donde se encuentren. Esta investigación se realizó con ese propósito y pudo llevarse a cabo gracias a que, a finales de 1999, la Dirección General de Institutos Tecnológicos de México, puso en marcha, en toda la república, un Programa de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias, ofrecido a sus profesores en un sistema virtual, usando tecnología de redes, en el cual participaron aproximadamente mil profesores en la especialidad de Matemáticas, mismo que sirvió de base para solicitar ante el CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), apoyo para la investigación.

En particular, en este trabajo se reportan las dificultades que tuvieron los profesores al usar las nuevas tecnologías así como los cambios en las concepciones de la matemática, su aprendizaje y su enseñanza, observados en dichos profesores, originados por su participación en el mencionado programa y los efectos de tales cambios en el diseño y desarrollo de sus clases.

El Problema

Esta investigación centró su interés, específicamente, en dos cuestiones:

A) Las dificultades e impresiones que el profesor-estudiante tuvo al usar la nuevas tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, como consecuencia de cursar esta maestría en un sistema virtual, partiendo de que para muchos de ellos, era su primer experiencia en este campo.
B) Los cambios originados en las concepciones y en las estrategias de enseñanza de los profesores-estudiantes, participantes en este programa.

Los cambios conceptuales que se pretendió observar, en relación con la enseñanza de las matemáticas, fueron los relacionados con:

a) Los objetivos de la enseñanza.
b) Los contenidos a enseñar.
c) Los procesos de aprendizaje de esta disciplina
d) Las estrategias de enseñanza.
e) El papel y uso de las nuevas tecnologías en los procesos de aprendizaje y enseñanza.
f) Las formas y métodos de evaluación del aprendizaje.

Metodología de la Investigación

A) Se optó por desarrollar una investigación **cualitativa,** en la qu**e** se combinaron diversas técnicas para la obtención de la información, que incluyeron, en una primera etapa, el análisis de las participaciones que tuvieron los profesores-estudiantes en diversos foros virtuales, tanto locales como nacionales, que se llevaron a cabo durante el desarrollo de los cursos de la maestría; en una segunda etapa, la aplicación de cuestionarios a una muestra de la población y; en una tercera etapa, la aplicación de cuestionarios y la realización de entrevistas para llevar a cabo un **estudio de casos**, con dos profesores**.**

B) El análisis de las participaciones que tuvieron los profesores-estudiantes en diversos foros, realizada en la primera etapa de la investigación, fue para tratar de determinar la opinión que sobre los estudios en un sistema virtual, tenían al inicio de los mismos. Dicho análisis nos permitió conocer el tipo de dificultades que muchos profesores tuvieron debido, fundamentalmente, al desconocimiento del manejo de la computadora, el Internet y demás periféricos y a la falta de infraestructura y equipo. En esta etapa se revisaron las participaciones de 93 profesores-estudiantes.

C) En la segunda etapa se encuestó a cincuenta profesores después de haber terminado sus estudios de maestría con la pretensión de investigar si había habido cambios en su opinión sobre el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas, en particular sobre la enseñanza en un sistema virtual, así como para tratar de determinar si mostraban cambios en las concepciones sobre la matemática, su aprendizaje y su enseñanza.

D) Con base en los resultados de la encuesta de esta segunda etapa, se seleccionaron dos profesores-estudiantes, uno de bachillerato y otro de nivel superior, para llevar a cabo un estudio de casos, esto es, a partir de las observaciones hechas al analizar las respuestas a las preguntas del cuestionario aplicado en la encuesta de la segunda etapa, se seleccionaron dos estudiantes y se elaboró un guión para entrevistarlos con la intención de obtener mayor información respecto a las cuestiones de interés en esta investigación.

Los resultados

El análisis de las participaciones que tuvieron los profesores-estudiantes en diversos foros, así como el análisis de las respuestas a los cuestionarios aplicados y las obtenidas en las entrevistas realizadas en el estudio de casos, nos permitió detectar que:

A) Respecto a las concepciones iniciales que tenían de la educación en un sistema virtual y su experiencia previa en el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación:

a) Aproximadamente la mitad de los profesores-estudiantes participantes en este programa de maestría, ingresó a él a pesar de considerar que la educación en un sistema virtual era de baja calidad, algunos consideraban que sería como estudiar por correspondencia y que lo que recibirían a través de la computadora eran sólo documentos y exámenes a resolver que luego tendrían que regresar para que fueran calificados y les asignaran una calificación; en su concepción no imaginaban la posibilidad de interaccionar con otros estudiantes, ni con las situaciones problémicas a través de la computadora; otros pensaban que sería un sistema en el que los cursos los diseñaba algún profesor que no estaba presente pero que en su sede tendrían un asesor de manera presencial a quien podrían consultar sus dudas, entregar sus tareas y exámenes para que él los revisara y los calificara.

b) De igual manera, un porcentaje alto de los profesores-estudiantes, tal vez mayor al cincuenta por ciento, tenían muy escasa experiencia en el uso de la computadora y sus periféricos y prácticamente nula en el uso de software interactivos de matemáticas. Esto constituyó una dificultad que, en algunos casos, fue determinante para que algunos profesores desertaran del programa.

c) Otro hecho de los detectados en la investigación y que constituyó una dificultad propia del sistema virtual, fue la falta de equipo adecuado de los profesores estudiantes, algunos de los cuales no disponían de una computadora personal, ni en su institución, lo que los obligaba a desplazarse a una institución sede para realizar sus trabajos; en donde en ocasiones, necesitaban esperar turno para usar el equipo porque tampoco la institución tenía equipo exclusivo para este programa.

B) Respecto a los cambios en las concepciones iniciales que tenían de la educación en un sistema virtual y en el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas:

a) La concepción inicial que tenían los profesores de la educación en un sistema virtual se modificó significativamente, en especial en aquéllos cuya concepción no se correspondía con lo que sucedió; en la mayoría de los casos el cambio fue favorable, aún en algunos profesores que siguen considerando que su calidad es inferior a la de los sistemas presénciales; incluso algunos profesores opinan que la educación virtual es la educación del futuro y que esta experiencia les ha permitido reflexionar sobre su papel como profesores y sobre el papel de los estudiantes.

b) La experiencia en el uso de las nuevas tecnologías que vivieron en los cursos de matemáticas los sensibilizó notoriamente sobre las ventajas y dificultades que esto presenta señalando, entre otras ventajas de los sistemas virtuales, las siguientes:

- Puede atender una gran cantidad de alumnos de cualquier nivel (en la maestría en ciencias en enseñanza de las ciencias se atendió a más de 2000 profesores en toda la República Mexicana).

- Resulta económica, por el número de alumnos que atiende a la vez y por su capacidad de ir hasta lugares apartados con un mínimo costo.
- Privilegia el trabajo del estudiante que aprende haciendo las cosas solo, sin la presencia del maestro. Su guía son las actividades de aprendizaje previamente diseñadas.
- En la Educación Virtual se trabaja asincrónicamente, esto permite al estudiante atender su clase en el momento en el que considera más conveniente, desde luego, dentro de los márgenes de tiempo establecidos.

Entre las dificultades señalan las siguientes:

- ***De carácter material***.- La falta de equipo, como computadoras, impresoras, software y plataforma eficiente de Internet, multimedia, periféricos, etc., así como la necesidad de un local apropiado para desarrollar el trabajo.
- ***De carácter cultural***. Las concepciones erróneas de lo que era realmente estudiar en un sistema virtual.
- ***De carácter Educativo***. La falta de conocimientos básicos en el manejo de los recursos tecnológicos que ocasionó que algunos profesores ya inscritos, desertaran y otros decidieran no participar.

c) Respecto a los cambios en las concepciones de los profesores sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática:
   - Sobre los objetivos de la enseñanza de las matemáticas se observan cambios en las expectativas de un número significativo de profesores, que se manifiestan en la toma de conciencia de que los objetivos de la enseñanza de las matemáticas están relacionados con los objetivos de la formación de un profesional en un área específica, cuando se trata de los cursos en educación superior, y con el desarrollo de una serie de habilidades intelectuales y la adquisición de una cultura básica general, cuando se trata de los cursos de bachillerato.
   - Sobre los contenidos a enseñar también se observan cambios en las concepciones, éstos se refieren especialmente a cambios en la valoración que hacen, por una parte, de la importancia de que los alumnos desarrollen habilidades para resolver problemas y, por otra, de la revaloración de las representaciones gráficas y numéricas como contenidos de estudio dentro de los cursos. También se observa un cambio en la valoración de los procedimientos algorítmicos al dejar de considerarlos como la parte esencial de los cursos.
   - Sobre el proceso de aprendizaje de las matemáticas, el cambio más significativo que se observa en el discurso de los profesores es el relativo al reconocimiento de que el aprendizaje es responsabilidad de los alumnos, es decir, los profesores, a partir de su experiencia de estudiar en un sistema virtual, se hicieron más conscientes de que el aprendizaje no es una consecuencia automática de la enseñanza, esto es, no depende sólo de lo que hace el profesor, sino, fundamentalmente, de lo que hace el estudiante; esto en correspondencia con la concepción del aprendizaje como la construcción del conocimiento, mediante la transformación o reorganización de esquemas y teorías previas y el reconocimiento de los procesos meta cognitivos, es decir el reconocimiento de que

el proceso de construcción del conocimiento produce, además del conocimiento del objeto de estudio, un conocimiento sobre el proceso de aprender[***]; La meta cognición le "permite al alumno planificar y desarrollar estrategias para aprender y adquirir habilidades cognitivas con las que puede regular de modo eficaz los procesos del pensamiento"[†††]

- Sobre las estrategias de enseñanza también se muestran algunos cambios conceptuales, aunque éstos no necesariamente se manifiestan en la práctica docente. Esto es, los profesores estudiantes manifiestan estar conscientes de que el método expositivo ilustrativo con el que tradicionalmente habían venido desarrollando sus clases no es suficientemente eficaz y expresan disposición al cambio hacia una enseñanza en la cual ellos se asuman como propiciadores de la actividad de aprendizaje; pero reconocen que no saben cómo hacerlo, aunque por lo general justifican no modificar sustancialmente su práctica docente, argumentando que las condiciones de los grupos (muy numerosos, con muchas deficiencias en su formación antecedente y mala disposición para el trabajo), la extensión de los programas, la falta de equipo adecuado de las escuelas, entre otras, no permiten desarrollar sus clases con un enfoque y una metodología diferente de la tradicional. Desde luego esto no es en general; existe un sector, no muy numerosos, que manifiesta que a partir de la experiencia vivida con los cursos de matemáticas de la maestría, ha modificado su práctica docente y señala, entre los cambios, el uso de los problemas como medio para promover la actividad de aprendizaje, así como el uso de los recursos tecnológicos.
- Sobre el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, sucede algo similar a lo descrito en relación a las estrategias de enseñanza, pues los profesores expresan su convicción de lo útil y conveniente que sería el uso de dichas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas; pero argumentan, y tal vez con más razón que en el tópico anterior, lo inadecuado de las condiciones de las escuelas para hacerlo efectivo señalando desde la falta de equipo, en algunos casos, hasta la falta de apoyo de las autoridades escolares, en otros.
- Sobre la evaluación, al igual que en los dos apartados anteriores, son notorios los cambios conceptuales de los profesores cuando hablan de evaluación cualitativa, así como de las diversas funciones de la evaluación y las diversas técnicas, pero de nueva cuenta justifican que en la práctica no pueden hacer mucho porque el principal obstáculo son las autoridades de las instituciones que tienen sistemas de evaluación ya establecidos y presionan, desde lo administrativo, para que los profesores se sujeten a las reglas establecidas.

Conclusiones

a) El desarrollo de programas educativos, en este caso de formación a distancia de profesores de matemáticas, en un sistema virtual utilizando tecnología de redes, en la

[***] "aprenden no sólo lo que se les enseña, sino también algo relativo al proceso de aprender; lo que conocemos como meta cognición"

[†††] "La meta cognición le permite al alumno planificar y desarrollar estrategias para aprender y adquirir habilidades cognitivas con las que puede regular de modo eficaz los procesos del pensamiento"

actualidad presenta dificultades que, sin ser mayores, limitan la eficacia de dichos programas.

b) Se observan dificultades que tienen que ver con la falta de equipo e instalaciones apropiadas; también se observan dificultades derivadas de la cultura imperante de los actuales profesores que, habiendo sido formados en un sistema presencial, se pretende que asimilen la nueva cultura de la educación virtual; este hecho está a su vez, relacionado con otro similar, aunque no equivalente, el relativo a la falta de conocimiento y habilidad de los profesores para utilizar las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza.

c) El diseño e instrumentación de cursos en los sistemas virtuales dan lugar a que los participantes reflexionen sobre los diversos conceptos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, reflexionen sobre el papel de los profesores en el proceso, lo mismo que el de los estudiantes, sobre las características de la comunicación en ambos sistemas, presencial y virtual, y sobre todos aquellos elementos constitutivos de dichos procesos; lo cual origina, a su vez, un proceso de reconceptualización sobre tales elementos; esto nos permite afirmar que el diseño e instrumentación de programas educativos en los sistemas virtuales no sólo da oportunidad de mejorarlos a partir de observarlos, sino también incide sobre la educación presencial a partir de dichas reconceptualizaciones cuando los estudiantes son los propios profesores, como es el caso en este tipo de programas.

Referencias bibliográficas

Ávila, R. (2000). *Proyecto de investigación sobre la enseñanza virtual de las matemáticas en la maestría en ciencias en enseñanza de las ciencias que se imparte en el Sistema de Institutos Tecnológicos, usando tecnología de redes*. Depto. de Matemáticas. Universidad de Sonora. México.

Castañeda M. (2000). *Los medios de la comunicación y la tecnología educativa. Curso básico para formación de profesores, área de lenguaje y comunicación. Libro 6.* México: Trillas.

Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos

Eggen, P.D. y otros. (1999). E*strategias docentes. Enseñanza de contenidos y desarrollo de habilidades del pensamiento.* Buenos Aires: FCE

Estalleras, J. (1971). *Preparación y evaluación de objetivos para la enseñanza.* Madrid: Anaya.

Garner, R. y otros. (1998). Metacognition: Anwered and unanwered. *Educational Psycologist* 24, 2, 143 – 158.

López de Rivera, A. (1997). La educación a distancia; un cambio para dar respuesta a la sociedad. *The 4th annual national distance education conference.1997. Center of Distance Learning research.* Texas A &M.

Max Schiller. (1998). *Teoría de la Educación.* Madrid: Alianza.

Pereira, M. F. (1987). *La educación a Distancia en América Latina. Tomo I.* Caracas, Venezuela. Universidad Nacional Abierta.

Sanmartí, N. y Jorba, J. (1997). *Evaluación formativa y la autosocioconstrucción del conocimiento.* Barcelona: Impreso Universitario.

SEP. (1992). *Sistema Nacional de Educación Pública.* México.

SEP. (1994). *Plan de Desarrollo del Instituto Tecnológico de Los Mochis*.

UNA INVESTIGACIÓN SOBRE COMPETENCIAS DOCENTES

Mercedes Anido de López, Martha Elena Guzmán
Facultad Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR. Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. UNR. (Argentina)
anidom@fceia.unr.edu.ar, guzmartha@yahoo.com
Campo de investigación: formación de profesores. Nivel educativo: superior
Palabras clave: competencias; práctica docente; resolución de problemas

Resumen
En el trabajo que se presenta se analizan las concepciones de los docentes que cursan un taller de Postítulo en Matemática y Estadística en relación al rol del problema matemático en la enseñanza. Análisis que conlleva el conocimiento de las relaciones entre los saberes, los programas y sus prácticas docentes.

Introducción

En la legislación Argentina se considera que una de las funciones básicas de la Universidad es la formación de profesionales, docentes y técnicos capaces de actuar con solidez, según las demandas individuales y los requerimientos nacionales y regionales. En este sentido prevé espacios de formación a nivel de "postítulo", entendiéndolos como instancias de formación superior en el área de que se trate y de actualización de cono-cimientos y competencias. Así, la Universidad de Rosario crea (en el 2003) un Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística, con el objetivo de brindar formación disciplinar y pedagógica en las áreas de Matemática y Estadística .El mismo está dirigido a graduados de nivel terciario no universitario, con título de Profesor de Matemática y con desempeño docente en las áreas de matemática y estadística en los distintos niveles de la escolaridad: EGB y Educación Polimodal. Una de las etapas curriculares a cumplir, es la participación en el "Taller de aplicación centrado en la resolución de problemas" que exige, para los docentes participantes, la ejecución de una producción individual y grupal, elaborada como síntesis de reflexiones sobre la propia práctica docente con la intención de poner en común las ideas vertidas acerca de las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y de las posibles alternativas para superarlos. Su inclusión en la currícula del postítulo tiene como finalidad estimular el desarrollo profesional por el desafío que genera la resolución, selección y producción de problemas matemáticos.

El problema de investigación

Las investigaciones sobre el conocimiento de los docentes relativo al tema científico a enseñar y su relación con su práctica docente ha sido tema de numerosas investigaciones actualmente direccionadas a la formación y evaluación de competencias (Sánchez Victoria, Linares Salvador, 2003).
La evaluación investigativa de la práctica docente en relación al aprendizaje es de gran interés para los investigadores en educación matemática (Leder,1992) Los esfuerzos previos para cambiar el currículo y la instrucción fracasan frecuentemente porque los cambios propuestos entran en conflicto con las evaluaciones externas. En muchos países se han introducido métodos de evaluación incorporados a proyectos, programas educativos e investigaciones en grupo Pensamos que algunos de los indicadores de esta tendencia en nuestro país son, por ejemplo la creación de los Postítulos, a lo que ya hicimos referencia y, en nuestro medio, el Programa de articulación Universidad –Escuela Media/Polimodal que se está desarrollando desde el 2004 por los esfuerzos conjuntos de la Universidad Nacional de Rosario y el

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (Guzmán Lagreca, 2005). Conectados a estos esfuerzos surge como otro gran campo de interés el desarrollo profesional.
Se supone que el profesor de Matemática debe saber Matemática .Algunos estudios sobre el conocimiento del Profesor han revelado bajos niveles de comprensión matemática (Brown et al, 1990) y esto da lugar a requerir un mayor conocimiento de Matemática. Conocer que tipo de conocimientos matemáticos deben tener los profesores y cómo se debe combinar este conocimiento con su conocimiento pedagógico es un tema de debate abiertos al futuro.
Las diferentes tendencias en cuanto a priorizar lo puramente científico de la matemática como etapa previa a la formación pedagógica, versus un currículo de formación de grado o terciaria que comprenda ambas áreas; se revela en las distintas políticas educacionales aún entre los países más desarrollados. Nuestra investigación pretende profundizar en el conocimiento acerca de cómo los profesores utilizan su saber matemático en sus prácticas docentes. Se presenta así como objetivo de investigación:
Indagar sobre las concepciones de los docentes que cursan el taller acerca de la aplicación de la resolución de problemas como estrategia didáctica para implementar en sus cursos. Análisis que conlleva a la búsqueda de un conocimiento de las relaciones entre los saberes, y sus prácticas docentes en temas específicos.

Posicionamiento teórico

Richard Mayer (1991) en su libro "Pensamiento. Resolución de problemas Cognición" define conceptos básicos relativos al significado del "problema" problema y su relación con el "pensamiento", coincidiendo con investigadores en psicología en cuanto a ciertas características definitorias. Un problema debe contener "datos" y "metas" y su desarrollo presentar " obstáculos". ¿Qué entiende por estos conceptos?
Datos: El problema comienzo en un cierto estadio con cierta condiciones, objetos, piezas de información y estos en adelante deben estar presentes en el trabajo en el problema.
Metas: El estadio deseado o terminal del problema es la meta y el pensamiento es requerido para transformar el problema de lo dado a la meta.
Obstáculos: El pensador tiene a su disposición ciertas formas o caminos para cambiar el estadio dado o la meta El pensador, no obstante, no conoce la respuesta correcta, la correcta secuencia de conductas que resuelven el problema no es inmediatamente obvia.
En síntesis según la concepción de Richard Mayer en cualquier definición de problemas deberían estar presentes tres ideas 1) el problema es presentado en algún estado 2) es deseable que esté en otro estado 3) no hay un directo camino obvio para conseguir el cambio.
Esta definición es lo suficientemente amplia para incluir problemas que van desde la geometría a los que, por ejemplo, puede presentar el juego de ajedrez, es decir, no abarca esta definición solo los problemas matemáticos, no obstante nos basamos en ella, cuando hagamos referencia a problemas matemáticos, para diferenciarlos de los meros ejercicios repetitivos de aplicación.
Otros de los grandes referentes en cuanto a la epistemología que subyace en la base del concepto de problemas es Reitman (1965) que realiza un análisis estableciendo cuatro categorías en cuanto a la relación entre los datos dados y las metas establecidas:

Datos bien definidos – bien definido estadio de metas
Datos bien definidos – pobremente definido estadio de metas
Datos pobremente definidos - Bien definido estadio de metas
Datos Pobremente definidos - pobremente definidos estadio de metas

Siempre en el terreno de la concepción amplia de problema, sin entrar en el problema matemático especifico, Greeno (1988) propone una tipología de cuatro categorías:
Problemas de transformación: dado un buen definido estado inicial y estado de la meta, el problema a resolver significa el encuentro de una secuencia de operaciones que permite llegar a la meta.
Problemas de arreglos: dados todos los elementos que intervienen en la meta y una descripción general, el que resuelve el problema debe acomodar los elementos en una forma que quede resuelto.
Problemas que inducen estructuras: dados varios ejemplos o instancias el que resuelve el problema debe encontrar una ley general que sea consistente con la información.
Problemas de evaluación de argumentos deductivos: dadas ciertas premisas se trata de determinar si o no, es posible obtener una conclusión lógica.
El mismo Greeno (1988) reconoce que no todos los problemas pueden ser clara y nítidamente de algunos de estos tipos.
Nuestra posición es considerar que los problemas de matemáticas más interesantes incluyen a la vez varias de estas categorías mencionadas.
Volviendo a posicionamiento teórico de Mayer, reconoce esta autor que existen muchas teorías que relacionen el pensamiento, la resolución de problemas y la cognición.
Los argumentos conductistas se basan en que la ciencia de la psicología debe tratar solo con lo empírico observable como su primer dato. Desde una posición opuesta los argumentos cognitivos se basan en que la conducta es meramente una manifestación como resultado del pensamiento y por lo tanto las definiciones psicológicas deben de estar firmemente ligadas a los mecanismos profundos que yacen bajo la conducta.
La mayor parte de los psicólogos que estudian el pensamiento pueden aceptar que en general la definición de pensamiento incluye tres ideas básicas:
El pensamiento es cognitivo, ocurre internamente en la mente y puede se inferido indirectamente de la conducta. El pensamiento es un proceso que involucra una manipulación de algunas o del conjunto de operaciones del sistema cognitivo.
El pensamiento es dirigido y resulta en la conducta que resuelve un problema o se direcciona a su solución. (Mayer, 1991)
En otras palabras pensamiento es lo que sucede cuando una persona resuelve un problema, esto produce conductas que mueven lo individual de un estadio dado al estadio de meta o al menos trata de lograr este cambio. Polya (1965) sugiere que la resolución de problemas se basa en el proceso cognitivo que resulta de "encontrar un camino que evite una dificultad, rodee un obstáculo, consiguiendo un propósito que no era inmediatamente realizable o alcanzable".
El principal objetivo de estas citas es hacer más especifica la concepción de pensamiento y hacer entender lo que los educadores en matemática significan cuando se habla de que "la resolución de problemas forma el pensamiento"

Posicionamiento didáctico

La resolución de problemas es actualmente el método para la enseñanza de la Matemática, fundándose tal elección en la posibilidad que brinda para poner en práctica el principio general del aprendizaje activo. Lo que se persigue con esa enseñanza es poner en acción los procesos de pensamiento eficaces para la construcción del conocimiento. Guy Brousseau, afirma que *"no se hace matemática si no se resuelven problemas"*.

Al respecto señala Miguel de Guzmán: "*Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra. Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas".*

"*La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar de lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamientos eficaces. A tal efecto, se trata de considerar como lo más importante:*

- *que el alumno manipule los objetos matemáticos,*
- *que active su propia capacidad mental y ejercite su creatividad*
- *que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente,*
- *que adquiera confianza en si mismo,*
- *que se prepare así para resolver otros problemas de la Ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana y para los nuevos retos de la Tecnología y de la Ciencia.*"

Sobre el mismo tema, George Polya dice: *"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero si se pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por los propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter. La solución de problemas es una escuela de la voluntad. Resolviendo problemas que parecen difíciles, el alumno aprende a perseverar pese a los fracasos, a apreciar el menor de los progresos, a lograr la idea esencial, a hacer un llamado a toda su fuerza de concentración. Si el alumno no encuentra en la escuela la oportunidad de familiarizarse con las diversas emociones que ofrece el esfuerzo con vista a la solución, su educación matemática ha fallado en su objeto más esencial*".

Metodología de la investigación

A partir de una observación experiencial se realiza un "estudio de casos".

El "caso" puede ser una situación individualizada y no un objeto particular, dicho de otra manera, un conjunto racional complejo que tiene una vida y una historia, como la tiene por ejemplo, una clase o una escuela. La tarea de los métodos observacionales consiste en poner de manifiesto la lógica interna del caso, gracias a la recogida de hechos que se desarrollan en el tiempo y el ejercicio de relacionar datos de distinta naturaleza (De Ketele, 1995 y otros).

Se trata de observar la actividad del sujeto e identificar el modelo de actividad en una situación de resolución de problemas. El investigador recoge estas observaciones para comparar los modelos operatorios en las distintas situaciones problemáticas.

Descripción de la experiencia

Diferentes aproximaciones fueron utilizadas para obtener información sobre la complejidad y contextualización del conocimiento profesional de los docentes.

Como se ha señalado, los docentes participantes del taller han sido egresados de diferentes institutos de profesorado de la misma provincia o de provincias aledañas , exigiéndose como requisito una efectiva práctica profesional en enseñanza media .Esto ha llevado a que la primer jornada de trabajo fuese una instancia de reflexión grupal a partir de las siguientes preguntas

En relación a su práctica docente:
¿Qué es un problema matemático? ¿Cuál es la importancia de esa actividad?
¿Cuál su ubicación o inserción en la planificación de la enseñanza de un tema?
Estos cuestionamientos siguieron presentes en toda la etapa de producción que describimos a continuación:
El "Taller de Problemas centrado en el aprendizaje" ha tomado como contenidos específicos la selección y propuesta de problemas relativos a "Vectores", "Elementos de Geometría Analítica" "Aritmética y Análisis Combinatorio" "Las funciones en el Análisis Matemático"
La elección de estos temas no es casual, sino significativa; atiende a la importancia del conocimiento profundo de los mismos como objetos matemáticos los que, a su vez se constituyen en herramientas (Douady 1995) para la enseñanza de la matemática en distintos niveles y en otras áreas como la Probabilidad y Estadística, Economía, Física, y materias básicas de carreras terciarias
Cuatro profesores de nivel universitario pero con vasta experiencia en enseñanza secundaria estuvieron como coordinadores a cargo de sucesivos talleres de producción correspondientes a los problemas enunciados
Cada uno de los coordinadores dotó de una impronta propia a su taller en cuanto a los conocimientos a revisar, ya que si bien los temas tratados han formado parte de las asignaturas del profesorado y están incluidos con diferentes niveles de profundidad en el currículo del nivel polimodal (última etapa de la enseñanza secundaria), muchos contenidos estaban olvidados
En cada uno de los sucesivos talleres en las temáticas específicas hubo no obstante dos ejes de trabajo en común.
I) Trabajo de resolución de problemas. Se buscó que, en los temas específicos, el docente-alumno frente a una propuesta de problemas:

- reflexione sobre su propia competencia para resolver el problema. Polya propone como preguntas de autoanálisis: ¿entiendo todo lo que dice?, ¿puedo replantear el problema con mis propias palabras?, ¿distingo cuáles son los datos?, ¿sé a qué quiero llegar?, ¿hay suficiente información?, ¿hay información extraña? ¿relaciono este problema con algún otro similar que hayas resuelto antes?"
- distinga los "elementos de significado" que según la teorización de Godino es capaz de poner en juego: "extensivos" (de qué campo de problemas deriva el que se presenta), "intensivos" (qué conceptos precisos permiten encararlo), "ostensivos" (qué símbolos, gráficos, tablas, se pueden utilizar), "actuativos" (relativos a los cálculos numéricos o programas computacionales), "validativos" (cómo justificar cada paso).

II) Desarrollo de una producción constituida por un plan de clase donde el objeto "un conocimiento matemático", en todas de sus facetas conceptuales procedimentales o actitudinales o de la preponderancia de alguna de ellas, sea alcanzado por la propuesta y resolución de problemas. Es decir el problema como instrumento estratégico en un plan de clase.La evaluación de esa propuesta considera:

- la comprensión de la transposición didáctica que implica la selección de problemas adecuados a un tema
- las competencias de los docentes para la elaboración de problemas.

Conclusión
El "Taller de problemas" ha sido un ámbito propicio para la indagación sobre de las competencias de los docentes en términos de capacidades y actitudes acerca de la utilización de la resolución de problemas como estrategia didáctica, propuesta como objetivo.

Fue posible constatar que las carencias de conocimientos en algunas de las áreas temáticas tratadas, fueron superadas por el esfuerzo y estudio volcados a un trabajo colaborativo de resolución de los problemas matemáticos presentados por los coordinadores de cada taller.
Las producciones presentadas, reflejan una reflexión acerca de la relación entre los saberes y las prácticas docentes en los temas específicos desarrollados. Si confrontamos dichas producciones, con las posiciones manifiestas en el cuestionario, encontramos una progreso en cuanto a que “el problema deja de ser concebido como un mero ejercicio de aplicación”. En un buen número de las producciones, el problema es el eje conductor de la clase.
Sin embargo, se observaron en algunos docentes limitaciones originadas por ciertas “lagunas” en su formación matemática, lo que significó que sus propuestas no tuvieran la profundidad y el alcance suficientes como para que el alumno llegue al “meollo” del concepto que debe construir.
Entendemos que esta situación podrá superarse en la medida que se modifiquen los factores contextuales y a partir del compromiso de los docentes para el logro de su progreso profesional y mejora de las prácticas escolares.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue desarrollado en los proyectos
PID-”Dificultades en el aprendizaje de la Matemática Básica en carreras de ingeniería”
PID-“La ingeniería didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares” del
Programa 2-ECO-3“La formación matemática en carreras no matemáticas” de la Universidad Nacional de Rosario

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical situations in Mathematics*. Kluwer,Dordrech - Academics Publishers

Brown, S., Cooney, T.J.y Jones, D. (1990). Mathematics Teacher Education. En Houstn,W.R. Haberman, M. y Sikula, J. (Eds.) *Handbook of Research on Teacher Education* . (pp. 639-656). New York, EE.UU.: Macmillan

De Ketele, J. M. y Roegiers, X. (1995). *Metodología para la Recogida de Información*. Madrid, España: La Muralla.

Douady, R., (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Artigue, M., Moreno, L.y Gomez, P. (ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. México, Grupo Editorial Iberoamericana

Leder, G. (1992). Assessment and Learnings of Mathematics Hawthorn, Victoria: *Australian Council for Educational Research.*

Greeno, J.C. (1978). Nature of problem soving abilities. En *Handbook of learning and cogniyive proces* (Vol.5) Hillsdale, NY, EE.UU.: Erlbaum

Guzmán de, M. (1992). Tendencias innovadoras en educación matemática. O.M.A - Argentina.

Guzmán; M., Lagreca, L. (2005). *Matemática: Articulación general y disciplinar de preparación para la continuidad de estudios superiores*. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe y UNR. Argentina

Mayer, R. E. (1991). *Thinking. Problem solving. Cognition*. (2nd ed.). New York, EE.UU.: W.H. Frieman and Company.

Polya, G. (1965). *Como Plantear y resolver problemas*. (Reim1998) México: Trillas.

Sánchez V., Linares S. (2003). *Four Student Teachers´Pedagogical Reasoning On Functions.* En Kluwer Academic Publishers, Netherlands Journal of Mathematics Teacher Educacation, (6º ed.) 5-25.

Reitman W.R. (1965). *Cognition and Thought*. New York, EE.UU. Wiley.

CATEGORÍA 3:

Consideración de aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

INTUICIÓN Y VISUALIZACIÓN: DEMOSTRACIÓN EN LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Nancy Janeth Calvillo Guevara, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Cinvestav – IPN. (México)
calvillonancy@yahoo.com.mx

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: convergencia de sucesiones, intuición, visualización, socioepistemología

Resumen
En el presente documento se reportan los avances de un trabajo de tesis cuyo propósito es estudiar la teoría de Sucesiones Numéricas Infinitas analizando su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema por medio de la visualización. Empezamos describiendo la problemática en la que hemos identificado que el paradigma de enseñanza que se sigue al estudiar las Sucesiones está centrado primordialmente en enfoques axiomático deductivos, posteriormente presentamos lo que se señala en la investigación acerca del tema que nos interesa y derivada de las consideraciones anteriores establecemos nuestra hipótesis de investigación, por último concluimos presentando algunos elementos para un análisis. Este trabajo es llevado a cabo siguiendo la Aproximación Socioepistemológica de la Investigación en Matemática Educativa.

Introducción a la problemática

Un aspecto que caracteriza al quehacer didáctico de nuestros días en el campo de la enseñanza de la matemática es el hecho de estar profundamente influido por una visión platónica del conocimiento: cuando un profesor "comunica verdades preexistentes" a sus alumnos mediante un discurso lo hace bajo el supuesto de que el saber matemático existe previo a la experiencia (Chimal, 2005); por otro lado, el paradigma de la enseñanza que se sigue en el sistema educativo está centrado fundamentalmente en enfoques axiomático deductivos y en la mera resolución de problemas (Cantoral y Montiel, 2003). Este *paradigma de enseñanza* es el que hemos identificado al abordar la enseñanza actual del tema de límites de sucesiones numéricas infinitas, esto es, se da a las sucesiones un tratamiento escolar basado fundamentalmente en el enfoque axiomático al presentar definiciones de sucesión y límite; además de brindar ejemplos de convergencia y divergencia así como algunas técnicas para el cálculo formal de límites; y finalmente se ocupa de la presentación y demostración de teoremas bajo esquemas formales. En este paradigma, basado en un enfoque tradicional, se estudia primero a la teoría de sucesiones numéricas infinitas y posteriormente a la teoría de series numéricas infinitas y de funciones, se sigue un patrón lineal en el que se les pide a los alumnos aprender la teoría de las sucesiones sin anteriormente haber tenido un trato digamos intuitivo que les permita dotar de significado y sentido a las definiciones, teoremas y demostraciones rigurosas. Con respecto a la teoría de convergencia de series, en (Farfán, 1997) se señala que en la historia de las ideas se pueden identificar dos grandes momentos claramente diferenciados para su tratamiento:

1. Surgimiento del cálculo de límites de algunas series particulares,
2. Surgimiento de una teoría general para la convergencia de series.

El cálculo de la suma en cuestión, es uno de los rasgos importantes del trabajo con series, que se da del siglo XIV al XVIII excepto, quizá, para la Serie de Taylor, que se constituye como un instrumento de *predicción*, con una lógica propia e independiente de otros temas de la convergencia. Es así que el trabajo con series, cabe decir, que no el estudio de su convergencia, se considera a partir de la Edad Media, época en la que se dio el primer esfuerzo por establecer las bases científicas del estudio de los fenómenos de variabilidad y cambio. De esta manera, para autores como Euler (Farfán, 1997), Bernoulli (Struik, 1986) y Oresme (Martínez, 2000), entre otros, encontrar la suma de algunas series infinitas fue un trabajo importante. Ejemplos característicos del cálculo de sumas durante el siglo XVIII, son los resueltos por L. Euler mediante el establecimiento de analogías muy ingeniosas, utilizando un estilo muy peculiar de descubrimiento matemático al que Abel nombrara como *inducción euleriana.*

En esta etapa del desarrollo conceptual, al que llamamos "*cálculo de sumas de series numéricas infinitas*" según se dijo anteriormente, consideramos que está presente un *obstáculo epistemológico* que impide el tránsito a la siguiente fase: el obstáculo consiste en adjudicar la naturaleza de los términos de la serie a su suma. Sus raíces se localizan en la concepción de función como expresión analítica arbitraria, propia del siglo XVIII (Farfán, 1997).

El trabajo de J. Fourier (1882) sobre la conducción del calor fue el medio en el que se reconoció como necesario el estudio de la convergencia como concepto autónomo según se señala en (Farfán, 1997). En síntesis, nos parece que encontrar el estado estacionario conduce, necesariamente, a la verificación de la convergencia y, por ende, a un estudio de ella. Visto así, el problema físico y el concepto matemático son indistinguibles en ese contexto (Farfán, 1997). Es decir, gracias al surgimiento de la teoría del calor es que se pudo pasar del momento inicial al momento final de los descritos como 1 y 2 anteriormente. Fue entonces que A. L. Cauchy se dio a la tarea de trabajar en la elaboración de criterios de convergencia de series.

Pudiera pensarse que el proceder heurístico descrito era una característica propia del momento en el que se buscaban respuestas a problemas concretos. Sin embargo, nos parece que ese no es el caso; en el propio ámbito de la constitución de la teoría del cálculo, se recurre a este *estilo de procedimientos* (Farfán, 1997). Además de esto, consideramos importante destacar el hecho de que en el siglo XVII los científicos fueron capaces de trabajar en una atmósfera que, lejos de ser conveniente para la creación, resultaba verdaderamente complicada. En algún tiempo desde 300 a. C. la geometría Griega Clásica no solamente había impuesto restricciones sobre el dominio de las matemáticas, sino que había impreso un nivel de rigor, para las matemáticas aceptables, que a juicio de Kline (1972) obstaculizaban la creatividad. Las personas de ese siglo rompieron ambos enlaces. El progreso en matemáticas casi demandó una completa indiferencia de escrúpulos lógicos y, afortunadamente, los matemáticos se atrevieron a dar lugar a las *intuiciones e ideas físicas*. Por su parte los hombres del siglo dieciocho extendieron el cálculo y encontraron nuevas ramas del Análisis, aunque encontraron en el proceso todas las molestias del proceso creativo: errores, lagunas y confusiones. Los matemáticos produjeron un tratamiento puramente formal del Cálculo y las resultantes ramas del Análisis, sus habilidades técnicas fueron guiadas, sin embargo, no por un marcado pensamiento matemático sino por ideas intuitivas y físicas (Ob. Cit.).

Como podemos observar de la lectura de los párrafos anteriores se advierte que el proceder heurístico (analogías, inducción y reconocimiento de patrones) así como el uso de la intuición y el apoyo en ideas físicas, estuvo presente de una manera muy característica entre los científicos de los siglos XVII y XVIII. Así encontramos que la primera lista de criterios de convergencia para series, en términos modernos, dada por Cauchy, proviene de la comparación con series cuya suma es conocida. De este modo, la consideración del estado estacionario marcará una *ruptura epistémica:* pues se traslada el problema del cálculo de sumas de series infinitas al estudio de su convergencia (Farfán, 1997). Es así que según

Farfán (Ob. cit.) cuando los momentos 1 y 2 antes descritos, se unen, es decir, se une lo particular con lo general, es que surge la teoría de sucesiones, a manera de formalización. Sin embargo, hoy en día ambos fenómenos son equivalentes en el tratamiento que los textos escolares hacen del tema; no obstante, en el terreno conceptual esto no es así.

Ahora bien, ¿qué señalan las investigaciones en el campo del Análisis Matemático – entendido éste como la teoría del cálculo? En lo que sigue presentaremos lo que se reporta en la investigación acerca de la intuición, la visualización, la convergencia y la convergencia de sucesiones.

Antecedentes

Cuando un estudiante tiene éxito trabajando genuinamente en un sistema formal, simbólico y axiomático, algunas veces es considerado evidencia de fuerte habilidad matemática (Harel y Sowder, 1998; en Alcock y Simpson, 2005). Sin embargo, los educadores matemáticos a menudo se preocupan por aquellos estudiantes que pueden realizar operaciones con símbolos, pero que aparentemente son incapaces de relacionar los símbolos con "las cosas que ellos representan" (Sfard and Linchevsky, 1994; en Alcock y Simpson, 2005). Es aquí donde enfatizamos, tiene que aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje.

Así, en nuestra investigación la intuición será entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea (Crespo Crespo & Farfán, 2005), sin embargo, un modelo intuitivo no será necesariamente una reflexión directa de cierta realidad (muchas veces estará basado en una interpretación abstracta de esa realidad) y uno de sus objetivos es crear aparición de certeza (Fischbein, 1987). La intuición producto de las imágenes conceptuales del individuo, se aproxima más a las ideas que maneja la lógica cuanta más información tiene éste (individuo) es así que el desarrollo de esta intuición lógica se ha comprendido como uno de los mayores objetivos de la educación matemática avanzada (Crespo Crespo, 2005). Uno de los factores que influye para que la intuición sea acertada, es la experiencia (Polya, 1966; Burton, 1999), misma que se adquiere mediante la imitación y el uso (Polya, 1966). Destacamos que estamos conscientes del alcance de la intuición, ya que muchas veces nuestros modelos intuitivos, nos llevan a interpretaciones incorrectas e incompletas (Fischbein, 1987).

Con respecto a la convergencia y convergencia de sucesiones comenzaremos con el trabajo de (Robert, 1982) ya que es una de las primeras investigaciones que se realizaron acerca del tema. Este trabajo es acerca de la adquisición de la noción de convergencia de sucesiones numéricas y describe la aplicación de una secuencia que incluye la resolución de un cuestionario en grupos, donde posteriormente interviene el profesor para introducir la definición de la convergencia al pasar de la expresión dinámica ya retenida, a la formulación numérica y después a la formalización en la que se insiste sobre el juego de las traducciones y de ahí a la formulación geométrica para la cual, incluso se regresó sobre el punto de las traducciones anteriores, remarcando el comportamiento cuando $n \to \infty$, es decir, *la representación de las u_n's sobre un único eje*. Por otra parte, en el trabajo de (Sierpinska, 1987) se reporta que cuatro nociones parecen ser la principal fuente de obstáculos epistemológicos relacionados a límites: conocimiento científico, infinito, función y número real. Sierpinska esperó que el contexto de series infinitas ayudara a superar al menos algunos obstáculos relacionados con conocimiento científico, infinito y números reales.

Existen diversos estudios en la Matemática Educativa en los que la visualización ha sido el centro de la investigación, por ejemplo: (Cantoral y Montiel, 2001; Zimmerman y Cunningham, 1991), en particular nuestra investigación considera la definición presentada en (Cantoral y Montiel, 2001) en donde se considera a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico.

Una de las investigaciones en las que se ha vinculado la visualización y la convergencia de sucesiones es el trabajo de (Alcock y Simpson, 2005) en el que se abordaron problemas acerca de la convergencia de sucesiones y series hechos por estudiantes que no tienen tendencia a visualizar (tomando como 'razonamiento visual' la tendencia a introducir imágenes visuales al resolver problemas), además se confrontan los resultados con el trabajo de estudiantes que visualizan, descrito en (Alcock y Simpson, 2004), en el que se observa que estudiantes visualizadores tienen un fuerte sentido de los "objetos" y son a menudo rápidos y seguros al hacer un juicio acerca de la veracidad de un enunciado. Sin embargo, reportan que el éxito del trabajo visual en este nivel parece depender de que los estudiantes estén dedicados y sean capaces de establecer y usar relaciones entre su representación visual y la formal, si esto sucede los estudiantes están en una posición fuerte para usar su representación visual y así guiar su razonamiento formal. También observaron un rango de éxito y falla entre estudiantes que visualizan y aquellos que no visualizan. De ahí que sugieren que desde un punto de vista pedagógico no hay "presentación perfecta" que sea accesible y exitosa para todos los estudiantes.

El último trabajo al que queremos referirnos es el libro "Aproximaciones sucesivas y sucesiones" de Cantoral y Reséndiz (1997) donde encontramos que resulta importante analizar algunas de las representaciones gráficas que las sucesiones pueden tener, puesto que la visualización es un aspecto que suele ser poco aprovechado cuando se estudian sucesiones numéricas infinitas.

A manera de conclusión, los trabajos que analizamos muestran que existen diversos estudios en los que se está reportando la importancia de la intuición y la visualización al estudiar la Convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas, sin embargo, tenemos la sospecha de que en las aulas no pasa lo mismo, ya que en uno de los trabajos que encontramos acerca de la investigación en el aula se reporta que en el salón de clases los discursos son autoritarios y los formatos comunicativos son rígidos y poco reflexivos por parte del docente, en los que no se busca conocer cómo llega la información a los alumnos, así como la creencia de que los conocimientos que se pretende enseñar en la educación superior ya están acabados (Cantoral y Reséndiz, 2003). Es así que reconocemos en el Análisis Matemático una problemática en donde se da un mayor énfasis a los aspectos formales de la teoría considerando poco, o nada, a los procedimientos intuitivos y visuales

De esta manera identificamos en "La convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas" un escenario natural para poder explorar cómo la intuición y visualización de su teoría, influye en un alumno, pretendiendo con ello establecer un proceso de comunicación de las ideas en situación escolar con el fin de que los alumnos puedan construir la noción de Convergencia de Sucesiones, es decir, nuestra investigación propone estudiar la teoría de sucesiones atendiendo su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema, por medio de la visualización antes que de lo riguroso y formal. Ello en virtud de que en su origen, las demostraciones de algunos de los teoremas relativos a sucesiones se dejaban a la interpretación de los lectores, en el entendido que podrían ser visualizadas o intuidas por

ellos: "Como en todos los casos en los cuales se trata de la convergencia de una sucesión, Cauchy gusta de obviar todos los detalles al considerarlos evidentes" (Cauchy, 1821/1994, p. 165). Es así que consideramos que las Sucesiones fueron un tema muy intuitivo, muestra de ello es la frase anterior, sin embargo hoy en día la teoría de sucesiones tiene un trato riguroso y formal. Por lo que, derivada de las consideraciones anteriores, establecemos nuestra hipótesis principal de investigación: "La construcción de la noción de convergencia de sucesiones por parte de los estudiantes, precisa de un trato intuitivo mediante la visualización de una particular representación gráfica de las sucesiones en un sólo eje"
Por último, estableceremos mediante una tabla (en similitud a la tabla propuesta en Farfán, 1997, p. 127–128) algunos elementos necesarios para realizar un esquema de la génesis y desarrollo histórico de la noción de demostraciones de la convergencia de sucesiones, desde un punto de vista epistemológico.

Fenomenología intrínseca del concepto de convergencia de sucesiones en su génesis

Etapas	Referente Concreto	Constructor
Construcción de algunas sucesiones	Estudio de Aproximación	Cálculo de números particulares irracionales
Uso de sucesiones en la teoría de convergencia de series	Determinación del estado estacionario	Criterios de convergencia de Series Analogías del caso finito al infinito "Lema de comparación"
Ruptura Epistémica Teoría de la convergencia de sucesiones		
Estudio de la convergencia de sucesiones	Noción de límite de una sucesión.	Definición. S es el límite de (S_n) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in N$ tal que si $n \geq N$, entonces $\lvert S_n - S \rvert < \varepsilon$
	Unicidad de los límites	Teorema. Sea $(S_n)_N$ una sucesión cuyo límite existe. Afirmamos que el límite es ÚNICO.
	$\lim\inf$ y $\lim\sup$	Definición. Sea (S_n) una sucesión acotada en R. Definimos $\lim\sup S_n = \lim_{N\to\infty} \sup\{S_n : n > N\}$ $\lim\inf S_n = \lim_{N\to\infty} \inf\{S_n : n > N\}$
	Sucesiones de Cauchy	Definición. Una sucesión S es una sucesión de Cauchy si $\forall\ \varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $m, n > N$ implica $\lvert s_m - s_n \rvert < \varepsilon$.

Referencias bibliográficas

Alcock L. y Simpson A. (2005). *Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role.* Educational Studies in Mathematics, 58, 77-100.

Alcock L. y Simpson A. (2004). Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57: 1-32.

Burton, L. (1999). Why is intuition so Important to Mathematicians but Missing from Mathematics Education? *For the learning of Mathematics,* 19, 3, pp. 27-32.

Cantoral R. y Montiel, G. (2003). Una representación visual del polinomio de Lagrange, *Números. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, España*, 55, pp. 3-22.

Cantoral R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático,* México: Pearson Educación de México.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (1997). *Aproximaciones sucesivas y sucesiones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de maestría no publicada. Cicata, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 3, 287-317.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holland: Reidel Publishing.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from ancient to modern times,* vol. 2, USA, New York: Oxford University Press.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales,* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN México.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3, 3, 305-341.

Sierpinska, A. (1987). *Humatities students and epistemological obstacles related to limits.* Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

Struik, J. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800*, USA: Princenton University Press, Princeton, New Jersey.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning mathematics,* MAA Notes, 19.

LO PERIÓDICO EN LA RELACION DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS

Angeles Alejandra Ordóñez Morales, Gabriela Buendía Abalos
Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
Anlejandra@hotmail.com, gbuendia@hotmail.com
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: lo periódico, periodicidad; socioepistemología, comportamiento

Resumen
Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, en un contexto analítico queda en demostrar la veracidad de la proposición $f\ periódica \Rightarrow f'\ periódica$ usando las definiciones de derivada y de función periódica; sin embargo al trabajar en un contexto gráfico, podemos hacer evidente que el comportamiento de una función tiene dos componentes: el comportamiento en el eje X y otro en el eje Y; esta distinción es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que no lo es; al explorar dicha relación usando movimientos hemos encontrado movimientos que no son periódicos y cuya velocidad sí lo sería. En este trabajo reportamos algunas dificultades al enfrentarnos con esta relación en escenarios periódicos en los contextos analíticos gráficos y físicos.

Problemática

Una de las características del discurso matemático escolar tradicional ha sido centrarse en las definiciones, tal vez, por ello, deja de lado ciertos marcos de referencia donde pudiera resignificarse la matemática. Es así, que al considerar exclusivamente un contexto analítico, una función f es derivable en un punto x si existe

$$f'(x) = \underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y una función se cataloga como periódica o no periódica haciendo uso de la definición; esto es: una función es periódica si cumple la igualdad $f(x) = f(x+p)$ para todo x que pertenezca al dominio.
Uno de los principales resultados de la investigación en Socioepistemología es la formulación de epistemologías de prácticas en las que la imagen de un conocimiento matemático puro y limpio se deja de lado, para dar espacio a un conocimiento no lineal en el que las argumentaciones y herramientas lo reconstruyan continuamente (Cordero, 2003). En este trabajo abordamos el aspecto periódico en la relación de una función y sus derivadas debido a que en el discurso matemático escolar (DME), lo periódico en la relación $f - f'$ se maneja en un contexto analítico al considerar cuestiones como:

- Supóngase que f es diferenciable y periódica, con periodo a (es decir, $f(x) = f(x+a)$ para todo x). Pruebe que f' es también periódica.
- Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero f' sí.

Tal vez por ello, el referente obligado para hablar de lo periódico sean las funciones trigonómetricas más simples y, en consecuencia, la implicación f es periódica $\Leftrightarrow$ f' es periódica se trivializa al considerar únicamente estas funciones. Así, la propiedad periódica pareciera ser algo heredable de la función hacia su derivada y viceversa. Buendía (2004a) marca una diferencia entre *lo periódico* – termino con el cual tomaremos como todo aquello en un sentido institucional, cultural e histórico referente a la periodicidad – y *la periodicidad* en el sentido utilitario que le ha impregnado el sistema didáctico. Así lo periódico es un atributo que caracteriza no sólo la repetición que presenta un objeto matemático, sino la forma como dicha repetición se presenta de tal manera que en el análisis de un objeto matemático es relevante no sólo que se repita, sino cómo se repite (Buendía, 2004b)

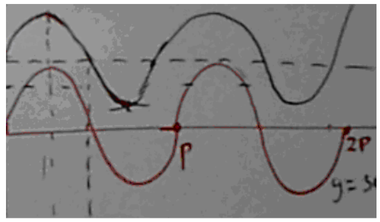
La socioepistemología de lo periódico

Buendía (2004b) propone una socioepistemología de lo periódico, señalando a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento de lo periódico y da cuenta que en un contexto de funciones y su representación gráfica, la predicción es un argumento en la construcción significativa de lo periódico. La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de la gráfica de un movimiento basándose en el estado actual lo que equivale a utilizar la información de la cual se dispone, surgiendo en primera instancia una búsqueda de alguna unidad de análisis que permita comparar estados futuros con el estado presente:
En el marco de la socioepistemología de lo periódico se ha considerado que el reconocimiento útil de lo periódico queda fundamentado en el desarrollo de prácticas sociales como la predicción. Ello favorecerá, además, la percepción del conocimiento matemático como un saber articulado. Más que fijar el foco de atención en fórmulas, definiciones u objetos matemáticos aislados, la práctica de predicción propone relaciones y da coherencia al conocimiento matemático a lo largo de todo el sistema educativo; en particular, al comportamiento periódico.(Buendía, 2005)

Lo periódico en la relación f-f’

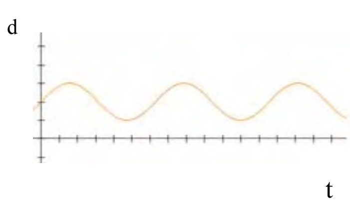
Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, en un contexto analítico queda en demostrar la veracidad de la proposición “Si es f periódica con periodo a y diferenciable, entonces f' es periódica” usando las definiciones de derivada y de función periódica; sin aludir al uso de herramientas de corte social que reconocen al individuo en un determinado contexto sociocultural – no exclusivamente matemático. Creemos que al trabajar esta relación en distintos contextos, podemos hallar argumentos y herramientas situacionales que la resignifican además suponemos que transitar entre contextos es posible a través del ejercicio intencional de prácticas asociadas al reconocimiento significativo de la derivada y lo periódico. En este trabajo aun no tenemos resultados finales pero si hemos encontrado dificultades al estudiar aspectos periódicos en la relación *f-f’*.
En pequeñas exploraciones realizadas donde hemos implicado la relación de una función y sus derivas en escenarios periódicos, notamos que al preguntar por la veracidad de las implicaciones $f\ \textit{periódica} \Rightarrow f'\ \textit{periódica},\ f'\ \textit{periódica} \Rightarrow f\ \textit{periódica},$ profesores y alumnos de matemáticas suelen dar las como verdaderas.
Por otra parte, hemos encontrado que cuando a los estudiantes se les da la gráfica de las funciones $f(x) = senx$ y $f(x) = x + senx$ y se le pide verificar sobre ellas la propiedad periódica dada por $f(x) = f(x+p)$. La mayoría de las veces concluyen en ambos casos que las funciones son periódicas ya que pueden identificar una p tal que la función fuera igual.

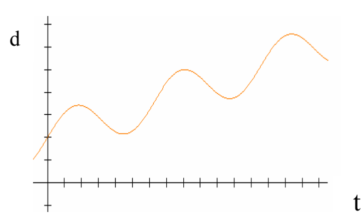
Este es un extracto de la respuesta de uno de ellos:

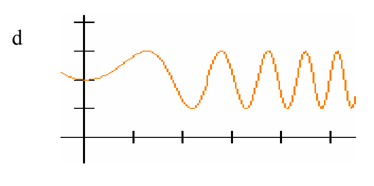


Puedo identificar una p tal que la función sea igual y, por lo tanto, ambas son periódicas

Luego, les pedimos obtener la gráfica de la función derivada y, nuevamente, analizar el cumplimiento o no de la propiedad periódica. En ambos casos, algunos con criterios gráficos, hallan la gráfica de la derivada, y concluyen que ambas son periódicas.
En este contexto gráfico, podemos hacer evidente que el comportamiento de una función tiene dos componentes: el comportamiento en el eje X y el comportamiento en el eje Y; esta distinción es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que "no es verdaderamente periódico" (Buendía, 2004b). Es importante hacer notar que es común que la gráfica de la función $f(x) = x + senx$ se le clasifique como periódica o, al menos con cierta periodicidad, ya que guarda una repetición regular en el eje X. Y esa es una característica que los estudiantes utilizan para obtener la gráfica de la derivada, manteniendo así su comportamiento periódico.
Muchas veces al enfrentar la propiedad periódica desde un contexto gráfico, se considera el comportamiento de repetición puntual y sin analizar, de manera global, el comportamiento presente en cada una de las coordenadas, o en el mejor de los casos el análisis hecho, se centra en la indagación del comportamiento de las abscisas dejando sin sentido el resto: se hace énfasis únicamente en el comportamiento de la variable independiente dejando de lado el de la imagen. Estos elementos de corte gráfico también nos permiten sostener la importancia de estudiar los aspectos periódicos en la relación de una función y sus derivadas.
Por otra parte, desde un contexto físico consideremos el movimiento de una partícula que se mueve en un ir y venir sobre una línea recta, variando su velocidad y su aceleración. En Buendía, (2004b) se da evidencia de la problemática acerca de lo periódico: *La asociación de lo periódico con cualquier tipo de repetición.* Propone gráficas que representan movimientos, en las que la repetición es una característica presente en todas y se manifiesta a través de tres comportamientos distintos. Esta distinción se basa en la diferenciación entre el comportamiento presente en el tiempo (eje x) y aquél que se presenta en la distancia (eje y).







Cuando se ha explorado la relación $f - f'$ en este contexto hemos usado movimientos de objetos. Nos topamos que al considerar la modelación de un movimiento a través de la función $f(x) = x + senx$, resultaría que mientras el movimiento no es periódico, su velocidad $f'(x)$ sí lo sería. Sin embargo las respuestas que hemos obtenido es: el movimiento es periódico y creemos que el argumento usado está basado en el comportamiento de la velocidad del objeto.

Así nos enfrentamos a ciertos tipos de movimientos que no son periódicos pero que sí mantienen algunas de sus características periódicas, como la velocidad y por consecuencia, su aceleración.

Así en un futuro para nuestro trabajo de investigación, creemos que estudiar la relación *f-f'* en un escenarios periódicos en el tránsito de los contextos grafico, físico y analítico nos ayudará encontrar elementos socioepistemológicos para resignificar dicha relación debido a que la periodicidad es un concepto que transita entre diferentes disciplinas escolares, y dar cuenta, que no puede quedar relegada al aspecto analítico. El comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un fenómeno descrito desde un contexto físico y gráfico.

Algunos antecedentes

Estudios sobre la derivada y su primitiva en el marco de la matemática educativa reportan que los estudiantes son capaces de derivar una función pero no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivación o de reconocer la derivada de una función como otra nueva función y, por lo tanto, susceptible de volver a derivar (Cantoral 1997**).** González (1999) señala que el concepto de derivada se construye sólo si transita entre las variaciones sucesivas, es decir cuando se puede establecer un uso simultaneo entre la función y sus derivada.

Cantoral y Mirón (2000) propone como objetivo, analizar el efecto del aprendizaje con respecto a las relaciones entre la función y su derivada a la luz del uso de los graficadores, tales como las calculadoras. Para lograr este objetivo diseñó una ingeniería didáctica donde, además de las tradicionales componentes epistemológicas, cognitiva y didáctica, se incorpora otra que tiene que ver con el aspecto social. Las relaciones que en este trabajo se buscan establecer entre $f - f'$, básicamente se pueden clasificar en: a) dada f, de algún modo, se busca obtener f'; b) dotar a f' de un significado que le permita ser entendida a su vez como una nueva función; c) dada f', de algún modo, se busca construir f.

Dolores (1998) aborda el problema la escasa comprensión de las ideas y conceptos variacionales que subyacen en el concepto de derivada. Parte de la hipótesis de que el desarrollo de ideas variacionales puede favorecer una mejor comprensión de este concepto; propone.

En las investigaciones que hemos revisado de la relación $f - f'$, no hemos encontrado una que la estudien en el marco de las funciones con comportamientos periódicos. Creemos que estudiar lo periódico en la relación $f - f'$ nos brindara marcos de referencia para obtener significados funcionales en ella.

Comentarios finales

Al considerar exclusivamente un contexto analítico, una función se cataloga como periódica o no periódica haciendo uso de la definición; esto es: una función es periódica si cumple la igualdad $f(x) = f(x+p)$ para todo x que pertenezca al dominio, sin aludir al uso de herramientas de corte social que reconocen al individuo en un determinado contexto sociocultural – no exclusivamente matemático. Estas herramientas de corte social, como el comportamiento de una función, enriquecen la argumentación alrededor de lo periódico y se resignifica este aspecto de lo periódico de las funciones.

Creemos que al estudiar aspectos socioepistemológicos de la relación $f - f'$ se favorece un transito entre los diferentes contextos que ayudará a resignificar la relación de una función y sus derivadas para el caso de lo periódico, de tal manera que no puede quedar relegada al aspecto analítico ya que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento desde un contexto físico y gráfico.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004a). Qué enseñar en Matemáticas: una visión socioepistemológica. *Pakba*l. *Facultad de Ingeniería Unach.* Año 3, Nov. 2004. Chiapas, México. Paginas 18-23

Buendía, G. (2004b). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Tesis de doctorado publicada. México: Cinvestav.

Buendía, G. (2005). Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a. Vol. 18, (pp. 451-456). México.

Cantoral, R (1997). Matemática Educativa*. Serie: Antologías, número 1. Programa Editorial del Área de Educación Superior.* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, pp. 81-98.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a. Vol. 16, Tomo 1, (pp.73-78). México.

Dolores, C. (1998). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a. Vol. 11(pp.6-10). Colombia.

Gonzáles, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN.

Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3 (3), 265-292

Spivak, M. (1993). Calculus. Editorial Reverté 2ª edición. México.

ESTUDIO DE LO PERIÓDICO EN DIFERENTES CONTEXTOS: IDENTIFICACIÓN Y USO DE LA UNIDAD DE ANÁLISIS

Rosa Isela Vázquez Camacho, Gabriela Buendía Abalos
Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
iselavaz@hotmail.com , buendiag@unach.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: socioepistemología, periódico, predicción, unidad de análisis

Resumen
La periodicidad como propiedad es identificada de manera natural por los individuos y resulta habitual el uso de los significados creados de forma compartida y que éstos se trasladen en contextos diferentes en donde son aplicados. Los resultados obtenidos en investigaciones como Buendía (2004, 2005a) y Alcaraz (2005) aportan no sólo elementos de corte cognitivo, sino herramientas que fungen como argumentos válidos en el reconocimiento de la naturaleza periódica. Lo periódico puede conformar todo un lenguaje, abarcando los ámbitos culturales, históricos e institucionales y procurándole un carácter útil al conocimiento matemático. La unidad de análisis es el elemento que tiende un puente entre un tratamiento empírico de la periodicidad y uno científico (Montiel, 2005), lo cual favorece una construcción significativa del conocimiento matemático.
Nuestro marco teórico es la aproximación socioepistemológica la cual centra su atención en el examen de las prácticas sociales, entendidas como las acciones o actividades realizadas intencionalmente con un objetivo de transformación y con ayuda de herramientas que favorecen la construcción del conocimiento matemático, incluso antes que estudiar a los conocimientos mismos.

Lo periódico

La disciplina matemática educativa atiende problemáticas relacionadas con la construcción de saberes en el área del conocimiento de las matemáticas. En este marco se han identificado fenómenos didácticos relacionados con la enseñanza del cálculo en el nivel superior; específicamente, abordaremos uno relacionado con la enseñanza de lo periódico en un contexto de gráficas en el que se reconoce la vinculación irreflexiva de lo periódico a la función seno y el carácter hereditario de la periodicidad (Buendía,2004).

En la socioepistemología de lo periódico, surge una herramienta útil en el marco de la práctica de predicción, misma que será la idea primigenia en diferentes situaciones periódicas. Le hemos llamado *unidad de análisis* e irá tomando diferentes formas. La identificación y uso de la unidad de análisis, en su aparición en contextos tanto gráficos como numéricos (tablas), es una herramienta favorecida por la acción de predecir en distintos contextos; la reconstrucción de significados que se logra, permite que lo periódico transite en distintos escenarios predictivos. La práctica de predicción da coherencia a la periodicidad a lo largo de todo el sistema educativo.

Tratamiento de lo periódico en la currícula escolar actual

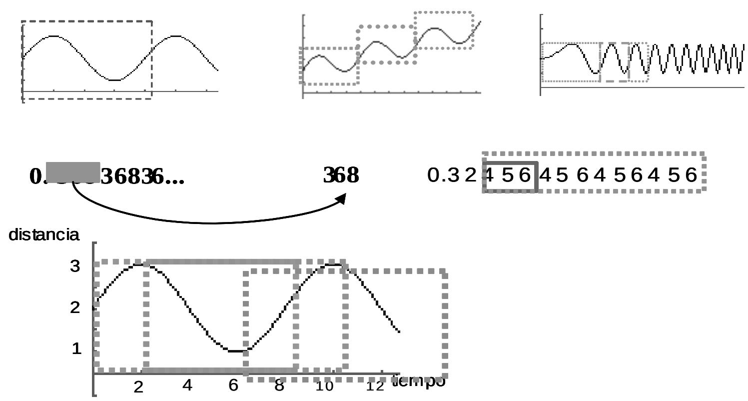
En el nivel básico se aborda lo periódico a través de contenidos como series icónicas en las que se pide al estudiante que complete la serie. En el caso del nivel medio, la periodicidad se aborda en progresiones, mientras que en el nivel medio superior a través de series y sucesiones y funciones trigonométricas. Por último en el nivel superior, caso concreto el cálculo, se aborda a través de funciones, ecuaciones diferenciales y funciones trigonométricas, en el que la actividad del estudiante se ve reducida a realizar bosquejos de una gráfica.

La unidad de análisis

En las actividades que se realizan en contextos científicos, culturales y sociales se puede dar cuenta de que, de manera implícita o explícita, la identificación y uso de la unidad de análisis resulta una acción "natural" para el individuo cuando se le presentan actividades relacionadas con tener que predecir, aun cuando el contexto sea de forma verbal o una práctica relacionada con su quehacer cotidiano.

Para reconocer la condición periódica de una función, puede emplearse la igualdad $f(x+p) = f(x)$ que identifica la propiedad periódica para una p en el dominio de f. La unidad de análisis estaría identificada con p; sin embargo, el reconocer el comportamiento periódico va más allá de la aplicación o comprobación de dicha igualdad. Buendía propone la necesidad de identificar el comportamiento en cada uno de sus componentes, esto es, la variable dependiente y la independiente. Esos comportamientos estarían presentes en la identificación y uso que se haga de la unidad de análisis para poder predecir. La práctica de predicción beneficia ese reconocimiento.

Dentro de la socioepistemología de lo periódico propuesta por Buendía (2004), resulta de interés particular detenerse a considerar el uso que se hace de la unidad de análisis en las gráficas de movimientos. Este se da en dos sentidos generales, el primero es el traslado del futuro al presente en el que se emplea la división como herramienta, y una segunda instancia es ir del presente al futuro, mediante la reproducción de la unidad encontrada. Entonces, al predecir la posición, surge en primera instancia la búsqueda de alguna unidad de análisis que posibilite la comparación de estados futuros con el estado presente.



Por otra parte, en un contexto de tablas numéricas, Alcaraz (2005) da cuenta de la práctica de predicción con relación a lo periódico y hace uso de la descripción de movimientos repetitivos a través de ellas. Las tablas numéricas sirven para registrar los valores que toma cierta función ya que pretende que las gráficas no entren, necesariamente, al escenario argumentativo. Así, parte de un tratamiento numérico de lo periódico, conjeturando que a través de la práctica de predecir sobre fenómenos de movimientos repetitivos, se construye lo periódico. Enuncia el privilegio concedido al contexto algebraico y gráfico en el discurso de la matemática escolar. Da evidencia de la aparición de una *unidad de análisis*, misma que se registra en el análisis de los datos numéricos que se muestran en las tablas, en las que van sumando hasta llegar al valor próximo del tiempo solicitado. Particular atención se da a las tablas en las que la repetición se encuentra en el tiempo y distancia.

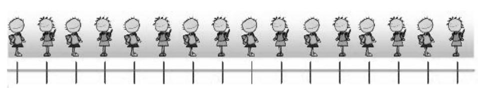
La importancia de esta unidad de análisis es que marca un primer momento en la resignificación de lo periódico ya que provoca una distinción útil entre *aquello que se repite y el cómo se repite.* Ello también nos habla de que dicha unidad de análisis tiende un puente entre un tratamiento empírico de la periodicidad y uno científico (Montiel, 2005), lo cual favorece una construcción significativa del conocimiento matemático.
En este trabajo, analizaremos la unidad de análisis y sus usos, explorando distintos contextos, que se emplean a lo largo de la curricula escolar, tomando como antecedente la socioepistemología de lo periódico propuesta. Se examinará cómo están presentes los elementos que la conforman; en particular, su identificación y uso en el marco de la práctica de predicción.

Metodología

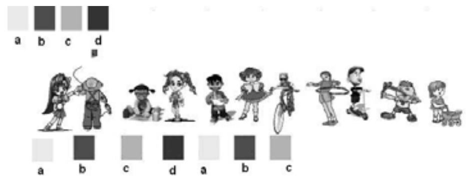
La construccion de las secuencias se hace partiendo del esquema que se contempla en nuestra vision socioepistemológica, en la que el propósito es exponer intencionalmente la práctica de predicción y observar lo que sucede entre los participantes, rescatando argumentos, interpretaciones y consensos, en la puesta en escena. En ella se ponen de manifiesto la identidad, cultura y diversas interpretaciones del fenómeno en cuestión.
A continuación mostramos las secuencias con las que se explorará las actividades que realizan los estudiantes de distintos niveles, básico, medio, medio superior y superior, para intentar dar respuesta a cuestiones qué sucede en distintos escenarios periódicos. De manera puntual, ¿cómo se conforma la unidad de análisis?, ¿cuál es el uso que se le da a la unidad de análisis? ,¿de qué manera influyen los entornos en su uso y conformación?, ¿qué herramientas surgen en la actividad predictiva, según el entorno?

Sucesiones

1.-De la siguiente fila de niños, indica si es un niño o una niña, quien está formando en la marca número 20? En la fila el lugar número 102 ¿lo ocuparía un niño o una niña?

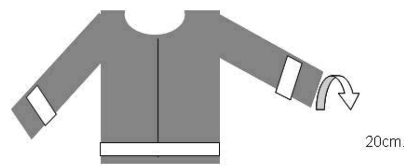


2.- Para terminar la semana quiero regalarle chicles de sabores de menta (a), tutifruti (b), hierbabuena (c) y canela (d) a mis amigos del colegio, siguiendo ese orden. Ellos son 25. Quiero saber ¿de qué sabor le tocará al último de la fila? ¿De qué sabor le tocará a mi amigo número 25?

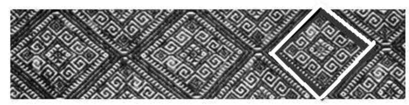


3.-Si voy a decorar una pared de mi habitación que mide cuatro metros con una cenefa de figuras, como la de la muestra. Necesito saber: ¿qué figura quedará en la esquina?

4.-Supóngase que tenemos una muestra de los siguientes bordados para adornar la orilla de los puños de un camisa de manta. El puño de la camisa mide 20 centímetros.



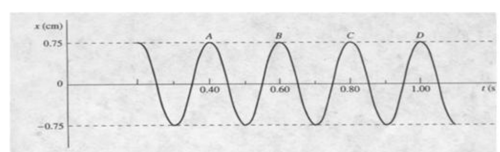
Al adornar nuestra camisa, ¿la figura del bordado que está marcada en color blanco quedará completa en el puño?



Funciones

1. La siguiente gráfica describe el movimiento de una partícula sobre una recta horizontal, durante un tiempo determinado. La distancia (x) se mide en centímetros y en tiempo (t) en segundos.

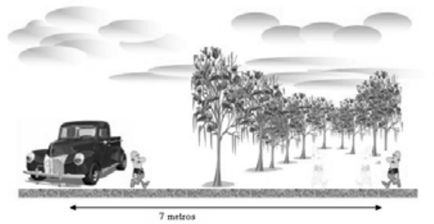
a) Describa el movimiento de la partícula
b) ¿Cuál es la posición de la partícula a los 3 segundos?
c) ¿Cuál será su posición en el segundo 124?



2. Suponga que tomamos datos del recorrido de una persona, durante un tiempo determinado. Describa cómo se mueve la persona. En el segundo 124 ¿en dónde se encontrará?

T	D
1	2.3
2	4.6
3	6.9
4	4.6
5	2.3
6	0
7	2.3
8	4.6
9	6.9
10	4.6
11	2.3
12	0

3.- La cosecha de frutas se recolecta en canastos que se llevan a un camión a 7 metros de distancia del huerto. El recorrido de ida y vuelta se hace en un tiempo de 25 segundos. , Cuatro minutos después de haber iniciado, ¿en dónde se encontrará el recolector? ¿En qué lugar estará en el segundo 152?



A manera de conclusión

Pretendemos mostrar cómo la identificación y uso de la unidad de análisis permitirá la articulación de los diferentes contextos y consecuentemente un saber matemático respecto a lo periódico más funcional y significativo. La identificación y uso de una unidad de análisis surge al pretender predecir la posición de un móvil que nos va a permitir comparar estados futuros con estados presentes del objeto en cuestión.

En las exploraciones intentaremos constatar que teniendo como marco de referencia la socioepistemologia de lo periódico, de manera particular en el momento de la identificación y uso de la unidad de análisis, que ésta se conforma de acuerdo al entorno en que se presenta una actividad de corte predictivo y se usa de formas distintas. Aunado a ello, dar cuenta que la identidad y formación académica del individuo es elemento fundamental de la construcción de ésta. Así como que los participantes cuentan con referentes distintos y éstos les proveen de herramientas y argumentos diferentes para poder establecer la unidad de análisis, y en un segundo momento predecir la posición de un móvil; y una fuerte presencia de argumentos analíticos en la secuencia de funciones, sin embargo en el caso de las actividades de secuencias se constituye la unidad de análisis de distintas formas.

Con la realización de este estudio se procura dar evidencia de que todo aquello que tiene que ver con la periodicidad en un sentido institucional, histórico y cultural puede conformar un lenguaje que le da un significado útil al conocimiento matemático. Las puestas en escena den cuenta de que la unidad de análisis, se conforma y transforma de acuerdo a los diferentes contextos en los que se trabaja, está implícita la articulación que se pretende obtener con intencionalidad. La identificación de patrones y manejo de estos, den cuenta de cómo la práctica social de predicción, se transforma en el argumento que a través de significados y procedimientos situacionales favorece una reconstrucción de significados acerca de lo periódico.

El primer momento puede identificarse como un reconocimiento del comportamiento del objeto. En un segundo momento el estudiante se encuentra inmerso en la búsqueda de una unidad de análisis para manipularla auxiliándose de operaciones como la división o la multiplicación en un intento de establecer la posición. Así, los diferentes contextos abordados revelen la convergencia de acción del individuo en la vigente necesidad de establecer y reconocer una unidad de análisis como una herramienta para poder predecir. En el ejercicio de esa práctica y en el reconocimiento de dicha herramienta pueda hablarse de una resignificación de lo periódico.

¿Cómo se conforma la unidad de análisis? Esta se constituye a partir de dos condiciones, la selección de un segmento que aparece de forma constante y que brinde la posibilidad de movilidad sin que rompa el orden original presentado, en cuanto a ¿Cuál es el uso que se le da a la unidad de análisis? El uso radica en que le permita el desplazamiento a futuro y de manera inversa para poder predecir, ¿de qué manera influyen los entornos en su uso y conformación? La influencia se observa como el primer referente sociocultural y escolar que posee el estudiante, ¿Qué herramientas surgen en la actividad predictiva, según el entorno? Las operaciones como suma, multiplicación y división, sin embargo en el caso emplear figuras o cenefas estas se operan de manera grafica en un primer momento hasta que el estudiante construye la unidad de analisis y da inicio al uso de operaciones como las antes mencionadas.

Lo anterior nos coloca en la condición de mostrar como la identificación y uso de la unidad de análisis permitirá la articulación de los diferentes contextos y consecuentemente, poder presentar un saber matemático respecto a lo periódico más funcional y significativo

Referencias bibliográficas

Alcaraz, R. (2006) *Lo periódico, una construcción de la numerización del movimiento*. Tesis de maestría no publicada. UAGRO, Acapulco, Guerrero, México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis doctoral no publicada Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Buendía, G. (2005a). *Una socioepistemología de la periodicidad en un marco de prácticas sociales*. Resumen para el Premio del Simón Bolívar. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN. México, D.F, México

Buendía, G. (2005b). *Lo periódico: una revisión en el marco de la socioepistemología.* Capítulo aceptado para su publicación por la UAGRO.

Duran, R. (1994). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN México, D.F, México.

Montiel, G. (2005) *Estudio socioepistemologico de la función trigonometrica* Tesis de doctorado no publicada. Cicata, IPN, México, D.F, México

Libros de texto gratuitos de matemáticas. SEP, Nivel Básico, Serie Ciclo Escolar 2003-2004.

Shama, G. (1998). *Understanding Periodicity as a Process with a Gestalt Structure*. Educational Studies in Mathematics (35) 255-281

Suárez (2000) *El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

USO DE LAS IDEAS MATEMÁTICAS Y CIENTÍFICAS DE LOS INCAS, EN LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Enrique Huapaya Gómez, César E. Salas Valverde
Asociación Educativa "ELIM" (Perú)
ehuapaya@pucp.edu.pe, salasvc@hotmail.com

Campo de investigación: etnomatemáticas. Nivel educativo: básico
Palabras clave: etnomatemática, geometría, aprendizaje, incas, estrategias

Resumen
Considerando una aproximación Etnomatemática, entendida como el estudio de los procesos matemáticos, símbolos, jergas, mitologías, razonamiento, practicados por grupos culturales identificados (D'Ambrosio, 2001); valoramos las posibilidades didácticas que pueden desprenderse del uso de las ideas matemáticas utilizadas en la cultura Inca.
El trabajo presenta dos partes. Una valoración del uso de la matemática en la cultura Inca y otra relativa a sugerencias didácticas. Se propone por ejemplo: que los alumnos reconozcan qué conocimientos, patrones, objetos o formas geométricas usaban los incas en sus diversas manifestaciones culturales y tecnológicas. A partir de estas "tareas" podemos introducir al estudiante en el hermoso mundo de la geometría, haciendo que aprendan de un modo bastante intuitivo y natural (Oscar Pacheco Ríos, 1999).

Introducción

La Etnomatemática es una disciplina de la Matemática Educativa que se enriquece de diversos campos y aspectos: el histórico, filosófico, geográfico, antropológico, etc. Esta disciplina se orientada a:
1) contextualizar multiculturalmente los procesos de enseñanza - aprendizaje de la matemática y
2) Establecer conexiones entre cultura, matemática, historia, geografía, antropología y otras ciencias sociales.
La presente experiencia que vamos a compartirles, tuvo como antecedente, el trabajo realizado con un grupo de alumnos de 1er año de Educación Secundaria de la Asociación Educativa "Elim", con ocasión de nuestra participación en la feria de Ciencias CIENTEC 2004 realizada en Lima - Perú. Este trabajo se tituló "Etnomatemática Inca".
A partir de esta experiencia nos preguntamos;
1) ¿Qué conceptos matemáticos (geométricos) conocían los Incas?,
2) ¿qué avances tecnológicos les permitieron desarrollar?, y 3) ¿cómo podemos aprovechar pedagógicamente estos saberes?
Es así que proponemos un diseño didáctico que aporte estrategias orientadas a integrar y utilizar nociones y principios de la Etnomatemática para fines didácticos, específicamente en la enseñanza – aprendizaje de la geometría en el primer año de educación secundaria.
Asumimos que es importante esta investigación, porque nos ayudará a reconstruir y apreciar las ideas matemáticas y científicas de la Cultura Inca, así como aprovechar estos resultados para fines didácticos.
Cuanto planteamos el desarrollo de esta investigación nos propusimos los siguientes:

Objetivos

- Presentar una valoración de las ideas matemáticas que conocían los Incas, reflejado en sus diversas manifestaciones culturales como Arquitectura, Urbanismo, Cerámica, Orfebrería, Textilería, Agricultura, Técnicas de irrigación.
- Sugerir como podemos aprovechar pedagógicamente estos saberes para el diseño de estrategias de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el primer año de secundaria.

Metodología

Se hizo estudios observacionales y descriptivos, para lo cual se recurrió a fuentes de información escrita, gráfica, virtual, visita a museos, luego se analizó esta información para inferir resultados. El conocimiento de la Etnomatemática en el campo educativo brinda muchas posibilidades didácticas y pedagógicas.
Esta información fue recolectada mediante el trabajo realizado con un grupo de alumnos de 1er año de Educación Secundaria de la Asociación Educativa "Elim", con ocasión de nuestra participación en la feria de Ciencias CIENTEC 2004.
Para identificar y comprender los conocimientos etnomatemáticos de la cultura incaica, se ha hecho un análisis de diversas fuentes arqueológicas como la cerámica, textilería, tecnología y restos arquitectónicos, después de lo cual se logró identificar algunas ideas matemáticas (principalmente geométricas) que los incas utilizaron en el desarrollo y evolución de su civilización, como por ejemplo: trasformaciones del plano (simetrías), ángulos, semejanzas, proporcionalidad, proyecciones, figuras geométricas planas y del espacio, escalas, paralelismo y perpendicularidad.

Resultados

Cuando se habla de los conocimientos matemáticos de la cultura incaica, generalmente se hace referencia a su organización administrativa decimal y a sus famosos quipus, yupanas y quipucamayocs, dejándose de lado otros aspectos importantes de sus conocimientos etnomatemáticos, los cuales tuvieron gran utilidad práctica y en la actualidad son poco conocidos por falta de una explicación y divulgación adecuada.
Nosotros identificamos que los incas, recogiendo toda la experiencia y conocimientos de las culturas que conquistaron, alcanzaron importantes logros tecnológicos los cuales podemos ver en su arquitectura, cerámica, textilería, agricultura y otras manifestaciones culturales.
Para alcanzar dichos logros tecnológicos, podemos conjeturar que, utilizaron como herramienta fundamental una incipiente matemática. Esto se muestra en la tabla siguiente.

MANIFESTACIONES CULTURALES	CONCEPTOS GEOMÉTRICOS	APLICACIONES
ARQUITECTURA	Paralelismo Perpendicularidad Reticulados	Usaron estas ideas para modelar sus palacios, templos, fortalezas, tambos y otros edificios (puertas, ventanas, hornacinas y paredes).
URBANISMO	Semejanzas Congruencias Proporcionalidad Escalas	Aplicaron estas nociones para diseñar el plano de sus ciudades y planificar su crecimiento ordenadamente.
CERÁMICA ORFEBRERÍA	Cuerpos de revolución Sólidos geométricos y planos.	En el modelado de sus ceramios (keros, huacos, aríbalos, vasos ceremoniales, platos, vasijas) usaron los cuerpos de revolución, conos truncados, cilindros.
TEXTILERÍA	Paralelismo -Perpendicularidad. Simetrías. Traslaciones. Rotaciones. Semejanza. Proporcionalidad.	Utilizaron estas nociones para el diseño de sus dibujos, estampados y grabados. De manera que el acabado sea estético, armónico y elegante.
AGRICULTURA TÉCNICAS DE IRRIGACIÓN	Proporcionalidad. Escalas. Diseño de maquetas y modelos. Proyecciones.	Los incas usaron figuras a escala tanto en 2D como en 3D para reproducir campos de cultivo, canales de irrigación, modelos a escala, etc.

Cuadro 1. Ideas matemáticas utilizadas por los Incas

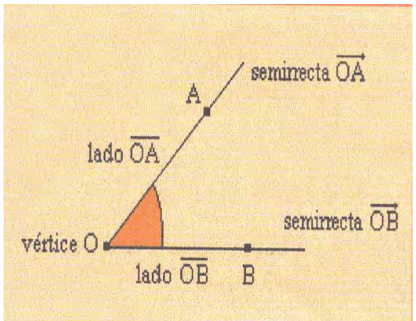
Estrategia didáctica

Es importante destacar que; como docentes debemos hallar conexiones entre la Etnomatemática y nuestra historia, presentando una enseñanza de la matemática integrada en la historia y la cultura. La tendencia actual es concebir la Matemática como un puente al arte, tecnología, juegos, literatura, y otras áreas. El NCTM, en sus estándares establece en sus primeros objetivos “aprender a valorar la matemática”.Ello implicará una ventaja pedagógica y didáctica al conseguir que los objetos de estudio tengan realidad en el contexto de otras materias. De esta manera podremos enriquecer nuestro repertorio de estrategias y diseñar situaciones didácticas orientadas a mejorar la comprensión conceptual de los temas de Geometría en el primer año de Educación Secundaria.

Al respecto se propone:

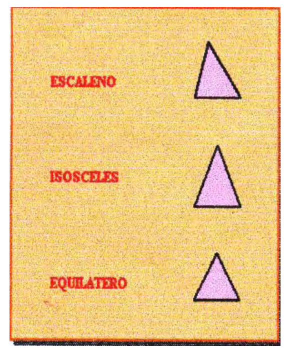
Actividad inicial: Que los alumnos reconozcan qué patrones o formas geométricas usaban los incas en el diseño de sus mantos.

- ¿Qué objetos geométricos utilizaban en los dibujos de sus ceramios?
- ¿Qué conocimientos matemáticos (geométricos) emplearon en su arquitectura y urbanismo?
- ¿Qué patrones o formas geométricas usaban los incas en el diseño de sus mantos?

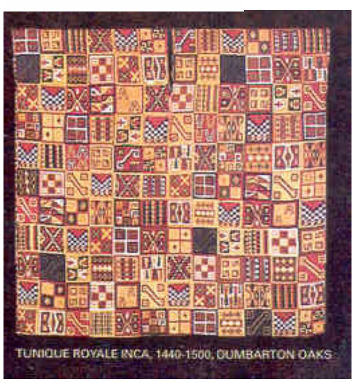


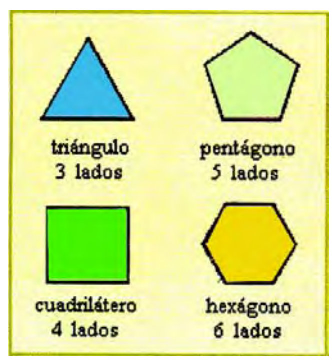
PIEDRA DE LOS DOCE ÁNGULOS

CERÁMICA INCA

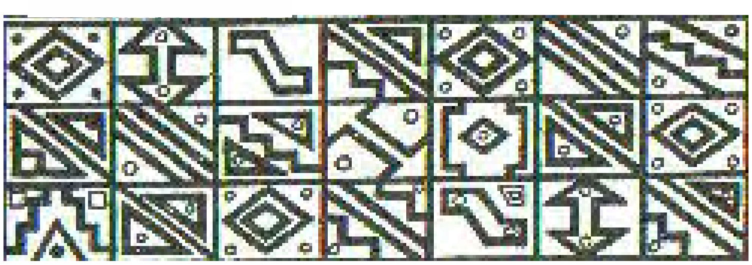


TEXTILERIA INCA





TOCAPUS INCAS



Proceso

A partir de estas “tareas" podemos introducir al estudiante en el hermoso mundo de la geometría, haciendo que aprendan geometría de un modo bastante intuitivo y natural. En el momento básico o de proceso, se presentan fichas y diapositivas en las que el alumno visualiza elementos geométricos, usados por los incas, en sus diversas manifestaciones tecnológicas.

- Los alumnos describen y reconocen patrones. Elaboran cuadros u otros organizadores visuales con información obtenida, luego socializan dicha información.
- El docente amplía la información recogida por los estudiantes, aclara dudas y formaliza conceptos y nociones.

Momento práctico

a) El profesor orientará a los alumnos para que, recolecten imágenes e información sobre las diversas manifestaciones culturales y tecnológicas Incas, de modo que aprecien y reconozcan formas geométricas y/o conceptos matemáticos. De acuerdo a la siguiente matriz:

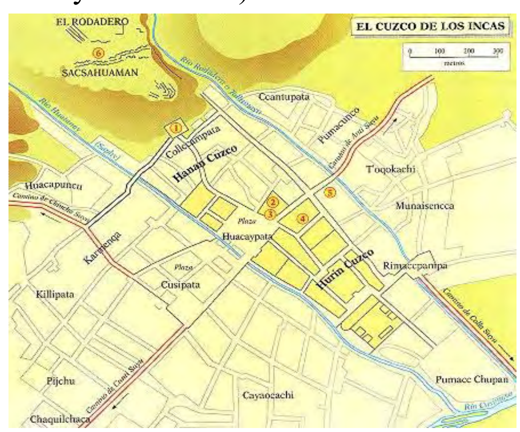
Manifestación cultural/tecnológica Inca	Concepto geométrico(matemático) asociado

b) Se pedirá que los alumnos diseñen maquetas y otros modelos a escala de los ceramios, templos y palacios incas, bosquejen planos de las principales ciudadelas así como grabados de sus mantos y tejidos (Tocapus).

- Ello planteará interesantes desafíos a los estudiantes, como por ejemplo: ampliación – reducción de figuras (noción intuitiva de proporcionalidad y semejanza), transformaciones del plano (simetrías, traslaciones y reflexiones).

MACHUPICCHU

CIUDADELA DE MACHUPICCHU



MORAY : Granja experimental Inca

- Resolverán ejercicios y problemas sobre: ampliación – reducción de figuras.
- Proporcionalidad y semejanza.
- Transformaciones del plano (simetrías, rotaciones, traslaciones y reflexiones). Usarán instrumentos tales como compás, transportador y escuadras.

Salida: Se evaluará la comprensión intuitiva y conceptual de las nociones geométricas más importantes, aplicadas por los incas.

- Se plantean y resuelven problemas de aplicación y modelación, a partir de la información obtenida por los estudiantes (búsqueda de patrones geométrico-numéricos).
  Se pide que representen geométricamente nociones y conceptos.

Perspectivas: La Etnomatemática plantea otras investigaciones como por ejemplo:

- Identificar qué herramientas o artefactos usaban los incas para contar, medir, registrar, codificar, decodificar, modelar y comprender su mundo.
- ¿Qué cogniciones usan miembros de otras comunidades?, es decir ¿cómo piensan?, ¿cómo aprenden?
- ¿Cómo identificar y sistematizar su "conocimiento matemático"?, ¿Qué sistemas semióticos usaban en sus manifestaciones culturales?
- ¿Qué estrategias deben aplicarse para enseñar matemática a grupos multiculturales?
- ¿Cómo diseñar un curriculum multicultural pertinente?
- ¿De qué manera se puede producir material didáctico contextualizado para dichos grupos?

Referencias bibliográficas

Blanco, H. Universidad del Valle (2005). *Matemáticas en contextos culturales.* Obtenido en octubre 13, 2005, disponible en:
http://iep.univalle.edu.co/New_iep/Documentos/MemoriasConferencias/Conferencia01.ppt

D'ambrosio, U. (2001). Paz, Educação Matemática e Etnomatemática. En Teoria e Prática da Educação (Maringá,PR), vol. 4, nº 8, junho 2001; pp.15-33. Disponible em http://etnomatematica.univalle.edu.co/articulos/Ambrosio2.pdf

Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas (FICOM - 2001). Boletín. *Las matemáticas de los incas.* Obtenido en octubre 12, 2005, disponible en http://www.missouri.edu/~chavezo/ficom8.pdf

Fossa, L., Brokaw, G., Silverman, G. y Contreras, D. (Junio 20, 2005). Suplemento Diario "El Peruano" Identidades.

Pacheco, O. (1999). *La Etnomatemática.* Obtenido en marzo 27, 2005, de http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/docnopub/etnomatematica.html.

Parra, A. (2003). *Acercamiento a la Etnomatemática*: Tesis no publicada. Universidad Nacional de Colombia Obtenido en marzo 26, 2005, disponible en http://etnomatematica.univalle.edu.co/articulos/tesis.pdf

Schroeder, J. (1999). *¿Cómo podemos acercarnos a las diferentes etnomatemáticas?* Ministerio de Educación, Perú. Impreso por el Ministerio de Educación. Perú.

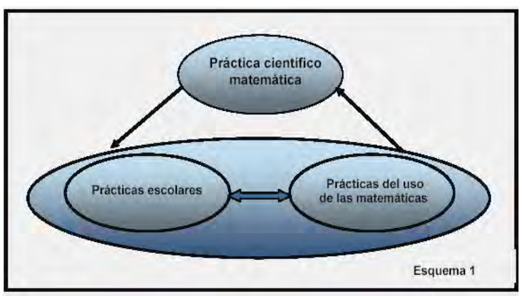
¿CÓMO EN EL EJERCICIO DE LA PRÁCTICA DE MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE RESORTES SE CONSTRUYEN MODELOS MULTILINEALES?

Maria Esther Magali Mendez Guevara, Jaime L. Arrieta Vera
FM, Unidad Académica Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
mguevara83@hotmail.com, jaime.arrieta@gmail.com
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio, superior
Palabras clave: Práctica social, modelación lineal, modelos

Resumen
Este artículo se desprende de una investigación realizada por Mendez (2006), la cual se desarrolló bajo una visión socioepistemológica y se inscribe en la línea de investigación llamada las prácticas sociales en la emergencia del conocimiento matemático.
El objetivo de la investigación fue aportar evidencias sobre cómo los estudiantes del nivel medio superior, construyen lo multilineal en el ejercicio de la modelación de un sistema de resortes. La tesis central que se planteó es que lo multilineal se devela en la complejidad de lo lineal. Para concretar nuestro objetivo y validar nuestra tesis, elaboramos un diseño de aprendizaje, basado en la práctica social de modelación, el diseño se exploró a papel y lápiz, y en un contexto virtual, auxiliándonos de un simulador del fenómeno.

Problemática

La investigación que se desarrolló en Mendez (2006), tuvo como antecedentes los trabajos de Arrieta 2003; Galicia, 2004; Hernández, 2005, investigaciones que se han desarrollado en la línea de investigación a la cual se adhiere ésta, llamada, las prácticas sociales en la emergencia del conocimiento matemático, la cual en forma sucinta intenta dar explicación de cómo en el ejercicio de las prácticas sociales los actores construyen sus conocimientos como herramientas para intervenir en las diferentes comunidades donde participan.
La investigación atiende a la problemática surgida de la *separación de las prácticas en los sistemas escolares y las de su entorno social*, es decir, la problemática que emerge de la separación de los sistemas educativos de su entorno.



Este esquema trata de mostrar la ubicación de nuestra problemática, de modo tal que nos interesa las formas de conectar estas dos esferas, las prácticas escolares y las prácticas del uso de las matemáticas.

Así, nuestra pregunta de investigación giró en torno a la práctica social de modelación, particularmente, la modelación multilineal de la elasticidad de sistemas de resortes. La investigación aportó evidencias sobre cómo los estudiantes del nivel medio superior construyen lo multilineal en el ejercicio de la modelación de un sistema de resortes. Para concretar nuestro objetivo acudimos a un diseño de aprendizaje basado en las prácticas de modelación. La investigación a*portó evidencias sobre cómo los estudiantes del nivel medio superior construyen lo multilineal en el ejercicio de la modelación de un sistema de resortes.* La tesis de la investigación plantea que e*n el ejercicio de las prácticas de modelación de la* *elasticidad de un sistema de resortes se construye lo multilineal. Tomando como tesis central que lo multilineal se devela en la complejidad de lo lineal.*

La perspectiva teórica de la investigación

La investigación se enmarca en la socioepistemología, perspectiva teórica que concibe al sistema escolar como sistema complejo inmerso en su entorno social. La socioepistemología es una perspectiva multidimensional, que hace énfasis en la naturaleza social del conocimiento, con la cual podemos analizar cómo los actores sociales construyen, en contextos sociales concretos, sus conocimientos, sus realidades y por ende su identidad (Arrieta, 2003). Este énfasis en lo social, trastoca el sentido tradicional otorgado a las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica, dando una visión situada del aprendizaje, los conocimientos y la didáctica. Entendemos que una práctica social es una actividad humana recurrente que caracteriza a las comunidades y a sus integrantes.

Aunque existen diversas concepciones de modelo y la modelación, por ejemplo: el modelo como una representación matemática y por ende la modelación como un proceso representacionista (Mochón, 1997) o bien la modelación como una forma de actividad necesaria para la *reconstrucción* de significados matemáticos (Cordero y Suarez, 2005). Desde nuestra postura, la modelación es una práctica social que al ser ejercida por los estudiantes los conduce a construir modelos matemáticos como herramientas para predecir. Estos modelos son utilizados para determinar el comportamiento del fenómeno estudiado. De esta forma un modelo gráfico no es la representación de un fenómeno, sino una herramienta para, por ejemplo, predecir comportamientos.

La metodología

La metodología de la investigación cumplió con cuatro etapas.

Un análisis preliminar, que tiene que ver con el contenido matemático en juego, la práctica social que será el eje de nuestros diseños de aprendizaje, mismo que se elabora en esta etapa, y los papeles que tomaran los participantes durante la realización del diseño.

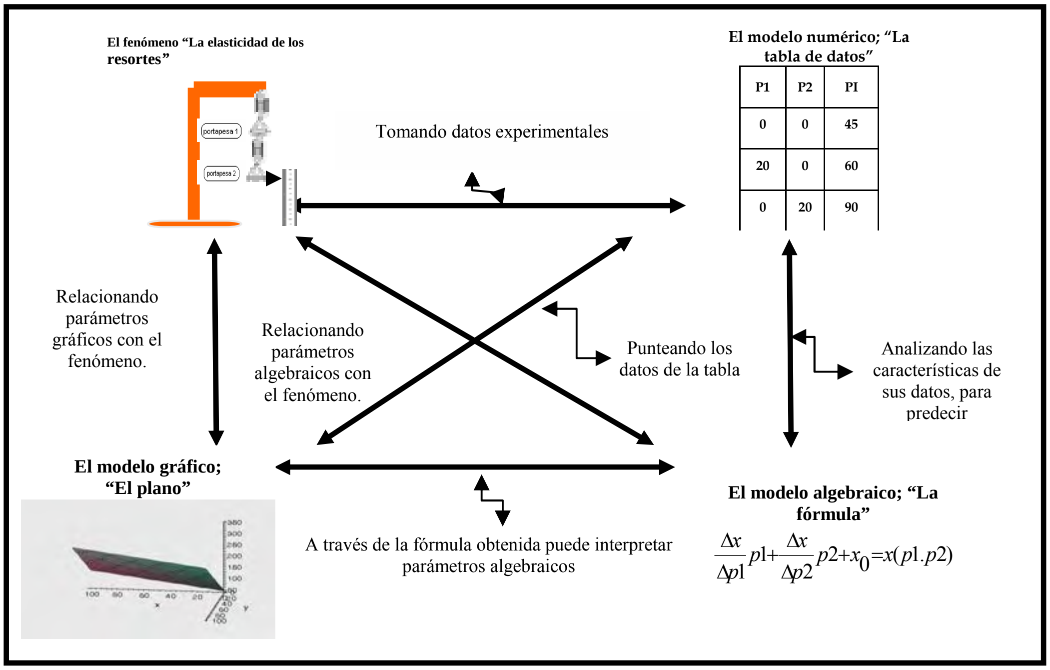
Un análisis a priori, este se realiza alrededor del diseño específicamente, se predice todo lo que podría ocurrir al ejercer la práctica durante el transcurso del diseño, se determinan las variables que intervienen en él, en general las hipótesis de éste, se realiza también la exploración del diseño y se recopila la información de los acontecimientos, esto posibilita la validación interna del diseño.

U*n análisis a posteriori,* en este análisis se hace una confrontación entre los resultados de la exploración y las hipótesis del diseño, el análisis *a priori*, si la diferencia es prácticamente nula, podemos decir que nuestro diseño es estable.

A qué llamamos lo multilineal

Desde nuestra visión consideramos lo multilineal, como una red de modelos creados durante el ejercicio de la práctica social de modelación, esta red es construida de manera explícita o implícita por los estudiantes durante el ejercicio de la práctica social de modelación, a través del diseño de aprendizaje, cuando se modela para predecir la elasticidad de un sistema de resortes.

Lo multilineal es construido por los estudiantes al ejercer la práctica de modelación, como herramienta para modelar el comportamiento de un sistema de resortes, estas herramientas son: los modelos numéricos, algebraicos y gráficos.



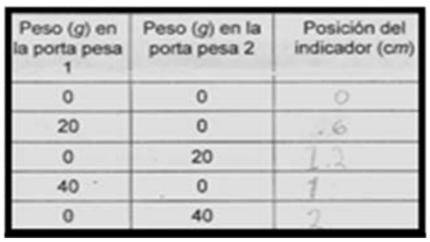
Lo multilineal como una red de modelos y prácticas.

Descripción del diseño y el escenario de la puesta en escena

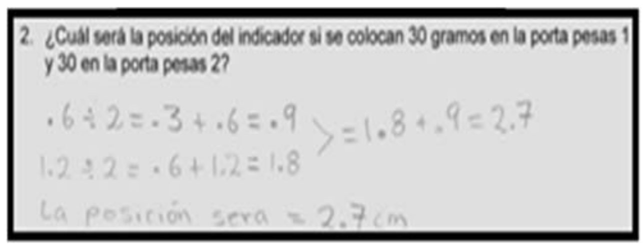
Hemos elaborado diseños de aprendizaje basados en la modelación, con los cuales se pretende propiciar un ambiente de experimentación y predicción, para que se ejerza la modelación. Hemos elaborado un diseño de aprendizaje donde los estudiantes ejercen esta práctica, para modelar el comportamiento de un sistema de resortes. Este diseño tiene variantes, las cuales se describieron en Arrieta y Mendez (2005), a las que llamamos, lo multilineal sin ruido, lo multilineal con ruido y lo multilineal en un ambiente virtual o bien lo multilineal con SIRES. En general la idea del diseño y las variantes de éste, es generar un ambiente de experimentación, lo más cercana a las condiciones del fenómeno presencial, la elasticidad de un sistema de resortes. Donde se pide a los estudiantes que a partir del análisis de una tabla de datos, obtenida al colocar peso en las porta pesas, y la elongación del sistema de resortes, predigan cuanto se elongará el sistema de resortes al colocar otros pesos en los porta pesas, pesos que no están dados en su tabla y que no pueden conocer usando directamente el software, por lo que los estudiantes deben crear métodos, herramientas para predecir, surgiendo así los modelos multilineales como herramientas de intervención. Después de algunas exploraciones del diseño y el software, se decidió hacer la puesta final con estudiantes de nivel medio superior, donde se aplicaron las tres variantes del diseño, con tres grupos distintos pertenecientes al cuarto semestre de nivel medio superior. Dos de las puestas en escena fueron antecedidas por la modelación lineal. A continuación se muestran algunos resultados de la puesta en escena realizada con estudiantes de un Colegio de Bachilleres de Acapulco.

Resultados de la puesta en escena

Mostraremos algunas argumentaciones extraídas de los episodios de las puestas en escena, haciendo referencia a los métodos de predicción y a los modelos multilineales que ellos construyeron.
Con respecto a los métodos usados durante la modelación.
El método de bisección, se ilustra bien en el siguiente diálogo e imágenes:
***… Karen**. Bueno, como ya tenemos cuanto baja en 60 gramos y cuanto baja en 40 gramos, entonces lo que hacemos es restar 1.5 y .9, y luego dividirlo por dos, eso nos da lo que estira por cada 10 gramos, que es .3, y ya de ahí, como nos piden saber cuanto baja al colocar 50 gramos, sólo le sumamos a lo que baja en 40 gramos, lo que baja en 10 gramos, y ya.*
Esta idea, tiene que ver con el hecho de que el 50 esta entre 40 y 60, exactamente a la mitad, por lo que es fácil suponer que el incremento, al colocar este peso, debe estar también entre los incrementos de 40 y 60.
Otro ejemplo de cómo los estudiantes usan el método de bisección, se ilustra a través de las imágenes siguientes.



Peso (g) en la porta pesa 1	Peso (g) en la porta pesa 2	Posición del indicador (cm)
0	0	0
20	0	.6
0	20	1.2
40	0	1
0	40	2

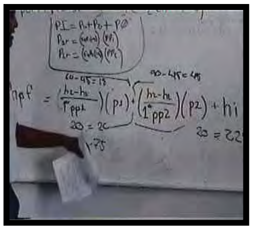


En esta imagen podemos ver como a partir de un modelo numérico, los estudiantes comienzan a construir métodos y modelos para la predicción y la modelación del sistema de resortes.

Al igual que este método surge el método de regla de tres, y por último el incremento por gramo, estos surgen debido a la necesidad de los estudiantes de predecir con mayor exactitud, construyendo así los modelos multilineales.
Un método nuevo surgió en la modelación del sistema de resortes usando el SIRES, se trata de aproximarse por medio de acotar el resultado en intervalos. El siguiente diálogo muestra este nuevo método.

Ricardo. *Todos sabemos que no hay pesas de 10 gramos, había de 15, 20, 50 y 60 para eso acotamos los valores, use el mismo software, entonces pusimos, en la primera 50 gramos y 20 en la segunda, y nos dio 8.2, luego en la primera se quedo igual y en la segunda pusimos 15 gramos y dio 8.0. OK entonces aquí (señala en el segunda porta pesas, ver fotografía) cambiaron en 5 gramos y disminuyo .2. Entonces hice el tercero, igual en la primera y en la segunda suponiendo que había 10 gramos, como disminuimos 5 grs. entonces debe de disminuir otros 2 (haciendo referencia al incremento) y debe de dar un resultado de 7.8 cm.*
Creemos que este método no podría surgir en ninguna otra variante, quizá sólo en un ambiente presencial, por lo que creemos necesario estudiar los ambientes de modelación virtual y como estos modifican la práctica de modelación
Con respecto a la construcción de modelos, se muestran algunos episodios referentes a esto.
Ya comprendí la tabla y, ahora, hay que buscar una fórmula para aplicarla a cualquier tabla.
Esta es una frase que un estudiante y su equipo de trabajo dijo durante un consenso. Cuando explicaba como debería ser una "fórmula" que funcionará para cualquier tabla de datos.

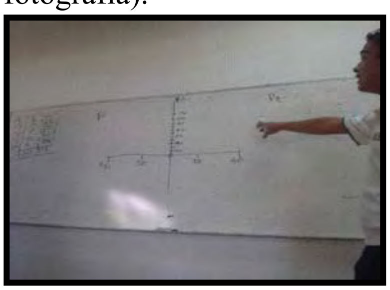
Hiran. *Ya comprendí la tabla y, ahora hay que buscar una fórmula para aplicarla a cualquier tabla.*
Hiran. *A ver, ya tenemos este valor (encierra en un círculo el resultado obtenido con su fórmula, un ejemplo particular) vamos a probar mi fórmula. Ah claro, tenemos altura de la posición final (hpf) siempre estos de acuerdo a los datos de alguna tabla para P1 y P2 (señalando su fórmula) más la altura inicial.*
Sustituye valores en su fórmula como lo muestra en la fotografía, para mostrar que realmente funcionaba, aclaraba también que lo datos de la tabla tendrían relación con la flexibilidad de los resortes.



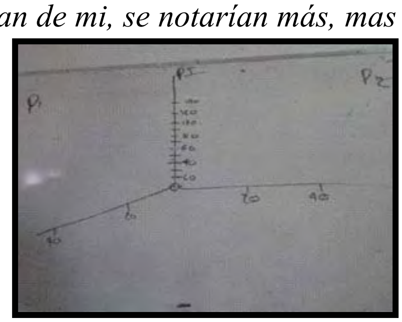
$$hpf=\left(\frac{h_1-h_2}{pp1}\right)(P1)+\left(\frac{h_1-h_2}{pp2}\right)(p2)+hi$$

Fotografía. Muestra como Hiran da valores a su fórmula para comprobar su funcionamiento, la fórmula la mostramos también en el recuadro de la derecha.

La fórmula que se muestra en la fotografía, es una función bilineal, el modelo algebraico de esté fenómeno, fue construido por los estudiantes, durante el consenso grupal, cabe mencionar que estos estudiantes habían trabajado dos días antes con la modelación lineal, donde construyeron modelos similares.
En general los tres grupos que participaron en las puestas en escena construyeron modelos algebraicos similares o bien el modelo algebraico particular. Con respecto al modelo gráfico, en esta ocasión los estudiantes tuvieron dificultades para determinar el espacio en donde deberían graficar.
Mostramos el siguiente episodio, extraído de uno de los consensos de la puesta en escena**:** *El plano de "HEVE" es como si lo estuvieran viendo de diferente ángulo.*
… Edgar. *Mira, nosotros también habíamos hecho una gráfica de barras, pero, las gráficas de barras son para intervalos y para valores tipos constantes, entonces aquí, no nos sirven. Luego, la quisimos hacer en un plano cartesiano, pero tampoco se podía por que nos hacía falta un eje positivo, así que decidimos ponérselo, y nuestro plano nos quedo así (dibuja el plano), así P1 esta a la izquierda y P2 a la derecha el otro es para el indicador* (ver fotografía).



Eder. Ah, pero si suponemos que movemos un poco los ejes para que se distingan más los puntos, ¿Cómo?...
Mientras Eder trata de explicar, sus compañeros se paran frente del resto del grupo y comentan; ***es cómo si lo estuvieran viendo de diferente ángulo***.
Héctor. *Si yo fuera el eje del indicador, Edgar el eje de la P1 y Víctor el eje de la P2, y estuviéramos en línea, y dependiendo desde donde nos vieran, el ángulo, quizá a uno no lo verían, pero si ellos dos dan dos o tres pasos o se despegan de mi, se notarían más, mas o menos así con los ejes.*



Esta fotografía muestra el plano de HEVE
Aunque la mayoría de los participantes en nuestras puestas en escena pudieron percibir, que sus puntos y su fórmula no podía graficarse en un plano cartesiano pocos se atrevieron a decir cómo debería ser el "plano" en el cual se podría graficar, y resultó más difícil dibujar la gráfica, ya que no sabían como colocar los puntos en "un plano de tres ejes positivos", por lo

que este modelo no fue posible completarlo, con estos participantes.

Conclusiones y perspectivas

Con respecto a la caracterización de lo multilineal, verificamos nuestra hipótesis, *lo multilineal se devela en la complejidad de lo lineal*. Es decir, se construye lo multilineal cuando se articulan dos o más modelos lineales, de otra forma, lo multilineal, es visto y trabajado como dos modelos lineales disjuntos.

Una cuestión de fundamental importancia es el proceder de los estudiantes *generalizando las características de lo lineal a lo multilineal, generalizando los argumentos, sus modelos y sus construcciones.*

Con respecto a la variante del diseño, lo multilineal con SIRES, hemos notado que la inclusión de herramientas virtuales modifica la práctica, dando origen a otro tipo de prácticas *"las prácticas de modelación virtual"*. Sin embargo se requieren de una investigación a fondo sobre estos aspectos y una preparación de los diseños acorde al contexto virtual.

Nos preguntamos: los estudiantes, después de participar en un diseño de aprendizaje como el presentado en este trabajo ¿Podrán modelar otros fenómenos con modelos multilineales? Nosotros planteamos como hipótesis que en general esto no es posible, *la transferencia de la experiencia* de la modelación de un sistema de dos resortes a la modelación de otro fenómeno no es automática, es un proceso que es necesario estudiar.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2004). Un estudio socioepistemológico de la Predicción. *La matemática e la sua didattica n.2-2004, pp.33-70.*

Cordero, F., y Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. *XVIII Acta Latinoamericana de Matemática educativa, pp. 639-643*. México.

Galicia, A. y Arrieta, J. (2004*). La construcción de lo exponencial, a partir de las prácticas sociales de modelación*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Unidad Académica Acapulco.

Hernández, M.; y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación y la emergencia de lo exponencial. *XVIII Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, pp. 537-542*. México.

Martínez, E.; Arrieta, J y Canul, A. (2004). Laboratorio virtual de matemáticas. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18, pp. 785-790*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Mendez, M. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 1*8, pp. 575-582. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Mendez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes.* Tesis de Licenciatura no publicada, Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco. México.

Mochón, S. (1997). Modelos Matemáticos para Todos los Niveles. *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 42-45. México.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO: UNA DISCUSIÓN ENTRE LOS ACERCAMIENTOS ESCOLARES TRADICIONALES Y LA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE AGNESI (1748)

Renata Ivonne López Sánchez, Marcela Ferrari Escolá
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
renata_ivonne@yahoo.com.mx, marcela_fe@yahoo.com.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio
Palabras clave: triángulos semejantes, semejanza, progresiones, discurso

Resumen

En este trabajo, hemos iniciado la discusión del papel de la graficación en los textos escolares, particularmente en el caso de los logaritmos. Apoyados en un análisis del discurso matemático escolar, contenido en libros de nivel bachillerato y licenciatura, observamos que la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante: simetría, área bajo la curva o una tabla, lo cual es presentado sin argumentos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo (López et al., 2003). En general, los logaritmos son presentados en un sentido algorítmico o incluso, axiomático, más que como resultado de un razonamiento o una construcción (Ferrari, 2001). En esta investigación buscamos poner en evidencia la idea de que utilizar una herramienta distinta permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente (López y Ferrari, 2005).

Introducción

El discurso generado en el aula ha sido durante mucho tiempo el eje central de estudio de varios investigadores. En nuestra comunidad podemos mencionar, entre otros, los trabajos de Cantoral (2001), Cordero (2005), Castañeda (2005), quienes establecen al discurso matemático escolar como un importante elemento de reflexión.

Efectivamente, la teoría *socioepistemológica*, aborda desde una perspectiva sociocultural, el problema del estudio de las matemáticas y permite explicar la *naturaleza de un discurso* y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento a partir de una intencionalidad didáctica, así como aquellos aspectos de socialización de ideas, como parte de un proceso por el que se dé la ampliación del cuerpo teórico de la matemática (Castañeda, 2005).

Nos interesa específicamente atender el problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión cultural. Dado que este saber se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. En su intento por difundir estos saberes, se forman discursos que facilitan la comunicación en matemáticas y favorecen la formación de consensos. Llamamos a estos discursos con el término genérico de ***discurso matemático escolar*** (Cantoral, 2001).

Desde nuestra perspectiva coincidimos con Castañeda (2004), respecto a que a través de un estudio del *discurso matemático escolar,* se puede identificar el tratamiento que ofrece el autor del libro de texto a las ideas, a fin de establecer su naturaleza epistemológica e identificar los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas.

En nuestro trabajo, retomamos el análisis socioepistemológico reportado en Ferrari (2001) donde se conformaron tres etapas en las que se permea la construcción social de los logaritmos:

- *Logaritmos como transformación*, definidos y enmarcados en el registro numérico (antes del siglo XVII), aquí se busca facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras demandaban tediosas y complicadas operaciones.

- *Logaritmos como modelizadores*. Se descubren las características de los logaritmos en el contexto geométrico, su asociación con una curva que posee subtangente constante. Se construye su gráfica la cual no fue producto de la tabulación de sus valores.

- *Logaritmos como un objeto teórico*, se les dotó de una definición formal, lejana de la dada por Napier que involucra progresiones. Se les incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en una suma.

Ya que consideramos también que todo objeto matemático se consolida al pasar por varias etapas o momentos (Farfán y Ferrari, 2002), y responden a distintos paradigmas que generan discursos específicos.

Continuando las ideas trabajadas por Farfán y Ferrari (2001), específicamente, sobre el segundo momento: *logaritmos como modelizadores*, nos interesó estudiar al papel de la graficación de curvas en los libros de texto.

Para Cordero (2005), las gráficas en los libros de texto pasan por diferentes *funcionamientos* y *formas* desde el uso de la hoja de papel en los niveles educativos básicos para establecer orientaciones y simetrías, el uso de las cuadrículas para establecer trayectorias y reproducirlas, el uso del plano y de los ejes cartesianos, los privilegios del primer cuadrante, los sistemas autónomos del tiempo, las diferencias de usos entre las curvas y las gráficas de las funciones.

Los usos de las gráficas anteriormente vertidos significan que la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. La graficación en si misma es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica transformando el objeto en cuestión. La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permite el continuo, en un sentido epistemológico.

Estas ideas nos sirven para atender una problemática originada en ambientes escolares, en particular en nivel bachillerato que se evidencia a nivel superior. Esto es, observar el desarrollo y uso de las gráficas en los libros escolares, actuales y de antaño, para identificar elementos que mas adelante permitan establecer actividades para la introducción de la gráfica de una función.

Libros de texto

Ahora bien, en los últimos años se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis de los manuales escolares como reflejo de la actividad que se realiza en el aula, ya que son los manuales los que determinan en gran medida la práctica educativa más que las disposiciones ministeriales (Sierra, M. et al., 2003).

Actualmente existe todo tipo de análisis de libros de texto, que responden a los requerimientos de cada investigación. En nuestro caso particular realizamos una revisión de libros de nivel medio superior y superior con el objetivo de conocer las argumentaciones con las que se aborda el tema de función logaritmo, específicamente la forma en que se presenta la gráfica de ésta.

Los puntos revisados fueron: el enfoque (prólogo), métodos propuestos para la graficación de curvas, la definición y propiedades, los ejemplos y problemas. Se revisó tanto la forma en que explican la apariencia de la gráfica como el método que utilizan para obtenerla, pasando por los ejemplos de otras funciones así como los ejercicios propuestos para el alumno. Se hizo dicha revisión para evidenciar la forma en que es tratada la gráfica de los logaritmos.

Tras dicha revisión de manera general podemos rescatar tres ideas importantes, una declarar que las imágenes ayudan en la comprensión de los conceptos sin mostrarlo al trabajar con la función en cuestión; segundo, aun cuando en la sección destinada para analizar las propiedades de las funciones al graficarlas no aparece la función logaritmo; y por último, en las tres formas de referirse a la gráfica de la función logaritmo se cae en dar por hecho la continuidad entre los puntos localizados, esto sin mencionar que la imagen siempre se ve terminada, es decir no hay forma en que el lector pueda apreciar la construcción de la gráfica y mucho menos que se percate del sutil crecimiento que hay entre los puntos de las *y*, los más alejados del origen.

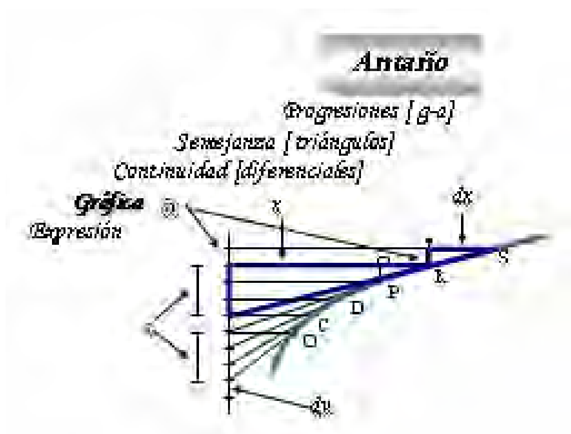
En doce libros, entre libros de Cálculo y Álgebra, encontramos además de tres distintos enfoques, que la forma en que grafican curvas es, principalmente, mediante una tabla de valores y usando los criterios de la primera y segunda derivada, tales formas son utilizadas para cualquier expresión algebraica. Sin embargo, al llegar al tema, que particularmente a esta investigación le interesa, *funciones logarítmicas* nos percatamos de la pobreza de argumentos que explican la obtención de la gráfica de la función logaritmo. En dichos libros de texto la introducción de la gráfica no van más allá de presentarla de las siguientes tres formas: como la unión de algunos puntos dispuestos en una *tabla de valores*, como el *área bajo la curva* 1/t ó simplemente como la inversa de la función exponencial usando *simetría* (López, 2006).

Construcción geométrica de 1748

A la par del análisis de libros de textos actuales se realizó un análisis de una obra, del siglo XVIII, de Maria Agnesi quien preocupada por la difusión de la matemática desde un punto de vista didáctico publica en 1748 el libro "*Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana*", el cual consta de dos volúmenes, compuestos por temas como Álgebra, Precálculo, Cálculo Diferencial e Integral, Series infinitas y Ecuaciones Diferenciales.

Agnesi en el capítulo 1, *De las reglas de la integración expresada en forma finita algebraica, o reducir la cuadratura supuesta,* de su libro Instituciones Analíticas. Tercer libro. Del Cálculo Integral, emprende una búsqueda para resolver el problema de integrar una expresión que contiene un exponente negativo, más específicamente, cuando la expresión por integrar es x^{-1}. La respuesta que presenta se centra en la construcción geométrica de la curva llama *Logarítmica.*

Agnesi plantea utilizar la semejanza de triángulos, las diferenciales y las progresiones simultáneas como herramientas de construcción, ya que mediante progresiones y semejanza de triángulos construye la gráfica para luego, con semejanza de triángulos y diferenciales obtener la ecuación de la curva, que es distinta a la forma que existe en las escuelas.

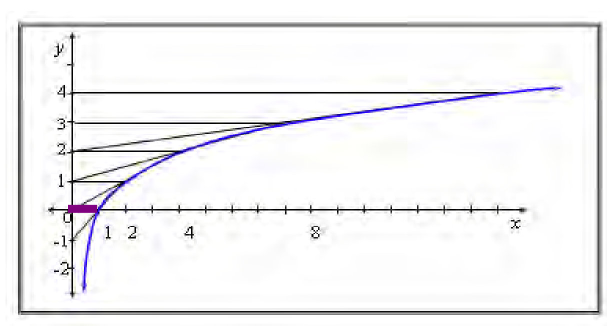


Algunos resultados de la investigación

Tras analizar la construcción propuesta por Agnesi, fue posible ver cualidades que permiten que:

a) por la naturaleza de la construcción y al colocarla en ejes coordenados, después de hacer algunos ajustes, la noción de infinitamente continua se logra al aceptar la existencia de triángulos rectángulos infinitamente pequeños, además que los puntos localizados debajo del eje "*x*" entre 0 y 1 tienen como asíntota al eje de las "*y*".

Una de las decisiones que se tomaron al colocar la construcción en los ejes coordenados fue que la primera línea horizontal (en el primer par de triángulos semejantes) si hizo coincidir con el eje *x* y además de longitud uno, lo cual deja por encima del eje *x* la construcción. La forma de obtener de los puntos entre 0 y 1, que van por debajo del eje es:



i. En el gráfico de la derecha, figura 1, a partir del punto *a* se traza una recta que llegue a *W*, porque de *B* a *W* hay dos unidades,

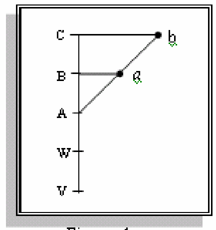


Figura 1

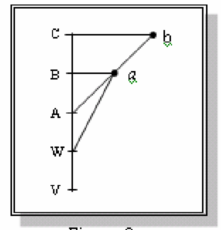


Figura 2

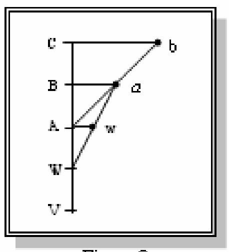


Figura 3

Se traza una perpendicular de *A*, hasta que toque la recta *aW*. Formando con estas líneas, *aW* y *Aw*, el triángulo *aBW* y el triángulo *wAW*, ambos triángulos son semejantes.

ii. Ahora de *w* se traza una recta hasta *V*, desde *A* hasta *V* también hay dos unidades, y una perpendicular en *W*, formando con está el triángulo *vWV* que es semejante al triángulo w*AV*.

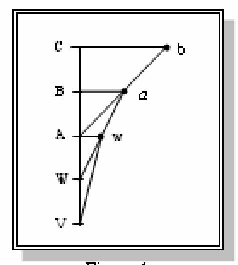
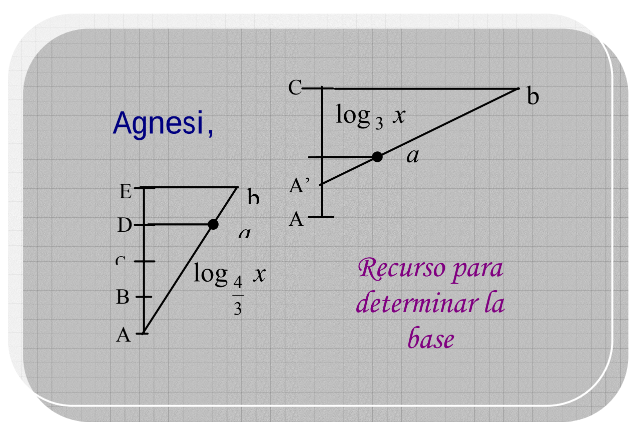


Figura 4

b) al manipular el tamaño de cada segmento involucrado en la construcción y el uso de herramientas actuales sea posible determinar la base de curva trazada.

Al ir analizando las modificaciones que se necesitan en cada una de las diferentes construcciones, nos percatamos que para las curvas en base entera, 3, 4, 5, etc. las divisiones de la recta sobre la cual trazamos los triángulos no son las únicas que se necesitan. Esto es, que cada una de las divisiones, las primeras que son igual a *u*, se tienen que partir en dos, tres, cuatro, etc., según la base que se busca. A diferencia de cuando la base



es fraccionaria se mantiene una sola partición sobre la cual, según el procedimiento expuesto por Agnesi, se recorre una o dos unidades, de acuerdo a la elección del primer par de triángulos, para dibujar el siguiente triángulo.

A manera de conclusión

Nuestro propósito ha sido identificar ciertas cualidades en las ideas de Agnesi, es decir, analizar el uso de una herramienta geométrica lo cual podría permitirnos diseñar otra forma para introducir la gráfica de la función logaritmo de manera distinta a la propuesta en los libros de texto. Evidenciamos entonces la contraposición existente entre las herramientas escolares usuales tales como: la terna expresión analítica-tabulación-gráfica así como la bina graficadoras-expresión algebraica; y, aquellas fundamentadas en la construcción de Agnesi (1748) en donde se consideran tres elementos: geometría plana, continuidad y relación entre progresiones aritmética y geométrica.

Lo expuesto en esta investigación pretende contribuir con los esfuerzos realizados por otras investigaciones que al ver obras antiguas buscan herramientas de tipo geométrico que durante un tiempo fueron utilizadas y que pueden ser llevadas nuevamente al aula. Volvamos la vista hacia trabajos interesantes como "*Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italian*" en los que se presentan argumentos gráficos que pueden ser incorporados al discurso escolar a fin de brindar recursos de los cuales se valga el maestro durante el proceso de enseñanza aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana*. Libro terzo Del Calcolo Integrale.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del Politécnico Nacional, México.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

López, R, Ferrari, M. y García, C. (2003). Propuesta didáctica de la función logaritmo fundamentada en la construcción geométrica de Agnesi. En G. Martínez (Ed.) *Resúmenes, VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* (pp. 64 – 65). México.

López, R. y Ferrari, M. (2005). La función logaritmo bajo la perspectiva de la construcción dada por Agnesi (1748). En: L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (pp. 551-558) Vol. 18, Tomo 1. México Clame.

López, R. (2006). *Gráfica de la función logaritmo: Una discusión entre los acercamientos escolares tradicionales y la construcción geométrica de Agnesi (1748)*. Tesis de licenciatura, no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

LA ALGORITMIA; UNA PRÁCTICA SOCIAL DE LAS COMUNIDADES DE INGENIEROS EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

Magdalena Rivera Abrajan, Jaime Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad académica Matemáticas. (México)
magrivab@hotmail.com
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio
Palabras clave: algoritmia, comunidad, prácticas sociales, socioepistemología

Resumen
La problemática que abordamos en esta investigación es la que surge de la disociación entre las prácticas de la matemática escolar y las prácticas del uso de las matemáticas en las distintas comunidades. La línea de investigación, la construcción social del conocimiento, plantea que el conocimiento se construye al ejercer prácticas sociales, por lo que, las comunidades, sus prácticas sociales y las herramientas construidas, son de fundamental importancia. Se realizó un estudio acerca de las prácticas sociales de la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales de Acapulco Guerrero, en el cuál el ejercicio de la práctica social de la algoritmia resulto ser fundamental. La intención de caracterizar las distintas prácticas sociales en diversas comunidades es la de elaborar diseños de aprendizajes, basados en ellas, los cuales nos permitirán la incidencia en el sistema escolar. La perspectiva teórica en que se enmarca este trabajo es la Socioepistemología.

Introducción

El avance tecnológico ha llegado a ser parte fundamental de la sociedad, en particular, parte importante de la vida de las universidades y centros de investigación, así los diferentes campos de la ingeniería cobran relevancia para su desarrollo.
Una de las ramas de la ingeniería que últimamente ha sido más demandada es la de ingeniería en sistemas computacionales y es innegable el importante papel de estos profesionista en la sociedad, una gran cantidad de estudiantes ingresan a las diferentes universidades donde se promueve la carrera. Esta es uno de los motivos por lo que nos interesa estudiar, tanto la vida de las comunidades que forman los ingenieros en sistemas computacionales, como la vida escolar, pero sobre todo, sus posibles vinculaciones.
En los sistemas escolares donde se ofrece las carreras de ingenierías, los cursos de matemáticas son obligatorios, sin embargo, estudiando las prácticas de las comunidades de ingenieros observamos que a pesar de que existen muchas situaciones donde la matemática podría ser una herramienta para el mejor desempeño de su práctica profesional, en muchos casos, no son utilizadas y en ocasiones se ignora cómo pueden hacerlo. Existiendo así una separación de los sistemas educativos y sus contextos. Nuestras preguntas de investigación atienden a esta problemática, giran alrededor de las prácticas sociales en la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales (ISC). Nos preguntamos:

> *¿Cuáles son las prácticas sociales que ejercen las comunidades de Ingenieros en Sistemas Computacionales?*
> *¿De que manera estas prácticas podririán ser factor para la construcción social del conocimiento en el contexto escolar?*

Perspectiva teórica

La perspectiva teórica que asumimos es la socioepistemología, la cual hace énfasis en la naturaleza social de la producción, reproducción y utilización de los conocimientos en contextos específicos (Arrieta, 2003).

En nuestra perspectiva, el aprendizaje es una práctica eminentemente social, en la cual intervienen múltiples factores y donde se manifiesta el peso del contexto social concreto. En ella se entrelazan sistemáticamente las dimensiones relativas a cómo aprenden los actores, las prácticas que al ser ejercidas construyen conocimiento y la construcción social del mismo, por lo que desde nuestra perspectiva el aprendizaje es situacional, es decir se dan en un lugar, en un tiempo y en un espacio determinado (Arrieta, 2003). En nuestra perspectiva, las comunidades y, por ende, sus prácticas sociales están directamente relacionadas con los conocimientos que construyen y utilizan para su reproducción como comunidad.

La Aproximación Socioepistemológica a la Investigación en Matemática Educativa se plantea como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002).

Suscribimos este trabajo en la línea de investigación de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento, cuya tesis central, es que los actores al ejercer prácticas sociales construyen sus conocimientos matemáticos, y estos conocimientos modifican, a la vez, las prácticas sociales de la comunidad.

Así, estudiamos diversas prácticas sociales en distintas comunidades para utilizarlas como base de diseños de aprendizaje para la construcción de conocimientos en los sistemas escolares. Los trabajos de Galicia (2004), donde se muestra la construcción de lo exponencial, por estudiantes de bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco, en el ejercicio de la práctica de modelación son algunos antecedentes de nuestro trabajo. En estos trabajos se plantea el estudio de comunidades de Ingenieros Bioquímicos.

Adentrándonos a la comunidad

En relación a la problemática planteada, anteriormente, nuestra intención en esta investigación es encontrar y proponer una práctica social fundamental en la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales, como una forma de continuidad entre las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales y los sistemas escolares donde se forman. Estas prácticas fundamentales serían base de diseños de aprendizaje donde participen estudiantes de la carrera de ingeniería en sistemas computacionales, con la intención de que construyan su conocimiento ligado a la comunidad donde pertenecerán. Nos interesa que el estudiante construye su identidad, su participación a una comunidad desde la escuela

La elección que tomamos en este trabajo es observar e intervenir en las relaciones entre comunidad, las prácticas sociales que ejerce y las herramientas que construye y utiliza en este ejercicio. Considerando estas relaciones como una sola entidad teórica, comunidad-práctica-herramienta.

El estudio se realizo en la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales de Acapulco Guerrero, para ello realizamos cuestionarios a 50 miembros de la comunidad. Entrevistamos a los mismos, acerca de las actividades que realizan y cómo las realizan. Así mismo se

entrevistó a otros profesionista que suponíamos podrían pertenecer a dichas comunidades, por realizar algunas de las actividades de los ingenieros.
La comunidad de ingenieros en computación en Acapulco se consolido, hace cerca de 20 años, con las primeras generaciones de ingenieros en computación que egresaron del Instituto Tecnológico de Acapulco, que es la institución en Acapulco que más tiempo tiene de ofrecer la carrera, a estas primeras generaciones se le sumaron algunos egresados que venían de otras universidades del país.
En la actualidad existen cuatro instituciones privadas, que ofrecen dicha carrera que son; la Universidad Americana de Acapulco, el Centro Universitario Hipócrates, la Universidad Loyola de Acapulco y el Centro Universitario Español. Por lo que hoy en día los miembros de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales lo conforman egresados de estas instituciones, egresados de diferentes universidades del país, y algunos profesionales de otras carreras como matemáticas, licenciados en computación, técnicos en computación y en menor número ingenieros de otras áreas.
Entre las diferentes actividades que encontramos que ellos realizan de forma rutinaria en su vida profesional encontramos las siguientes:

- Desarrollo de Software
- Análisis de datos
- Mantenimiento de equipos de cómputo
- Mantenimiento y administración de redes y servidores.
- Otras, de índole administrativo.

Entre las distintas actividades encontramos diversas actividades, una práctica que observamos que estaba presente en las distintas actividades, *es la construcción de algoritmos, la que nosotros llamamos la práctica social de la Algoritmia.*
Cuando entrevistamos, a integrantes de la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales, de forma puntual sobre las diversas actividades que realizan en su profesión, dependiendo de su especialidad, *encontramos que ellos construyen algoritmos recurrentemente, aún en actividades que no tiene que ver con la programación*, esto es contratante con los datos obtenidos en entrevistas con ingenieros miembros de otras comunidades.

Presentamos el siguiente extracto de una entrevista, realizada a un miembro de la comunidad, con el objetivo de observar las prácticas realizadas por el.
Daniel Alarcón Severiano tiene 36 años de edad, es egresado del Tecnológico de Acapulco, desde hace 6 años trabaja en la Yoli de Acapulco, en el Departamento de cómputo de dicha empresa.

> **Magda**: ¿Que actividades realizas normalmente?
> **Daniel:** Componer equipos de cómputo, revisar las redes de la empresa, verificar la nómina, y algunas tareas administrativas de pedidos.
> **Magda**: ¿Cómo realizas la actividad de verificar el funcionamiento de los equipos?
> **Daniel**: Umm, mira, lo primero es saber donde podría estar el problema, (dibuja algo en una hoja, dando su explicación), en general esto es lo que hago, primero checo si el equipo prende, si el equipo no prende, probablemente sea la fuente de alimentación, si prende, entonces veo si arranca, si no arranca puede ser un problema del disco duro, si arranca verifico que los programas estén correctamente instalados, si no están instalados correctamente, eso me provoca un error, si están correctos, verifico los

controladores que funcionen correctamente, y si no es eso probablemente sea un problema de los componentes y tendré que abrir la computadora.

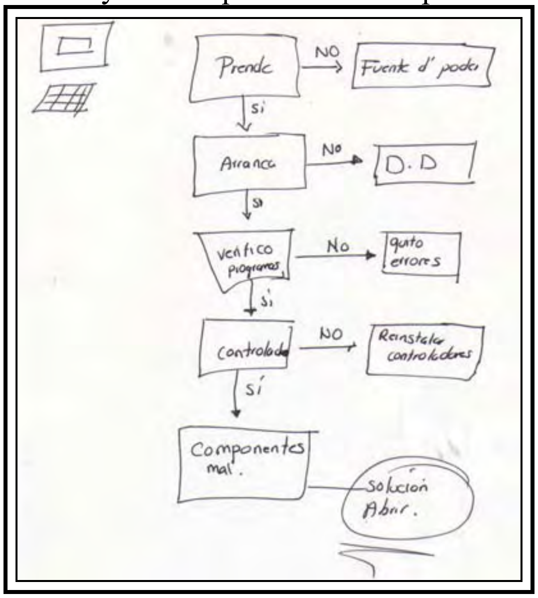


Fig. 1 Algoritmo realizado por un ingeniero en sistemas computacionales

Cuando Daniel habla al mismo tiempo realiza un dibujo (figura 1), indicando el algoritmo de lo que hace, utiliza para argumentar un algoritmo, esto es propio de esta comunidad.
El algoritmo de Daniel contiene elementos de lógica, y cuando se le hizo notar esto, el negó que tuviera algo que ver con las matemáticas, argumentaba que “nunca he sido bueno para ellas en la escuela”, “mis maestros no me enseñaron este tipo de análisis y mi actividad la desarrollo correctamente”.

Algunas conclusiones importantes

Investigando las prácticas de la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales observamos que un algoritmo no sólo es un código fuente para obtener un programa para la computadora, sino, puede ser, tanto una herramienta para realizar su trabajo y sus planeaciones cotidianas, como una forma de argumentar. La algoritmia no es una práctica exclusiva de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales, sin embargo, si es algo que los caracteriza.
La necesidad de indicar las tareas a ejecutar a un ente “no inteligente”, la PC, implica construir un algoritmo que le indique, paso a paso, lo que tiene que hacer. Esta es una tarea relevante en esta comunidad.
Nosotros hacemos una distinción entre construir algoritmos y seguir algoritmos, mientras que en la primera práctica los actores construyen sus algoritmos para lograr sus propósitos, en la segunda, el actor sólo sigue los pasos de un algoritmo que alguien más construyó, incluso, sin saber por qué y para qué debe seguir esos pasos, la diferencia estriba en la intención.
Localizar una práctica relevante en la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales nos permite elaborar diseños de aprendizaje en base a esta práctica que puedan ser elementos de continuidad entre las comunidades de ingeniería en sistemas computacionales y la escuela.

Tomando la práctica social como base para la intervención en el sistema educativo proponemos una línea de investigación que intenta explicar la relación entre la construcción social del conocimiento y el ejercicio de la algoritmia, *La práctica social de la Algoritmia y la construcción social del conocimiento.*

Para aportar evidencias de la viabilidad de esta línea de investigación se han desarrollado diseños de aprendizaje tomando como base la práctica social de la algoritmia, donde los datos obtenidos de su puesta en escena ponen de manifiesto la construcción social del conocimiento por parte de los actores.

Uno de estos diseños es presentado en Rivera 2005, cuyo objetivo es que los estudiantes construyan un algoritmo equivalente al algoritmo de los cuatro pasos, a través de un problema velocidad instantánea a través de datos.

En este trabajo se muestran evidencias de cómo al ejercer la algoritmia, los estudiantes de ingeniería en sistemas computacionales, construyen un algoritmo para encontrar la velocidad instantánea a través de datos, así de esta manera el construir, por ejemplo, un algoritmo para el cálculo de la derivada se encuentra al mismo nivel de importancia que el de la construcción de conceptos. .

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2002). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral, CINVESTAV- IPN, México.

Arrieta, J. y Galicia, A. (2002). La modelación como proceso de matematización en el aula: Relaciones Exponenciales entre variables. *En resúmenes del foro Internacional de las ciencias básicas en la Enseñanza de la ingeniería. I.P.N. Ingeniería en ciencias Físico Matemáticas.*

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 15, Tomo 1. (pp. 35 - 42). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chaiklin, S. Lave, J. y copiladores. (2001). *Estudiar las prácticas, perspectiva sobre actividad y contexto.,* Amorrortur Editores.

Rivera, M. (2005). *La algoritmia; una práctica social de la comunidad de ingenieros en sistemas computacionales,* Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, U.A.G., México.

Galicia, A. (2004). *La construcción de lo exponencial a partir de las prácticas sociales de modelación*. Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, U.A.G., México.

LA NOCIÓN DE VARIABLE. UN ESTADO DEL ARTE

Enrique Javier Gómez Otero, Crisólogo Dolores Flores
CICATA- IPN, CIMATE-UAGRO. (México)
ejgo@prodigy.net.mx, cdolores@cimateuagro.org
Campo de investigación: pensamiento variacional. Nivel educativo: medio, superior
Palabras clave: análisis, procesos, construcción, variable

Resumen
El presente documento centra su interés en el análisis de investigaciones que acerca de la noción de variable se han realizado. Para realizar el análisis se consideraron los objetivos de la investigación, la metodología utilizada y las condiciones en que fueron realizadas. El análisis de estas investigaciones y sus resultados, forman parte de un trabajo de investigación más amplio, denominado *la construcción de la noción de variable.*

Estado del arte

El objetivo de esta investigación se orienta hacia la investigación de los procesos de la construcción de la noción de variable. Para tener una idea de cómo se ha abordado esta noción, se hizo una investigación y un análisis de las investigaciones realizadas relacionadas al tema. El análisis de estas investigaciones se caracterizó por la identificación de los objetivos que guiaron la investigación, la metodología utilizada, las condiciones en que fueron realizadas y los resultados obtenidos. Las investigaciones analizadas fueron:

Children's understanding of numerical variables, Kuchemann (1980).

Esta investigación tiene como objetivo, conocer cómo los alumnos interpretan los símbolos literales. Para ello, se proporcionó un cuestionario donde se pedía a los alumnos que interpretaran, manipularan y resolvieran expresiones algebraicas representadas por símbolos literales. Al analizar las respuestas encontró seis interpretaciones de estos símbolos (letra evaluada, letra no usada, letra como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable).

Some misconceptions concerning the concept of variable, Rosnick (1981).

El objetivo de esta investigación es investigar las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión del uso de letras en las ecuaciones al trasladar un enunciado verbal a una expresión algebraica. "*Escribe una ecuación, usando las variables S y P para representar el siguiente enunciado: "En esta universidad hay seis veces tanto estudiantes como profesores." Usa S para el número de estudiantes y P para el número de profesores*" (Rosnick, 1981, pp. 418 y 419). Los resultados obtenidos manifestaron la dificultad que los estudiantes tienen, al trasladar un problema verbal a lenguaje algebraico, *37 % de los alumnos de un grupo de 150 estudiantes que inician ingeniería no fueron capaces de escribir la ecuación correcta.*

On the meaning of variable, Schoenfeld & Arcavi (1988).

Este es un estudio en el se describe un ejercicio reflexivo y estructurado para reexaminar la noción de variable y redescubrir su riqueza y diversidad de significados. El estudio se estructuró en tres partes, el trabajo con diversos grupos (matemáticos, educadores matemáticos, computadores científicos, lingüistas y lógicos) en un ejercicio, como el término se ha usado, se comparan las respuestas, la profundidad, variedad y riqueza del concepto. En la segunda parte se examinaron algunas definiciones de este concepto de la literatura, no sin antes tratar de producir una definición que capturara lo esencial del término variable y por último se proporcionan sugerencias relacionadas a la enseñanza de este concepto surgido del grupo de discusión. Encuentran 10 definiciones de variable que muestran lo multifacético que es este término, lo complejo que es su comprensión por el aspecto simbólico que maneja y los diferentes contextos en los que se aplica, aunado a que el significado de variable es variable (Shoenfeld & Arcavi, 1988, p. 425).

Cognitive processes involved in learning school algebra, Kieran, Booker, Filloy, Vergnaud, & Wheeler (1990).

Este estudio comprende una serie de investigaciones relacionadas al aprendizaje del álgebra escolar. Centra su atención al estudio de los significados que le asocian los estudiantes a los símbolos literales durante el tránsito de la aritmética al álgebra. Este trabajo de investigación aborda tres aspectos, el desarrollo del álgebra desde la perspectiva epistemológica; las continuidades y discontinuidades del álgebra con respecto a la aritmética que se presentan en los estudiantes y el uso de ambientes computacionales en el aprendizaje del álgebra. Una conclusión de los resultados de este estudio sobre las continuidades y discontinuidades entre la aritmética y el álgebra mostraron que, muchos de los errores que cometen los estudiantes son resultados de lo razonable, sin embargo fracasan, en los intentos por usar o adaptar previamente el conocimiento adquirido a una nueva situación.

Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable, Ursini (1996).

El objetivo de esta investigación es propiciar en los alumnos el desarrollo de un potencial para trabajar con distintos usos de la variable, antes de la enseñanza formal del álgebra.
El estudio está basado en actividades que fueron desarrolladas previamente en un ambiente computacional (LOGO) con 34 alumnos de primero de secundaria que no habían recibido aún una enseñanza formal de álgebra. Los resultados obtenidos en el uso de la variable como relación funcional mostraron que los alumnos fueron capaces de determinar intervalos numéricos, hacer registros tabulares, localizar los valores con los cuales había que correr un programa para obtener en la pantalla de la computadora el tamaño máximo o mínimo de una figura y dar una descripción cualitativa del comportamiento global de dos variables inter-relacionadas.

Introducing the variable through pattern exploration, English & Warren (1998).

Este trabajo es una propuesta didáctica para la introducción de la noción de variable. El objetivo es revisar la alternativa de aproximación de patrones y destacar las dificultades que pueden presentar a los estudiantes, cuando carecen de habilidades y conocimiento de procesos. La idea es, dado un modelo (gráfico, tabla de datos, etc.), los alumnos mediante la exploración, pueden determinar la regularidad que presenta el modelo haciendo una descripción verbal de su comportamiento, prueban sus hipótesis para una determinada cantidad n de casos y por último, construyen su generalización empleando símbolos algebraicos. Los resultados obtenidos, mostraron que los estudiantes tuvieron grandes dificultades al intentar generalizar los patrones, especialmente cuando trataron de expresarlos en forma algebraica, encontraron más fácil verbalizar sus generalizaciones que registrarlas simbólicamente.

La conceptualización de la variable en la enseñanza media, Trigueros, Ursini & Lozano (2000).

Esta investigación tiene como objeto estudiar la interpretación, simbolización y manipulación que realizan los estudiantes de diferentes niveles (secundaria, preparatoria e inicio de universidad) respecto a la variable en sus distintos usos. Para ello se utilizó un cuestionario que se aplicó a 98 alumnos para explorar la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que implican los distintos usos del concepto de variable (*incógnita*, *número general* y *relación funcional*). Los resultados mostraron que si bien, los usos de la variable están presentes en los cursos de matemáticas, los estudiantes no adquieren la capacidad de interpretarlos, simbolizarlos y manipularlos de manera satisfactoria; lo que impide una comprensión del carácter multifacético de este concepto.

Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study, Carlson, Jacobs, Coe & Larsen (2002).

El propósito de este estudio es desarrollar la noción de razonamiento covariacional y proponer un marco teórico para describir las acciones mentales involucradas en la aplicación del razonamiento covariacional cuando se interpretan y representan eventos de funciones dinámicas. Para este propósito se pidió a 20 estudiantes que habían terminado el 2º semestre de cálculo con alto rendimiento responder 5 preguntas que implicaban un análisis de aspectos covariacionales de eventos dinámicos (llenado una botella, cambio de temperatura respecto al tiempo, una escalera deslizándose de una pared hacia abajo).
Por razonamiento covariacional se entiende a "las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atienden a las formas en las que ellas cambian entre sí". Presentan como marco teórico dos tablas, una que contiene la descripción de cinco acciones mentales del razonamiento covariacional en el que se describen las acciones mentales y las conductas asociadas; y otra tabla que describe cinco niveles de razonamiento covariacional. Los resultados obtenidos señalan que los estudiantes tuvieron dificultad en la construcción de imágenes de una razón de cambio continuo, particularmente en la representación e interpretación de una razón creciente y decreciente para una situación física,

como ocurrió en el bosquejo de la gráfica del llenado con agua (a velocidad constante) de una botella y asociar la variable volumen con la variable altura, sólo 5 (25%) de los estudiantes proporcionaron una solución aceptable.

La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria, Juárez (2002).

Este es un estudio exploratorio acerca de la comprensión del concepto de variable en los profesores de matemáticas de secundaria. En el diseño del cuestionario, el análisis y clasificación de las respuestas se utilizó la caracterización de los tres usos de la variable (como incógnita específica, número general y variable en relación funcional) según Trigueros y Ursini. De esta investigación se obtienen evidencias empíricas la cual revelan "*que los profesores de matemáticas de secundaria no tienen un buen manejo de los tres usos de la variable…*" (Juárez, 2002, p. 88). El porcentaje promedio de respuestas correctas a las preguntas del cuestionario fue de 52.7%, lo que indica que los profesores tienen una pobre comprensión del concepto de variable; ningún profesor contestó acertadamente el 100% de las preguntas del cuestionario.

Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior, Vicario (2002).

El objetivo de esta investigación fue, explorar las concepciones que de variable tienen los estudiantes de nivel medio y superior (78 alumnos de secundaria, 81 de bachillerato y 88 principiantes universitarios, haciendo un total de 247). Los resultados de esta investigación muestran que la mayoría de los estudiantes cuestionados reconocen a las variables, si están representadas con las letras x e y. Cuando se trata de la identificación de variables en expresiones analíticas, a los estudiantes se le facilita tal identificación, si en éstas se encuentra presente la letra x, ellos la identifican como *incógnita* o como *variable*. Respecto a la identificación de variables dadas varias gráficas cartesianas, en particular la gráfica de una función cuya representación es una paralela al eje de las x, los estudiantes dicen que cambia la x y la y no cambia, sin embargo cuando se tiene una gráfica con los elementos contrarios (la recta paralela al eje y) las respuestas varían. Los resultados de esta investigación mostraron la escasa presencia de la idea de variable concebida como magnitud, es decir asociada a una representación geométrica (longitud, área, volumen). Se tiene una concepción de variable asociada a las literales y afloran concepciones alternativas (las que difieren de las aceptables) en el plano gráfico y conjuntista al plantear situaciones de variación.

Probing students' understanding of variables through cognitive concflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand?, Fujii (2004).

Esta investigación trata de las dificultades que los estudiantes tienen acerca de la comprensión del uso de expresiones simbólicas en la asignatura del álgebra en la escuela secundaria, para lo cual propone la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética mediante el uso de expresiones numéricas generalizables. La investigación está dividida en dos aspectos, en el primero se hace un análisis de los resultados de investigaciones sobre la comprensión de los símbolos literales por parte de los estudiantes, del cual se obtiene que muchos de los estudiantes de secundaria parecen tener una muy pobre comprensión de lo que los símbolos literales denotan y cómo pueden ser tratados en expresiones matemáticas. El segundo aspecto, un intento es realizado para mostrar como el currículum de la escuela primaria puede ofrecer mejores oportunidades a los niños para pensar algebraicamente. En la comprensión de los estudiantes acerca de los símbolos literales, identifica dos tipos. *Tipo A* para estudiantes donde “la misma letra representa el mismo número” y “diferentes letras representan diferentes números”. *Tipo B* para estudiantes donde “todo suma 12” y “todo suma 16”, parecen ignorar diferencias en las letras y considerar que las letras pueden representar cualquier número. Por otro lado el autor propone la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética introduciendo el uso de los números como cuasi-variables, por esta expresión se entiende un enunciado numérico o grupo de enunciados numéricos que indican una relación matemática subyacente la cual permanece cierta para cualquiera de los números que sean usados, por ejemplo 78 – 49 + 49 = 78.

What are these things called variables?, Wagner (1983).

En este estudio se describen algunas reflexiones acerca de los problemas que tienen los estudiantes que inician el estudio del álgebra con símbolos literales o variables. Los símbolos literales son fáciles de usar pero difíciles de entender, porque los símbolos literarios tienen características similares a los numerales y a las palabras, por lo cual los estudiantes pueden concebirlos erróneamente y pensar que se trata de una nueva notación.

En particular, establece dos características de los símbolos literales, como números y como letras y las diferencias existentes, es decir, los símbolos literales pueden representar números y letras. La letra como número, se pueden mencionar los casos de π y e, que no tienen una representación digital simple (Wagner, 1983, p. 471). Los símbolos literales como letras, para este caso se establecen dos situaciones, la letra que pertenece a un sistema alfabético para formar palabras para poder comunicarse en forma escrita y la letra que se usa convencionalmente en las matemáticas para designar un número específico o un conjunto indeterminado de valores con los cuales es posible operar. Una diferencia que se le dificulta entender a los alumnos que se inician en la asignatura del álgebra, es la relación entre los números y las letras, los números representan un valor único y las letras pueden representar simultáneamente diferentes números, a esto nos referimos cuando llamamos variables a los símbolos literarios, tal es el caso de “*…$0 < n < 20$ ó $y = 3x + 2$, donde n puede tomar números mayores que 0, pero menores que 20;* y *el número de y dependerá del número que se le asigne a x, está propiedad de representación simultánea se refiere cuando los símbolos literales se llaman variables…*” (Warner, 1983, p. 471). El autor sugiere a los profesores que introduzcan las ideas gradualmente de los diferentes usos de los símbolos literales, por ejemplo, en los primeros grados, cuando usamos *P* para nombrar un punto o *N* para representar un número, podemos decir que estas letras son como abreviaciones de las palabras. Más tarde, cuando usamos letras arbitrarias como etiquetas, podemos explicar a los alumnos que estas letras son como nombres para cosas. Cuando comenzamos a usar letras arbitrarias en contextos numéricos, deberemos mencionar que no hay conexión entre el orden alfabético y el orden numérico.

Nuestro trabajo de investigación

Es de mencionar que las investigaciones llevadas a cabo en situación escolar, la noción de variable ya tiene existencia en forma de símbolo y que después de cierto proceso de enseñanza se le asocian diferentes usos, tal es el caso de la variable como número generalizado. El presente trabajo de investigación a diferencia de las investigaciones anteriores que parten del símbolo para realizar sus conjeturas, el nuestro tiene como propósito el estudio de los procesos que originan la construcción de la noción de variable en niños pequeños, esta es otra diferencia ya que las investigaciones mencionadas se han realizado con niños de mayor edad. Pretendemos investigar la noción de variable desde un punto de vista relacional, es decir presumimos que la noción de variable no se construye de manera independiente, sino que para formar esta noción, es necesario relacionar al menos dos objetos cambiantes, donde en la mayoría de los casos uno de ellos es el tiempo.

Referencias bibliográficas

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E (2002). Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*. 33(5), 352-378.

English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher.* 91 (2), 166-170.

Fujii, T. (2004). *Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand?*. [En línea] Disponible en: http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/Plen5fujii.pdf

Juárez, J. (2002). *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Kieran, C., Booker, G., Filloy, E., Vergnaud, G. & Wheeler, D. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). Cambridge, USA.: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kuchemann, D. (1980). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*. 7(4), 23-26

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The mathematics teacher.* 74 (6), 418-420.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics teacher.* 81 (6), 420-427.

Trigueros, M., Ursini, S. & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática.* 12 (2), 27-48.

Ursini, S. (1996). Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 423-455), Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Vicario, M. (2002). *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior.* Tesis de licenciatura no publicada, FM-UAG, México.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *The mathematics teacher.* 76 (7), 474-479.

CLASIFICACIÓN DE LA MATEMATIZACIÓN DE LA ECONOMÍA DESDE UN PUNTO DE VISTA SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Saúl Ezequiel Ramos Cancino y Germán Muñoz Ortega
Facultad de Ciencias Sociales, Cimate, Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
saulramcan@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento variacional, socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: sociepistemología, matematización, predicción, modelación, herramientas

Resumen
La ciencia económica, al igual que las ciencias físicas analizan y predicen los diferentes tipos de fenómenos, ésta última utiliza el Cálculo como herramienta de predicción. En la búsqueda de entender ¿cómo el Cálculo originado en la práctica social de predecir se incorpora a otras prácticas sociales asociadas a la Economía? encontramos cómo los economistas clasifican la matematización de la economía en base al uso de diferentes conceptos matemáticos. Considerando el análisis socioepistemológico de la matematización de la economía y el análisis a posteriori de las situaciones que se le aplicaron a estudiantes de economía, podemos proponer desde nuestra visión socioepistemológica una evolución distinta del proceso de matematización de la ciencia económica, considerando el uso de herramientas y las prácticas sociales entre otros elementos.

Introducción

La Economía es una ciencia social que estudia cómo los individuos o las sociedades usan o manejan los escasos recursos para satisfacer sus necesidades. Tales recursos pueden ser distribuidos entre la producción de bienes y servicios, y el consumo, ya sea presente o futuro, de diferentes personas o grupos de personas en la sociedad (Samuelson & Nordhaus, 1986). El estudio de la Economía se basa en la organización, interpretación y generalización de los hechos que suceden en la realidad. Para su estudio, la Economía utiliza herramientas como las matemáticas y la estadística aplicadas, las cuales se usan ampliamente en el desarrollo y prueba de modelos económicos. Para los economistas un modelo económico es una conceptualización mediante la cual se pretende representar matemáticamente y de forma simplificada la realidad, para, de esta forma, poder establecer y cuantificar las relaciones entre las variables económicas que se analizan. De esta manera, la Economía puede dar alguna explicación a hechos ocurridos en el pasado y realizar predicciones sobre el comportamiento económico en el futuro. Lo anterior facilita el diseño y la implementación de políticas económicas en un país o una región por parte de las autoridades económicas, las cuales, a través de estas políticas, dirigen la economía de dicho país o región con el objetivo primordial de beneficiar a sus habitantes y, por ende, a la economía en general, gracias a la satisfacción de sus necesidades (Mcconnel & Brue, 1997). Para la Economía y en especial los economistas, el uso de las matemáticas es cada vez más fundamental tanto en la descripción de las relaciones económicas como en la formulación de proposiciones sobre relaciones de comportamiento, a fin de realizar predicciones y recomendaciones de política económica que den respuesta a cuestiones económicas. La modelación de una realidad económica que se nutre de relaciones cada vez más complejas no puede ni podrá prescindir en el futuro de la incorporación continua de teorías, instrumentos y conceptos matemáticos que ayuden a ir respondiendo a los interrogantes que surgen y a la vez abren caminos hasta ahora inexplorados (Turnovsky, 1991). Uno de los medios de formación de nuevos economistas que tiene la ciencia económica son las instituciones escolares, dentro de ellas se encuentra la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de Chiapas, cuyos objetivos son la formación de profesionales con conocimiento de los cuerpos teóricos económicos y que sea capaz de entender e interpretar la realidad económica mundial y del país. Es decir, plantear soluciones de política económica capaces de resolver las necesidades de la población.

Formación de economistas en México

Revisando los objetivos que se pretenden en la formación de Economistas de diferentes Universidades de México podemos mencionar lo siguiente (Ramos, 2005a): un Economista debe realizar investigaciones y aplicar los principios y teorías económicas, para formular soluciones a los problemas económicos del momento o para el futuro. Reúne, analiza e interpreta los datos económicos y estadísticos. Elabora modelos matemáticos para representar fenómenos económicos. Realiza previsiones sobre diferentes fenómenos económicos. Para lograr lo anterior tanto la Facultad de Ciencias Sociales como en otras Universidades de México incluyen en sus planes y programas de estudio el área de instrumentales o métodos cuantitativos, que tienen tiene por objetivo en términos generales, brindar a los estudiantes las técnicas matemáticas para poder entender y aplicarlas a diferentes problemas económicos, así también brinda la terminología y los métodos para formular y resolver modelos económicos y el manejo de las herramientas básicas en las diversas áreas de aplicación que están dentro de la ciencia económica, para la evaluación de teorías y políticas alternativas, así como la predicción del comportamiento y el análisis de las variables económicas que estén en estudio (Ramos, 2005a). Como se ha visto anteriormente las matemáticas, tanto para las instituciones escolares así como para la propia ciencia económica, tienen un papel muy importante ya que constituyen un instrumento para estudiar, desarrollar, probar diferentes teorías y predecir fenómenos económicos. Para la construcción de modelos, la ciencia económica utiliza como herramienta una extensa gama de conceptos matemáticos, nosotros a partir de este momento nos restringiremos a estudiar al Cálculo, ya que éste ha jugado un papel muy importante en la matematización de la ciencia económica desde sus orígenes hasta la actualidad y a la vez ha sido un tema de mucho interés para las investigaciones recientes acerca del papel que éste juega en los cursos que se imparten en las diferentes universidades del país y del mundo, y sobretodo el papel tan importante que desempeña en la predicción.

El Cálculo y la Economía

El Cálculo tiene como origen las ciencias que estudian la naturaleza, en especial las ciencias físicas, cuyas necesidades eran predecir el movimiento, la ciencia economía tiene como principales objetivos la interpretación y la predicción de fenómenos económicos, al igual que las ciencias físicas. Conocer cómo el Cálculo originado en la práctica social de predecir dentro de las ciencias físicas, especialmente en la mecánica, ha sido incorporado a otras prácticas sociales de diferente naturaleza, para nuestro estudio, la incorporación de éste en la ciencia económica es de gran importancia, ya que tener conocimiento de las causas que originaron la necesidad de utilizar el Cálculo como metodología en la ciencia económica consideramos que es de gran importancia para identificar las prácticas sociales que permitieron dicha utilización, y con ello justificar la pertinencia del Cálculo dentro del currículo escolar de la Licenciatura en Economía. Revisando la bibliografía que utiliza el currículo escolar diferentes Licenciaturas en Economía encontramos que estos están inmersos en la enseñanza clásica del Cálculo, es decir, establece una definición matemática y un discurso que gira alrededor de este concepto matemático: a) Definición (concepto, demostraciones, teoremas, etc.), b) Ejemplos y c) Problemas (“aplicaciones”). Este tipo de estructura que tienen los libros actualmente para la enseñanza del Cálculo y específicamente en la Licenciatura de Economía creemos que no están cumpliendo con el propósito de dar a

los estudiantes el instrumental matemático que ellos deben de tener para poder utilizarlos como las herramientas necesarias que la licenciatura y la ciencia económica exige (Ramos y Muñoz, 2006). Dar cuenta del conocimiento matemático en la Economía a través de las prácticas sociales de los grupos humanos que lo posibilitaron, creemos que ayudaría a cumplir con la intencionalidad por el cual se encuentra en el currículo escolar.
Por lo tanto, entender ¿cómo el Cálculo originado en la práctica social de predecir se incorpora a otras prácticas sociales asociadas a la Economía? nos llevó a realizar un estudio socioepistemológico del proceso de matematización de la ciencia económica, ya que la socioepistemología nos brinda una aproximación teórica cuya tesis primordialmente plantea dar cuenta del conocimiento a través de las prácticas sociales de los grupos humanos que lo posibilitaron, y la transformación de estas prácticas cuando existe una intencionalidad para que el saber matemático ingrese al sistema didáctico (Cordero, 2003).

Matematización de la Economía según los economistas

Desde los principios del análisis económico, los economistas han buscado métodos para explicar y exponer sus ideas. Una característica de la economía moderna es la difusión de los instrumentos matemáticos y empíricos en el núcleo de la investigación de prácticamente todos los economistas. La utilización de las matemáticas en la ciencia económica a partir del siglo XIX generó una revolución metodológica, que ha dotado al discurso económico de las características de rigor y generalidad, y a su vez ha proporcionado a la economía la solidez teórica para la formulación y desarrollo de diferentes teorías económicas.
Buscando las necesidades y la intencionalidad del uso de las matemáticas y en especial el Cálculo en la ciencia económica pudimos observar como los economistas clasifican de manera cronológica la matematización de la economía en base al uso de diferentes conceptos matemáticos, que fueron utilizando como metodología para estudiar, desarrollar, probar diferentes teorías y predecir fenómenos económicos (Ramos, 2005b), esta clasificación comprende tres grandes periodos (Arrow e Intriligator, 1989):

- El período inicial de la economía matemática (período marginalista, 1838-1947) se caracteriza por usar metodologías de las ciencias físicas, y utilizan las matemáticas para desarrollar una teoría fundamental basada principalmente en el Cálculo infinitesimal. En este período se formula la teoría del equilibrio general, problemas de competencia perfecta e imperfecta, de monopolios, de duopolio, la teoría del consumidor y la teoría de la producción basados en los principios de maximización.
- El período de los modelos lineales y la teoría de los conjuntos (1948-1960). Durante este período cambió mucho el enfoque, no tanto de los problemas analizados, si no el tipo de herramientas matemáticas utilizadas, dentro de las cuales una de las principales aportaciones fue la teoría de juegos de estrategia y sus aplicaciones al campo económico con el tratamiento de los modelos lineales, como medio de explicación de las relaciones intersectoriales en una economía.
- El tercer período, que va de 1961 hasta la actualidad, denominado período de integración del herramental básico, se encuentra el Cálculo infinitesimal por un lado y la teoría de conjuntos y los modelos lineales por el otro. Esta integración hoy se encuentra muy avanzada, prácticamente ya no queda campo de la economía que no haya sido tratado en mayor o menor medida desde el punto de vista matemático. La teoría del consumo y de la producción, estructuras de mercado, dualidad, teoría de la inversión, teoría de la demanda de mercado, existencia y estabilidad del equilibrio competitivo, economías regulares y núcleo, equilibrio temporario, equilibrio bajo incertidumbre, cálculo de precios de

equilibrio, teoría de la elección social, información y el mercado, imposición óptima, óptimos secundarios, crecimiento óptimo, diseño de organizaciones, incentivos y descentralización, y planificación, son algunas ejemplos de teorías y conceptos económicos que se han desarrollado en este periodo.

Como se pudo observar la base fundamental para realizar la clasificación anterior son los conceptos matemáticos, es decir, esta clasificación está en función de la evolución en el uso de las matemáticas como metodología para estudiar diferentes teorías económicas.

Una socioepistemología de la matematización de la Economía

En coherencia con nuestra pregunta y objetivo de la investigación revisamos diferentes teorías elaboradas antes del periodo marginalista (El desarrollo de la ciencia económica en sus grandes etapas la podemos clasificar, en términos generales, según la interpretación de profesores de la Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la UNACH y con base en varios autores de la siguiente manera: pensamiento antiguo y medieval, preclásico, clásico, marginalista, neoclásica, keynesiana y neoliberal), se analizó la Teoría de la Renta, esta teoría se encuentra ubicada en el periodo clásico de la evolución de la ciencia económica, arrojando entre otros resultados lo siguiente (Ramos, 2005b):

1.- En ese periodo existió una problemática dentro de un contexto social que permitió a los economistas desarrollar conocimiento (Teoría de la Renta) con intencionalidades específicas. 2.- Dentro de esta teoría se comienzan utilizar conceptos que tienen como eje principal a la variación en sus elementos básicos, es decir, procedimientos de comparación, las nociones de acumulación y valor acumulado (predicción). 3.- La predicción juega un papel importante en la búsqueda de la solución de diferentes problemáticas dentro de ese periodo.Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos concluir que el papel que ha jugado el Cálculo en la ciencia económica esta ligada a la búsqueda de resolver diferentes problemáticas a las que se ha enfrentado la sociedad. Las prácticas sociales y el contexto en que se han desarrollado tienen como eje principal la actividad humana como medio para la generación de conocimiento matemático.

A partir del análisis socioepistemológico y la problemática de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo y en especial los estudiantes de la Licenciatura en Economía se diseñaron e implementaron situaciones que permitan al estudiante reconstruir conceptos microeconómicos a través de supuestos epistemológicos que justifican la naturaleza de éstas y que a su vez consideran las cosmovisiones y prácticas sociales que permitieron matematizar la ciencia económica, con la finalidad de verificar si en el contexto actual tienen significado ciertas nociones que se dieron en el pasado, y que éstas a su vez fueron usadas para resolver diferentes problemáticas que se presentaron en esa época, tanto en las ciencias físicas como en la ciencia económica. Estas nociones están ancladas a la actividad humana dentro de las cuales podemos mencionar a la predicción, la modelación y el uso de herramientas. Se realizó un análisis *a priori* con base en un conjunto de hipótesis descriptivas y predictoras de lo que los estudiantes realizarían. Estas situaciones se implementaron a estudiantes de 4º semestre de la Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de Chiapas. Finalmente, se recolectaron los datos obtenidos a lo largo de la experimentación y se realizó un análisis *a posteriori*. Dentro de este análisis podemos comentar algunas de las conclusiones obtenidas (Ramos y Muñoz, 2006): 1.- Los estudiantes, en la necesidad de predecir crearon sus propias herramientas predictoras. 2.- Para la generación de estas herramientas pusieron en juego la noción de variación, es decir, revisaron los comportamientos de las variables que estaban presentes, observaron qué datos permanecían constantes, cuáles variaban, cómo variaban y cuanto variaban, para que a través de esta información ellos pudieran generar herramientas que les permitiera predecir. 3. A través de estas herramientas predictoras, ellos pudieron determinar el comportamiento de un fenómeno económico. 4.- La noción de variación es esencial para que la ciencia económica genere sus herramientas de predicción. 5. La predicción, sigue siendo un eje central en la actividad humana, aunque la ciencia que se está estudiando no pertenece a las naturales. 6. El conocimiento matemático consideramos que está ligado estrechamente a la actividad humana, es decir, no se encuentra vinculado con alguna ciencia en especial, si no que es parte de la necesidad de la evolución de la humanidad en su conjunto. Dentro de esta evolución se ha desarrollado conocimiento con intencionalidades específicas. Por lo que la variación juega un papel muy importante para que la ciencia económica comience a matematizar su metodología para estudiar y predecir fenómenos económicos que le permitan resolver diferentes problemáticas a las que se enfrentan los economistas. Considerando lo anterior, podemos concluir que el papel que ha jugado el Cálculo en la ciencia económica esta ligada a la búsqueda de resolver diferentes problemáticas a las que se ha enfrentado la sociedad. La práctica social de predecir y el uso de las herramientas son los ejes centrales para establecer o identificar todas las relaciones en el marco de referencia del conocimiento matemático.

Tomando en cuenta las conclusiones de los trabajos anteriores, el análisis Socioepistemológico de la matematización de la economía y el análisis a posteriori de las situaciones que los estudiantes realizaron podemos proponer desde la visión socioepistemológica una evolución distinta del proceso de matematización de la Economía descrito por los economistas (Arrow e Intriligator, 1989) que conciben a la matemática en función del desarrollo de conceptos matemáticos *per se*. Sin embargo, nuestra clasificación tiene como base fundamental a las prácticas sociales tales como la predicción, la modelación, entre otras. La humanidad ha desarrollado, durante su evolución a través diferentes sociedades, la construcción de conocimiento matemático. Este conocimiento tiene intencionalidades específicas que tienen por objetivo resolver diferentes problemáticas que se les presentan.

Una clasificación alternativa de la matematización de la Economía desde un punto de vista socioepistemológico

Nuestra clasificación consiste en entender cómo el economista va construyendo sus herramientas que le permitan dar solución a las diferentes problemáticas, es decir, la evolución de sus herramientas de predicción determinan la matematización de la economía, para lo anterior consideramos que esta evolución puede constar de cuatro etapas:

1. Constitución de problemáticas donde tiene sentido la predicción de fenómenos económicos dentro de un contexto social y cosmovisión asociada (marco epistémico en el campo de la Economía).
2. La predicción implícita.
   Cuando los economistas generan predicciones únicamente observando la variación de las variables que intervienen en un fenómeno económico, estableciendo relaciones funcionales sin tomar un sistema de referencia (condiciones iniciales). Así la noción de variación es una condición necesaria para que la predicción en la economía exista.
3. La predicción explicita.
   En esta etapa los economistas generan las herramientas de predicción necesarias para la matematización de los fenómenos de variación estableciendo previamente un sistema de referencia (condición inicial). De manera que no basta la noción de variación para

predecir, se requiere de un sistema de referencia. En el contexto de la Cinemática un estudiante puede predecir hasta que centra su atención en el origen del sistema de referencia (Muñoz, 2002).

4. Construcción de modelos globales.
   Debido a que no basta la noción de variación y el sistema de referencia se requiere la construcción de modelos globales, por ejemplo, se discute la relación funcional entre variables con el fin de analizar desde varios puntos de vista la problemática, y a través de este análisis fundamentar las diferentes teorías económicas que son puestas a disposición de la sociedad.

Con lo anterior se pretende contribuir con el rediseño del Cálculo escolar considerando como base la práctica social de predecir a partir de la visión socioepistemológica, considerando a la actividad humana como la fuente de la reorganización de la obra matemática. Identificar las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático requerirán de ser interpretadas para que sean integradas al sistema didáctico de las instituciones que forman economistas, y con ello dar inicio a la construcción de manera gradual de material didáctico fundamentado en situaciones de cambio en el contexto de fenómenos económicos y que cumplan con el papel de herramienta de predicción que requiere la ciencia económica.

Referencias bibliográficas

Arroy, K. & Intriligator, M. (1989), *Handbook of Mathematical Economics.* Vols. 1-3, North Holland. Amsterdam.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados. En J. Delgado (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 16, pp. 73-78). Lorena Impresores. Santiago de Chile.

Mcconnel, C. y Brue, S. (1997). *Economía*. México: McGraw-Hill.

Muñoz, G. (2002). Lo conceptual y lo algorítmico como base de la didáctica del cálculo integral. *Serie antológica No. 2. Red Nacional de Centros de Investigación en Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (pp. 281-310). México: Editada por la Universidad Autónoma de Chiapas y la Universidad Valle del Grijalva.

Ramos, S. (2005a). *Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía*. Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Ramos, S. (2005b). Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp. 631-637). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Ramos S. y Muñoz, G. (2006). Práctica social de predecir y el uso de herramientas en estudiantes de economía. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 19, pp. 805-811). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Samuelson, P. y Nordhaus, W. (1986). *Economía*. México: McGraw-Hill.

Turnovsky, S. (1991). The Next Hundred Years. *The Economic Journal* 101, 142-148.

LAS PRÁCTICAS DE MODELACIÓN DE LOS ESTUDIANTES ANTE LA PROBLEMÁTICA DE LA CONTAMINACIÓN DEL RÍO DE LA SABANA

Arrieta Jaime, Carbajal Héctor, Díaz Josué, Galicia Adriana, Landa Lorena, Mancilla Víctor, Ricardo Medina, Ernesto Miranda
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
hector_carbajal_avila@yahoo.com.mx.
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio, superior
Palabras clave: modelación, participación activa, contaminación

Resumen
En este artículo la problemática que abordamos es la que surge de la desvinculación de los contextos escolares y el entorno social, nuestra intención es investigar las prácticas de modelación que los estudiantes de nivel medio con bachillerato técnico clínico y estudiantes de nivel superior de la carrera de ingeniería bioquímica, ejercen al investigar un problema social: la contaminación del río de la sabana. Hacemos énfasis en observar cómo aprenden los estudiantes y las prácticas que ejercen al investigar una problemática social.

Introducción

El presente trabajo de investigación está inscrito en la línea de investigación: "Construcción social del conocimiento" que se desarrolla en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero y se cuenta además con la participación de docentes y estudiantes de nivel medio superior del bachillerato técnico clínico del Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios 116 y de nivel superior de la carrera de Ingeniería Bioquímica, del Instituto Tecnológico de Acapulco

La problemática que abordaremos en nuestra investigación, es la que surge de la desvinculación de los sistemas escolares y su contexto; nuestra intención es investigar la manera de cómo investigan los estudiantes un problema de su entorno social, los estudiantes son de nivel medio superior del Centro de Estudios Tecnológicos, Industrial y de Servicios No. 116 (CETIS 116) del bachillerato técnico clínico, así como también de la carrera de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco, en esta investigación se entrelazan sistemáticamente las dimensiones relativas a cómo aprenden los actores, las prácticas que al ser ejercidas construyen conocimiento y la construcción social del mismo, por lo que desde nuestra perspectiva, el aprendizaje es situacional, es decir, se dan en un lugar, en un tiempo y en un espacio determinado (Arrieta, 2003).

Esta investigación está situada en una problemática social que es atendida por comunidades de técnicos clínicos e ingenieros bioquímicos, comunidades en la que los estudiantes habrán de incorporarse posteriormente, por lo que coincidimos con Lave y Wegner, (1993); Carraher, D y Schliemann, A. (1993); Noss,R., Hoyles, C. y Pozzi, S (2002); Arrieta, (2003), Galicia y Arrieta (2005), quienes realizan investigación contextualizada, partiendo de actividades de comunidades específicas.

Así mismo coincidimos con Roth., M (2002) cuando afirma que el conocimiento científico sólo es valorado por los didáctas de las ciencias. En contraste con la enseñanza tradicional, la educación científica sólo es una herramienta más de la sociedad burguesa para reproducirse, apartando estudiantes (mujeres, minorías o aquellos con desventaja económica). Del mismo modo señala que el aprendizaje casi nunca es el foco de la actividad diaria fuera de la escuela, más bien aprendemos incidentalmente cuando participamos en acciones relevantes, significativas, con propósito y responsabilidad. Cuando los alumnos se hacen partícipes de una investigación científica fuera de la institución, los alumnos se sienten motivados hacia el estudio de la ciencia, sobre todo, si esa investigación es para bien de la comunidad en la que viven.

El propósito

El propósito de esta investigación colectiva es atender la problemática que emerge de la separación de los contextos escolares con su entorno social. Promover la participación de los estudiantes en la solución de problemáticas de relevancia para sus comunidades y para la humanidad. Es de nuestro interés estudiar las herramientas con las que participan y los conocimientos que construyen.

La hipótesis

Nuestra hipótesis es que los estudiantes al involucrarse en la problemática, construyen ciencia fuera del aula, modelando las distintas variables que intervienen en la contaminación del Río del de la Sabana. Los estudiantes construyen modelos numéricos, gráficos u otros, argumentan y establecen consensos, contribuyendo con ello al fortalecimiento de una visión científica del mundo y preparándolos para su incorporación a las comunidades de técnicos especializados y profesionistas.

El marco teórico

Arrieta (2004) le llama "*la numerización de los fenómenos*" a las prácticas que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y se toma como central su uso.

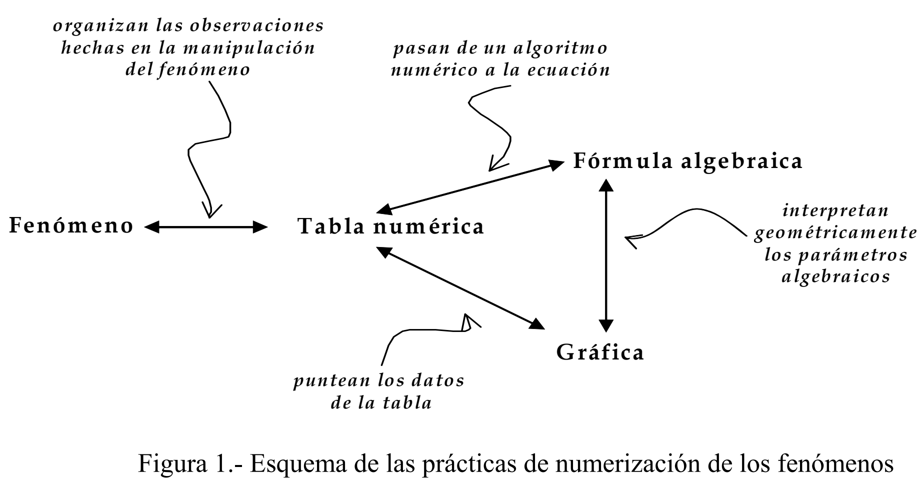


Figura 1.- Esquema de las prácticas de numerización de los fenómenos

Nuestra investigación requiere de incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento; lo epistemológico, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza, la perspectiva teórica que asumimos es la aproximación múltiple que se le ha llamado formalmente acercamiento socioepistemológico (Cantoral y Farfán, 2002),

La metodología

Hacemos uso de la metodología *Investigación-Acción-Participación* (IAP), metodología basada en criterios fundamentales de la lógica y del método científico, en esta metodología los participantes intervienen activamente en la investigación y plantean propuestas de solución a problemas emanados de la misma, en este sentido los participantes conocen mejor la realidad de la sociedad a la pertenecen, actúan conjuntamente entre ellos e intentan satisfacer necesidades y transformar su entorno.

La planeación del proyecto

El grupo de investigación conformado por estudiantes y catedráticos del programa de maestría de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, acuerdan atender la problemática social de la contaminación de un río ubicado en la periferia de la ciudad, desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático por estudiantes de nivel medio y superior de áreas químico biológicas. Por lo que se realizaron recorridos de reconocimiento de los puntos de acceso ya que la extensión del río es de aproximadamente cinco kilómetros. Así mismo se consultó a docentes y expertos en el análisis de copros, análisis microbiológicos y fisicoquímicos de agua y de alimentos, para contemplar los materiales y reactivos a utilizar por los estudiantes, por otra parte se organizaron conferencias dirigidas a los estudiantes de la temática a abordar.

La organización de los participantes

La participación de los estudiantes fue voluntaria por invitación del grupo de investigación y sin que ésta actividad impactara en la evaluación de las asignaturas que cursaban. Los estudiantes acordaron tres puntos de muestreo del río, la parte alta, media y baja, de niveles de contaminación evidente de menor a mayor respectivamente.

Los estudiantes de nivel medio cursaban cuarto semestre y se organizaron en tres equipos de cinco integrantes cada uno y luego de conocer la problemática mediante consenso acuerdan realizar una encuesta a la población que habita en las inmediaciones del río y realizar análisis de copro a la población infantil.

Los estudiantes de ingeniería bioquímica cursaban sexto semestre y se organizaron por afinidad en tres equipos, dos de cuatro elementos y uno de cinco, para atender la problemática el primer equipo decide realizar análisis fisicoquímicos y microbiológicos de agua, el segundo equipo decide realizar la determinación de carga bacteriana en agua y pescado y el tercer equipo propone realizar la determinación de contaminación de agua de origen fecal.

Los resultados

Los estudiantes de nivel medio aplicaron 100 encuestas a los padres de familia, que revelaron aspectos como el uso del agua del río, frecuencia de enfermedades gastrointestinales y cutáneas así como también aspectos de instalación hidráulica y sanitaria. Identificaron la presencia de parásitos en seis muestras de copro de un total de cuarenta, a continuación mostramos dos de los modelos gráficos utilizados por los estudiantes para presentar los resultados emanados del modelo numérico. Para el tratamiento de los datos hicieron uso del programa Excel.

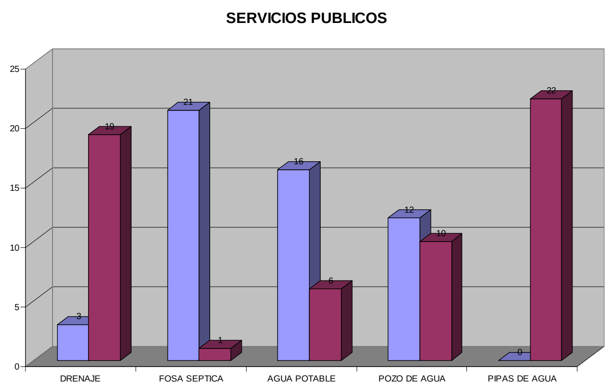


Figura 2. Gráfica de servicios públicos de la comunidad

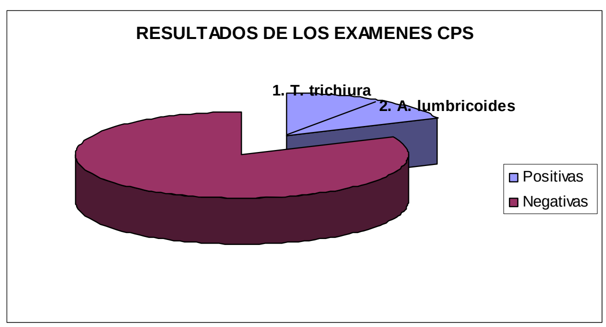
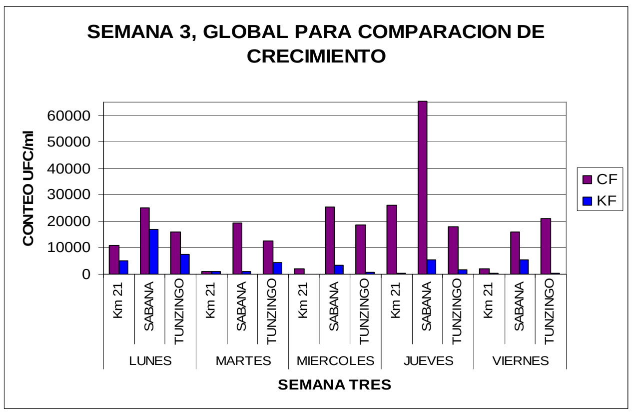


Figura 3. Resultados de copro

Figura 4. Trabajo en laboratorio

Los estudiantes de ingeniería bioquímica, presentaron los resultados de los diferentes análisis articulando los modelos numérico y gráfico. Se realizó el tratamiento de 90 muestras de agua y 15 muestras de pescado, se trabajó en el laboratorio durante tres semanas consecutivas con jornadas de doce horas diarias, condiciones habituales de trabajo
Uno de los resultados presentados es el que realiza el equipo tres al analizar la relación que existe entre los valores obtenidos de *coliformes* y *estreptococos fecales*. Relación que indica si el origen de la contaminación es animal ó humana.



DIAS	MUESTRAS	CF	KF
LUNES	Km 21	10800	5050
	SABANA	25200	16800
	TUNZINGO	15800	7300
MARTES	Km 21	900	1100
	SABANA	19200	1000
	TUNZINGO	12400	4500
MIERCOLES	Km 21	2100	50
	SABANA	25400	3500
	TUNZINGO	18670	800
JUEVES	Km 21	26160	300
	SABANA	65500	5350
	TUNZINGO	18006	1600
VIERNES	Km 21	2200	210
	SABANA	16000	5500
	TUNZINGO	21000	380

Figura 5. Gráfica de microorganismos de origen fecal.

Conclusiones

Los estudiantes de nivel superior hicieron una tabla de datos "*modelo numérico*" para posteriormente puntear los datos "*modelo grafico*", y así observar el comportamiento de la contaminación en horarios diferentes y en los distintos puntos, articulando ambos modelos sin lograr identificar las características de estos modelos con modelos conocidos, por lo que actualmente nos encontramos en el tratamiento de entrevistas clínicas que nos permitan observar con mayor precisión los resultados presentados por los estudiantes.
Los estudiantes de ingeniería bioquímica realizaron predicción de la carga microbiana esperada en las siguientes muestras basada en la experiencia adquirida, esta predicción es inducida por la necesidad de preparar la cantidad de reactivos necesarios y el tiempo para el tratamiento de las muestras. Esta predicción fue basada en las condiciones climáticas presentadas en el periodo de la investigación. Por otra parte los estudiantes de nivel medio realizaron la articulación de los modelos numérico y geométrico de los resultados de las entrevistas realizadas y de los resultados de las muestras de copro, al igual que los estudiantes de nivel superior hicieron uso del programa Excel para el tratamiento de los datos sin lograr identificar las características propias de los modelos obtenidos.
Los resultados de esta investigación proporcionan elementos que nos permitirán elaborar diseños de aprendizaje basados en la investigación, la acción y la participación de los estudiantes con problemáticas del entorno social.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral no publicada. Cinvestav IPN. México. Premio "Simón Bolívar" 2003.

Carraher, D y Schliemann, A. (1993). Proportional reasoning in and out of school. En P. Light y G. Butterworth (Ed) Context and Cognition. *Ways of Learning and Knowing*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 47-73.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). Sur la sensibilité à la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. Recherches en Didactique des mathématiques. Vol. 22, Num. 2

Ezequiel Ander – Egg (2003) *Repensando la investigación acción participativa*. Colección politica, servicios y trabajo social. Grupo Editorial Lumen.

Galicia, A., Arrieta, J. (2005) Modelación de la evolución de la levadura: un estudio de las prácticas sociales del Ingeniero Bioquímico. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18.*

Lave, J. y Wenger, E. (1993). *Situated Learning*. *Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge University Press, New York.

Noss,R., Hoyles, C. y Pozzi, S (2002) Abstracción in expertise: a study of nurses conceptions of concentration. Journal for Researches in Mathematics Education, Vol. 33. Num. 3, pp. 204-229.

Roth, W. M. (2002), Aprender ciencias en y para la comunidad, *Investigación Didáctica, Department of Currículo & Instrucción.* Faculty of Educatión. University of Victoria.

USOS DE LAS GRAFICAS Y SUS REPERCUSIONES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Crisólogo Dolores Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) UAG. (México)
cdolores@prodigy.net.mx
Campo de investigación: pensamiento variacional. Nivel educativo: medio, superior
Palabras clave: graficas, usos, desarrollo, pensamiento variacional

Resumen
En este documento se caracterizan los usos de las gráficas. Se caracteriza su uso en la enseñanza tradicional, en los medios de comunicación, para el desarrollo del pensamiento y el uso social que se les da en las comunidades de profesionales o en la vida diaria de la gente. En la enseñanza tradicional son utilizadas como auxiliares didácticos que hacen posible la visualización de datos. Hoy día las gráficas son muy usuales en los medios de comunicación como recursos para transmitir información a núcleos poblacionales amplios, sin embargo las graficas socialmente compartidas requieren de lectores con una cultura amplia que les posibilite entenderlas y darles el sentido adecuado. Las graficas no solo son necesarias transmitir información, son útiles para favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Las habilidades como: la estimación, el cálculo, la predicción, el planteo de conjeturas, para identificar lo que cambia, para correlacionar cambios, para determinar las cualidades del cambio, etc. pueden contribuir al desarrollo de este tipo de conocimiento.

Introducción

Desde la década de los noventa las gráficas han ocupado un lugar preponderante en el campo de la investigación en Matemática Educativa, hay evidencias de ello en Zimmerman & Cunningham (1991), Romberg *et al* (1993) y Roth (2003). Muchos de los procesos asociados a las graficas incluyen su interpretación y su construcción. La interpretación se refiere a las habilidades necesarias para leer una gráfica tanto local como globalmente, y darle sentido o significado (Leinhardt *et al* 1990). La construcción se refiere al acto de generar algo nuevo, construyendo una gráfica o trazando puntos a partir de datos, a partir de una regla funcional o a partir de una tabla. La interpretación de gráficas requiere de procesos agudos de visualización, aunque Eysemberg & Dreyfus (1991) mostraron que muchos estudiantes poco utilizan el pensamiento visual, prefieren el trabajo algorítmico. Diversas investigaciones han mostrado las dificultades e inconsistencias que afloran cuando los estudiantes hacen lectura de gráficas, véase por ejemplo a: Brassel & Rowe, (1993); Moschkovich *et al* (1993); Yerushalmy & Shternberg (2001); Wainer, (1992); Dolores *et al* (2002), Dolores (2004); Dolores y Valero (2004). Prácticamente todas estas investigaciones han sido realizadas considerando el contexto escolar, pues en este contexto las gráficas son utilizadas bien como herramientas para la enseñanza de las ciencias o las humanidades o bien como objetos de enseñanza en sí mismos en las clases de matemáticas. De ahí deviene uno de los usos tradicionales de las gráficas en la escuela: como auxiliares didácticos; sin embargo en el campo de la investigación en matemática educativa se ha sugerido que las gráficas pueden ser usadas para desarrollar la actividad cognoscitiva del pensamiento. El uso tradicional más difundido de las gráficas ha sido para comunicar información a través de los medios de difusión o comunicación, de ahí que aparecen frecuentemente en periódicos, revistas, etc. Las gráficas también son utilizadas por comunidades de profesionales no ligados directamente a la matemática, las usan para satisfacer necesidades propias de sus campos profesionales. Estos usos descritos sintéticamente en este apartado son ampliados en las páginas posteriores de este documento.

¿Qué son las gráficas?

Una gráfica es una representación visual de una relación entre dos o más variables. Una gráfica cartesiana comúnmente esta formada de dos ejes llamados: eje x, el eje horizontal y el eje y, el eje vertical. En estos ejes se representan las variables y suelen tomar el nombre de variables concretas en dependencia del contexto en que se usen. Suelen también usarse gráficas en tres dimensiones representadas en coordenadas cilíndricas o esféricas. Existe una enorme variedad de gráficas que se clasifican según su forma, el tipo de variables que se representa, etc. Son usuales en textos de matemáticas, en textos de de estadística o incluso en los medios de información. En estos últimos las gráficas usuales son: de barras, lineales, histogramas, de dispersión, de polígonos de frecuencia, polares, etc. Las gráficas se consideran como herramientas visuales útiles porque posibilitan la detección de tendencias, facilitan las comparaciones y se constituyen en medios idóneos para analizar el comportamiento de fenómenos de variación. No obstante, los usos que en la enseñanza tradicional se les da parecen estar alejados de la concreción de estas bondades. Expliquemos esto.

El uso de las gráficas en la enseñaza tradicional

En algunas observaciones hechas a profesores de matemáticas del nivel medio y superior del centro del Estado de Guerrero se ha notado que utilizan tablas de valores y estos son frecuentemente representados en una gráfica. Sin embargo hemos observado que con el solo hecho de representar algunos puntos en el plano, unir los puntos y dibujar la recta (o curva) que se forma, los profesores (principalmente los de secundaria) consideran culminada la tarea de graficación. Esta práctica asume que la graficación consiste solo en localizar puntos y hacer el dibujo, incide solo en la transición del plano numérico al plano gráfico. En el nivel medio superior observamos que los profesores, en el caso de la Geometría Analítica, privilegian la obtención de los puntos singulares de las gráficas por medios algebraicos, la construcción de la gráfica propiamente dicha es relegada a un papel secundario, incluso a veces se omite. Las gráficas en la enseñanza tradicional son utilizadas principalmente como medios que hacen posible la visualización de datos, éste es el fin primordial.

El uso de las graficas para comunicar información

Etimológicamente, el término comunicación deriva del latín *comunicare*, que puede traducirse como "compartir algo con alguien". Hoy día es común que se comparta información sintetizada en gráficas en amplias núcleos sociales a través de los periódicos, revistas, la televisión o la Internet. Una de las virtudes atribuidas a las gráficas es que posibilitan el acceso a la información ya que permiten una visión de conjunto de los fenómenos en cuestión, hacen que la información sea más rápidamente perceptible que la observación directa de los datos numéricos. Uno de los fenómenos más trascendentes que trajo consigo el sigo XX ha sido la posibilidad del acceso del público en general a la información. A su vez, esto ha sido posible gracias a la incorporación y uso de los medios masivos de comunicación y el consiguiente uso de las tecnologías actuales. Los medios de comunicación en la actualidad son una pieza clave en la transmisión de la información y en esto las gráficas juegan un papel preponderante. Sin embargo la lectura e interpretación de las gráficas que se comparten socialmente a través de esos medios, requiere de cierta base cultural para darles el sentido y significado a la información en ellas implícita. Mayor especialización se necesita para interpretar gráficas que se utilizan en campos profesionales específicos. En una investigación reciente (Cuevas, 2006) al plantear tareas de lectura e interpretación de gráficas que se publican en periódicos de circulación nacional, se pudo detectar que los estudiantes de educación básica externaron escaso dominio de los significados de los conceptos poblacionales o financieros allí tratados. Esta investigación deja al descubierto la necesidad que el lector tiene de una cultura amplia que le posibilite entender la información dada a través de las gráficas.

Uso de las gráficas para el desarrollo del pensamiento

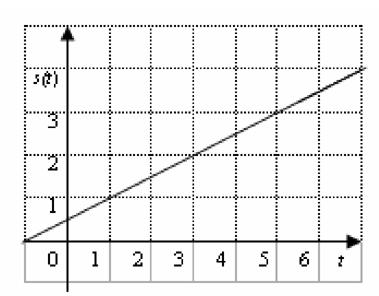
Duval (1998) afirma que las gráficas no solo pueden ser utilizadas para comunicar o transmitir información, sino que pueden ser útiles en el desarrollo de la actividad cognoscitiva del pensamiento. En esta misma dirección Cantoral y Montiel (2001) reconocen la existencia de dos formas clásicas de entender la enseñanza de la graficación: una que asume que la graficación es una técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar la gráfica de una función, y otra menos difundida, que entiende la graficación como forma de interpretar el sentido y significado y de sus propiedades desde una perspectiva cognoscitiva. Inclusive se han acuñado los términos de *visualización matemática* y *pensamiento visual* para referirse a este tipo de procesos. El primer caso es caracterizado por Zimmerman & Cunningham (1991) como los procesos de formación de imágenes (tanto mentalmente, como con la ayuda de lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y el uso efectivo de tales imágenes para el descubrimiento matemático y la comprensión. El segundo caso, un poco más restringido, se utiliza para describir los aspectos del pensamiento matemático que están basados o que pueden ser expresados en términos de imágenes mentales.

Por nuestra parte creemos que las gráficas no solo pueden ser utilizadas como simples auxiliares didácticos en los que se posibilita la visualización de datos, o bien no solo pueden usar para hacer preguntas *interesantes* en los exámenes. Para nosotros la visualización no es el fin sino el medio para desarrollar pensamiento matemático, para generar y desarrollar conocimiento no es suficiente una posición contemplativa de las gráficas sino una posición activa. Para desarrollar el pensamiento por medio de las gráficas sugerimos acciones planteadas en Dolores (1999) y las desprendidas de Carlson *et al* (2002). Estas acciones sistemáticamente planteadas pueden ser resumidas en cinco: 1ª. Acción ¿Qué cambia? 2ª. Acción ¿Cuánto cambia? 3ª Acción. ¿Cómo cambia? 4ª. Acción ¿Qué tan rápido cambia? y 5ª. Acción ¿Cómo se comporta global y puntualmente la gráfica?

La primara acción involucra la identificación de qué variables están representadas, la ubicación de puntos en el plano y la determinación de intervalos de variación. Para poder determinar cuánto cambia eso que cambia se requiere hacer comparaciones y operaciones de resta entre estados finales e iniciales, tanto para la variable dependiente como para la independiente, considerando la correlación entre esos cambios. Para saber cómo cambian las variables representadas se requiere poder determinar si la gráfica crece, decrece o se mantiene constante, o en otras palabras, determinar la dirección del cambio. Para poder determinar la rapidez del cambio se requiere la utilización de la razón promedio de cambio que involucra necesariamente cambios de la variable dependiente en relación a los cambios de la variable independiente. El comportamiento global y puntual de la gráfica implica la utilización de la razón de cambio instantánea (derivada) para precisar en qué intervalos (o puntos) crece o decrece, en qué puntos tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión. De hecho, en los programas y textos de Cálculo Diferencial del bachillerato se sugiere el tratamiento del análisis de funciones usando la derivada.

En nuestros trabajos de docencia e investigación hemos diseñado y puesto escena diferentes actividades, mediante el uso de las gráficas, a fin de desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional con estudiantes de bachillerato y principiantes universitarios. Habilidades como: la predicción, la estimación, el cálculo cambios y razones de cambio, para la determinación de intervalos de crecimiento y decrecimiento, para el planteo de conjeturas, para validar conjeturas, para transitar del leguaje algebraico al gráfico y viceversa, entre otros, pueden ser desarrolladas si se diseñan y se realizan actividades que involucren el pensamiento visual utilizando escenarios ricos en gráficas. A continuación presento algunos ejemplos representativos.

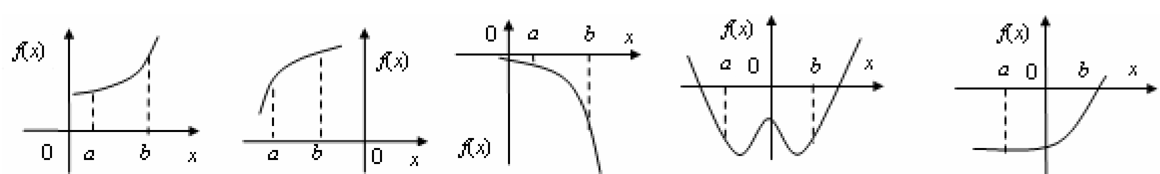
- En la Gráfica 1 se muestra la trayectoria de una partícula. ¿A qué razón se desplaza entre $t = 8$ y $t = 9$ ¿Cuál es su velocidad exactamente en $x = 9$?



Gráfica 1

La realización de esta tipo de actividades puede desarrollar la habilidad de predicción. Para realizarlas es necesario, extraer y utilizar la información que provee la gráfica calculando la pendiente de la recta en el intervalo dado y hacer uso de la predicción, ya que se trata de una recta y esta (si no hay otra condición) proseguirá comportándose uniformemente.

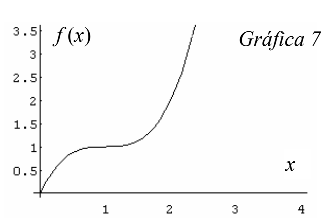
- ¿En qué gráficas se cumple que: $f'(a) > f'(b)$ o bien $f'(b) < f'(a)$?



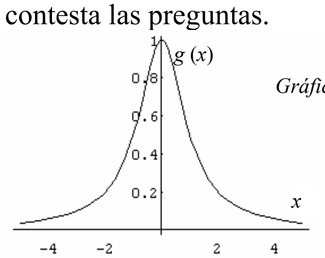
Gráfica 2 *Gráfica 3* *Gráfica 4* *Gráfica 5* *Gráfica 6*

Con esta actividad se podría desarrollar la habilidad para hacer comparaciones y estimaciones utilizando la asociación entre la pendiente de las curvas y la derivada.

- A partir de las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ contesta las preguntas.



Gráfica 7



Gráfica 8

¿En dónde crece con mayor rapidez la gráfica de $f(x)$? ¿En $x = ½$, en $x = 1$ ó en $x = 2$?
¿En qué punto la gráfica de $g(x)$ decrece con mayor rapidez? ¿En $x = 1$, en $x = 2$ ó en $x = 4$?

Ponga a prueba sus estimaciones si gráfica de $f(x)$ se rige bajo la fórmula: $f(x) = (x-1)^3 + 1$ y la gráfica de $g(x)$ se rige mediante la fórmula: $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Actividades de este tipo pueden favorecer la realización de estimaciones, el planteo de conjeturas sobre la variación de las curvas y la búsqueda de procesos de validación de sus propias conjeturas.

- Analice el comportamiento de las gráficas de la Figura 1.

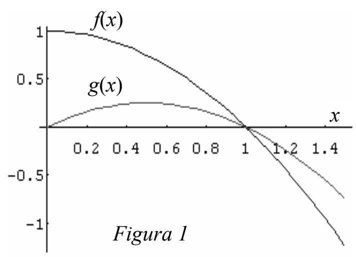


Figura 1

¿Es $f'(1) = g'(1)$? ó ¿$f(1) = g(1)$?
Estime la rapidez con que crecen las curvas $f(x)$ y $g(x)$ para $x = 0.5$
Estime la rapidez con que decrecen las curvas en $x = 1$.
Ponga a prueba sus estimaciones si las curvas se rigen por las fórmulas: $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = x - x^2$.

El conocimiento puede tener una oportuna motivación si se plantea en términos de contradicciones y éstas se convierten retos para los estudiantes. En nuestras investigaciones (Dolores, 2004) hemos encontrado que con frecuencia los estudiantes consideran que la derivada en un punto es equivalente al valor de la ordenada en ese mismo punto, incluso hemos constatado que es difícil superar esta concepción alternativa. Sin embargo actividades de este tipo podrían contribuir a superar esta confusión.

El acercamiento sobre el uso social de las gráficas

En investigaciones recientes se estudia la graficación en el discurso matemático escolar sobre la base que da la matemática funcional y en el desarrollo de las prácticas sociales (Cordero, 2005; Buendía y Cordero, 2005). La relación que se establece entre las gráficas y los estudiantes en la escuela es diferente de aquella que se establece entre las gráficas y las comunidades de profesionales o incluso con la gente común y corriente. En el primer caso la relación es permeada por el contrato didáctico vigente, en el segundo son las relaciones utilitarias y funcionales las que predominan. No es lo mismo estudiar las gráficas en el contexto escolar "para pasar" un examen que utilizarlas para satisfacer una necesidad propia de las comunidades de profesionales o para uso cotidiano de la gente. Esta vertiente del uso social de las gráficas ha tenido lugar bajo el enfoque socioepistemológico. En esta dirección se han encontrado evidencias sobre prácticas argumentativas gráficas en diversas situaciones donde son resignificadas al debatir entre la *función* y *forma* de la graficación. Contrario a las investigaciones que parten de premisas que colocan a la matemática formal en el papel central, estas investigaciones centran la atención en los usos y desarrollo de prácticas de la graficación y de este modo han posibilitado un acercamiento a la matemática funcional. En esta dirección se puede investigar cómo viven las gráficas en contextos sociales extraescolares. Si bien las gráficas son objetos de enseñanza en la escuela, también son de uso expandido en núcleos profesionales específicos. Varias preguntas podrían tener sentido en este contexto, ¿Cómo usan las gráficas los empleados encargados del control de calidad en una empresa? ¿Cómo usan las gráficas los biólogos? ¿Cómo usan las gráficas los periodistas? ¿Qué diferencias hay entre el uso de las graficas en la escuela y su uso en actividades profesionales específicas? Estas preguntas ocuparán nuestra atención en futuros trabajos.

Referencias Bibliográficas

Brassel, M. & Rowe, B. (1993). Graphing skills among high school physics students, *School Science and Mathematics 93*, 63–71.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspects generators of knowledge in social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58(3)*, 299–333.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*, México D. F., Méx.: Prentice Hall.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education, 33 (5)*, 352–378.

Cordero, F. (2005). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 477-482. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cuevas, I. (2006). *Lectura e interpretación que de las graficas hacen estudiantes de educación básica.* Tesis de maestría, no publicada. Maestría en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas UAG, Chilpancingo Gro., Méx.

Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16 (3)*, 225–250.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México D. F., Méx.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7(3),* 195–218.

Dolores, C. y Valero, M. S. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. *Epsilon 58, 20 (1)*, 45-73.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). México D. F., Méx.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Eysemberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25–37). Washington, DC, USA: The Mathematical Association of America.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research 60*, 1–64.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. & Arcabi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of lineal relations, and connecting among them. En T. Romberg, E. Fennema & T. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69–100). Hillsdale, N.J., USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Romberg, T., Fennema, E. & Carpenter, T. (1993). *Integrating Research on the Graphical Representations on Functions*. Hillsdale, N. J., USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Roth, W. (2003). *Toward an Anthropology of Graphing*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher 21*, 4–23.

Yerushalmy, M. & Shternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. En A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 251–268). Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC, USA: The Mathematical Association of America.

FORMAS BÁSICAS DE GRAFICACIÓN Y SU RELACIÓN CON SITUACIONES DE MOVIMIENTO

Claudia Flores Estrada
CECyT 5, CICATA-IPN. (México)
claudia.mo@gmail.com

Campo de investigación: gráfica y funciones. Nivel educativo: medio
Palabras clave: gráficas, conocimiento, interpretación, construcción

Resumen
Este trabajo reporta los resultados preliminares de una investigación que tiene como propósito conocer los aprendizajes que logran los estudiantes del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional al trabajar una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos como la graficación con un problema de situación real de movimiento. Se toma como antecedente el trabajo desarrollado por Torres (2004) y como marco de referencia la socioepistemología. En particular, se retoma la hipótesis, planteada dentro la didáctica del Cálculo, que dice que "la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva" (Castañeda, 2004, 26). En la formulación de esta hipótesis intervienen cinco elementos pero, en este trabajo, hay un énfasis en el "tratamiento simultáneo de las variaciones de una función", en términos de una situación de movimiento, las variaciones en la posición y la velocidad.

Planteamiento de la problemática

Se han reportado en diversas investigaciones las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción e interpretación de gráficas (Véase una revisión amplia en Leinhardt et al 1990). Sin embargo, el potencial de significados, procedimientos y argumentos que propician en los estudiantes estas actividades de construcción e interpretación de gráfica
no sólo contribuye a la comprensión del concepto de función sino que constituyen una vía de construcción de ideas de variación.

De esta manera, la graficación se ha revelado en las investigaciones como una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. La gráfica permite ver las características globales de la función como son: las variaciones, el crecimiento, la continuidad, la concavidad, los máximos y los mínimos, etc. Pero también, tomando a la graficación como una vía de construcción se pueden identificar distintos usos de las gráficas. En este sentido Araceli Torres (2004) propone, a partir de una revisión de libros de texto y de literatura en Matemática Educativa tres usos de las gráficas:

a) La construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables (localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica).

b) La construcción de gráficas por prototipos (en una parábola, por ejemplo, se estudian las transformaciones gráficas cuando se le suma una constante, o una recta que pase por el origen con pendiente positiva o negativa, o una recta que no pase por el origen con pendiente positiva o negativa o cuando el coeficiente del término cuadrático toma un valor mayor o menor a la unidad).

c) La representación gráfica por medio de la simulación de un fenómeno físico. Los dispositivos transductores registran los datos y las calculadoras con poder de graficación los convierten en tablas y gráficas. Los alumnos realizan un movimiento, obtienen un registro gráfico de tal manera que al cambiar las características de su movimiento pueden identificar los cambios que se producen en la gráfica. De esta forma se analiza un fenómeno y al mismo tiempo su representación.

La interpretación gráfica del estudiante nos permite obtener una visión de su conocimiento al realizar las gráficas y su interpretación que pudiera servir en la mejora de la enseñanza de las matemáticas.
Hemos escogido situaciones de aprendizaje que tengan que ver con la modelación gráfica del movimiento tal y cómo es trabajada en Torres (2004). Describimos este tipo de actividades a través del cuadro siguiente.

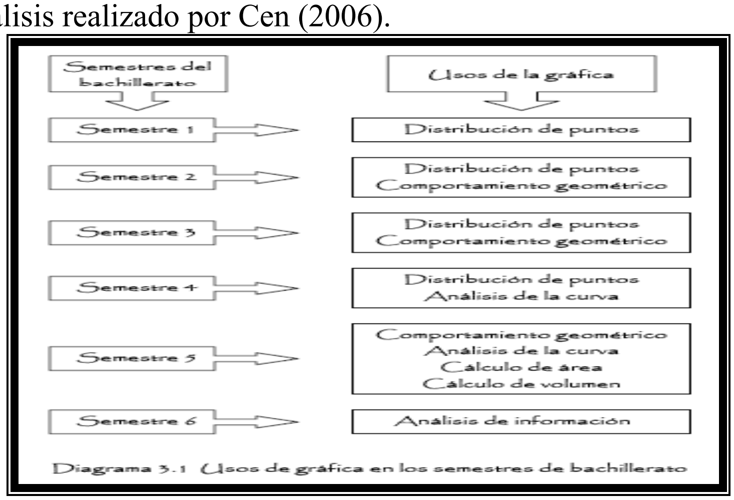
Descripción de las actividades de graficación - modelación

Tres actividades para analizar una situación de movimiento a través de:
- Proponer un modelo gráfico: se pide diseñar una gráfica que describa los cambios de posición de un una persona que realiza el movimiento descrito. En el momento de realizar esta tarea se toman decisiones: las variables que intervienen, la escala de la gráfica, las distancias recorridas en distintos instantes.
- Realizar una simulación: se pide simular el movimiento frente al sensor para obtener la gráfica estipulada. El movimiento se adapta al alcance del sensor. A partir de múltiples realizaciones se establecen relaciones entre las características del movimiento y los diversos comportamientos gráficos obtenidos en la calculadora.
- Efectuar un contraste entre el modelo gráfico y la situación: se pide ajustar el modelo gráfico original dando cuenta de la situación planteada.

Se esperan de los estudiantes múltiples realizaciones en la simulación del movimiento en las que tomen decisiones sobre las características que se varían en la situación para la obtención de distintas gráficas.

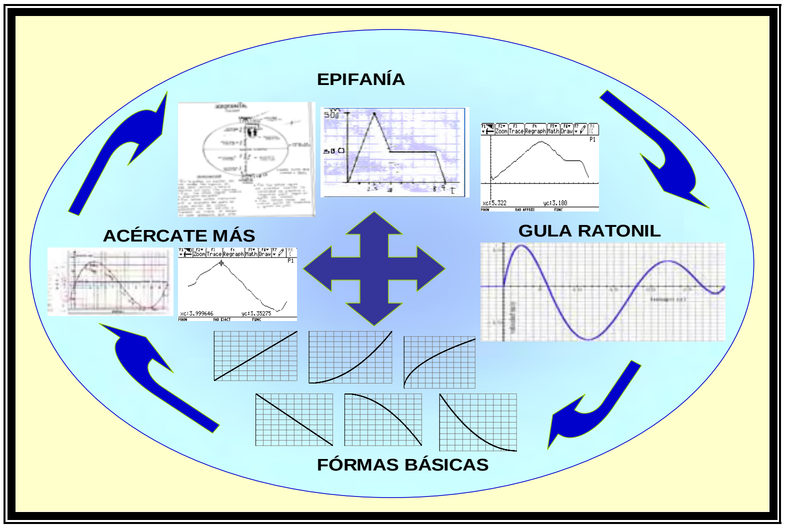
Cuadro I. Descripción de las actividades de graficación- modelación tomado de Suárez et al (2005).

Los programas vigentes de matemáticas en el Nivel Medio Superior del IPN (IPN, 1994-1996) establecen como una línea de desarrollo del currículo a la modelación. En la instrumentación didáctica y en la lista de contenidos de los programas de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Probabilidad y Estadística se observa como una constante la graficación de funciones, ecuaciones y conjuntos de datos. Para ilustrar esta presencia de la graficación mostramos a continuación el resumen de un análisis realizado por Cen (2006).



Cuadro II. Uso de gráficas en el Nivel Medio Superior del IPN. Tomado de Cen (2006).

Congruente con estas necesidades el Instituto Politécnico Nacional ha incluido una gran variedad de situaciones de aprendizaje con el uso de gráficas en ambientes tecnológicamente enriquecidos. Un ejemplo de estas actividades, en cuyo diseño la modelación usa la graficación, es el problema de movimiento comentado en el Libro del Profesor de Geometría Analítica (IPN, 2006, 109-119). Esta y otras actividades forman una red (véase el Cuadro III) con la que se trabajan distintos conceptos a lo largo de los seis semestres.



Cuadro III. Red de actividades de graficación- modelación

La presente investigación se enfoca en la interpretación de las formas básicas de graficación en la que los estudiantes logran una visión cualitativa de un cierto fenómeno de movimiento describiendo la variación de primer y segundo ordenes de la situación.

Actividades de aprendizaje de modelación - graficación.

Para analizar el desempeño de los estudiantes se han elegido dos actividades de aprendizaje que describimos a continuación:

> *Formas Básicas* es una actividad en la que nos presenta la posición de un móvil por medio de su representación gráfica.
>
> *Acércate más* es una actividad en la que una persona recorre una cierta distancia en motocicleta mediante una representación gráfica.

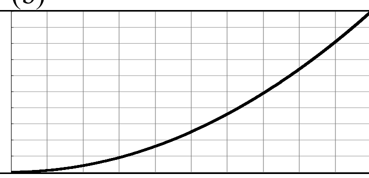
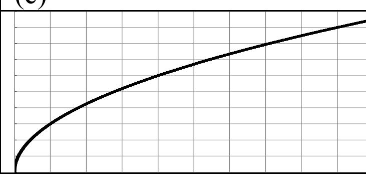
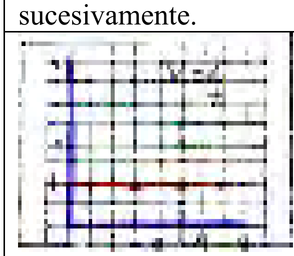
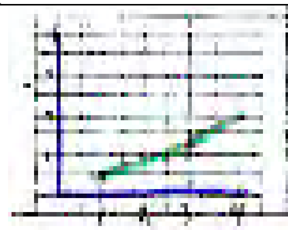
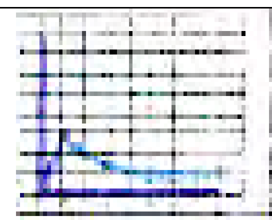
El análisis de la situación-problema "formas básicas de graficación" se considera desde su aspecto verbal, aspecto geométrico (representación gráfica de posición y de la velocidad), aspecto numérico (situación numérica de la velocidad) y el aspecto algebraico. Para obtener la velocidad se considera la aproximación por velocidad promedio**.**

Algunos resultados

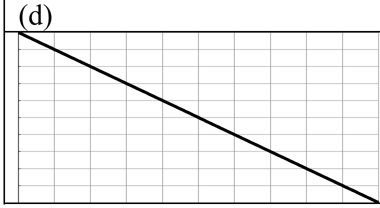
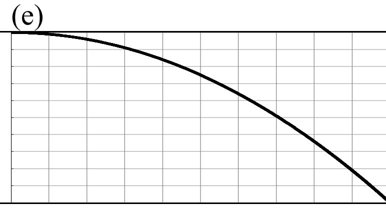
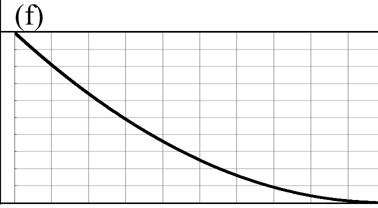
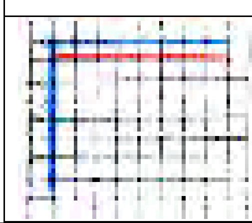
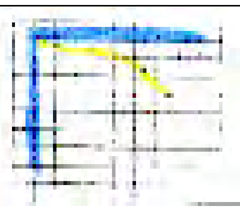
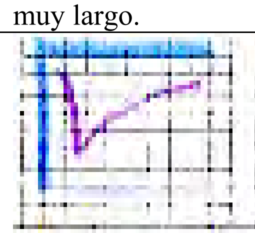
En las actividades de aprendizaje descritas en el apartado anterior se ha explorado el desempeño de estudiantes que cursan quinto semestre del nivel medio superior en el CECyT "Benito Juárez García" del Instituto Politécnico Nacional. Se trabajó en el salón de clases en equipos de 4 a 5 estudiantes. De acuerdo a la estructura de las actividades de modelación-

graficación (véase Cuadro I) la sesión se organizó en dos partes. En la primera parte se trabaja con lápiz y papel y en la segunda parte se utiliza una calculadora con poder de graficación y sensor de movimiento CBR.
En la primera parte de la sesión los estudiantes leen y resuelven el problema a lápiz y papel; los alumnos construyen las gráficas sin el uso de tecnología. Se les pidió a los equipos que pasaran a exponer sus gráficas al frente de sus compañeros. Los estudiantes comparten sus conocimientos matemáticos.

Formas básicas
Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.

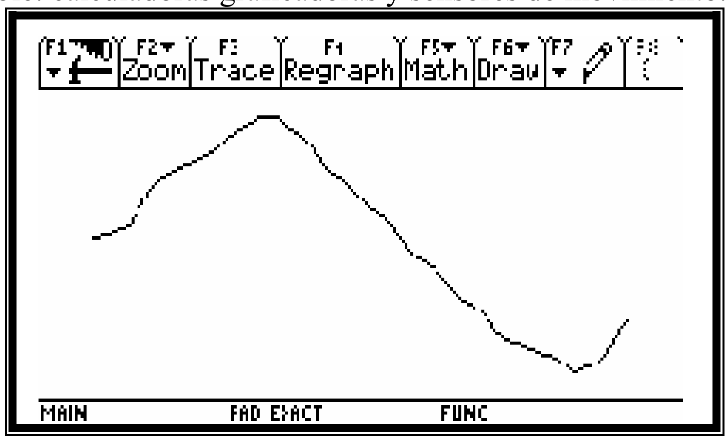
(a)	(b)	(c)
		
En esta gráfica la velocidad es constante ya que cuando recorre un segundo recorre un metro y así sucesivamente.	En esta gráfica la velocidad es constante aumenta muy rápido ya que se mueve mucho en muy poco tiempo.	En esta gráfica la velocidad es muy lenta ya que se mueve muy poco en un tiempo muy largo.
		

Las gráficas siguientes representan la posición de un móvil en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. Escribe un párrafo que describa lo que ocurre con la velocidad en cada caso. Esboza la gráfica de la velocidad.

(d)	(e)	(f)
		
En esta gráfica el móvil desacelera una trayectoria constantes decir en un segundo desacelera un metro.	En esta gráfica el móvil desacelera muy rápido ya que su velocidad disminuye en poco tiempo.	En esta gráfica el móvil desacelera muy lento ya que recorre una distancia mínima en un tiempo muy largo.
		

Cuadro IV. Construcción de gráficas sin el uso de tecnología por los estudiantes.

En la segunda parte los estudiantes diseñan la forma en que se van a mover ante el sensor. Los alumnos deciden el tiempo y la distancia para lograr la gráfica de su propuesta. Se realiza nuevamente una exposición comparando su propuesta a lápiz y papel y la realizada con la tecnología disponible: calculadoras graficadoras y sensores de movimiento.



Cuadro V. Construcción de gráficas con el uso de tecnología. Acércate más.

Esta experiencia nos aporta información sobre el tipo de conocimientos que los estudiantes ponen en juego. El interés de esta investigación es precisar cuáles conocimientos están involucrados en la identificación y uso de las formas básicas y cuál es el papel de actividades de modelación-graficación en la construcción de estos contenidos.

Referencias bibliográficas

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Flores, C. (2005). Características de las gráficas y su relación con la modelación de situaciones de movimiento. En *Resúmenes de la XIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Montevideo, Uruguay.

IPN (2006). *Geometría Analítica. Libro del Profesor*. IPN. ISBN: 970-36-0258-4.

IPN (1994-1996). *Planes y programas de estudios de Matemáticas I, II, III, IV, V y VI. Documentos internos de trabajo*. Dirección de Educación Media Superior. México, D.F. Autor.

Leinhardt, G.; Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990). *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. Review of Educational Research*, 60, 1, 1-64.

Suárez, L.; Flores, C.; Gómez, A. y Licona, R. (2005). Uso de las gráficas a través de actividades de modelación matemática con calculadoras y dispositivos transductores*. Resumen del taller aprobado para su presentación en el Quinto Encuentro de Tecnología Educativa del IPN*. Consultado en http://www.te.ipn.mx/quintoencuentro/registro/taller_opc_ins.asp el 16 de agosto de 2006.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología.* Tesis de Maestría no publicada del Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN.

LA MEDICION DE LA ABSORCION DE LUZ DE SOLUCIONES QUIMICAS, UNA PRACTICA SOCIAL DE INGENIEROS BIOQUIMICOS

Galicia Adriana, Arrieta Jaime, Landa Lorena
Instituto Tecnológico de Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
agsosa2001@yahoo.com.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: práctica social, ingenieros bioquímicos

Resumen
En éste artículo, mostramos evidencias de la interacción de estudiantes de ingeniería bioquímica en la construcción de lo lineal a partir de la modelación de la absorción de luz de soluciones de glucosa a diferentes concentraciones en el laboratorio de química, tomando como premisa que ésta actividad es una practica social que se realiza en comunidades de ingenieros bioquímicos en el análisis cuantitativo para determinar la concentración de una sustancia en una muestra a partir de la medición de la absorción de luz de la misma por espectrofotometría. Centramos la atención en la interacción de los estudiantes y la argumentación discursiva en la construcción de significados

Introducción

Socialmente hemos ubicado al proceso de enseñanza- aprendizaje exclusivamente en el contexto escolar, en el que se logran las condiciones para que los estudiantes reciban el conocimiento del profesor, sin considerar el intercambio de conocimientos entre estudiantes, la experiencia propia y sin que sean consideradas las prácticas de comunidades de profesionistas en las que habrá de incorporarse posteriormente el estudiante de nivel superior.
El presente trabajo de investigación está inscrito en la línea de investigación: "Las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento" que se viene desarrollando en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, así mismo forma parte de los trabajos de investigación que se están desarrollando en el Instituto Tecnológico de Acapulco con estudiantes de la carrera de Ingeniería Bioquímica, particularmente, con alumnos que cursan el primer semestre.
En el plan de estudios del Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica, SNEST, se contemplan cinco asignaturas de matemáticas para las carreras de ingeniería, incluyendo la carrera de Ingeniería Bioquímica, en estos programas de estudio existe la recomendación de contextualizar los ejemplos prácticos en cada carrera, sin que esta recomendación sea explícita.
Por otra parte, para los estudiantes de la carrera de Ingeniería Bioquímica no existe la relación de los contenidos de las asignaturas de matemáticas con los contenidos de las demás asignaturas, a la vez de que se inclinan, por vocación, hacia el aprendizaje de las asignaturas químico-biológicas, restando importancia al aprendizaje de las matemáticas.
Nos interesamos en atender esta problemática estudiando la construcción de modelos por los estudiantes a partir de la experimentación de fenómenos en el laboratorio de química, estos fenómenos son atendidos por comunidades de ingenieros bioquímicos como práctica social, en este caso, al determinar la concentración de una sustancia en una muestra por el método espectrofotométrico. En esta actividad los estudiantes construyen diferentes modelos y los articulan.
En este sentido, nuestra investigación es situada, a este respecto coincidimos con Lave y Wegner, (1993); Carraher, D y Schliemann, A. (1993); Noss,R., Hoyles, C. y Pozzi, S (2002); Arrieta, (2003), Galicia y Arrieta (2005), quienes sustentan la idea de realizar investigación

situada, dentro de un contexto, en comunidades, pretendiendo obtener resultados considerando el tiempo y el espacio, con impactos inmediatos en su entorno.

Las prácticas sociales de modelación

Nuestro interés está centrado en el ejercicio de las prácticas de modelación de los actores, la argumentación discursiva emanada al defender sus versiones, las herramientas de las que hace uso y los consensos a los que llegan para intentar construir lo lineal articulando los modelos numérico, gráfico y algebraico con el fenómeno de absorción de luz de soluciones químicas, una práctica socialmente compartida en comunidades de ingenieros bioquímicos.
La problemática que nos ocupa requiere, como necesidad básica, el dotar a nuestra investigación de una aproximación sistémica que nos permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y las formas de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, se le ha denominado formalmente acercamiento socioepistemológico (Cantoral y Farfán 2003).

La ingeniería didáctica como metodología

La metodología se deriva de las consideraciones acerca del marco teórico que asumimos, precisamos de una metodología que muestre la primacía de las prácticas sobre los objetos matemáticos, que aporte elementos para la intervención y elementos para hacer investigaciones situacionales, una metodología que nos brinde instrumentos para estudiar las interacciones y que aporte un método para elaborar, experimentar y validar diseños de aprendizaje, planteamos a la Ingeniería didáctica como una aproximación.

El aprendizaje intencional como objetivo

Nuestro objetivo en el presente trabajo, está centrado en mirar las practicas escolares que los estudiantes ejercen como parte de su actividad humana, al construir el conocimiento matemático, es decir no es de nuestro interés únicamente que el alumno aprenda, sino observar cómo hace para aprender, las prácticas utilizadas que lo llevaron a la construcción de lo lineal articulando los modelos numérico, gráfico y algebraico con el fenómeno de absorbancia de soluciones de diferente concentración de glucosa. Con esto, privilegiamos el papel de las herramientas sobre los objetos. En esta perspectiva nuestro intento esta dirigido a relacionar las prácticas que son ejercidas en comunidades de ingenieros bioquímicos, en particular las prácticas de modelación, con las prácticas escolares en la clase de matemáticas.
Para que el alumno aprenda, consideramos la necesidad de que éste intervenga en el espacio con el que se identifican: el laboratorio.

El laboratorio como escenario

Para la actividad en el laboratorio, consideramos que lo lineal se construye al experimentar la absorción de luz por una serie de soluciones de concentraciones conocidas de glucosa, por lo que se invitó a los estudiantes al laboratorio de química, sin conocimiento previo de la actividad, para que prepararan las soluciones y mediante el espectrofotómetro realizaran las mediciones de absorbancia,

Se organizaron siete equipos de cinco integrantes cada uno, el primer equipo trabajó con las soluciones ya preparadas por los auxiliares de laboratorio y al resto se les dio las indicaciones para que las prepararan, se trabajó durante cuatro horas. En cada mesa de trabajo se instaló una audiograbadora para captar las discusiones generadas durante la actividad, también se contó con videograbación permitiéndonos mayor visión de la actividad. Todos los alumnos participantes son estudiantes de primer semestre de la carrera de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco.

En esta actividad la participación del docente es moderar las discusiones generadas por los estudiantes en la construcción del conocimiento

La argumentación discursiva como evidencia

Si la ciencia es considerada como el conocimiento cierto de las cosas por sus principios y causas, ésta es entendida también a partir de los contextos argumentativos, cuando Candela,(1999) menciona que: “la ciencia posee una serie de recursos discursivos especiales para construir los hechos científicos”, y a su vez en Ciencia en el aula cita que: “Consideramos que el habla como acción situada en un contexto discursivo, construye el significado, la realidad e incluso a la misma cognición”, es decir en nuestro trabajo consideramos que la ciencia no es concebida únicamente por los hechos científicos, sino también como recursos argumentativos.

A continuación presentamos algunos episodios de las interacciones de los actores al interactuar en la actividad.

Identificando el modelo numérico y gráfico

Profesora: Describan lo que observaron
Ángel: Que la absorbancia va de menor a mayor… en orden cronológico
Moisés: O sea que los datos van parejos (señala la tabla)
Ángel: Bueno… más o menos
Moisés: Mira la gráfica… está quebrada
Jhoana: A nosotros nos da mas ó menos recta

Figura 1. Una perspectiva de la experimentación

Este es el primer episodio en el que los estudiantes numerizan el fenómeno y caracterizan lo lineal los modelos numérico y gráfico que logran construir.

El método de mitades

Profesora: Si tengo una muestra problema y necesito saber la concentración de glucosa, cuya absorbancia es 0.592, que concentración de glucosa tiene la muestra
Guadalupe: No se puede saber con exactitud porque no obtuvimos el dato este valor no está en la gráfica, bueno está pero escondido
Iván: Este dato es el mas cercano están de acuerdo (señala la tabla)
Todos: ¡Sí!
Iván: Que les parece si hacemos algo más lógico: sacamos la mitad que hay entre estos dos: la tres y la cuatro, y el promedio va a dar más aproximado a eso, igual con la concentración de la glucosa, sumamos 30 y 40 y lo dividimos entre dos y nos da el valor: 35
Guadalupe: No creo que esté bien
Nancy: ¡Pero la mayoría gana!

Aquí podemos observar cómo los estudiantes aproximan el valor de la concentración a partir de un valor que se ubica en medio de de los valores de absorbancia determinada durante la experimentación, podemos observar en este equipo que la respuesta es validada democráticamente

La regla de tres

Profesora: Y si ahora la absorbancia de una muestra es 0.81732, ¿que concentración de glucosa tiene?
Iván: Hay que hacerlo como lo estábamos haciendo hace rato. Lo que tenemos que hacer es esto ¿Por qué vamos a cambiar de método?
Guadalupe: Yo digo que este numero esta entre estos dos, pero no por eso tiene que ser el promedio
Nancy: Yo lo hice con una regla de tres, si para 50 es 0.804, entonces para 0.81732…o sea que tomamos estos valores de referencia
Guadalupe: ¡Ya vieron! Hace rato nos dio promediando de pura casualidad

Al cuestionar a los estudiantes con un valor de absorbancia más exacto, hacen uso de la regla de tres, podemos observar en la interacción que los estudiantes hacen uso de sus conocimientos previos, adquiriendo significados.

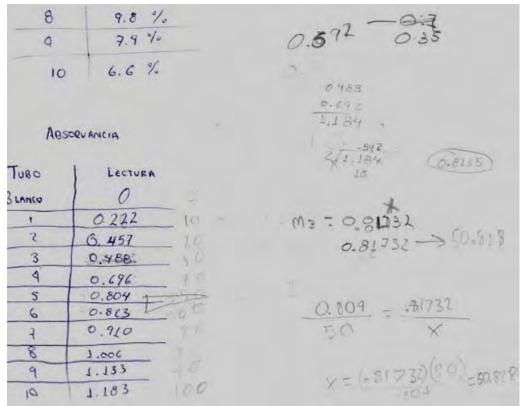


Figura 2. Anotaciones de Nancy

La Interpolación lineal

Profesora: ¿Para que graficaron?
Ángel: Para orientarnos
Armando: ¡espérate!... Aquí también están los datos. Podemos señalar en la gráfica la absorbancia y así como obtuvimos la gráfica, ver la concentración que le corresponde

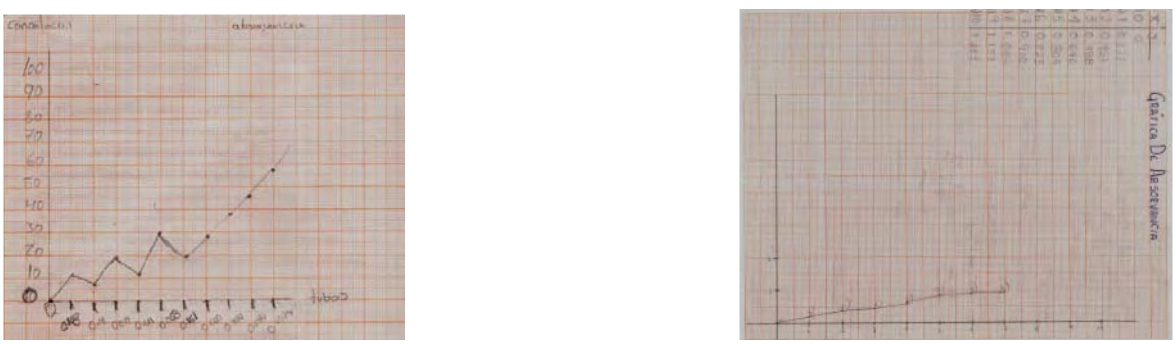


Figura 3.-Gráficas de absorbancia vs. concentración

Los estudiantes no consideran la gráfica como argumento, hasta que se les cuestiona al respecto, logran encontrar la respuesta interpolando en la misma.

A manera de conclusión

Los participantes, a partir de la observación del fenómeno, identifican las características de lo que en este contexto es lo lineal en un modelo numérico, la tabla de datos, articulándola con el modelo gráfico logrando además diversas formas de predicción, hasta que a partir de la regla de tres construyen el modelo algebraico.
Cabe mencionar que los estudiantes que prepararon las soluciones obtuvieron gráficas menos exactas que el equipo que se les proporcionó las soluciones ya preparadas, esto sucedió porque se requiere pesar cantidades pequeñas de glucosa y agregar la cantidad exacta de agua,

la exactitud de los datos depende de la destreza del analista, los estudiantes de primer semestre no cuenta con la habilidad en este sentido que el experimento requiere, por lo que para un diseño de aprendizaje se recomienda proporcionar las muestras ya preparadas, para que este factor no afecte el objetivo del estudio. Por otra parte hemos observamos que en el ejercicio de esta practica social es relevante el uso de la regresión lineal, por lo que sería interesante su tratamiento en próximas investigaciones. Finalmente observamos que a los estudiantes se les facilita el aprendizaje de las matemáticas experimentando, actividad que los identifica en su espacio, el laboratorio de química.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003) *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral.* Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Premio "Simón Bolívar 2003". Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Candela, A. (1999*). Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Primera edición. Paidós Educador, México

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherthelands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270.

Carraher, D y Schliemann, A. (1993). Proportional reasoning in and out of school. En P. Light y G. Butterworth (Ed) Context and Cognition. *Ways of Learning and Knowing*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 47-73.

Galicia, A., Arrieta, J. (2005) Modelación de la evolución de la levadura: un estudio de las prácticas sociales del Ingeniero Bioquímico. En Lezama, J., Sánchez, M., Molina, J. (eds) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18.* pp.503-509

Lave, J. y Wenger, E. (1993). *Situated Learning*. *Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge University Press, New York.

Noss, R., Hoyles, C. y Pozzi, S (2002) Abstracción in expertise: a study of nurses conceptions of concentration. *Journal for Researches in Mathematics Education, Vol. 33. Num. 3, pp. 204-229.*

UNA RED DE MODELOS Y LA CONSTRUCCIÓN DE LOS LOGARITMOS

Marcela Ferrari Escola, Rosa Maria Farfán Márquez
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
marcela_fe @yahoo.com.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio
Palabras clave: socioepistemología, covariación, logaritmos

Resumen
Presentamos en este reporte la red de modelos y las actividades matemáticas inherentes a ella que hemos establecido a partir de la hipótesis epistemológica reportada en Ferrari (2001) en cuanto a que evidenciar la covariación de un crecimiento aritmético y uno geométrico es un robusto eje de discusión para la construcción de los logaritmos.
En este trabajo, basándonos en los supuestos de la socioepistemología en cuanto a la construcción social del conocimiento y, desarrollando una ingeniería didáctica, buscamos evidenciar que, utilizar una herramienta distinta a la que escolarmente es promovida, permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente y que estos significados se fundamenten en los argumentos que permitieron la construcción de la función logaritmo.

Antecedentes

El presente reporte tiene como principal antecedente la tesis de maestría, *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (Ferrari, 2001) en la cual nos cuestionamos sobre los significados que deberían incorporarse a la enseñanza de los logaritmos con el objeto de subsanar la brecha entre sus dos presentaciones, la algorítmica y la analítica, fenómeno que llamáramos “dislexia”.
En aquella oportunidad, influenciados por la escuela francesa, partimos del hecho, reportado por Trujillo (1995), que la noción logaritmo presenta en el discurso matemático escolar un tratamiento algorítmico rayando en lo axiomático, que inevitablemente deriva en una carencia de significados y un estancamiento en su aprendizaje que lo deja con estatus de proceso en el sentido de Dubinsky (1992), es decir, sin llegar a configurarse como objeto para la mayoría de los estudiantes.
Nuestra inquietud ahora es indagar qué elementos propiciaron que esta noción, los logaritmos, pasara de ser una poderosa e ingeniosa herramienta facilitadora de cálculos aritméticos, formulada en una sociedad interesada por expandir sus fronteras hacia el nuevo mundo, donde el poderío económico y el dominio de la astronomía y la navegación se tornan vitales para el desarrollo de la misma, a un importante objeto matemático con cabida en un riguroso sistema teórico. Nos preguntamos sobre qué prácticas sociales de antaño dieron pie a su desarrollo, cuáles rescatar y cuáles abandonar en el diseño de actividades escolares.
De trabajos como Trujillo (1995), Confrey y Smith (1995), Lezama (1999), de mi propia tesis de maestría (Ferrari, 2001) y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos lo cual nos lleva, de manera natural, a cuestionar modelos de difusión de conocimientos, concepciones, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos, tal el caso de las estructuras multiplicativas para la enseñanza de la potenciación (Confrey y Smith, 1995) y su posterior utilización para implementar la generalización hacia la noción de “función exponencial” y por ende, para la significación de los logaritmos.

Así mismo, Sierpinska (1992) cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición, pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que no hemos encontrado, en el discurso matemático escolar, elementos que permitan el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.
En Ferrari (2001) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos, nos estamos refiriendo a su presentación primera como "el exponente al que se debe elevar una base para obtener determinado valor", a su íntima vinculación con las exponenciales "al ser una función inversa de la otra" y por último ser la "respuesta de una integral singular" que se escapa de un patrón, sin olvidar su desarrollo en serie de potencias también presente en el discurso matemático escolar.
Por otro lado, la revisión bibliográfica realizada, nos permite localizar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1992), supeditan la construcción del logaritmo al de función y aquellos que, como Confrey y Smith (1995), consideran pertinente problematizar sobre la estructura multiplicativa como forma de introducir la potenciación para de ahí pasar a los logaritmos, misma que subordina la construcción de la función logaritmo a la de función exponencial. Por nuestra parte, cuestionamos la idea que para "comprender" o "internalizar" la noción de una función específica, los logaritmos en este caso, debemos primero haber construido la noción de función, argumento en el que se percibe un desconocimiento de la naturaleza propia de cada función. A su vez, supeditarlos a la estructura multiplicativa conceptualiza a los logaritmos como entes aritméticos. Pensamos por tanto, que una revisión a profundidad de los elementos que podrían propiciar la construcción de la función logaritmo aportaría elementos a la problemática, tan extensa y exhaustivamente abordada en investigaciones de nuestra disciplina, respecto a la estabilización de la noción de función.
Efectivamente, manifestamos la dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1992); Tall (1992); Vinner (1992); Sierpinska (1992), Carlson et al. (2002) entre otros, buscan un único mecanismo de apropiación de la noción de función, por tanto supeditan la construcción del logaritmo al de función; y, aquellos que, como Arrieta (2003); Martinez-Sierra (2005), Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001) entre otros, reconocemos la importancia de dar cuenta de las características específicas, de "la otredad" (Arrieta, 2003) de las funciones.

Discurso matemático escolar actual

Al estudiar el discurso matemático escolar encontramos que varias son las herramientas matemáticas, que profesores y alumnos han desarrollado en su vida escolar, respecto a los logaritmos, que evidencian la compleja apropiación de esta noción. Si preguntáramos a algunos docentes, que imparten el curso de Álgebra en el Bachillerato, sobre sus experiencias en torno a la enseñanza de los logaritmos, escucharíamos que es una noción difícil para los alumnos; que debido a que Álgebra, en sí, es compleja y su programa extenso, demanda más tiempo para transmitir las nociones que conlleva este curso, prefiriendo ahondar en ideas previas al logaritmo. Rara vez logran abordar la enseñanza de los logaritmos pues, en general, son el último tema del programa y una de las nociones que se evita.

Si iniciamos nuestra experiencia desde los recuerdos que, como estudiantes, han guardado respecto a su acercamiento a los logaritmos hallamos que cuando, cómo y con qué se les presentaron los logaritmos en la escuela dio pie a analizar la evolución del papel del profesor, de los recursos didácticos que se utilizan en clase y de los programas. Para lograrlo, formamos tres grupos de discusión con profesores de distintos niveles en Hidalgo, Nayarit y Chiapas, quienes gentilmente se prestaron a compartir sus experiencias como estudiantes y profesores.

Efectivamente, desde la nostalgia de las tablas de logaritmos… *mmm… las tablas de Arquímedes Caballero*[*], que son mencionadas y utilizadas hasta hoy en día por los "veteranos" de la enseñanza de los logaritmos, o desde la idea de que, en los más jóvenes, era una tecla de la calculadora que algunos teníamos, nadie dejo de recordar algo de su pasaje por los logaritmos. Tampoco faltó aquél que recordara la regla de cálculo, sobre todo, aquellos que tuvieron una formación ingenieril, y que desarrollaron una destreza para calcular operaciones recorriendo dos reglas graduadas con escala logarítmica.

Los recuerdos sobre: la falta de conexión con la realidad o con otras disciplinas; la forma "abstracta" con la que era presentada; el cultivo de la idea de que ya "era algo escrito que sólo tiene aplicaciones aritméticas", entre otros comentarios, presentes en la discusión escolar de esta noción, no dista mucho de la problemática que enfrentan nuestros alumnos en sus "escasas" clases sobre función logarítmica.

Si reflexionamos con los profesores sobre los cursos, temas y actividades que se relacionan con la vida escolar de los logaritmos, nos reducimos a un pequeño ámbito, el de las matemáticas y, en particular, en álgebra para aquellos que incursionaron en el uso de las tablas logarítmicas como el único medio de realizar ciertas multiplicaciones y por ende, bajo una visión aritmética. En tanto que, aquellos profesores que eran estudiantes de los 80' en adelante, se acercan a ideas funcionales de los logaritmos al hablar de ellos, ya que se refieren a cursos de Cálculo, diferenciales e integrales, donde su pasaje tradicional por álgebra, primer contacto con los logaritmos, no es mencionado.

Este mundo especial, donde confluyen recuerdos y realidades, nos permitió observar la persistencia de las maneras de abordar esta noción matemática en el aula. La invariabilidad que la envuelve, que se respeta sin conflicto, sin preguntas. Es así, que los cuestionamientos de los muchachos siguen siendo los mismos y la evasión a sus respuestas de la mayoría de nosotros también.

Si le preguntáramos a los docentes que imparten los logaritmos "¿qué cosa no quisieran que les preguntaran sus alumnos?" responderían en general, ¿de donde vienen? ¿Por qué funcionan? ¡Explíqueme!, ya que reconocen su desconocimiento de la naturaleza de los logaritmos y de argumentos que pudieran utilizar en la discusión de este concepto matemático. Esta historia se repite en el nivel superior. Es efímero el tiempo utilizado para definir los logaritmos, en general como función inversa de la función exponencial, y trabajar con ellos para construir un robusto modelo de los logaritmos.

Encontramos así, cierta ambivalencia entre aquellos que presentan y transmiten los logaritmos en sus clases de matemáticas y "contemplan" su complejidad; y, aquellos que los "usan" visualizando una herramienta importante.

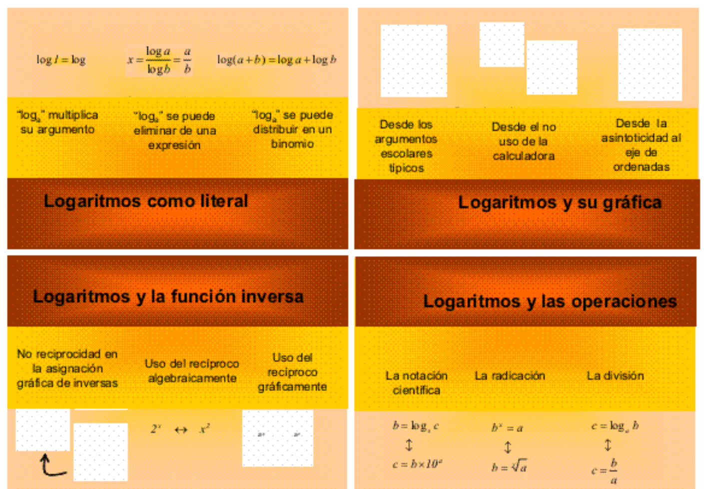
Por un lado, intentamos reflejar la problemática observada en el manejo de los logaritmos en aquellos alumnos que habían transitado el peregrinaje escolar propuesto para el aprendizaje de

* Arquímedes Caballero (1918-2004), profesor de matemáticas quien dedicó su vida a la docencia aportando al sistema educativo del país, varios libros como Geometría Analítica y diversos textos escolares, entre ellos las Tablas Matemáticas empleadas por muchas generaciones de estudiantes de educación secundaria

esta noción. Particularmente deseábamos recabar información sobre los argumentos y herramientas que los alumnos utilizaran al enfrentarse a la necesidad de echar mano de estas nociones.

En la mayoría de los estudiantes, encontramos las frases "no lo recuerdo", "nunca lo vimos en la escuela", ante tareas que explícitamente mencionábamos a los logaritmos. En aquellas actividades en las que era necesario utilizarlos, recurrían a herramientas más conocidas, tales como, las tablas, la ley de distribución, la linealidad, la multiplicación entre literales, la división como argumento de explicación, la reciprocidad. Observamos que las herramientas utilizadas por los estudiantes, reflejan la ausencia de la apropiación de los logaritmos a partir de las actividades que generalmente propone el discurso matemático escolar imperante en las aulas de hoy. Es fugaz la aparición de los logaritmos en las curricula escolares y, más aun lo son, las actividades propuestas a los alumnos que requieran su uso y exploración.

Es necesario además, considerar que existe una gran variedad de herramientas que utilizan los alumnos, aquellas a las que recurren para resolver ciertas actividades y que podríamos incorporarlas en las secuencias dándoles otro enfoque y propiciar un avance en el aprendizaje de las matemáticas en torno a los logaritmos.

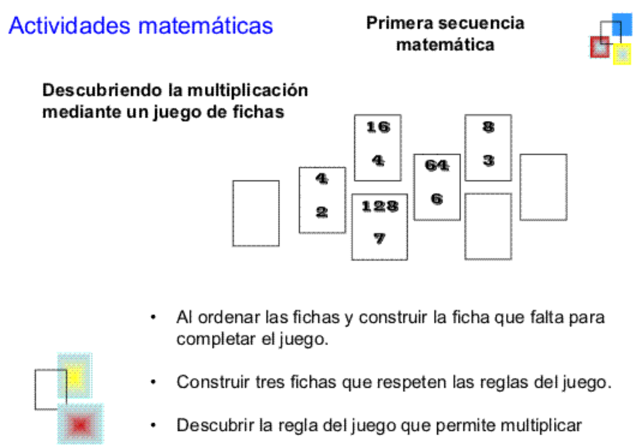


Si reunimos las herramientas que se privilegian, se observa de una manera interesante el arraigo a nociones que escolarmente se han trabajado con mayor intensidad. Una de las más recurrentes herramientas matemáticas utilizada es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, lo cual evidencia la aplicación de la linealidad en toda circunstancia, lo que Artigue (1990) llamara *linealidad abusiva*, y la cual no sólo se remite a los logaritmos, sino a toda función involucrada con una suma en su argumento. Esto coloca a los logaritmos como "una partícula log que multiplica todo lo que se le pone adelante", es decir, no se ha desarrollado la idea de argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio.

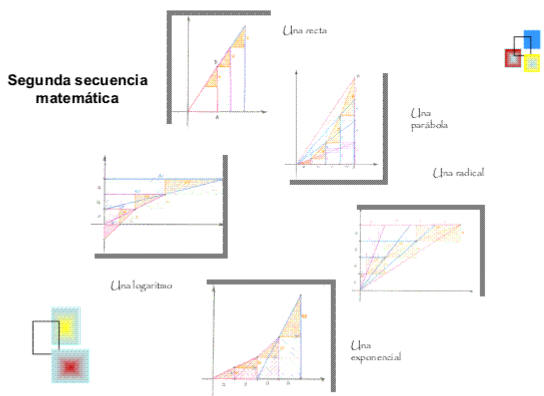
Otro rubro interesante para analizar es el uso de la graficación. Nos preguntamos ¿qué argumentos proponen para explicarse el comportamiento de una función, y en particular la logaritmo? Prevalece en sus respuestas la idea de que se requiere de una tabla para esbozar una función, resabio de los acercamientos propuestos en la mayoría de los textos utilizados en clase, así como la no apropiación de la función inversa, elemento importante en la vida de los logaritmos y que en el discurso matemático escolar se los toma como un buen ejemplo de esta noción. La mayoría de los textos discuten la función inversa desde la simetría geométrica de las funciones respecto a la recta $y = x$, siendo extendida en la mayoría de los alumnos a otros tipos de simetrías como la que nos invita a recordarla ante la función recíproca. Estas confusiones tienen su lógica quizás en los distintos sentidos que adoptan las palabras "inversa" y "recíproca" dentro y fuera de las matemáticas.

Es basto e interesante entonces, el análisis de las producciones de los alumnos ante cierto tipo de preguntas y actividades que involucran a los logaritmos y que no se agota en esta primera revisión de ellos.

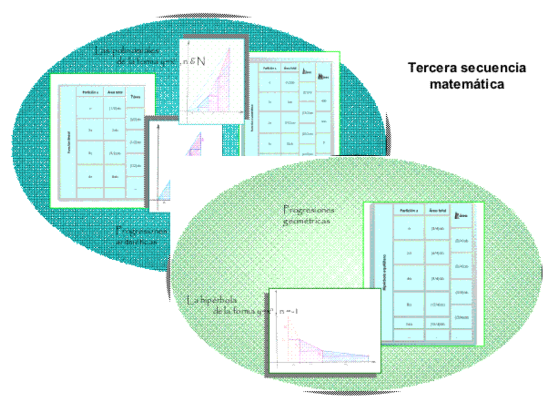
La red de modelos



En Ferrari (2001) se presentaban tres momentos de la construcción de los logaritmos que fueron denominados: Los logaritmos: como *transformación numérica*; como *modelizadores*; y como *objeto teórico*. Estas tres etapas son las que proponemos transitar para apoyar la apropiación de los logaritmos desde la discusión de nuevos argumentos y su consenso, generados desde una red de modelos.



Es así, que presentamos en primer lugar, el modelo numérico, la actividad matemática generada bajo los supuestos del primer momento de los logaritmos. Esta actividad se basa fundamentalmente en manipular fichas semejantes a la de un dominó, que acercaría a los participantes a percibir las propiedades logarítmicas. En segundo lugar, abordamos el modelo geométrico, segundo momento, donde la semejanza de triángulos se convierte en el lenguaje de construcción de la gráfica logarítmica potenciando la percepción de sus características. Por último, discutiremos el modelo algebraico que involucra la definición más estructural de los logaritmos desde el cálculo de áreas bajo curvas.



Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana.* Libro Secondo del Calcolo Differenziale (2 tomos). Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte..

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(2-3), 241-286.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(2-3), 137-168

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(5), 352-378.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Hernández, M & Ferrari, M. (2005). Los logaritmos a partir de la covariación de sucesiones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

López, R. & Ferrari, M. (2005). La función logaritmo bajo la perspectiva de la construcción dada por Agnesi (1748). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* México.

Martínez-Sierra, G. (2005) Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa 8*(2),195-218.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity, and proof. En: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp.495-511). New York: MacMillan Publishing Company.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp.195-213). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

SOBRE LA VIDA ESCOLAR DE LA RAÍZ CUADRADA EN EL NIVEL BÁSICO

Domingo de Guzmán Lorenzo Rosario, María Patricia Colín Uribe
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
mingo_19@yahoo.com.mx, pcolin@cimateuagro.org
Campo de investigación: pensamiento y lenguaje variacional
Palabras clave: concepciones, análisis histórico, raíz cuadrada, métodos

Resumen
En este trabajo se exponen el desarrollo y los resultados de la investigación relacionadas con las dificultades que tienen los alumnos y profesores del nivel básico, sobre el concepto matemático raíz cuadrada de números enteros. Esta investigación se realizó con alumnos de nivel Secundaria y con profesores de primero, tercer y quinto semestre de la licenciatura Nivel secundaria con la especialidad en matemática del Centro de Actualización del Magisterio ubicado en la ciudad de Chilpancingo, Guerrero.
Como sabemos, todo conocimiento evoluciona de acuerdo a los tiempos y necesidades de cada sociedad y de acuerdo a su cultura. Es por eso que en esta investigación se hace una pequeña reseña histórica sobre cuatro culturas: la Hindú, la Egipcia, la Griega y la Babilónica. Esto con el propósito de ver si conocían y utilizaban este concepto matemático.
Además se muestran y analizan los diferentes enfoques y tipos de problemas que los libros de texto plantean, así como también la forma de cómo abordan este tema. Donde al final se hace una clasificación de estos libros, de acuerdo a las técnicas y a los mecanismos que emplean.
Por ultimo se describen y analizan los resultados del cuestionario aplicados a los profesores y alumnos, por citar algunos resultados:

- No consideran a la raíz cuadrada como operación básica.
- Están familiarizados con un sólo valor de la raíz cuadrada, es decir con la raíz positiva.
- Carecen de argumentos para justificar el signo ± cuando aparece en la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

Metodología

La metodología que se empleo en esta investigación fue la siguiente:

- *Antecedentes históricos*
- *Revisión Bibliográfica*
- *Elaboración y aplicación de cuestionarios. Análisis de resultados*

Problema de investigación

Nuestro Problema de investigación consistió en describir las concepciones que tienen los alumnos de Nivel Básico (secundaria) sobre la raíz cuadrada. En particular, cómo interpretan el signo ± al momento de tratar el tema de ecuaciones de segundo grado.

Antecedentes históricos

Realizamos una pequeña reseña histórica sobre cuatro culturas: la hindú, la egipcia, la griega y la Babilónica. Esto con el propósito de ver si conocían y si utilizaban este concepto matemático. Encontramos que las civilizaciones Hindú, Egipcia, Griega y Babilónica si conocían a la raíz cuadrada y la utilizaban para calcular áreas, volúmenes de figuras y cuerpos geométricos, así como para resolver ecuaciones cuadráticas y encontrar el valor de la hipotenusa en un triángulo rectángulo. Pero los babilonios fueron los más avanzados en cuanto a la utilización de este concepto, tanto que hoy en día, en la escuela secundaria se enseña dicho método al cuál se conoce como *"método babilonio"* y este consiste en *cuadrar rectángulos*.

La matemática babilónica (5000 a.C. – 550 a.C.)

Los geómetras babilónicos estaban familiarizados con el teorema de Pitágoras. Desde la prehistoria los babilonios podían resolver ecuaciones cuadráticas, algunas ecuaciones cúbicas y bicuadráticas.
Por ejemplo: un problema consiste en conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870. Para nosotros esto equivale a resolver la ecuación $x^2 - x = 870$.
Además podían resolver sistemas de ecuaciones de varios tipos, con dos incógnitas, que incluían generalmente una ecuación lineal y una ecuación de segundo grado.

Los babilonios no consideraban soluciones negativas, ya que para ellos no existían; y utilizaban la fórmula: $x = \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$

Además los babilonios emplearon un procedimiento muy eficaz para evaluar la raíz cuadrada.

> *Sea* $x = \sqrt{b}$, *la raíz buscada y sea* b_1 *una aproximación de esta raíz. Supongamos que* a_1 *es otra aproximación, tal que* $a_1 = \frac{b}{b_1}$. *Si* b_1 *es demasiado pequeño, entonces evidentemente* a_1 *es demasiado grande. Elijamos entonces la media aritmética*
>
> $$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$
>
> *Si* b_2 *es demasiado grande, entonces* $a_2 = \frac{b}{b_2}$ *será demasiado pequeño. Luego será suficiente tomar la media aritmética* $b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$. *Este procedimiento se continúa indefinidamente. En una de las tablillas de Yale, se tiene* $\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.414213$.

El álgebra babilónica se desarrollo enormemente debido a la importancia que, en los problemas, los babilonios daban a la solución aritmética.

La matemática egipcia (3300 a.C. – 1200 a.C.)

En el Papiro de Berlín se destaca la resolución de dos problemas que suponen un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, una de las cuales es además de segundo grado.

En este Papiro se encuentran ecuaciones de la forma $ax^2 = b$, en el que curiosamente se utiliza la raíz cuadrada para resolverlo, aunque no se tiene constancia de que si tenían procedimientos para calcularlas. Algunos autores suponen que debieron existir tablas de números cuadrados, *calculadas por un simple procedimiento de multiplicación del número por el mismo*, y que podrían leerse en ambos sentidos de modo que permitirían calcular raíces cuadradas.

La matemática hindú (900 a.C. – 200 a.C.)

La característica principal del desarrollo matemático en esta cultura, es el predominio de las reglas aritméticas de cálculo, destacando la correcta utilización de los números negativos y la introducción del cero, llegando incluso a aceptar como números validos a los irracionales. Además profundizaron en la obtención de reglas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, en las cuales se aceptaban las raíces negativas. Uno de los trabajos importantes de esta cultura es el del matemático **Aryabhata** el cual se denomina *Aryabhatiya.* En esta obra se formula un conjunto de instrucciones para calcular *raíces cuadradas* y cúbicas de números enteros. Además se utilizaba la raíz cuadrada para el cálculo de volúmenes aunque incorrectamente, por ejemplo, el volumen de la esfera está dado como el producto del área de un círculo máximo por la raíz cuadrada de esta área.

La matemática hindú presenta problemas históricos más difíciles de resolver que la griega, debido a que los autores Hindúes raramente mencionan a sus predecesores, a la vez que muestran una sorprendente independencia en sus planteamientos matemáticos. Es por esto que, aunque conocían y aplicaban la raíz cuadrada para el cálculo de áreas y en soluciones de ecuaciones cuadráticas, no se conoce mucho de los procesos para calcularlas.

Los griegos utilizaban los arreglos geométricos para encontrar raíces cuadradas, pero solo de números enteros y la utilizaban en el teorema ahora conocido como Teorema de Pitágoras.

Los egipcios utilizaban a la raíz cuadrada para el cálculo de áreas como lo muestran los papiros de Rhind, de Moscú y de Berlín.

Por último podemos decir que la civilización babilónica es una de las civilizaciones de la antigüedad que al parecer manejaba con mayor claridad el tema de la raíz cuadrada, y por si fuera poco, desarrollaron un método para calcular raíces cuadradas el cual en la actualidad se llama método babilónico y es enseñado en la escuela secundaria. Este método a grosso modo consiste en cuadrar un rectángulo, es decir, dado un rectángulo de área conocida, construir un cuadrado con la misma área.

Revisión bibliográfica

Realizamos una revisión a libros de texto para el alumno de los tres grados que se utilizan para impartir la materia de matemáticas en la Educación Básica Secundaria, así como un análisis de los planes y programas de estudios, libro para el maestro y fichero de actividades

didácticas matemáticas otorgados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) a todos los profesores del país.
En base a esto, clasificamos los libros para el alumno en tres categorías, las cuales estuvieron determinadas por el tipo de ejercicios que proponían al estudiante.

Elaboración, aplicación y análisis de resultados

Aplicamos un cuestionario de 10 preguntas a 64 estudiantes y a 27 profesores. Todos los profesores que participaron están en activo. Cabe señalar que no se permitió el uso de calculadora.

Algunos de nuestros objetivos al aplicar el cuestionario son:

- Observar los métodos que conocen (tanto estudiantes como profesores) y cuáles saben aplicar para calcular raíces cuadradas
- Qué argumentos tienen para justificar el signo ± en la fórmula general que se utiliza para resolver ecuaciones de segundo grado
- Qué tipo de aplicaciones en la vida cotidiana le dan a la raíz cuadrada

Estos son algunos de los resultados que encontramos de acuerdo al análisis del cuestionario aplicado a estudiantes y profesores de nivel secundaria.

- Ninguno considera las raíces negativas como solución a los ejercicios planteados.
- La mayoría solo están familiarizados con el método del algoritmo tradicional o de la casita, a pesar de que en el programa oficial de la SEP aparecen por lo menos tres métodos más para el cálculo de raíces cuadradas.
- Presentan dificultades en la interpretación del lenguaje matemático. Es decir algunos términos matemáticos los relacionan con otros, en particular los métodos de solución de ecuaciones son relacionados con el número de soluciones que debe tener una ecuación
- Los profesores utilizan ejemplos como "*Encuentra los lados de un terreno que es cuadrado si su área es: ...*". Los estudiantes exhiben como ejemplos de aplicación este mismo tipo de ejercicios.

Referencias bibliográficas

Alarcón, J. et al. (1994). *Libro para el Maestro (secundaria)*, SEP (Secretaría de Educación Pública), México.

Almaguer G et al. (2002). *Matemáticas 3, cuaderno de prácticas y tareas*. Primera edición, México: Editorial Limusa/Grupo Noriega.

Arquímedes C. et al. (2001). *Cuaderno de matemáticas 3.* Décima edición. México: Editorial Esfinge.

Arreguin J. (2000). *Matemáticas 1, Cuadernos de ejercicios*. Primera edición, México: Ediciones Larousse.

Arreguin J. (2000). *Matemáticas 3, Cuaderno de ejercicios*. Primera edición, México: Ediciones Larousse.

Baldor, A. (1990). *Aritmética*. Tercera Edición, Editorial Publicaciones Cultural, España.

Briseño L. & Verdugo J. (2003). *Matemáticas 3.* Décima sexta reimpresión, México. Editorial Santillana.

Collette P. (2002). *Historia de las matemáticas*. Quinta edición, México. Editorial Siglo XXI

Espinoza, H. et al. (2000). *Fichero de Actividades Didácticas Matemáticas (secundaria).* Segunda edición revisada por la SEP. (Secretaría de Educación Pública) México.

Filloy E. et al. (2001). *Matemática Educativa Tercer Grado, (secundaria)*. Primera edición, México. Editorial Mc Graw-Hill.

Robles D. et al. (2001). *Lecciones de Matemáticas 3.* Primera edición, México. Fernández Editores.

Robles D. et al. (2001). *Lecciones de Matemáticas 1*. Primera edición, México. Fernández Editores.

Sánchez, E. et al. (2000). *Matemáticas 3*. Primera Edición, México. Editorial Grupo Patria.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (coordinador) *La Educación Matemática en la Escuela Secundaria.* (Capítulo V, pp. 125-154) Primera edición, Barcelona, España. Editorial Horsori.

Struik, D. (1986). *Historia Concisa de las Matemáticas*. Segunda edición, Instituto Politécnico Nacional, México.

Wussing, H. (1998.) *Lecciones de historia de las matemáticas.* Primera edición, España. Editores, S.A., España.

LA EMERGENCIA DE LOS LOGARITMOS COMO HERRAMIENTA PARA FACILITAR CÁLCULOS

Marisol Hernández Sánchez, Marcela Ferrari Escolá
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
mhs021084@yahoo.com.mx, marcela_fe@yahoo.com.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel escolar: medio
Palabras clave: Progresiones, Propiedades logarítmicas

Resumen
En la presente investigación, adherida a la aproximación socioepistemológica y donde se toma como metodología la ingeniería didáctica, se propone una secuencia matemática para la introducción al tema de los logaritmos, en particular dos de sus propiedades (logaritmo del producto y del cociente).
Para realizar el diseño de la secuencia y en general, la investigación, se adoptó como marco referencial el trabajo de Ferrari (2001); en él enuncia tres momentos en el desarrollo de los logaritmos. Particularmente abordamos el primer momento denominado *logaritmos como transformación numérica*, época en la cual (siglo XVI y XVII), personajes como, Stifel, Napier y Briggs relacionaban progresiones geométricas con aritméticas, aún sin hablar formalmente de logaritmos, en el caso de Stifel.

Introducción

La investigación tiene como marco referencial la investigación titulada "Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo", realizada por Ferrari (2001), la cual atiende el problema de la ausencia de significado al estudiar los logaritmos, dado que, primero se les presenta como una herramienta facilitadora de cálculos, para después ser definida como una integral. Entonces enuncia, tres momentos en la vida de los logaritmos como una breve síntesis de su evolución:

- **Logaritmos como transformación:** *en el que están definidos y enmarcados en el registro numérico en el cual, pese a que no habían sido formalmente definidos, se explora la relación,* entre progresión geométrica y aritmética*, en busca de extender el rango de los números y de facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras involucradas demandaban tediosas y complicadas operaciones.* (Ferrari, 2001)
- **Logaritmos como modelizadores:** *momento de definición de la noción de extensión y caracterización de la misma en otros registros y contextos en donde la relación entre las progresiones se torna fundamental*. (Ferrari, 2001)
- **Logaritmos como un objeto teórico:** *se les dota de una definición formal, lejana a la publicada por Napier. Se les incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en suma. Se conserva la esencia de los logaritmos, no así su relación explícita con las progresiones y otras características que han desaparecido del léxico escolar* (Ferrari, 2001).

Nuestra investigación tiene como marco teórico la socioepistemología, la cual *considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza* (Cantoral y Farfán, 2003).

A partir del análisis socioepistemológico reportado en Ferrari (2001), se pretende profundizar en el primer momento y reflexionar sobre su acercamiento al discurso matemático escolar actual, utilizando para ello la Ingeniería Didáctica. Justamente, en su primera etapa, análisis preliminar, presentamos algunas ideas de trabajos hechos por Stifel (siglo XVI), Napier y Briggs (siglo XVII), los cuales trabajaban relacionando progresiones geométricas con aritméticas y su acercamiento a los logaritmos. También se realizó una revisión de los libros de texto de primaria, secundaria y bachillerato, para ver con qué elementos se juega en la primaria y secundaria, y cómo se aborda el tema de los logaritmos en bachillerato.

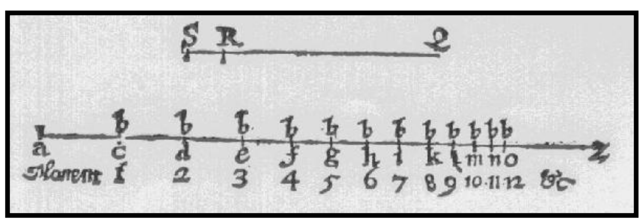
Contando ya, con elementos del análisis preliminar, se sigue con el diseño de una secuencia matemática y su análisis *a priori*. En esta etapa se trata de retomar elementos que le han dado vida a los logaritmos como facilitadores de cálculos, momento que se desea abordar. El diseño, influenciado por el acercamiento socioepistemológico de referencia, se articula en tres fases: manejo de patrones, utilización de las propiedades, uso de patrones y propiedades; mediante las cuales se desea observar aquellos argumentos, discusiones y consensos que pudieran generarse desde esta óptica. Se aprovecharon también ciertos elementos de nuestro análisis preliminar, para reflexionar sobre las ideas puestas en juego en el diseño, observando los argumentos que se espera que surjan y decidir las acciones a realizar en la puesta en escena.

Finalmente se presentan, la gestión del diseño y el *análisis a posteriori*, así como reflexiones sobre lo sucedido.

Análisis Preliminar

En este apartado se reportan los trabajos realizados por Stifel, Napier y Briggs, para ver los elementos que le dieron vida a los logaritmos como una herramienta facilitadora de cálculos. Además, de la revisión de los libros de texto de primaria, secundaria y bachillerato.

Es Napier (1550-1617), matemático escocés, quien da el nombre *logaritmos*, refiriéndose a ellos *como la relación espacio-velocidad de dos puntos moviéndose con velocidad constante uno y decreciente en progresión geométrica el otro* (Ferrari, 2001).



Napier trabajaba a los logaritmos por medio de senos que en esa época (siglo XVII) eran magnitudes de segmentos. Varios son los eruditos de la época que estudian su obra, y de ellos surge Briggs (1556-1631), matemático inglés, que viaja a Escocia para discutir con el autor la primera tabla de logaritmos; se establece ahí una estrecha relación entre estos dos personajes. Así, trabajan sobre una primera tabla en la cual ya no se utilizan magnitudes de segmentos, sino se introducen en el ámbito de los números, tomando además al 10 como base para facilitar los cálculos.

Una de las contribuciones de Briggs fue proponer el par (1,0), ya que toda relación entre una progresión geométrica y una aritmética, permitía hablar de un sistema logarítmico, según Napier, sin embargo, este sistema no facilitaría cálculos, lo cual sería resuelto con la introducción del par (1,0) en dicho sistema (Figura 1).

Figura 1

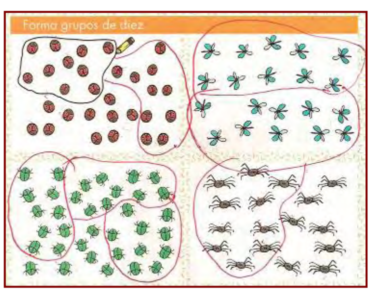
A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	0	0000	1	0	000000	1	0	00000000
10	1	1000	3	1	047712	2	1	03010299
100	2	0	9	2	095424	4	2	06020599
1000	3	0	27	3	143136	8	3	09030899
10000	4	0	81	4	190848	16	4	12041199
100000	5	5000	243	5	238561	32	5	15051499
1000000	6	6000	729	6	286272	64	6	18061799

Sin embargo, antes de que Napier enunciara propiamente a los logaritmos, hubo un personaje M. Stifel (siglo XVI) quien observaba la relación entre progresiones aritméticas con geométricas, particularmente se interesó por lo que ahora se conoce como la propiedad del logaritmo del producto. (Figura 2)

…	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
…	**1/8**	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**…**

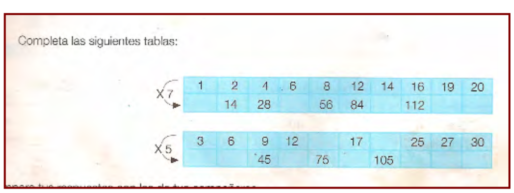
Figura 2

Por otro lado, buscando algunos elementos que definen a los logaritmos como herramientas facilitadoras de cálculos, (completar patrones o relacionar progresiones y precisamente facilitar cálculos), se revisaron los seis libros de texto de matemáticas de nivel básico y algunos libros de primer año de nivel medio superior. Esto con el fin de saber si estos elementos efectivamente se trabajan desde la primaria hasta llegar a bachillerato, donde se definen formalmente las propiedades de los logaritmos, en búsqueda de cierto paralelismo entre la construcción socio-cultural e histórica y la escolar.



Nivel Básico

Una actividad propuesta en primer año de primaria, como ejemplo de actividades que denominamos *facilitar cálculos*, es la que aparece en la imagen, donde se les pide agrupar de diez en diez para decir de qué clase de insectos hay más. De este tipo de actividades sólo se encontraron en los primeros cuatro años.


Completa las siguientes tablas:

X7

1	2	4	6	8	12	14	16	19	20
	14	28		56	84		112		

X5

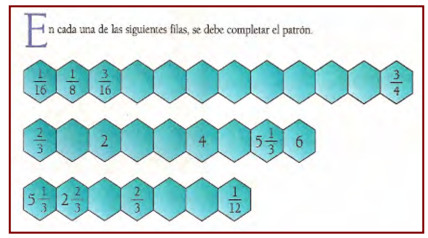
3	6	9	12		17		25	27	30
		45		75		105			

En los seis años de primaria, se encontraron actividades que denominamos *manejo de patrones.* En la imagen se muestra una actividad en donde se les pide que completen dos tablas, multiplicando por un determinado número los elementos de la columna superior para encontrar los de la inferior.

A manera de conclusión de la revisión de textos de nivel básico se dice que, en los primeros dos años, se les da un primer acercamiento a lo que sería facilitar cálculos, ya que se les pide agrupar, en vez de contar elemento por elemento de determinados conjuntos. En cuanto al manejo de patrones, todas las tablas (de los seis grados) muestran solamente progresiones aritméticas, sin embargo, estas se van relacionando, cada tabla, con diferentes incrementos. Tanto los incrementos como los elementos cada vez son mayores y esto hace que tengan un mayor grado de dificultad.

Nivel medio

Se revisaron tres libros de matemáticas que la S.E.P. otorga a estudiantes de secundaria, con los mismos propósitos que los de nivel básico. En ellos, sólo se encontraron actividades que denominamos *manejo de patrones*, un ejemplo de ellas nos lo muestra la figura, en la cual sólo se les pide completar los patrones de las filas mostradas, los cuales involucran progresiones aritméticas y geométricas.



Nivel medio superior

Se revisaron tres libros, los que se consideraron relevantes, para observar cómo se trabajan los logaritmos, los cuales son, Caballero et al (1971), Lehman (2001) y Colectivo de Autores U.A.G. (2001) y lo que se encontró fue que los tres libros son muy similares, ya que definen a los logaritmos como "el exponente al que hay que elevar un número llamado base para encontrar dicho número", y muestran las propiedades de estos, por medio de las leyes de los exponentes; además dan un cúmulo de ejercicios para aplicar la definición y las propiedades de los logaritmos. El único que se diferencia de los tres, es el Caballero et al (1971), ya que empieza a dar un poco de historia del surgimiento de los logaritmos, sin embargo, no retoma nada de esa parte para el tratado de este tema.

Diseño de la secuencia matemática

Como ya se mencionó en esta investigación se propone una secuencia matemática la cual se diseñó tomando en cuenta los datos encontrados en el análisis preliminar, y en la que se pretende rescatar los elementos que le dieron vida a los logaritmos como herramientas facilitadoras de cálculos, ya que estos aunque son manejados en el nivel básico al llegar al bachillerato se dejan a un lado y se recurre a los exponentes y sus leyes para definir a los logaritmos.

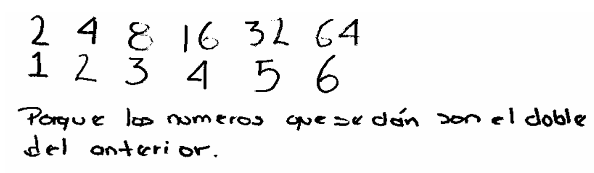
Dentro de la secuencia se consideran tres etapas o fases, las cuales son: manejo de patrones, utilización de las propiedades, uso de patrones y propiedades. El objetivo de la primera fase es observar y usar los patrones que contienen las fichas, es decir, la progresión aritmética y geométrica. En la segunda fase se observan las propiedades del logaritmo del producto y del cociente, sin embargo también se hace uso de ellas. Para la tercera fase, se conjuntan las dos primeras, es decir, en ésta, observan nuevas progresiones pero que tienen las mismas características, hacen uso de ellas y de las propiedades que ya pudieron observar y trabajar.

Se espera que por el paso de las cinco actividades de la secuencia, los estudiantes se apropien de elementos importantes para la construcción de ideas logarítmicas.

Algunos resultados

Se realizó una puesta en escena con tres alumnos de primer semestre de bachillerato, la cual fue de una sola sesión que tardó aproximadamente hora y media.

Algunos resultados que se obtuvieron de dichas puesta, fueron, en la primera fase si pasó lo que se esperaba, es decir, que se observara y entendiera el patrón de ambas progresiones y que hicieran uso de dichos patrones para poder encontrar las fichas que se les pedían.



Para la segunda fase, en donde se trabaja con las propiedades del logaritmo del producto y del conciente, al menos de manera intuitiva se dieron cuenta de lo que ocurría con los números inferiores, es decir que se sumaban y se restaban (respectivamente), sin embargo, no le dieron mucha importancia y no hicieron uso de esto para resolver la actividad y ahorrarse los cálculos, que era lo que se esperaba que hicieran. Sin embargo, al concluir esta actividad hicieron una reflexión verbal, de que si en los números superiores se multiplicaba abajo se sumaba y si por el contrario arriba se dividía, abajo se restaba; lo cual, es una primera idea de las propiedades del logaritmo del producto y del cociente, respectivamente

Para la tercera fase, en la que se conjuntan las dos primeras, se hicieron varias intervenciones, ya que a pesar de que en la fase anterior, habían observado de manera intuitiva las propiedades aquí trabajadas, no las usaron para resolver esta última fase, es por eso, que se les recordó lo que habían hecho en las otras dos fases y así empezaron a utilizar las propiedades y no a multiplicar reiteradamente.

De manera general se puede decir que, la puesta en escena fue muy fructífera, ya que arrojó datos interesantes para pensar en un rediseño de la secuencia. Esto porque a pesar de que se cumplieron los objetivos de las tres fases de la secuencia, no se cumplió que relacionaran las dos progresiones, ya que en realidad siempre las vieron por separado.

Conclusiones

Al revisar los elementos que se reportaron en el análisis preliminar, se observó que aún cuando existen elementos importantes en el nivel básico y medio, como las actividades de *facilitar cálculos*, es decir, de propiciar la idea de agrupar en vez de contar elemento por elemento, o lo que es lo mismo, multiplicar en vez de sumar, o las actividades de *manejo de patrones*, éstos no son retomados para el tratado de los logaritmos en el bachillerato.

Históricamente, la construcción de los logaritmos, ha sido sustentada y alentada por su vinculación a las necesidades de facilitar cálculos, respuesta que surge al explicitar la relación entre dos tipos de crecimientos diferentes: aquel que responde a una razón geométrica y aquel que lo hace a una razón aritmética.

Es por eso que se diseño una actividad que propiciara la aparición de los logaritmos, particularmente, como herramienta facilitadora de cálculos, en la cual se tratan ciertos elementos que conlleva relacionar progresiones.

El diseño contempla tres fases (manejo de patrones, utilización de las propiedades y uso de patrones y propiedades), el cual genera cierto acercamiento a lo logarítmico, mediante discusiones y consensos de distinta índole.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A., Balbuena, H., Bollás, P. (1997). *Matemáticas. Cuarto grado*. Comisión Nacional de Libros Gratuitos. México, D.F.

Block, D. et al. (2000). *Matemáticas. Primer grado*. Complejo Editorial Mexicano. México, D.F.

Caballero, A., Martínez, L. y Bernardez, J. (1971). *Matemáticas tercer curso*. Esfinge. México, pp. 356-389.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*. 6(1), 27-40.

Colectivo de autores U.A.G. (2001). Matemáticas, aritmética y álgebra. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de maestría sin publicar. AES. DME Cinvestav-IPN.

Lehman, C. (2001). *Álgebra*. Limusa. México, D.F., pp. 375-398.

EL USO DE LAS GRÁFICAS EN LA CONFRONTACION ENTRE LA CONTINUIDAD EULERIANA Y LA ESTABILIDAD DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN†

Fidel Morales Couoh; Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN. (México), Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
fmorales@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: práctica social, uso de las gráficas, ecuaciones diferenciales, estabilidad

Resumen
En este escrito reportamos los avances de la investigación sobre el *uso de las gráficas* en los libros de texto de las ecuaciones diferenciales focalizado a las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, con base en la aproximación socioepistemológica. Este marco nos ha ayudado a precisar el papel del *uso de las gráficas* ante una situación específica, donde la gráfica no es considerada como una representación "estricta" del concepto de función, sino por el contrario es la modelación de un comportamiento tendencial en una situación específica. De esta manera discutimos el uso de la gráfica en el sistema didáctico.

Introducción

La Matemática Educativa como disciplina, es la ciencia que estudia los fenómenos que suceden cuando un saber que nace en ambientes no escolares ingresan al sistema escolar. Con base en lo anterior, se ha logrado reconocer una permanente confrontación entre la obra matemática y el discurso matemático escolar, ya que la construcción de la primera son referidas a objetos explícitos propios de su actividad (matemática), mientras para el segundo apunta hacia categorías implícitos propias de la actividad humana. El no saber distinguir entre estas dos construcciones lleva a planteamientos ingenuos de la problemática de enseñanza y aprendizaje, como aquellos de escribir textos de matemáticas con base a secuenciaciones lógicas de conceptos.

Este hecho lleva a concebir que lo verdaderamente importante en el curso de matemáticas es el "aprender" un listado de formulas y métodos, favoreciendo un estatus utilitario de la matemática y no como un conocimiento (matemático) que transforme al individuo mismo y su realidad. De esta manera, la enseñanza de la matemática en la educación superior aun no ha logrado hacer de la matemática un conocimiento funcional, debido a que los modelos empleados por la educación matemática han estado fuertemente anclados en los conceptos, situación que se limita a la construcción del objeto y no 'aquello" (la *práctica social*) que obliga a construirlo (Cordero, en prensa).

Ante el planteamiento anterior nuestra investigación considera como problemática que los marcos de referencia para que se resignifiquen las gráficas están ausentes en el propio discurso matemático escolar (Cordero, en prensa). Por ello la necesidad de considerar la aproximación Socioepistemológica, ya que considera a las prácticas sociales como la fuente generadora de conocimiento.

† Esta investigación forma parte del proyecto CONACYT, No. 47045: *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior*

Antecedentes

Trabajos con base en la aproximación socioepistemológica han reportado que la gráfica puede tomar un estatus argumentativo en el cálculo al no ser considerada como "la representación estricta del concepto de función", comúnmente referida en los libros de texto y por ende los profesores y los alumnos (Hernández, 2004; Rosado, 2004). Por ello Hernández (2004), reporta las construcciones de los estudiantes a la luz del comportamiento tendencial, entre la función y su derivada. En tales construcciones las gráficas pasan a ser argumentos para resignificar las relaciones, mediante la variación de parámetros por ejemplo: si $Y = Af$, entonces $Y' = Af'$, ésta variación deja a un lado la importancia de la variable "x" y pasa a ser importante el coeficiente A.

Así mismo, trabajos sobre los *usos de las gráficas* han reportado que las gráficas en los libros de texto del nivel básico (primaria y secundaría) pasan por diferentes funcionamientos y formas desde el uso de la hoja de papel en los niveles educativos básicos, para establecer orientaciones y simetrías, el uso de las cuadrículas para establecer trayectorias y reproducirlas (Flores, 2005). Mientras que en los texto del nivel medio superior (bachillerato) se identifica el universo de gráficas por las que transita el estudiante, donde los usos de las gráficas van desde la distribución de puntos hasta el uso para el calculo de áreas y volúmenes, tales usos se resignifican al debatir entre sus funcionamientos y sus formas (Cen, 2006). Entendiendo por resignificación la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano normado por lo institucional, o sea, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan los participantes (Cordero, en prensa).

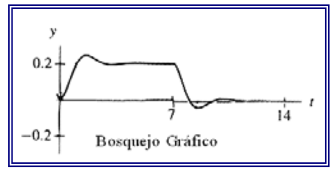
Considerando estos hechos, en nuestra investigación la graficación será estudiada como *práctica social*, de esta manera se estudiara el *uso de las gráficas* en tanto su funcionamiento y su forma en *ecuaciones diferenciales* de segundo orden con coeficiente constante $ay''(x)+by('x)+cy(x)=F(x)$ con $y(0)=A$, $y(0)=B$ y $F(x)$ continua a trozos, ya que el desarrollo de prácticas de graficación abren paso a una matemática funcional, ofreciendo indicadores para que el conocimiento se integre y se resignifique permanentemente a la vida para transformarla (Cordero, en prensa). De esta manera el uso de la gráfica dependerá de una situación específica por lo que tiene sentido formular, en nuestro caso, que las gráficas tienen una función orgánica (funcionamiento) en la situación siendo expresada de alguna forma (gráfica) los cuales se confrontan, ya que dependen de la situación.

PROBLEMÁTICA

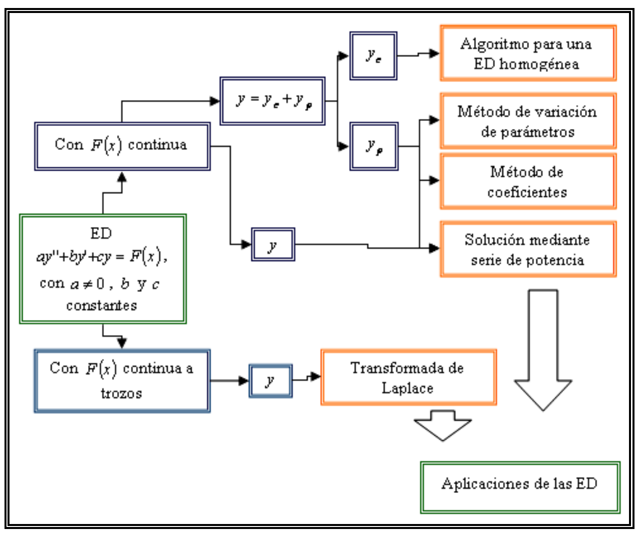
La ausencia de marcos referencia para resignificar las *ecuaciones diferenciales* de segundo orden de coeficiente constante $ay''(x)+by('x)+cy(x)=F(x)$ con $y(0)=A$, $y(0)=B$ y $F(x)$ continua a trozos como un modelo de *estabilidad*, están ausentes en el discurso matemático escolar. De esta manera nuestro trabajo de investigación será encontrar aquellos marcos de referencia que permita desarrollar la práctica de graficación en el sistema educativo.

Lo anterior surge como resultado de la reflexión ante el siguiente cuestionamiento, planteado tanto a alumnos como a profesores:

> Dada la ecuación diferencial (cuadro de la izquierda) con $y(0) = y'(0) = 0$,
>
> $$\boxed{y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 7 \\ 0 & x \geq 7 \end{cases}}$$
>
> anticipar la solución a partir de la ecuación misma o bien, conocer un bosquejo gráfico de la solución sin tener explícitamente la solución respectiva.



La mayoría de los participantes no pudieron dar una respuesta sin antes recurrir a resolver "algebraicamente" la ecuación diferencial, mediante métodos y algoritmos. Llevándonos a precisar dos alternativas de resolución (véase cuadro 1). La primera consiste en resolver la ecuación diferencial en cada uno de los intervalos y luego, encontrar una solución de modo que $y(x)$ y $y'(x)$ sean continuas en los puntos de discontinuidad como sugieren Zill, (2006) y Boyce & Diprima, (1992). Mientras que la segundo es mediante la aplicación de la transformada de Laplace como menciona Blanchard et al, (1999), Boyce & Diprima, (1983) y Zill, 2006).



Cuadro 1.- Métodos para resolver una ecuación diferencial

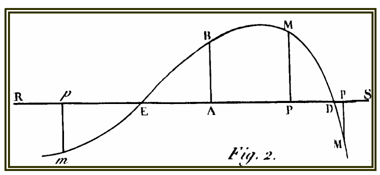
Así mismo pudimos constatar que el uso de las gráficas consiste en tratarla como la representación del concepto de función, como resultado del modelo de conocimiento que vive en la educación (superior), estructura compuesta de definiciones, una colección de problemas a manera de ejemplos y un listado de ejercicios propuestos, comúnmente llamado "aplicaciones". Este hecho lleva, tanto a alumnos como a profesores, a consideran que lo verdaderamente importante en el curso de matemáticas es "aprender" ése listado de formulas y métodos, que en el mejor de los casos, ayuda al alumno a adquirir habilidades, así como a favorecer un pensamiento utilitario, quizá por ello las "aplicaciones". Esto limita al estudiante a no apreciar a la ecuación diferencial $ay''(x) + by('x) + cy(x) = F(x)$ como un modelo de *estabilidad* donde la solución $y(x)$ tiende a comportarse como $F(x)$ bajo ciertas condiciones determinados por los coeficientes.

Esta manera inercial de proceder en los participantes al referirse a $F(x)$, quizás se deba a la corriente formalista del siglo XVIII, encabezada por Euler quien toma a las funciones como aquellas que pueden ser expresadas por una sola expresión. Tal concepción analítica la presenta en el primer volumen en su "*Introduction a L'analyse infinitésimale*" publicado en 1748, la cual define:

> *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta como quiera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes…*
>
> (Euler, 1748a)

En su segundo volumen hace una distinción entre líneas curvas continuas y curvas discontinuas o mixtas:

> *…Una línea curva continua es aquella cuya naturaleza se expresa por una sola función determinada por x. Pero, si una línea curva está compuesta de diferentes porciones BM, MD, DM, etc., determinadas por varias funciones de x, de modo que siendo una parte BM el resultado de una función, otra parte MD sea el de una segunda función, etc., (Véase cuadro 2) llamamos a esta clase de líneas curvas discontinuas, o mixtas e irregulares, por que no están formadas según una sola ley constante y están compuestas de porciones de diferentes curvas continuas…*
>
> (Euler, 1748b)



Cuadro 2

Esta limitada idea sobre funciones impide dar una representación adecuada a las curvas que pudieran surgir ante un problema físico, de manera que se habrá de diseñar una situación donde se confronte la continuidad Euleriana y la *estabilidad* de las *ecuaciones diferenciales* en cuestión. Por ello, la situación deberá dar sentido y significado a este tipo de gráficas (véase cuadro 3) pasando a un estatus argumentativo.

Ante el planteamiento anterior la instrumentación de la tecnología (sensor de sonido) será el mediador para la toma de datos ante la situación masa-resorte-amortiguamiento. De esta manera el uso de la gráfica (en esa situación) será el establecer el comportamiento del movimiento de la masa atada al resorte. Es así que para poder inferir sobre un tipo de comportamiento de cierto tipo (véase Figura 4) con respecto a otro (véase Figura 3) se tendrá que hacer ajustes y las modificaciones necesarias al sistema. Todo ello como resultado del comportamiento tendencial de la gráfica al variar las componentes del sistema.

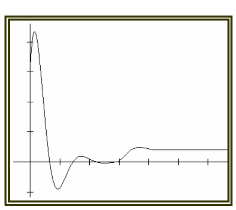


Figura 3

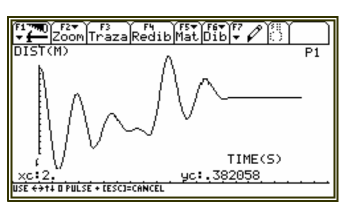


Figura 4

Pensemos en el siguiente ejemplo:

> Considere una masa unida a un resorte y se desliza sobre una mesa. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ la masa se mantiene en reposo (véase Figura A). Cuando $t < 8.5$, la mesa se inclina de manera que la gravedad proporciona una fuerza unitaria que alarga el resorte (véase Figura B). En el tiempo $t = 8.5$, la mesa vuelve a nivelarse (véase Figura C). Con ayuda del sensor obtenemos la gráfica de la Figura 4.


Figura A

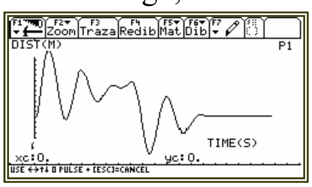

Figura B

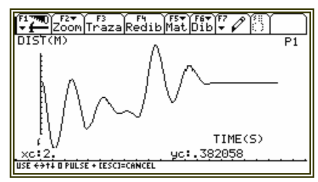

Figura C .

Expresado en términos matemáticos sería:

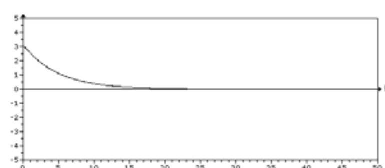
$$ay''(x) + by('x) + cy(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 8.5 \\ 0 & x \geq 8.5 \end{cases} \quad \text{con } y(0) = y'(0) = 0.$$

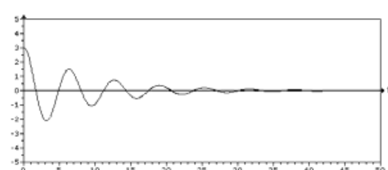
Sin embargo, de acuerdo a la posición del sensor, la tendencia de la gráfica obtenida no corresponde (sigue) a la $F(x)$ (véase figura de la izquierda), por tanto se habrá de inferir en la posición del sensor de tal suerte que se obtenga la figura de la derecha. Así mismo, se habrá de identificar que el comportamiento de la curva depende de dos momentos (posición de la mesa).





Por otro lado, la modificaciones al sistema se lograran con ayuda de un Software, el cual permite manipular los coeficientes (componentes del sistema) de la ecuación diferencial cuando $F(x) = 0$. Donde al variar cada uno de los coeficientes se identificara dos tipos de gráficas de movimiento: la de tipo exponencial y la de tipo senoidal (véase figura1. a) y b) respectivamente).


a) Exponencial


b) Senoidal .

Por ejemplo, consideremos la masa y el amortiguamiento igual a la unidad (coeficientes $a = 1$ y $b = 1$ de la ecuación diferencial). Si con base a una gráfica (Figura 6) podemos inferir sobre las características del resorte para generar ciertos comportamientos, como los que se muestran en la Figura 5 y Figura 7.

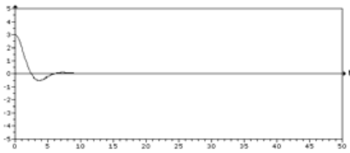


Figura 5

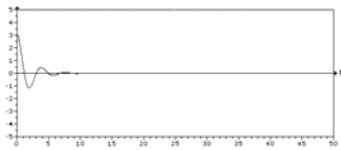


Figura 6

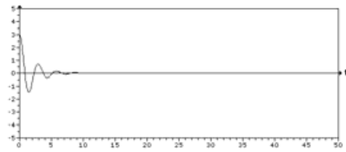


Figura 7

Consideraciones finales

El uso de las gráficas significa que la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. El estatus epistemológico del uso de la gráfica puede ser ubicado, con cierta factibilidad, como un producto material continuo. La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permitirá el continuo. Para que el conocimiento no se destruya se requiere lograr un estatus cultural de la argumentación gráfica. De aquí la conveniencia de pensar a la graficación como una *práctica social* tarea que tendremos saber desarrollar en el sistema educativo. Para ello, hemos logrado ubicar a la argumentación gráfica en una situación de modelación donde los comportamientos de las figuras geométricas, curvas, gráficas y funciones son resignificados generando procedimientos de variación de parámetros y construyendo procesos y objetos de instrucciones que organizan comportamientos.

Referencias Bibliográficas

Boyce, W. y Diprima, R. (1992). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Ed. Limusa, 3ª Edición, México.

Blanchard, P; Devaney, R & Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales*. Ed. Thomson, 2ª Edición, México.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2005). Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior. Proyecto financiado por CONACYT, clave: No. 47045.

Cordero, F. (en prensa). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. Reverté Ediciones-Clame A. C. 2005.

Euler L. (1748). *Introduction a l'analyse infinitesimale*. Tomo I y II. Trad. Labey, edición de 1835, París.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Hernández, D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de f y f' para las funciones x, x^2 y x^3*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Zill, D. (2006). *Ecuaciones Diferenciales con Aflicciones de Frontera*. Octava Edición, Thomson. México.

CATEGORÍAS DE USO DE LAS GRÁFICAS EN INGENIERÍA[‡]

Alba Gabriela Lara Medina, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN. (México), Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
aglara@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: socioepistemología, resignificación, uso de las gráficas, marcos de referencia

Resumen
Los modelos empleados en la didáctica de la matemática han estado fuertemente anclados al predominio de epistemologías de conceptos matemáticos, dejando a un lado el hecho que la matemática está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia (Cordero, 2006). Lo cual nos ha llevado a realizar una investigación que busca ubicar los *marcos de referencia donde el conocimiento matemático adquiera sentido y significación* (Cantoral y Farfán, 2003). Para ello realizamos un estudio de los usos de las gráficas en Ingeniería, de manera particular en mecánica de fluidos.

Introducción

La falta de integración entre el conocimiento matemático y el de ingeniería es una de las problemáticas existentes (Romo, 2003). La matemática impartida en las escuelas de ingeniería no considera las necesidades específicas de cada carrera. De manera que la matemática no se constituye en una herramienta que les permita modelar problemas propios de su área (Romo, 2003), debido a que una de las creencias existentes es aquella donde el estudiante tiene que cumplir ciertas secuencias de repetición a través de una lista considerable de ejercicios, tal vez con la finalidad de que el estudiante memorice algún tipo de procedimiento matemático (Cen y Cordero, 2005). Estas experiencias favorecen un estatus utilitario de la matemática, pero no así funcional donde el conocimiento matemático transforme una realidad y al participante mismo.

Todo ello debido a que las prácticas institucionales no han sido los argumentos, en las reflexiones educativas, para reconstruir el conocimiento matemático (Cordero, 2006). Así surge nuestro interés en hallar prácticas que permitan que el conocimiento matemático sea un conocimiento funcional.

Nuestro estudio está basado en el enfoque socioepistemológico, el cual tiene como programa crear un modelo del conocimiento matemático que dé cuenta de las prácticas institucionales y genere un discurso que ofrezca los marcos o prácticas de referencia donde se resignifique la matemática.

Antecedentes

El usar una aproximación socioepistemológica es debido a que esta perspectiva incorpora de forma sistémica cuatro componentes para la construcción social del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

[‡] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior. Clave: No. 47045.

Tomar la tesis socioepistemológica de que las prácticas sociales han sido y son las que van generando conocimiento matemático implica tomar la creencia que el ser humano construye conocimiento a la par de su experiencia con el mundo que lo rodea (Cen, 2006; Cordero, 2005; Roth & McGuinn 1997, 1998), es decir el conocimiento no preexiste al ser humano. De esa manera es que la práctica social como unidad de análisis no analiza a los participantes sino a los usos (y costumbres) de los participantes, porque lo que nos importa de los participantes son sus formas de constituir conocimiento (Flores, 2005). Es así que nuestra investigación está enfocada a ubicar los distintos usos de las gráficas en Mecánica de Fluidos. Esto nos proporcionará datos sobre los métodos de uso de la graficación a través de sus prácticas institucionales; además de las distintas comprensiones de las gráficas en tanto su función y su forma por la clase de actividades que generen sus prácticas institucionales y por último conocer las similitudes que alternan con diferentes dominios y reflejan una resignificación institucional.

Categorías de uso en ingeniería

Considerar a la graficación como una habilidad cognitiva (destreza para graficar), limita la problemática ya que la reduce a la creencia de que hay estudiantes más o menos capaces para graficar (Roth, 1997). Sin embargo, tratar a la graficación como una práctica social amplía la problemática ya que necesariamente incorpora elementos como lo institucional en la constitución de un saber. Roth (1997) realizó un estudio en el cual ubica algunos usos de gráficas en las áreas científicas y de ingeniería, en ese estudio comenta que cuando las investigaciones toman a la graficación como una habilidad cognitiva, los investigadores que desarrollan dicha investigación, consideran que el conocimiento se representa en la mente de los estudiantes y por lo tanto no podemos verlo, es así que se dan a la tarea de comprender lo que los estudiantes realizan ante una práctica dada, así como los procesos mentales que realiza para graficar. Debido a eso es que Roth nos llama la atención a considerar más que a las gráficas ver a la práctica de graficación, es decir verla como una práctica observable y no sólo como una habilidad cognitiva. La diferencia entre una habilidad cognitiva y una perspectiva práctica es ejemplificada por la diferencia entre el significado de los signos (palabras, gráficas, fórmulas) residentes en algunas cabezas (mente de las personas) y el uso de los signos como parte de práctica discursiva diaria de una comunidad (Roth & McGuinn, 1998).

Las gráficas las considera como una representación o dibujo de “algo” que requiere ser expresado de alguna forma, es decir es una inscripción. Las inscripciones son signos incluidos materialmente en algún medio, como en papel, computadoras, etc., (ejemplos de inscripciones: gráficas, tablas, listas, fotografías, diagramas, ecuaciones), todas ellas son públicas y están disponibles ya que son objetos sociales, las cuales podemos hallar en nuestro entorno cultural (Roth & McGuinn, 1998).

El conocimiento y aprendizaje de las matemáticas esta situado en una comunidad de práctica social e intelectual, y para su conocimiento el conocimiento matemático debe ser útil, los individuos deben aprender a actuar y razonar matemáticamente en el escenario de su práctica. Por ello es que conciben a la graficación como una práctica que tiene como fin una meta específica. Esta perspectiva destaca la naturaleza de las gráficas en las comunidades científicas como objetos semióticos, dispositivos retóricos, y dispositivos de reclutamiento, las cuales tienen objetivos principales:

- *Las gráficas son objetos semióticos*[§] *que constituyen y representan otros aspectos de la realidad.*

Por ejemplo se pide a los estudiantes que se imaginen caminando a lo largo de un cuarto; se les pide que entre varias gráficas elijan una, o bien se les pide trazar una gráfica que represente lo que caminaron.

- *Las gráficas sirven como función retórica en la comunicación científica.*

Las gráficas son usadas para traer luz a ciertas características de la naturaleza de las construcciones de los investigadores. Aquí es posible ver las relaciones entre las gráficas como un significado para constituir un fenómeno (las manipulaciones experimentales científicas que culminan en una gráfica a través de la cual el fenómeno llega a la vida), y las gráficas como evidencia de un fenómeno que entra en el discurso diario como un hecho.

- *Las gráficas actúan como dispositivos de reclutamiento que median las actividades científicas colectivas.*

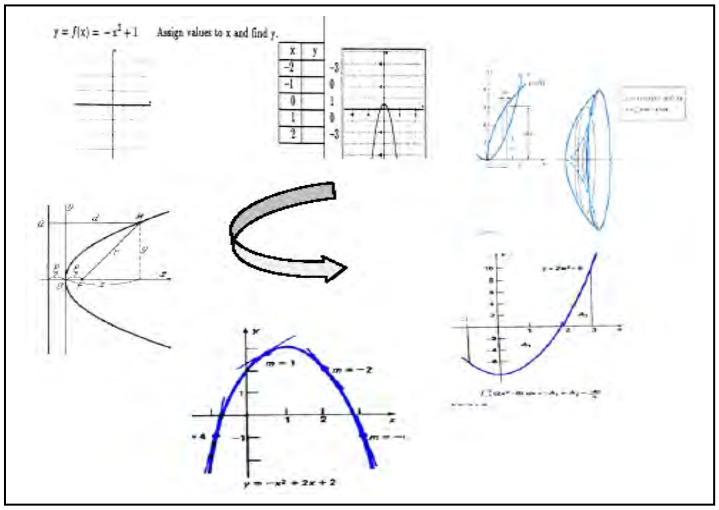
Como un aspecto central de una práctica, las gráficas tienen otra función, además de ser inscripciones (objetos semióticos) son usados para propósitos retóricos. Como dispositivo de reclutamiento, las gráficas coordinan manteniendo interacciones en el mismo sentido que otras representaciones visuales para alistar la participación de aquellos quienes emplearon el laboratorio o publicaciones científicas, donde los usuarios deben emplear generando, editando, y corrigiendo gráficas durante su construcción. Este uso es propio en cada una de las comunidades científicas, es decir, es posible tener una misma gráfica y sin embargo un biólogo y un economista pueden obtener distinta información de la misma gráfica. Ya que cada uno de ellos tiene un uso diferente de dicha gráfica (Roth & McGuinn, 1997).

En el análisis presentado subyace una epistemología centrada en el concepto de función. Nosotros, en cambio, estamos haciendo una categorización del uso de las gráficas en la ingeniería centrando la epistemología en las prácticas sociales, es decir, identificamos esas prácticas que permiten crear un conocimiento funcional para comprender el uso de las gráficas en tanto su función y su forma por la clase de actividades que generen sus prácticas institucionales, y las similitudes que alternan en los diferentes contextos, de los dominios de conocimiento, según las resignificaciones institucionales.

La investigación desarrollada por Cen (2006) da evidencia que las gráficas tienen un fin argumentativo y un desarrollo. Como ejemplo esta el desarrollo de la parábola, el cual reporta el uso de las gráficas:
En el bachillerato[**] el estudiante se enfrenta por vez primera a la parábola en el primer semestre, en específico en la unidad 4, donde el uso de la gráfica es la *distribución de puntos y la interpretación geométrica*, la *forma* de conocer a la parábola es a través de una tabla de valores previamente establecido y la ubicación de puntos en el plano cartesiano donde el *funcionamiento* es el bosquejo de la ecuación, una vez hecho lo anterior se ven las transformaciones (traslados horizontales y/o verticales, la contracción o estiramiento) de la

[§] Objetos semióticos: fenómenos percibidos y herramientas disponibles (técnica, lingüística) cambian y son mutuamente ajustados hasta que pueden ser mirados como isomórficos.
[**] El ciclo del bachillerato en México corresponde a tres años de estudios. Los cursos son organizados semestralmente; comprenden las edades de 16-18 años aproximadamente.

parábola; el siguiente uso que aparece (Semestre 3, unidad 5) es *la interpretación geométrica de una ecuación*, donde el *funcionamiento* es la asociación gráfica-expresión algebraica, a través de *formas* como los elementos que intervienen en la parábola (vértice, foco, directriz); después aparece el uso *comportamiento de la curva* (Semestre 4), donde el *funcionamiento* es identificar los intervalos donde la función es creciente, decreciente, máximos y mínimos de la función, a través de *formas* como la primera y segunda derivada y el último uso es el *cálculo de áreas y volúmenes* (Semestre 5) en donde de alguna forma el foco de atención ya no está en la forma de la gráfica sino en la unidad de análisis que se describe con la o las gráficas, la cual es la función a integrar, el *funcionamiento* es el uso mismo, a través de la *forma* de integrales.

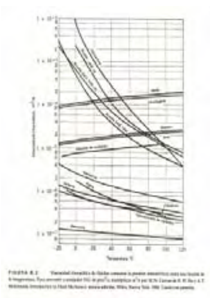


Si el uso de las gráficas en el bachillerato se desarrolla, entonces podemos pensar que ocurre lo mismo en el nivel superior.

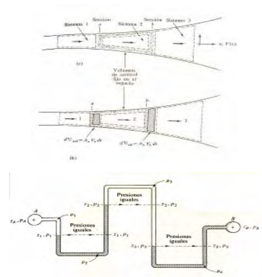
Veamos el caso de la ingeniería, las graficas usadas en Cálculo Diferencial e Integral y las empleadas en Mecánica de Fluidos también deben desarrollarse y resignificarse. Para ello hemos realizado un análisis de algunos libros de texto de Mecánica de fluidos con el fin de ubicar los distintos patrones en las gráficas, e identificar el tipo de actividades que generen cierto tipo de gráficas, lo cual nos lleva a hablar de usos de las gráficas.

Hemos identificado algunos usos de las gráficas de los que podemos mencionar:

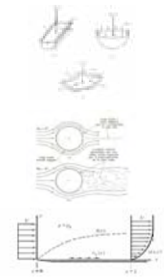
a) Variación numérica para las propiedades de los fluidos.
b) Compara las distintas propiedades de los fluidos como lo son la densidad, la viscosidad entre otras.
c) Interpretación de un fluido en un escenario físico.
   Describe el comportamiento de un fluido en un volumen de control o bien en algún tipo de tubería.
d) Interpretación de un elemento infinitesimal de un fluido.
   Se toma al elemento infinitesimal para ver el tipo de fuerza que se ejerce sobre el o estudiar su comportamiento dependiendo del tipo de régimen en el cual se mueve.



a



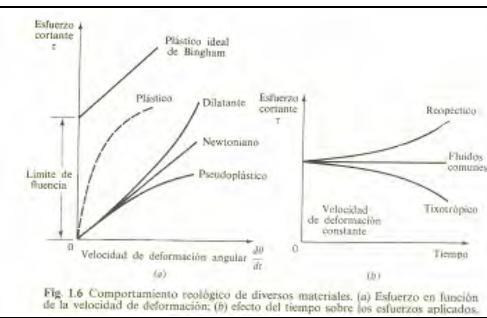
b



c

Tomemos una gráfica típica que aparece en los libros de Mecánica de fluidos, consideremos la ***figura 1***, si vemos esta misma gráfica desde la perspectiva del Cálculo podemos hablar de comparación de curvas de las cuales podemos decir que tienen cierta concavidad, distintas pendientes, o bien de curvas que parten de un mismo estado de reposo. Ahora si vemos la misma gráfica desde Mecánica de Fluidos, esta figura compara cuatro ejemplos de fluidos con uno newtoniano (el esfuerzo cortante está relacionado linealmente con la razón de deformación de corte, también denominada velocidad de deformación angular). Un *fluido dilatante* es aquel que la resistencia a la deformación aumenta al aumentar el esfuerzo cortante. Por el contrario, un *fluido pseudoplástico* es el que disminuye su resistencia al aumentar el esfuerzo. Si este efecto es muy importante, como en el caso marcado con la línea discontinua, el fluido se denomina *plástico*. El caso límite de la sustancia plástica es aquel que requiere un esfuerzo finito (límite de fluencia) antes de que fluya. La idealización del *fluido plástico Bingham* se muestra en la figura (White, 1987; Munson et al., 1999), este material es capaz de resistir un esfuerzo cortante finito sin moverse (por lo que no es un fluido) pero una vez que se excede el esfuerzo de cadencia, fluye como un fluido (por lo que no es un sólido) (Munson et al., 1999).

Figura 1

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	***RESIGNIFICACIÓN***	***MECÁNICA DE FLUIDOS***
- *Comparación de curvas crecientes* - *Comparar de pendientes* - *Comparación de concavidades* - *De curvas que parten de un estado de reposo*		- *Comparación de un fluidos con uno newtoniano* - *Resistencia a la deformación de un esfuerzo cortante* - *Aumento o disminución de la viscosidad debido a una deformación constante*

Lo anterior nos permite ver que las gráficas empleadas en Cálculo tienen que resignificarse en Mecánica de Fluidos.

Ahora bien tomando las categorías establecidas por Roth, podemos ver que el uso de la gráfica anterior sería como un objeto retórico (tomemos como retórico el discurso empleado en los libros de texto), ya que es la misma gráfica que permite hablar del comportamiento de un fluido, y de la resistencia del esfuerzo cortante del mismo.

Comentarios finales

Esta investigación contribuye con elementos que pudieran ayudar a confomar un marco de referencia distinto al dominio matemático como lo es la Ingeniería. Compartimos con Romo (2003) en que la matemática impartida en las escuelas de ingeniería no considera las necesidades específicas de cada carrera, debido a que el discurso matemático escolar esta diseñado de forma tal que el Cálculo Integral y Diferencial lo ven como un conocimiento ajeno a Mecánica de fluidos y esto mismo impide que la enseñanza del Cálculo sea algo funcional en el estudiante lo cual obstaculiza que el conocimiento logre resignificarse.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Cen, C. y Cordero, F. (2005). El uso de las gráficas de los alumnos en el bachillerato. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Uruguay. p. 239.

Cen, C. (2006). *Los Funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F. (2006). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. R. Cantoral, Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J., y Romo, A. (Eds.). México: Díaz de Santos. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC, 265 - 286.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Munson, B., Okiishi, T. y Young, D., (1999). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos,* Editorial Limusa.

Romo, A. (2003). *Herramienta metodológica para el análisis de conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Roth, W. y McGuinn, M. (1997). Graphing: A cognitive ability or practice? *Science Education*, 81, 91-106.

Roth, W. y McGuinn, M. (1998). Inscriptions: Toward a Theory of Representing as social practice. *Review of Educational Research*, 68, 35-59.

White, F. (1987) *Mecánica de fluidos*. Editorial McGraw-Hill.

EL USO DE LAS GRÁFICAS EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS. EL CASO DE LA DERIVADA††

Teresa Guadalupe Parra Fuentes y Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN. (México) y Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
tparra@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: socioepistemología, graficación, resignificación, derivada

Resumen
En este escrito se reportan los avances de nuestra investigación que tiene como objetivo crear un marco de referencia en el cual se resignifique la derivada, en un dominio diferente al de la matemática misma. Particularmente queremos dar cuenta de la relación que existe entre el dominio matemático y el de la ingeniería. Se considera a la graficación como el argumento que permita al estudiante resignificar la derivada en el marco de la socioepistemología, el cual centra la atención hacia los usos del conocimiento en situaciones específicas.

Problemática

El conocimiento matemático que se enseña en la escuela no logra hacerse un conocimiento funcional en los estudiantes, es decir, no logra transformar su realidad y al estudiante mismo. Constantemente escuchamos a los estudiantes preguntándose para qué les sirve aprender matemáticas. Para ellos lo más importante es que ésta satisfaga las necesidades de su vida diaria, llevando de esta forma al conocimiento a un nivel utilitario. Y es de esperarse ya que el estudiante no le encuentra sentido ni significado a la matemática que se le enseña a través de algoritmos y secuenciaciones. Lo cual es resultado de que el discurso matemático escolar está fuertemente anclado a los conceptos. De alguna manera tal discurso presenta al conocimiento como preexistente a la experiencia del ser humano, esto es, presenta a la matemática como un producto material acabado que siempre ha existido, por lo que sólo debemos tomarlo y aprenderlo, haciendo a un lado la esencia de esa matemática a las situaciones que le dan sentido. Soslaya el desarrollo y diferentes resignificaciones que ha tenido a través del tiempo: a lo que la ha llevado a ser como es y no de otra forma, esto es, a las prácticas sociales que norman el conocimiento, de tal manera que éste se incorpora al individuo transformando su realidad. Desde esta perspectiva podemos ver que hay ausencia de situaciones que le permitan al estudiante usar su conocimiento, que a través de su experiencia construya argumentos para dar sentido a sus procedimientos y de esta forma construir un conocimiento que no esté basado en la memorización sino en su práctica.
Un ejemplo de las consecuencias que el discurso matemático escolar ha generado en los estudiantes es el caso de la derivada, a la cual el estudiante no le incorpora mayor significado que "la pendiente de la recta tangente a una curva" la cual no se resignifica y algunas veces es el "obstáculo" para que se resignifique (Rosado, 2004). Además se ha encontrado en algunos casos, que aún los estudiantes de ingeniería siguen teniendo dificultades con el concepto de pendiente (Mirón, 2000). Así, investigaciones como éstas hacen notar que lo que se enseña a los estudiantes no los transforma sino que por el contrario se les mete en un sendero de dificultades. Aspectos variacionales que son fundamentales en la esencia de la derivada no forman parte de los significados que el estudiante pudiera incorporarle. Esto ocurre por la

†† Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior. Clave: No. 47045.

ausencia de marcos de referencia que permitan que el estudiante resignifique la derivada, ausencia de situaciones que centren la atención en la noción de variación. La cual nos rodea cotidianamente a través del movimiento y que el discurso matemático escolar nos presenta a través de fórmulas. Cabe señalar lo que en la perspectiva socioepistemológica entendemos por resignificación que es el uso del conocimiento en una situación específica.

Uso de las Gráficas

La tesis socioepistemológica considera a las prácticas sociales como las generadoras del conocimiento, cuya función consiste en permitir que un conocimiento sea como es y no de otra forma. Por lo que no nos referimos a cualquier práctica sino a aquéllas que hacen que el humano haga uso de su conocimiento ante una situación transformando su realidad y a él mismo. De esta manera, al referirnos a usos tenemos que hacer referencia a que hay un *funcionamiento* y una *forma* del conocimiento en cuestión en una situación específica. Este mismo modelo lo podemos ver reflejado al considerar a la graficación como una práctica social, bajo la cual hablamos de usos de la gráfica a través de su funcionamiento y forma, que dependerán de una situación específica. Un ejemplo de esto lo podemos ver en el trabajo de Cen (2006), el cual consistió en clasificar los diferentes usos de las gráficas en el nivel bachillerato: da cuenta del desarrollo de la gráfica de la función que se resignifica al debatir entre sus *funcionamientos y formas*, haciendo significativo el papel del uso de las gráficas ante situaciones específicas, contraponiéndose a la idea de gráfica como una representación del concepto de función. Cordero (2005a), menciona que el estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación nos acerca más a la matemática funcional, puesto que nos ofrece indicadores para que el conocimiento se integre y se resignifique permanentemente a la vida para transformarla. En este sentido la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, para crearle un medio que soporte el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, generando prácticas retóricas y argumentativas gráficas (Cordero, (2005b)). Entre los trabajos que dan cuenta de esta tesis por medio de sus resultados de investigación se encuentran los de Campos (2003), Domínguez (2003) y Rosado (2004).

Cantoral y Farfán (2003) mencionan que la matemática del nivel superior está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia en donde adquiere sentido y significación. Sin embargo parecería que no hay tal relación entre la matemática y otros dominios, ya que el estudiante no logra darse cuenta que es la misma matemática que ha aprendido la que se va desarrollando al paso de su vivencia institucional, adquiriendo sentido y significado. Es decir, son los usos que van evolucionando y por lo tanto también los funcionamientos y formas del conocimiento.

Con todo lo anterior nuestro trabajo consiste en crear un marco de referencia en el cual se resignifique la derivada en la materia de Mecánica de Fluidos, específicamente en el tema de Conservación de la Masa. La cual consiste de un fluido en movimiento que fluye a través de un volumen de control, esto es, un volumen arbitrario en el espacio por el cual entra y sale fluido. La conservación de la masa establece que la cantidad de masa que entra a un volumen de control es la misma que debe de salir de él.

Es decir que $\frac{dM}{dt} = 0$, estableciendo algunas advertencias:

- Si durante un intervalo de tiempo la cantidad de masa que fluye hacia el volumen de control no es la misma que la que sale de él, deberá existir un cambio en la cantidad de masa dentro del volumen de control.
- Si el flujo que sale es mayor que el flujo que entra, deberá tenerse una disminución en la cantidad de masa dentro de volumen de control.
- Por el contrario, se tendrá un aumento en esta masa si el flujo que entra es mayor que el que sale.

Basándose en los conceptos físicos se puede establecer en palabras la conservación de la masa, como:

$$0 = \begin{bmatrix} gasto\, másico \\ que\, sale\, del \\ volumen\, de\, control \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gasto\, másico \\ que\ entra\ al \\ volumen\, de\, control \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rapidez\, de\, cambio \\ de\, la\, masa\, dentro \\ del\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}$$

Lo cual podemos reescribir como

$$\begin{bmatrix} gasto\, másico \\ que\, sale\, del \\ volumen\, de\, control \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gasto\, másico \\ que\ entra\ al \\ volumen\, de\, control \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} rapidez\, de\, cambio \\ de\, la\, masa\, dentro \\ del\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}$$

Por otro lado el discurso matemático escolar ha privilegiado la derivada en el sentido de Cauchy, esto es, como el límite del cociente incremental. Que es representado como un proceso al límite de una familia de rectas secantes, sin embargo esto ha sido localizado como una gran dificultad didáctica como reporta Dolores (1989). Peor aún, se ha encontrado que los estudiantes de ingeniería siguen, como aquellos reportados en educación básica, sin asumir plenamente al objeto "pendiente de una recta" como una entidad, una totalidad que describe una propiedad de las rectas. En consecuencia la noción de derivada, cuyo tratamiento escolar se apoya en aquella de pendiente deviene frágil entre los estudiantes. García (1998) reporta la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes de diferentes edades para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Lo cual no es difícil de verificar ya que los estudiantes no incorporan significado variacional a la derivada. Con base a estas dificultades encontradas es que en nuestro trabajo consideraremos la derivada en el sentido de Lagrange, teniendo como hipótesis de investigación que sería más natural para el estudiante resignificar la derivada en este sentido. Además de que permite que el estudiante desarrolle la noción de variación. Al referirnos a la derivada en el sentido de Lagrange, nos referimos a la parte lineal del desarrollo de series de potencias de una función en torno a un punto dado.
Esto es,

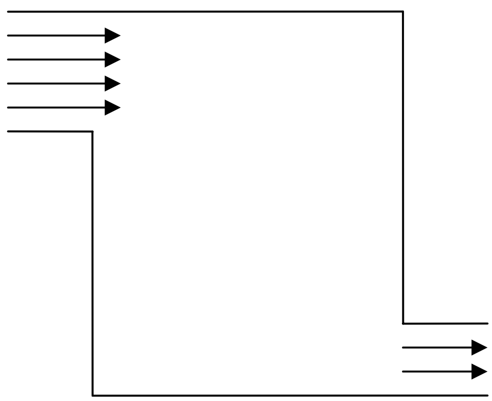
$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

En este sentido la derivada es el coeficiente de *h* que resulta de la diferencia entre dos estados, *f(x+h) y f(x):*

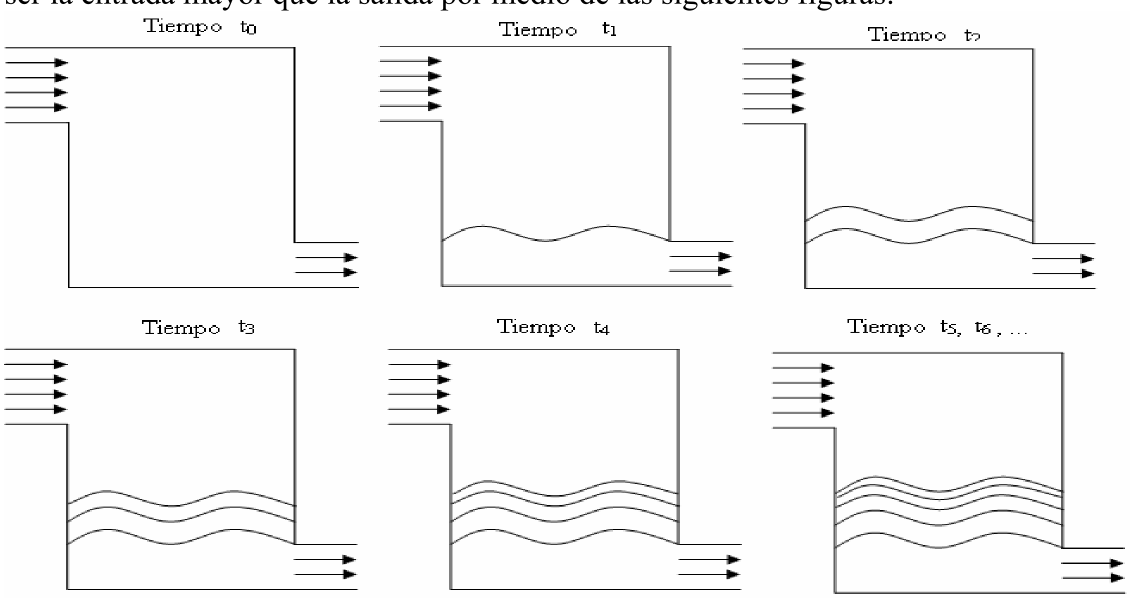
$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Un estado inicial $f(x)$ y un estado final $f(x+h)$, que al ser resignificado en la conservación de la masa, $f(x)$ será la cantidad de entrada y $f(x+h)$ la cantidad de salida por lo que la diferencia de estas será la acumulación $f'(x)h$. Que de manera global nos da como resultado la variación de la acumulación del fluido en el volumen de control.

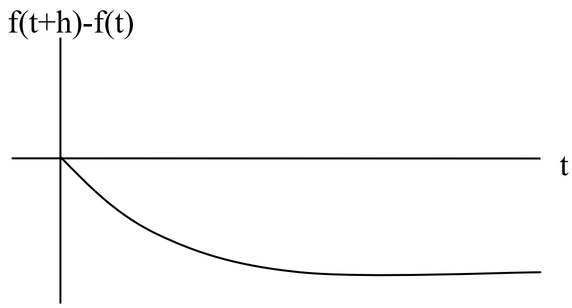
Para llevar a cabo estas ideas, estamos diseñando una secuencia didáctica que será puesta en escena con estudiantes de ingeniería. La cual consistirá en presentar al estudiante la siguiente figura que representa un volumen de control. Cuya característica principal es que la dimensión de la entrada es mayor que la de salida.



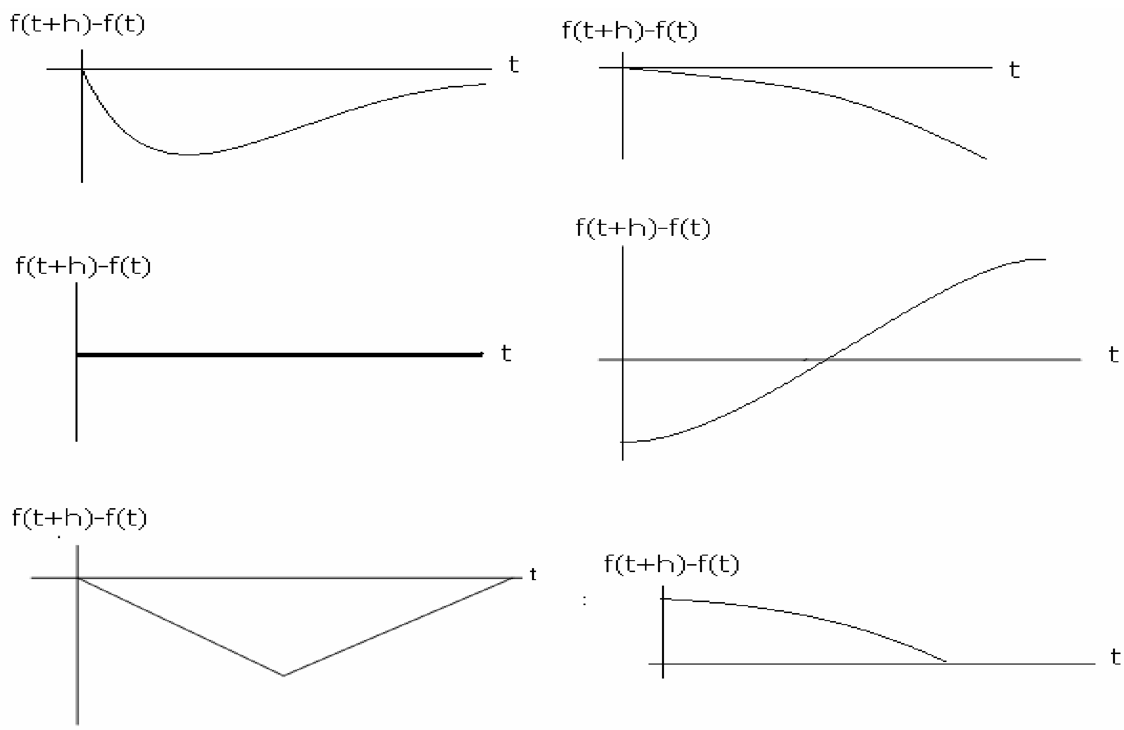
La cantidad de entrada en un tiempo t la llamaremos $f(t)$ y la cantidad de salida en un tiempo $t+h$ será $f(t+h)$. Enseguida pedimos al estudiante que construya la gráfica del resultado de las diferencias entre la cantidad de entrada y salida. Antes de presentar la gráfica que queremos obtener en el estudiante explicaremos lo que ocurre en el volumen de control al ser la entrada mayor que la salida por medio de las siguientes figuras:



En ellas podemos ver lo que ocurre dentro del volumen de control al entrarle fluido de manera constante al transcurrir el tiempo. Podemos ver que al entrar mayor fluido que el que sale, hará que se produzca una acumulación. La cual irá incrementando, pero cada vez de forma más lenta hasta que llegue el momento en que se conservará. Esto ocurre porque al incrementar la acumulación, se va ejerciendo mayor presión en la base del volumen de control, lo cual ocasiona que la velocidad del flujo que sale incremente de tal forma que llegará el momento en que la cantidad de flujo que sale se hará igual a la que entra. Esta clase de fenómenos es claro para los estudiantes de ingeniería por lo que tenemos como objetivo que llegue a establecer la siguiente gráfica.



En la cual podemos ver cómo va variando la acumulación, hasta llegar al estado estacionario o de equilibrio al ser la cantidad de salida igual a la de entrada. A partir de que el estudiante construya la gráfica anterior presentarle las gráficas que se muestran a continuación, y cuestionarle sobre cómo tendría que ser la entrada y salida del volumen de control para obtenerlas. De esta forma confrontar al estudiante entre el comportamiento de la acumulación del fluido que es el *funcionamiento* de la gráfica y la *forma* de las entradas y salidas. Que dará como resultado la resignificación de la derivada. Haciéndolo de esta forma partícipe en la construcción de su conocimiento



Comentarios finales

Queremos hacer notar que en el diseño de la situación se trabajará con la derivada sin hacer referencia a expresiones algebraicas, ni al concepto de función. Tratando que el estudiante desarrolle las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada y que es soslayado por el discurso matemático escolar. Todo ello a través de que la graficación puede ser ajustada y llevar a cabo múltiples realizaciones de acuerdo a la situación. En nuestro caso las gráficas serán usadas para establecer la variación de la acumulación del fluido, su *funcionamiento* será establecer el comportamiento de la acumulación de éste y la *forma* será por medio de establecer las variaciones de la entrada y la salida.

Referencias bibliográficas

Campos, C. (2003). *Argumentaciones en la transformación de las funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Área de Educación Superior, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution, *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 53, 255 – 270.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2005a). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 477-482.

Cordero, F. (2005b). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 19. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1989). *Obstáculos epistemológicos relativos al concepto de derivada.* Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Área de Educación Superior, Cinvestav-IPN, México.

García, D. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones* $F \leftrightarrow F'$ *en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas.* Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE SABERES MATEMÁTICOS. EL CASO DEL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Santiago Ramiro Velázquez
Universidad Autónoma de Guerrero, Secretaría de Educación Guerrero. (México)
sramiro@prodigy.net.mx
Campo de investigación: formación de profesores. Nivel educativo: medio.

"*Solos no sabemos nada, juntos sabemos mucho*"
Expresión de comunidades indígenas mexicanas

Resumen
Este trabajo centra su atención en la construcción de saberes matemáticos en un ambiente de colaboración, en el que se privilegia la interacción entre los participantes, la confrontación y la negociación. Se hace una descripción de la problemática que se vive en el aprendizaje de las matemáticas y de la necesidad de innovar a través de situaciones donde el contenido matemático es relevante para el alumno y la sociedad. De igual modo se hace una descripción sucinta acerca de que esta manera de construir saberes incluye el desarrollo de competencias matemáticas, las consideradas en el plan de estudio de educación secundaria 2006. Esta descripción contiene actividades para un taller considerando el eje sobre el manejo de la información y una versión de principios para orientar su ejecución.

Introducción

En este trabajo se presentan algunas experiencias en docencia e investigación[‡‡] sobre entornos de aprendizaje que centran la atención en la construcción social de saberes matemáticos, que son de importancia para los profesores de educación secundaria y media superior interesados en la Matemática Educativa. En lo general se acepta que en el plan y programas de estudio 1993 de educación secundaria, así como en los demás materiales de apoyo didáctico subyacen ideas constructivistas[§§], ya que se concibe al alumno como un constructor de sus saberes y activo luchador por el conocimiento y al profesor en el mismo sentido, como diseñador de situaciones de aprendizaje en las que es guía y mediador. Por otra parte también se acepta en lo general que toda innovación del currículum habrá de fundamentarse en entornos didácticos en donde el alumno en activa interacción con sus compañeros y profesores formule, valide e institucionalice sus saberes en el campo de las ciencias y las humanidades.
Por su parte en la reforma de educación secundaria 2006 se propone que el aprendizaje en general y en particular de matemáticas centre su atención en el desarrollo de competencias para la vida. En matemáticas se propone el desarrollo de competencias para el planteamiento y resolución de problemas, argumentación, comunicación y manejo de técnicas. Postulamos que a través de la construcción social de saberes matemáticos se desarrollan estas competencias, ya que en la participación colectiva la persona crece individual y socialmente al accionar sus conocimientos.
Existen diversos estudios que constatan la problemática que vivimos en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente las evaluaciones realizadas por PISA[***] (2000, 2003) y por

[‡‡] Las experiencias de investigación que se incluyen en este trabajo se derivan del proyecto denominado "Programa de capacitación y actualización para profesores de matemáticas de nivel medio superior en Guerrero", GUE-2002-C01-4725, aprobado por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero.
[§§] Consideramos ideas constructivistas a las que promueven el aprendizaje matemático de los alumnos o personas, que buscan activamente el saber y realizan una interacción discursiva para arribar a consensos.
[***] Acrónimo derivado del título del proyecto en inglés: Program for Internacional Student Assessment. Programa internacional de evaluación de los estudiantes.

TIMSS[†††], donde se afirma que el desempeño de los alumnos participantes obedece principalmente a la escolarización del saber que impide el aprendizaje significativo en contextos reales y auténticos (Slisko, 2003). Precisamente estos contextos constituyen uno de los principios que caracteriza a los entornos de aprendizaje en esta perspectiva. *"…El conocimiento desde esta perspectiva constructivista es siempre contextual y nunca separado del alumno, en el proceso de conocer el alumno va asignando al objeto una serie de significados cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto…"* (Moreno, Walddeg, 1992). En el mismo sentido se afirma que los contenidos científicos y humanísticos deben transformarse para responder a las exigencias de su enseñanza y aprendizaje en la escuela, que implica organizaciones, temporalidades y condiciones de construcción del saber distintas a las que le dieron origen (transposición didáctica[‡‡‡]).

Por otra parte existe una medición realizada por el CENEVAL (2005), que expresa cuál es el nivel de conocimiento de la población mexicana y su capacidad para aprenderlo, reporta para el estado de Guerrero un valor de 0.482 en una escala del 0 a 1. Correspondiente al penúltimo lugar, solo por arriba de Chiapas que tiene un nivel de 0.413 . Este estudio presenta patrones regionales que dividen al país en tres zonas, de acuerdo al nivel de su población para adquirir conocimiento: ALTO de 1 a 0.773, MEDIO de 0.769 a 0. 656 y BAJO de 0.650 a 0.413. El D.F. tiene un índice de 1, los estados dell centro y norte están en el nivel alto o medio y los del sur-sureste en el nivel bajo.

El Ceneval formula dos recomendaciones en el campo que nos ocupa, estas son: reconsiderar el modelo educativo tradicional y dar énfasis a la pertinencia del conocimiento.

El enfoque del referido estudio consiste en que el conocimiento colectivo descansa en lo que cada persona sabe y puede hacer y en lo que saben y pueden hacer las personas con quienes se comparten los espacios escolares, laborales, sociales y familiares. Compartimos este enfoque ya que subyace en la construcción social de saberes matemáticos y sostenemos que de este modo las personas en general y en particular los alumnos desarrollan las competencias matemáticas, referidas en líneas anteriores.

Estas posiciones se conectan con las tesis de Godino, Linares (1995), al afirmar lo siguiente:

--El profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura en el aula.

--Las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina como en las regularidades sociales, emergen interactivamente.

--El proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.

En este sentido consideramos que este escenario no es privativo de la escuela sino que incluye las diversas prácticas sociales, conformando oportunidades de aprendizaje.

En este artículo pretendemos que se reconozca la problemática que viven profesores, estudiantes y en general los distintos sectores sociales involucrados en el aprendizaje de los alumnos. Así como la necesidad de innovar el proceso de estudiar matemáticas[§§§], particularmente por medio de la caracterización y diseño de situaciones de aprendizaje con la perspectiva que sostenemos. Enfocamos la atención en que los profesores de matemáticas de educación secundaria y media superior, analicen una manera de construir saberes matemáticos por medio de la identificación, el diseño y puesta en escena de situaciones de aprendizaje que abordan problemas relevantes para los alumnos y la sociedad. Particularmente se considera el estudio de los temas del eje sobre manejo de la información en educación secundaria, a través

[†††] Tendencias internacionales sobre matemáticas y ciencias.

[‡‡‡] La transposición didáctica es otro de los aspectos inmersos en los entornos de construcción de saberes.

[§§§] El proceso de estudiar matemáticas (Chevallard, 1998) es organizado y sostenido como fuente continua de tareas y problemas matemáticos, encaminados al desarrollo de competencias por los alumnos.

de una explicación matemática del problema de la basura en Acapulco, Gro. De esta manera se estructura el taller realizado en la XX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa[****] en una sesión dividida en dos partes de 2 horas c/u. En las que los participantes tienen la oportunidad de manifestar sus saberes en una variedad de actividades diseñadas con este fin. Entre estas actividades está el estudio de los problemas que se viven en el aprendizaje de esta asignatura, un análisis de los principios que caracterizan la construcción de saberes matemáticos y la búsqueda o diseño de situaciones en la perspectiva que expresamos en este artículo.

Soporte teórico

Uno de los aspectos fundamentales en los que se basa este trabajo es la unidad de los procesos de pensamiento y lenguaje que emergen de las prácticas sociohistóricoculturales de la sociedad. Una arista de estos procesos es el discurso matemático que surge y se desarrolla en la construcción social de saberes (Cantoral, Farfán, 2002).

En lo referente a los procesos de pensamiento y lenguaje Vygotsky (1997), sostiene "el significado de cada palabra es una generalización o un concepto. Si las generalizaciones y conceptos son actos del pensamiento podemos considerar al significado como inherente al pensamiento".

Como se puede ver estas tesis muestran la unidad entre el pensamiento y el lenguaje, por lo que la construcción de saberes matemáticos que se da a través de la interacción discursiva y la negociación de significados promueve el desarrollo del pensamiento matemático. A su vez se puede mirar que los saberes matemáticos no son inmutables, ya que están en constante evolución en dependencia de las prácticas de la sociedad y sus intencionalidades.

Compartimos las ideas de Aparicio, Cantoral (2006) acerca de que el discurso en sus diversas manifestaciones como práctica social es un medio para la construcción de saberes. De manera que es deseable que haya un entrelazamiento entre el discurso escolar y el discurso cotidiano para su enriquecimiento mutuo a favor de la generación de conocimientos. En este sentido Batanero (2005) considera que en el proceso de estudio de un contenido matemático, son relevantes tanto los significados personales y empíricos como los significados matemáticos.

Sobre la base de estas afirmaciones, proponemos que el manejo de la información como contenido programático[††††], cuyo propósito principal es el desarrollo de competencias para el planteamiento y solución de problemas, y para la comunicación, se aborde por medio del estudio de una situación relevante para la sociedad. En este caso se trata de hacer una explicación matemática del problema de la basura en Acapulco, Gro. Desde nuestro punto de vista una explicación matemática de este problema consiste en obtener, procesar y comunicar información a través de diversos registros de representación, acerca del tipo y cantidad de desechos sólidos (no peligrosos) que se producen diariamente en el centro y área conurbada de Acapulco. Que de cuenta de la cantidad que se recicla, la que se vuelve a utilizar y la que se convierte en basura. A su vez qué cantidad se podría reciclar, volver a usar y la que se puede reducir, así como sus implicaciones en la reducción de basura.

[****] En Relme 20 el taller se denominó Entornos de aprendizaje matemático con una perspectiva constructivista. Una experiencia con Jefes de Enseñanza. Cuyo resumen está en la pág. 166 del libro correspondiente.

[††††] Desde nuestra perspectiva, los temas y subtemas del eje denominado manejo de la información (SEP, 2006), tienen potencialidades para realizar una explicación matemática del problema de la basura en Acapulco, Gro. y se pueden abordar por medio de problemas como éste.

El tratamiento de la información y el desarrollo de competencias matemáticas

Uno de los aciertos de la reforma 2006 en educación secundaria consiste en remarcar un modelo didáctico enfocado al desarrollo de competencias y propone en el caso de matemáticas una estructura curricular que lo favorece. La organización por bloques, ejes, temas y subtemas que recorre los tres grados de este nivel educativo y su visión transversal para estudiarse en forma organizada y sostenida, rompe con la atomización del contenido favoreciendo la integración de saberes.
De esta manera el profesor puede visualizar el eje de tratamiento de la información con sus temas y subtemas, así como sus entrelazamientos con otros ejes y con situaciones de otras asignaturas. A la vez estructurar o proponer las actividades y situaciones pertinentes para el logro de los propósitos y desarrollo de competencias. Consideramos que una persona o alumno es competente en matemáticas cuando ante cualquier situación, activa sus saberes para resolverla en bien de la sociedad. En este sentido en el subtema relaciones de proporcionalidad[‡‡‡‡] es relevante que explique matemáticamente la importancia de los planos, mapas y dibujos a escala en las prácticas sociales.

Principios de un modelo didáctico sobre construcción social de saberes (Jonassen, 1991)

Consideramos de interés incluir a continuación la versión de principios que caracterizan la construcción social de saberes matemáticos, cuyo análisis es una de las actividades del referido taller.

- Crear los entornos del mundo real que usan los contextos en los que el aprendizaje es relevante.
- Poner énfasis en los procedimientos realistas en la resolución de los problemas del mundo real.
- El educador es un entrenador y analizador de las estrategias usadas en la resolución de esos problemas.
- Enfatizar las interrelaciones conceptuales, proporcionando representaciones o perspectivas múltiples sobre los contenidos.
- Las metas y objetivos de instrucción deben ser negociados y no impuestos.
- La evaluación debe ser una herramienta de auto-análisis.
- Proporcionar o buscar las herramientas y entornos que ayudan a los aprendices a interpretar las múltiples perspectivas del mundo.
- El aprendizaje debe ser internamente controlado y mediado por el aprendiz.

Reflexiones finales

Postulamos que la construcción social de saberes matemáticos inicia con la negociación entre los responsables del aprendizaje, en un escenario abierto en el que se comparten

[‡‡‡‡] Este subtema es del contenido programático de matemáticas, primer grado, eje de manejo de la información, tema análisis de la información, conocimientos y experiencias: resolver problemas del tipo valor faltante utilizando procedimientos expertos, se corresponde con las competencias para el planteamiento y resolución de problemas.

responsabilidades y compromisos. En estos compromisos está la búsqueda organizada y sostenida de oportunidades de aprendizaje y su aprovechamiento. Precisamente las tesis y principios que en este trabajo se sostienen están en esta dirección.

En la realización del taller en Camaguey, Cuba, participaron 11 profesores y estudiantes de diversos países de Latinoamérica, donde se constata su pertinencia e interés por la institucionalización de esta forma de hacer matemáticas. Resulta de particular interés el trabajo realizado por los participantes de Uruguay, quienes en vez del problema de la basura abordaron temas del manejo de la información con el estudio de la contaminación del río que lleva el nombre de su país, por la instalación de una fábrica de papel. Consideran que de esta manera los alumnos accionan sus saberes en la solución de problemas relevantes.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9, 7-30.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8, 247-263.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 69-91. D. F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

CENEVAL (2005). La inteligencia colectiva de México. Una estimación de los niveles de conocimiento de su población. [En línea] disponible en : http://portal.ceneval.edu.mx/portalceneval/index.php.

Chevallard, Y. Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. D.F, México: SEP.

Godino, J. y Linare, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática* 12, 70-92.

Jonassen, D. (1991). Evaluating constructivist learning. Educational technology 36 (9), 28-33.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación Matemática* 4, 7-15

Slisko, J. (2003). Los conocimientos y destrezas para la vida según el proyecto PISA. ¿Cuáles son sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias naturales? Material inédito: Facultad de Matemáticas de la UAG. Acapulco, Gro.

Velázquez, S. Flores, C. García, G. Gómez, E. & Nolasco, H. (2001). *El desarrollo de habilidades matemáticas en situación escolar*. D.F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Vygotsky, L. (1997). *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.

UN ESTUDIO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA NOCIÓN DE PROMEDIO EN UN CONTEXTO PROBABILÍSTICA

Allan Takeshi De la Cruz Oliva
CICATA-IPN. (México)
a_sternova@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística
Palabras clave: promedio, valor esperado, aleatoriedad, determinista

Resumen
Uno de los objetivos del presente trabajo es detectar los motivos por los cuales el concepto de promedio aritmético está tan arraigado en el estudiante que no puede desprenderse de él y lo interpola a otros ámbitos del quehacer matemático, específicamente al probabilístico. Se busca entender, mediante la línea de investigación conocida como la construcción social del conocimiento matemático, por qué los alumnos tienen problemas en aceptar y reconocer al valor esperado, conocido también como media o esperanza matemática, como un promedio en un nuevo escenario con nuevas características.

Introducción

A través del análisis de los programas, planes de estudio y bibliografía recomendada como son libros de texto editados por la Secretaría de Educación Pública, Diccionarios elaborados para cada nivel educativo, etc. El presente trabajo intenta establecer cómo vive institucionalmente el concepto de promedio en los distintos niveles del sistema educativo mexicano, es decir realizar un análisis de cómo y dónde se está enseñando el concepto de promedio, para abrir el camino hacia el entendimiento de cómo se aprende, cómo se concibe y cómo se aplica dicha noción matemática.

Según el marco teórico basado en la construcción social del conocimiento matemático, que da fundamento a éste trabajo, se concibe el conocimiento matemático como una construcción sociocultural. Esta perspectiva permite la interacción sistémica de las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social, que conforman la línea de investigación denominada “la construcción social del conocimiento matemático”, para el estudio y explicación de los fenómenos didácticos ligados a la noción de promedio

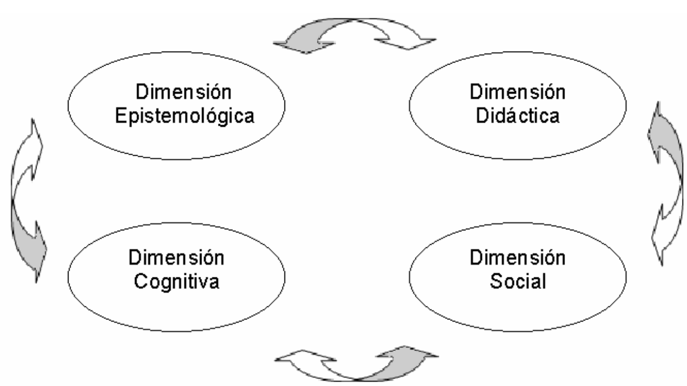


Figura 1. Dimensiones de la Construcción Social del Conocimiento Matemático.

Constituye, además del marco que fundamenta el trabajo, los elementos de análisis preliminares al diseño de una secuencia didáctica, que encuentran su sustento en la incapacidad del alumno para reconocer y relacionar al valor esperado con su idea que le da origen, el promedio que permita al estudiante:

- confrontar su noción de promedio aritmético en un contexto probabilístico y
- construir una herramienta matemática nueva (el valor esperado).

La *componente epistemológica* permite rastrear desde diferentes épocas la evolución que un cierto conocimiento matemático ha tenido, su devenir histórico en diferentes épocas y el proceso de transformación que ha tenido para llegar al aula (transposición didáctica), lo cual nos da la pauta para entender porque razones se manejan de tal forma la introducción, el desarrollo y el tratamiento de dicha noción matemática en el salón de clases, así como en los libros de texto escolares y en la currícula a través del tiempo. Un análisis de este tipo permite conocer la forma en como dicho conocimiento ha pasado de generación en generación, las modificaciones que ha sufrido como consecuencia de tales transformaciones.

A éste respecto la noción de promedio ha sido encasillada en una especie de herramienta muy conocida, pero poco entendida, y es precisamente ésta componente la que puede dar respuesta al porque de tal situación, pues al indagar en su origen y evolución se pueden detectar aquellos elementos que han relegado su aplicación a una simple mecanización de género.

La *componente didáctica* permite conocer y profundizar en las costumbres escolares al momento de tratar con determinada noción matemática (en nuestro caso el promedio), y de cómo vive ésta en la escuela a través de los planes y programas de estudio y libros de texto (producto de dicha transposición didáctica) utilizados en los deferentes niveles educativos, en los cuales se ve reflejado el enfoque que se le da a la noción matemática en cada contexto del conocimiento científico.

Así mismo ésta componente, permitirá comprender, los diferentes significados que adquiere la noción matemática del promedio en cada una de las áreas en las cuales se le utiliza, y abre la puerta para entender de algún modo el porqué una misma noción matemática que es empleada de diferente manera en distintos contextos, no es reconocida como tal por los estudiantes. Y la conciben como cosas totalmente diferentes, separándola así de su esencia. De tal forma que ésta componente es nuestra explicación de lo que está presente institucionalmente.

La *componente cognitiva* permite ir al interior del alumno e indagar en sus concepciones respecto del promedio, saber el por qué de la existencia de lo que llamamos hemiplejia conceptual en el alumno que le crea un vacío entre la definición literal y la definición de uso respecto del promedio, lo cual le impide ver al promedio en todas sus dimensiones. Quien suscribe el presente artículo asigna el término “hemiplejia conceptual” para hacer referencia a aquel al concepto que solo es entendido a través de una de las diferentes definiciones, y que sin embargo es incompleta pues no existe ninguna conexión con el resto de las demás. Cabe destacar que dicha dimensión es la que dio origen al presente trabajo, pues ésta permitió identificar en el alumno un problema generalizado en la mayoría de estudiantes con respecto a ésta noción matemática.

La *componente social*, afecta y modifica a las otras tres componentes, de tal forma que amplia la explicación sobre el fenómeno en estudio. Dicha dimensión permite hacer un análisis de cuáles son las propiedades, características y las ideas que la sociedad atribuye al promedio, en su práctica cotidiana.

El concepto de promedio en los escenarios escolares

A lo largo de la información recopilada se ha podido conocer la manera en cómo nace y se desarrolla el concepto de promedio en el sistema educativo mexicano y se detectó entre otras cosas, que en el nivel básico primaria el primer acercamiento que el alumno tiene es en función de sus calificaciones, y la definición que se le da del promedio es en el libro de 5to año de matemáticas (Ávila, A. y Balbuena, H. 2004), la cual dice: "El promedio de un conjunto de datos se calcula sumando todos los valores y dividiendo el resultado entre el número de datos", el cual se ejercita en base a que el alumno calcule el promedio de una lista de calificaciones.

Al preguntarles a los alumnos de este nivel que entendían por promedio, las respuestas más frecuentes en éste nivel fueron:

- A1. Es la calificación final.
- A2. Es la suma de todos los elementos dividida entre el número de estos.

Estas respuestas dejan entre ver que el alumno no comprende lo que es el promedio, sabe cómo calcularlo, pero no sabe qué significa. Y lo que es peor, el alumno relaciona inconscientemente el promedio con la calificación final. Lo cual indica que el alumno no separa dicha noción del contexto, porque fue así como se definió y uso tal noción, tanto en la vida cotidiana como en la clase de matemáticas.

En el nivel secundario, en el libro proporcionado por la sep para el curso de matemáticas de 2do año (Sánchez, F. 2005) se sigue utilizando el ejemplo de las calificaciones para calcular el promedio, pero ésta vez se pasa de la definición de promedio en base a un enunciado a la definición en términos matemáticos:

$$Promedio = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

Por lo cual ésta será la diferencia más sobresaliente, ya que los ejemplos que se manejan en éste nivel siguen siendo del mismo corte (sobre la base de una lista de calificaciones o de situaciones familiares). Y al cuestionarlos al respecto ellos o parafraseaban la definición de uso del promedio o simplemente se limitaban a decir: es un a fórmula. Sin embargo en el caso de las evaluaciones, el alumno mostraba una cierta interpretación al decir que el resultado que se obtiene al calcular el promedio de sus calificaciones se traduce en algo así como haber sacado la misma calificación en cada uno de los exámenes.
En lo que respecta a los temas de probabilidad, éstos se ven seriamente afectados en ambos niveles por cuestiones de tiempo, niveles de importancia, etc. Así que el alumno prácticamente adquiere un manejo limitado de dichas nociones.

En el nivel medio superior y superior, se da un salto de contexto para tal noción, es decir, todos los problemas que hasta la secundaria se analizaron, tenían como característica el corte determinístico, sin embargo en éstos niveles, el concepto de promedio se utiliza en situaciones aleatorias, en las cuales el promedio a aplicar debe ser el ponderado y no el aritmético. Los problemas puestos en ambos niveles tienen un grado de dificultad mayor a como se venían trabajando en los niveles anteriores. En el caso del nivel medio superior, el libro de textos recomendado, (Murria, R. 1970), la definición que se tiene del valor esperado, es únicamente para el caso discreto:

$$E(X)=p_1X_1+p_2X_2+\cdots+p_kX_k=\sum_{j=1}^{k}p_jX_j=\sum pX\,.$$

Mientras que para el nivel superior ya se comienza a trabajar con el caso continuo, así que:

$$E[x]=\sum_{x=1}^{n}xp(x) \quad \text{; Caso discreto}$$

$$E[x]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx \qquad \text{; Caso continuo}$$

El tener expresado el valor esperado (promedio) en éste tipo de expresión matemática rompe de algún modo con la idea de promedio que el alumno ha venido manejando. Por lo cual, aunque se está hablando en ambos casos de un promedio, la forma de calculado es diferente para el contexto determinístico que para el contexto aleatorio.

Algo que no se analiza en los cursos de probabilidad, pero que a nuestro modo de ver resulta muy importante, es discutir la diferencia entre sucesos deterministas y al azar, ya que la esperanza matemática y la desviación estándar indican una tendencia de los resultados, pero no el resultado que deberá tenerse en un intento dado. Es decir; nos permite conocer lo que muy posiblemente ocurrirá si repetimos varias veces el intento, pero no lo que realmente sucederá. No obstante ésta incertidumbre, el conocimiento de la esperanza matemática y su desviación estándar nos permite orientar nuestras decisiones.

A este respecto la esperanza matemática es separada de su idea central (promedio ponderado) y pasa a ser una más de las medidas de tendencia central. Sin embargo; cuando se investiga algo, se requieren datos, estos datos se obtienen de alguna forma, es importante que los datos de que se disponen sean representativos del total, por ello la importancia de la forma en que se recaban o recolectan esos datos. Una vez reunidos los datos, de tienen que organizar de cierta forma para representarlos a todos (un promedio) o una parte de ellos y otro número que nos indique la variación respecto al promedio. No existe un único valor promedio, sino varios; media, mediana, moda, media armónica, media geométrica, etc. Tampoco existe una única manera de señalar la variación; rango, varianza, desviación estándar, etc. Es por eso que el alumno debe comprender que la elección que se haga del valor representativo y de la variación respecto al mismo es consecuencia de lo que se espera concluir o contradecir y que no se puede dar una presentación de los datos si no se tiene una idea de lo que se busca concluir con ellos.

Es por eso, que a partir de resaltar la comprensión de la idea lo que es la esperanza matemática o valor esperado sobre la base del contexto de una situación dada es cómo se aprecia su importancia y aplicación.

Asimismo, en el nivel superior, el concepto de promedio contenido en los planes y programas de estudio de la materia de probabilidad, presenta un salto que se considera natural, al introducir el concepto de promedio que es manejado desde el nivel medio superior como valor esperado, media, o esperanza matemática, sin embargo dichas conceptos no se ven como un promedio, sino como un punto de equilibrio o como una medida de tendencia central.

Es entonces cuando al decirle al alumno que dicho parámetro es un promedio, éste no cree que lo sea. Y simplemente se limita a aplicar una fórmula, como lo ha venido haciendo, entonces no se percata que el valor esperado no es otra cosa que el promedio cuya estructura tiene cierta semejanza con la media aritmética ponderada.

Comentarios finales

Una siguiente etapa de la investigación que se está iniciando es el diseño de una secuencia, sobre la base de la información recopilada, que introduzca al estudiante en un conflicto con la noción de promedio aritmético, con la finalidad de que éste se percate que no es posible trasladar tal cual éste concepto matemático a la teoría de las probabilidades y comprenda así que ésta noción le es insuficiente para resolver una situación aleatoria. De tal forma que se pueda determinar el vínculo o puente que permita conectar a los escenarios determinísticos y aleatorios.

Cabe destacar que siendo el promedio una noción matemática escolar que se trabaja en todos los niveles educativos del sistema educativo mexicano, cuyo uso se extiende a áreas de conocimiento distintas a la matemática como son: ingeniería, administración, arquitectura, medicina, etc. Es extraño que siendo una noción que todos los estudiantes conocen y manipulan a cierto nivel, no le asocien un único significado a la noción, pues se le relaciona con el contexto del problema donde le dan uso.

Desafortunadamente en la mayoría de los estudiantes, la manipulación del promedio se limita a la suma de los valores de datos dados, divididos entre el número de datos y el significado se vincula al clásico contexto de la calificación final.

Esto sientan las bases para futuras investigaciones sobre aquellos elementos necesarios para la comprensión de algunas nociones matemáticas vinculadas a la probabilidad, que a su vez permitan la vinculación de tal noción matemática (promedio), en el contexto probabilístico

Referencias bibliográficas

Ávila, A. y Balbuena, H. (2004). *Matemáticas quinto grado*. (pp. 64-95). México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

Biehler, R., Scholz, R. W., Sträber, R. y Winkelmann, B. (Eds.) (1994). *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-112.

Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal: ICME 8, Sevilla España*. México: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* No. 42, 353 – 369.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar).* Tesis doctoral no publicada. Cinvestav IPN, México.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna, Italia: Pitagora Editrice. Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (pp. 61-96). Bogotá: Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E.; Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EUA: MAA, Notes 25.Gal, l., Rothschild, K., & Wagner D. (1990). Statistical concepts and statistical reasoning in elementary scholl children: Convergence or divergence? *American Educational Reasearch Association, Boston, MA.* (pp. 45-59).

Farfán, R. (1995). Ingeniería Didáctica, *Pedagogía 10* (5), 14-23.

Farfán, R. (1997). La investigación en matemática educativa en la reunión centroamericana y del Caribe referida al nivel superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(0), 6-26.

Murria, R. (1970). *Estadística y 875 problemas resuelto.* (pp. 45). MC-Graw Hill.

Sánchez, F. (2005). *Matemáticas 2. A partir de la solución de problemas,* (pp.246-248). México: Fernández Editores.

EL RECONOCIMIENTO DE ARGUMENTACIONES POR REDUCCIÓN AL ABSURDO EN ESCENARIOS ACADÉMICOS Y NO ACADÉMICOS

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Buenos Aires (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada. CICATA–IPN. (México)
crccrespo@gmail.com

Campo de investigación: pensamiento lógico. Nivel: superior
Palabras clave: socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural, reducción al absurdo

Resumen
Este trabajo forma parte de una investigación orientada a analizar el carácter de construcción sociocultural de las demostraciones matemáticas. La investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica y se centra en las argumentaciones por reducción al absurdo, ya que se trata de un tipo de argumentación que no ha sido aceptada por la sociedad matemática de manera unánime. Esta etapa de la investigación se centra en la detección e identificación de este tipo de argumentaciones en distintos escenarios: tanto académicos (matemáticos y escolares), como no académicos, con la finalidad de mostrar la influencia que tienen los escenarios académicos en la presencia de estas argumentaciones.

Antecedentes de la investigación y marco teórico

En ese trabajo forma parte de una investigación que se propone comprender las características, funciones, fundamentos y evolución de las argumentaciones matemáticas, para analizar su naturaleza de construcción sociocultural. La hipótesis formulada se refiere a que las argumentaciones por reducción al absurdo, por estar fuertemente basadas en el principio del tercero excluido y en el principio de no contradicción, son propias del pensamiento lógico de culturas con influencia de la lógica clásica, no hallándose presentes en los razonamientos de culturas que no tuvieron esta influencia, ni de escenarios en los que no es habitual la influencia de la misma. De esta manera, podemos afirmar que no son innatas, y por lo tanto no son inherentes de la forma de razonar del ser humano, sino que dependen de la formación que ha recibido el individuo y del escenario en el que se desenvuelve. En la primera etapa, se centró este carácter cultural en el aspecto profesional (Crespo Crespo, 2005a, Crespo Crespo y Farfán, 2005, 2006), por lo que nuestra atención se fijó en estudiantes de distintas carreras y formaciones tratando de determinar a través de cuestionarios y entrevistas las distintas concepciones de alumnos y los mecanismos de su funcionamiento. En esta investigación que, como ya aclaramos restringió lo cultural a lo profesional, fue posible, desde este ángulo corroborar la hipótesis planteada en cuanto a que las argumentaciones por reducción al absurdo son construcciones socioculturales. Esto permitió identificar algunas concepciones de las demostraciones y argumentaciones matemáticas en las que tiene gran influencia la formación profesional.

Esta investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica, la cual ofrece una visión incluyente las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento. De esta manera, es que el contexto social, cultural e históricamente determinado actúa como parte indiscutible de este proceso de nacimiento, desarrollo y evolución de la ciencia. Cada objeto matemático es construido como resultado de las posiciones epistemológicas y filosóficas sustentadas. Esta etapa de la investigación se centra en la detección e identificación de este tipo de argumentaciones en distintos escenarios: tanto académicos (matemáticos y escolares), como no académicos, con la finalidad de mostrar la influencia que tienen los escenarios académicos en la presencia de estas argumentaciones.

La investigación realizada

En este trabajo se presentan los resultados de una experimentación llevada a cabo a partir de encuestas y entrevistas a 50 estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, en la que se les pidió la búsqueda y detección de situaciones en escenarios no académicos en las que se utilice este tipo de argumentación indirecta.

Las preguntas presentadas a los alumnos que participaron de esta investigación fueron:

a. Describa y fundamente las características de las argumentaciones por reducción al absurdo en matemática. Ejemplifique su utilización.
b. Dé ejemplos de aplicaciones de este tipo de argumentaciones fuera de escenarios académicos (escolares y científicos). Explíquelos.
(Si considera que este tipo de argumentaciones no es aplicado fuera de escenarios académicos, explique y justifique su respuesta).

El objetivo de la primera pregunta fue que los estudiantes enmarcaran las preguntas, describiendo las características de las argumentaciones por reducción al absurdo desde el punto de vista lógico y presenten ejemplos de su aplicación dentro de la matemática. Se intentó determinar, a su vez dentro de la matemática, si existen contextos y ramas de la matemática en las que reconocen y aplican este tipo de demostraciones con mayor frecuencia.

La segunda pregunta apuntó directamente a la búsqueda y descripción de estas argumentaciones fuera de escenarios académicos.

Las argumentaciones por reducción al absurdo dentro de la matemática

De las respuestas dadas por los alumnos, surge que los alumnos entrevistados en su totalidad fueron capaces de describir las características y fundamentos lógicos de las argumentaciones por reducción al absurdo. No tuvieron dificultades en presentar como fundamentos de las mismas los principios aristotélicos del tercero excluido y no contradicción.

En relación con los ejemplos de este tipo de argumentación en matemática, es notable que la mayor proporción corresponde a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Esta demostración, es atribuida a los pitagóricos, descripta por Aristóteles que describe este procedimiento como que procedía por “reductio ad absurdum”. Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los Elementos de Euclides, como Proposición 117 del Libro X.

Se encuentran también entre las respuestas dadas otras propiedades aritméticas como: “*El cuadrado de un número par es par*”, “*El producto de dos impares es impar*”, “*La suma de un entero par y un impar es un número entero impar*”, entre otras.

Aparecen algunas respuestas presentando propiedades algebraicas mediante demostraciones por el absurdo: "*Un conjunto de vectores es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal de ellos que da por resultado el vector nulo es la que tiene todos los escalares igual a cero*", "*En un especio vectorial todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente"*. La primera de ellas que involucra la unicidad.

También se refieren a la unicidad las demostraciones presentadas que provienen del análisis matemático: *"El límite de una función es único"*. En las demostraciones de unicidad, es usual la aplicación de argumentaciones por reducción al absurdo, ya que la manera de demostrar que un elemento que verifica ciertas propiedades es único, consiste en suponer que no lo es, por medio de la existencia de otro elemento que tenga sus mismas propiedades y que sea distinto del anterior, para finalmente concluir que la existencia de éste es imposible ya que conduce a alguna contradicción.

En relación a demostraciones provenientes de la geometría, la única que aparece en los ejemplos presentados fue: *"Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí"*. Al preguntar acerca de los alumnos acerca de la causa de que la mayor cantidad de las demostraciones por reducción al absurdo presentadas proviene de las áreas del álgebra y de la aritmética (58% de las respuestas obtenidas), en relación a las provenientes de la geometría, algunos de ellos afirmaron que era más clara su aplicación a la aritmética que a la geometría, ya que en esta última rama de la matemática se encuentran en estrecha relación las demostraciones con las figuras de análisis, en las que se presentan algunas dificultades (Crespo Crespo, 2005a, 2005b, Crespo Crespo y Farfán, 2006).

También en algunas de las respuestas aparecen aplicaciones de argumentaciones por reducción al absurdo a propiedades que involucran el tratamiento del infinito. Por ejemplo: *"La unión de un conjunto numerable y un conjunto no numerable es un conjunto numerable"*, *"El intervalo (0, 1) no es numerable"*. El infinito es uno de los conceptos en la demostración de cuyas propiedades resulta usual encontrar argumentaciones por reducción al absurdo.

Otra temática en la que aparecieron algunos ejemplos fue en la demostración de que ciertas proposiciones lógicas son paradójicas. En este tipo de argumentaciones, se parte de la suposición de cada valor de verdad para la misma y se demuestra que la proposición en análisis no puede ser ni verdadera ni falsa, pues ambas suposiciones conducen a un absurdo.

Algunos de los alumnos encuestados presentaron ejemplos de razonamientos de la lógica proposicional en los cuales para su demostración se aplican argumentaciones por reducción al absurdo. Estas formas de razonamiento fueron presentadas a través de razonamientos particulares que crearon mediante la interpretación de las proposiciones simples correspondientes.

A continuación se presentan los resultados de la experimentación realizada resumida a través de un cuadro en el que se pueden visualizar las cantidades de cada uno de los tipos de ejemplos que se describen:

Ejemplo presentado	**Respuestas**	**Porcentaje**		**Respuestas**	**Porcentaje**
Irracionalidad de $\sqrt{2}$	15	30 %	Aritmética y álgebra	29	58%
Otras propiedades aritméticas	12	24 %			
Propiedades de espacios vectoriales	2	4 %			
Propiedades que involucran el infinito	6	12 %	Conjuntos infinitos	6	12 %
Propiedades geométricas	6	12 %	Geometría	6	12 %
Propiedades de análisis matemático	3	6 %	Análisis	3	6 %
Razonamientos con paradojas	2	4 %	Lógica	6	12 %
Razonamientos en lógica proposicional	4	8 %			

Las argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos

En la parte de la experimentación que corresponde a la identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos, algunos de los encuestados también recurrieron a la presentación de razonamientos lógicos aplicados a situaciones ad-hoc por medio de la asignación de interpretaciones a las proposiciones simples en juego. La mayoría de estos ejemplos son presentados de manera informal, pero se ve claramente en ellos la influencia de los estudios de lógica realizados por los alumnos.

Algunos encontraron ejemplos concretos reales de este tipo de razonamientos, pero al presentarlos se encuentran expresiones como: "*A pesar de este ejemplo, creo que las argumentaciones por el método de reducción al absurdo son más complejas que las directas y su utilización se restringe a aquellos casos en que todo otro método falla. Otro de los puntos que me plantea un problema es que en ámbitos académicos se utiliza para probar generalidades, mientras que en la vida cotidiana se utiliza para cuestiones particulares. Puede ser que esté relacionado con la naturaleza del pensamiento académico y la del pensamiento cotidiano*". Esta reflexión muestra claramente una diferenciación entre los resultados de la ciencia y los que no pertenecen a ese ámbito.

Una temática en la que aparecieron varios de los ejemplos presentados es en la resolución de enigmas y misterios, tanto a través del planteo de juegos de ingenio, como de la actuación de detectives. En el caso de los detectives, algunos de los alumnos presentaron casos extraídos de libros de ciencia ficción y otros recurrieron a entrevistar detectives y abogados para preguntarles al respecto. De las respuestas que obtuvieron de ellos, surge que en este ámbito se aplican argumentaciones indirectas para resolver situaciones que plantean un enigma.

Se presentaron algunas argumentaciones que utilizan la reducción al absurdo provenientes de discursos de políticos y noticias presentadas en diarios. Sin embargo, los alumnos que las mencionan, acuerdan en afirmar la debilidad y poca consistencia de estas argumentaciones.

Otra temática a la que se refieren varios de los ejemplos presentados se relaciona con creencias de tipo religioso, en las que se demuestra por medio de reducciones al absurdo la existencia de Dios y la veracidad de la teoría de las reencarnaciones. Un alumno presenta una argumentación que atribuye a Hume para demostrar la no existencia de un Dios Creador.

Algunos de los ejemplos presentados no se tratan en realidad de formas de razonamiento por reducción al absurdo, sino que aparecen en ellos formas de razonamiento no monotónico aplicados a temáticas como sentimientos o relaciones humanas.

Otra particularidad que aparece con frecuencia es la asociación incorrecta de esta forma de razonamiento con la aparición de situaciones de la vida real que contradicen lo que sería un pensamiento racional. Por ejemplo la presencia de propagandas de cigarrillos en las que se traduce felicidad y salud, las reacciones de alguien que se enamora pero huye del ser amado o el planteo de problemas sin solución como encontrar 370 personas que cumplan años en distintos días del año.

En el siguiente cuadro es posible visualizar de manera resumida los resultados de esta etapa de la experimentación:

<table>
<tr><th>Ejemplo presentado</th><th>Respuestas</th><th>Porcentaje</th><th></th><th>Respuestas</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Situaciones ad-hoc</td><td>8</td><td>16 %</td><td>Situaciones ad-hoc</td><td>8</td><td>16 %</td></tr>
<tr><td>Enigmas, detectives, ingenio</td><td>6</td><td>12 %</td><td>Enigmas</td><td>6</td><td>12 %</td></tr>
<tr><td>Política</td><td>4</td><td>8 %</td><td rowspan="2">Reconocimiento de debilidad</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">12 %</td></tr>
<tr><td>Noticias en diarios</td><td>2</td><td>4 %</td></tr>
<tr><td>Creencias religiosas y metafísicas</td><td>4</td><td>8 %</td><td>Creencias</td><td>4</td><td>8 %</td></tr>
<tr><td>Razonamientos no monotónicos</td><td>10</td><td>20 %</td><td rowspan="3">No reconocimiento</td><td rowspan="3">26</td><td rowspan="3">52 %</td></tr>
<tr><td>Situaciones absurdas</td><td>7</td><td>14 %</td></tr>
<tr><td>No existencia</td><td>9</td><td>18 %</td></tr>
</table>

Como se observa en el cuadro anterior, fue bastante numerosa la proporción de quienes no identificaron la presencia de las argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos. Algunos de ellos lo declararon explícitamente. Encontramos justificaciones como la siguiente: "Si bien las relaciones humanas tienen contradicciones y reacciones absurdas, considero que no se utiliza el método de reducción al absurdo rigurosamente como en matemática. Es decir, podemos llegar a una conclusión luego de encontrar algo absurdo, pero de manera más intuitiva, sin pensar matemáticamente".

Reflexiones finales acerca de los resultados obtenidos

A partir de las respuestas obtenidas, es posible, por una parte, identificar que existen algunas ramas de la matemática en las que se hace un mayor uso de las argumentaciones por reducción al absurdo. Esto conduce por una parte a orientar la investigación a la identificación de cuáles son los conceptos y propiedades para cuya demostración se hace indispensable este tipo de demostración.

Por otra parte, en relación a los escenarios no académicos, se puede inferir que en muchos casos no son detectadas estas argumentaciones como una manera de razonar natural y que a veces son construidas por los entrevistados situaciones particulares para ejemplificarlas, aunque reconocen que no se trata de una manera usual de razonar en lo cotidiano, pudiendo reconocérselas como construcciones socioculturales. Otra idea que no aparece claramente manifestada en las respuestas obtenidas es la diferenciación entre absurdo e imposible en matemática y en situaciones cotidianas. Surgen además en los ejemplos presentados, otras formas de razonamiento no admitidos por la lógica clásica, como ser pensamientos no monotónicos.

Referencias bibliográficas

Crespo Crespo, C. (2005a). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría sin publicar. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2005b). *Las figuras de análisis en las demostraciones matemáticas por reducción al absurdo.* Presentado en III Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática CVEM 2005. Guadalajara (México).

Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2005). *Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural.* Relime Vol. 8 (3), pp.287-317.

Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2006). Las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. En Martínez Sierra, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 19***.** Clame, México, pp.766-781.

Eggers Lan, C. (1995). *El nacimiento de la matemática griega*. Buenos Aires: EUDEBA.

Ifrah, G. (1997). *Historia de las cifras*. Madrid: Espasa.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Gedisa: Barcelona.

Toranzos, F. I. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina.

DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS: UN RECORRIDO A TRAVÉS DE LA HISTORIA DESDE UNA VISIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Buenos Aires (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN. (México)
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: socioepistemología, pensamiento lógico. Nivel: superior
Palabras clave: socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural

Resumen
La matemática es reconocida por la socioepistemología como una actividad cultural y por lo tanto es necesario ubicar cada uno de sus conceptos en el escenario cultural en que surgió y se desarrolló. Las demostraciones han sido la manera de validar los conocimientos matemáticos; son, en consecuencia, también construcciones socioculturales. Las condiciones en que se genera un concepto, la manera de pensar de quienes le dieron origen, la finalidad y manera en que fue trabajado y transmitido, cómo era la sociedad en la que se desarrolló, qué intereses tenía, cómo pensaba, qué la preocupaba y muchas otras cuestiones s dan forma al escenario correspondiente. El concepto de demostración matemática no ha sido siempre el mismo, ha evolucionado notablemente a través de la historia. Esta idea se encuentra ligada al escenario sociocultural en que nos ubiquemos variando considerablemente de una cultura a otra.

Introducción

Existe indudablemente una fuerte relación entre la matemática y la lógica. A lo largo de la historia, esta relación no se ha mantenido estática: ha cambiado y evolucionado según las concepciones culturales de cada momento, de cada sociedad. Podría decirse que en la actualidad se presenta a la matemática como la ciencia deductiva por excelencia. Sin embargo, en los últimos años cada vez encontramos menos demostraciones en el aula de matemática, aunque si se investiga qué opinan los especialistas, se ve que la demostración sigue siendo considerada como noción medular en la matemática. En el quehacer matemático surge como indispensable para lograr la comprensión, la capacidad de razonar, no sólo razonar en la ciencia cuya enseñanza nos ocupa sino razonar en situaciones que van más allá de los ámbitos académicos. El concepto de demostración matemática no ha sido siempre el mismo, ha evolucionado notablemente a través de la historia, ligada al escenario sociocultural. Existe acuerdo entre los especialistas en que la matemática griega introdujo como elemento novedoso en la matemática el método deductivo. En la época de los presocráticos, caracterizada por la búsqueda principio de las cosas, se ponen de manifiesto argumentaciones para defender cada postura. Estas ideas marcaron en la forma de pensamiento una ruptura en manera de ver el universo. La razón comenzó de esta manera a reemplazar a los mitos, convirtiéndose a partir de esta época en Grecia en centro y base de todo conocimiento. Sin embargo es posible encontrar conocimientos matemáticos y formas de razonar ligadas a ellos en todas las culturas.

La matemática del cálculo y de las necesidades materiales

En un principio, en la mayoría de las civilizaciones, en matemática se fueron desarrollando algunos aspectos de la geometría y aritmética, con la finalidad de conocer el espacio físico y de realizar en él cálculos y estimaciones que resultaron necesarios. En Egipto y en la

Mesopotamia, la precisión de los cálculos efectuados se probaba por medio de la verificación de los resultados obtenidos. Este sigue siendo en la actualidad un método utilizado para la verificación de resultados de ecuaciones y otros problemas matemáticos. De los documentos que han llegado a la actualidad, se infiere que estos pueblos no estaban interesado en generalizar ni en abstraer los conocimientos que poseían, interesándose sólo por la resolución de problemas prácticos. Algunos especialistas de la historia de la matemática afirman, sin embargo, que "*no se puede sostener que se trata en ambos casos de reglas empíricas a las que se llega mediante un penoso esfuerzo de ensayo y error para problemas específicos, sin ninguna conciencia de una aplicación general*" (Gheverghese, 1991, p.181).

En India, si bien se ha afirmado a veces que las contribuciones importantes son "*acontecimientos episódicos sin continuidad*" (Boyer, 1996, p.270), el desarrollo de la matemática india es notable. Aparecen argumentaciones para explicar resultados, en los Sulvasutras, textos en los que se describen las formas geométricas y orientaciones de los altares con las prescripciones establecidas por los libros sagrados védicos. Se presentan explicaciones de reglas de manera similar a algunos de los teoremas demostrados por Euclides. En períodos posteriores, la matemática india presenta desarrollos de fórmulas para realizar cálculos geométricos y trigonométricos a través de deducciones. En este periodo, algunas afirmaciones geométricas se prueban por referencia a figuras, siendo fundamental entonces en la matemática la exactitud en el trazado de los dibujos, ya que éstos se constituyen en argumentos. Las necesidades prácticas de estos pueblos los llevaron a optar por desarrollar generalmente conocimientos algorítmicos en lugar de buscar una fundamentación de los mismos.

La matemática demostrativa

La influencia de las ideas provenientes de Egipto y Babilonia fue seguramente muy sensible en Mileto, cuna de la filosofía, la matemática y las demás ciencias griegas. Las fuentes escritas de los primeros tiempos de esta cultura no han llegado a nuestros días como las fuentes provenientes de Babilonia y Egipto, a pesar de tratarse de épocas posteriores, en parte debido a la destrucción de importantes bibliotecas. Se considera que en la primera etapa de la "*matemática demostrativa*" de los griegos (Eggers Lan, 1995), éstos creyeron poder y deber demostrar todo. En esta etapa se ubica a Thales de Mileto (Siglo V a.C.), aunque empleando como procedimiento la utilización de regla y compás para demostrar empíricamente propiedades y construcciones. Se trata de una concepción de demostración diferente de la que predominaría posteriormente en la matemática. La idea de demostración a la que hacen referencia se encuentra más cerca de las de argumentaciones que de la de demostración deductiva.

La argumentación literaria y dialéctica en Grecia

La argumentación literaria posee características distintas del mecanismo deductivo, sin embargo es interesante analizar ciertas similitudes, e incluso la aparición en ella de argumentaciones por reducción al absurdo. La lógica argumental se basa en la razonabilidad de la tesis sustentada, pero no podemos decir que este tipo de razonamientos conduzca necesariamente a una conclusión, sino que ésta es aceptada o no por el interlocutor. Parménides compone un poema épico-didáctico destinado a persuadir, en él no pone en juego motivaciones que no surjan por sí solas y utiliza el esquema que Aristóteles menciona como "reducción a lo imposible", o reducción al absurdo: "*Que el ser es, implica que no ha nacido, pero si hubiese nacido significa que previamente no existía el ser, y, en ese caso, tendría que haber nacido de la nada, pero, aparte de que solo puede hablarse de lo que es y no de la nada, ¿qué necesidad le haría pasar de no ser a ser*?" (Citado por Eggers, 1995, p.33.). Esta argumentación utiliza además uno de los principios aristotélicos que es el principio de necesidad.

Por otra parte, es Zenón de Elea, discípulo de Parménides, quien en el siglo V a.C. fue el primero en contrastar una hipótesis con otra y demostrar indirectamente la verdad de una de ellas, al poner de manifiesto el absurdo o imposibilidad de la otra. Zenón propuso una serie de paradojas, algunas de las cuales se referían al movimiento y demostraba que éste no existe.

El arte dialéctico regulaba en Grecia la forma de dialogar de forma racional; se utilizaba el término "dialéctica" para referirse a la situación de comunicación en la que se desarrolla una reflexión crítica sobre la forma de llegar a conclusiones válidas. En todo diálogo existen al menos dos interlocutores contrapuestos, y en la dialéctica se parte de que hay en ellos razones para argumentar.

Los sistemas deductivos en matemática

En la incorporación del método deductivo a la matemática resultó central la intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad. El objetivo del método deductivo era explicar y explicar era demostrar. La intención filosófica de construir una ciencia a partir de ciertos principios tomados como base, se encuentra claramente descripta en la obra de Aristóteles. Es posible comprender a través de algunos hechos presentes en el escenario griego, el surgimiento de la demostración, en el sentido de un proceso deductivo. Por una parte, la necesidad de resolver la crisis generada por la prueba pitagórica de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado y el deseo de decidir si los resultados legados por anteriores civilizaciones eran ciertos o contradictorios. Por otra parte, la naturaleza de la sociedad griega, en la que se favoreció el desarrollo del saber especulativo, dando gran valor al arte de la argumentación y de la persuasión. Finalmente se tiene el antecedente de la intención pedagógica de los recopiladores del saber geométrico anteriores a Euclides que les llevó a considerar los principios básicos de esta ciencia.

Una de las principales contribuciones griegas a la matemática se refiere a que para ellos todo resultado debía ser establecido deductivamente a partir de un sistema de axiomas. Esta concepción de la manera en que se debían obtener las afirmaciones matemáticas permitía que mediante razonamientos válidos se obtuvieran proposiciones verdaderas al partir de nociones comunes y postulados verdaderos. Las formas válidas de los razonamientos garantizaban de esta manera la veracidad de las afirmaciones de la matemática. La veracidad de los axiomas era garantizada por la evidencia de los mismos. Uno de los logros más importantes de Aristóteles fue la fundamentación de la lógica. Entre los principios o leyes que puso en evidencia, podemos mencionar: el Principio de no contradicción y el Principio del tercero excluido. Estas leyes integran el fundamento sobre el que se edifican las demostraciones indirectas.

La matemática se transformó en la ciencia hipotético-deductiva por excelencia a partir del siglo III a.C., con la aparición de los Elementos de Euclides. La demostración tomó a partir de ese momento el papel de explicación válida, a partir de ciertos primeros principios: axiomas y postulados. Aristóteles había descrito las características de una ciencia demostrativa, Euclides llevó a la práctica esas ideas en el cuerpo de la matemática, combinando la deducción con la intuición geométrica. Durante mucho tiempo, esta obra fue considerada como modelo para cualquier explicación racional.

La evolución de la deducción en matemática

Los silogismos introducidos por Aristóteles serían adoptados por los escolásticos en la Edad Media, que enriquecieron la lógica con numerosos estudios e intentos de formalización aunque acabaron sobrecargando la teoría de los silogismos, lo que produjo su descrédito en el Renacimiento. Los lógicos de la Edad Moderna, procuraron simplificarla y hacia fines del siglo XIX y principios del XX lograron convertirla en un cálculo, al reducir la lógica a operaciones. Desde el punto de vista de la deducción matemática, podemos pensar que tras el avance producido con los Elementos, cambiaron poco las concepciones durante siglos. Quizá una de las actividades principales de los matemáticos en este sentido fueron los intentos infructuosos para demostrar el Quinto Postulado de Euclides, visto como una proposición demasiado compleja para ser considerado en la categoría de postulado, por lo que intentaron demostrarlo a partir de los otros postulados. En el siglo XIX, un suceso importante relacionado con un cambio en la evolución de las ideas de argumentaciones y deducciones matemáticas, fue el surgimiento de las geometrías no euclidianas. El concepto de sistema axiomático se modificó a partir de entonces en cuanto a la no exigencia de que los axiomas sean intuitivamente evidentes. El concepto de verdad cambió desde la aparición de las geometrías no euclidianas radicalmente en la matemática. La verdad dejó de ser absoluta, una propiedad matemática pasó a ser verdadera dentro de un sistema y falsa en otro. El surgimiento de geometrías distintas, amplió la concepción de la matemática poniendo en tela de juicio la necesidad de evidencia de los axiomas propuestos para una teoría.

Hasta el siglo XX, podría decirse que la demostración matemática fue un proceso supuestamente claro e indiscutible. Las demostraciones eran el alma de la matemática, la forma de justificar la validez de sus afirmaciones, de comprobar o refutar sus conjeturas. Los principios de la lógica habían sido sentados por Aristóteles y eran la base sobre la que se construyen los conocimientos matemáticos. A partir de la toma de conciencia de la aparición de paradojas a principios de este siglo, se produjo cierta inseguridad sobre cuáles y cómo son los principios sólidos.

Los logicistas sostuvieron que la matemática es una parte de la lógica y que como tal, puede construirse utilizando solamente procedimientos lógicos. De esta manera, la matemática se reduce a la lógica, es decir que la lógica es el lenguaje que da al conocimiento matemático el carácter formal y permite definir objetos y demostrar teoremas de forma que los únicos resultados matemáticos verdaderos son los que se demuestran mediante un proceso finito lógico-deductivo.

Los intuicionistas adoptaron una posición completamente distinta. Para los intuicionistas, la matemática tiene origen en las dos formas de la intuición pura que enunciara Kant. No pretenden que todo lo evidente deba aceptarse en la matemática, ni que lo que no lo sea deba rechazarse; los fundamentos de la matemática contienen una serie de intuiciones primarias que provienen de la intuición, pero el progreso de esta ciencia consiste en eliminar la intuición de sus razonamientos. Los seguidores de una vertiente del intuicionismo, denominada neointuicionismo, creyeron necesario restringir la aplicación de la ley del tercero excluido en las demostraciones y declararon aceptar únicamente en la categoría de objetos matemáticos aquellos que podían ser construidos y cuyas propiedades podían demostrarse de manera constructiva, por lo que todas aquellas propiedades en cuya demostración era necesaria la aplicación de reducciones al absurdo eran entonces rechazadas. Para estos matemáticos, probar que la negación de cierta afirmación no sea cierta no es equivalente a que la afirmación inicial sea verdadera. Resulta notable al respecto que algunas culturas, como los chinos y los hindúes no utilizaron en su matemática demostraciones por reducción al absurdo, y que en ambos casos desconocían e incluso negaban el principio del tercero excluido.

En 1900 David Hilbert, quien perfeccionó las ideas de Euclides los dos objetivos principales consistían en primero demostrar que la matemática es consistente y completa. Al hablar de demostraciones, método deductivo y sistemas axiomáticos, no puede dejar de mencionarse a Kurt Gödel, cuyo teorema demostró la futilidad de los intentos de reducir la matemática a un mero sistema formal, demostrando que cualquier teoría matemática suficientemente potente, que al menos contenga la aritmética, contiene proposiciones que no pueden ser probadas ni refutadas, es decir contiene afirmaciones indecidibles. En el siglo XX, las posiciones formalistas extremas han exagerado el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos, en el cual se puso el acento en aspectos sintácticos, en detrimento de los semánticos y de la intuición. La demostración se reduce de esta manera a un procedimiento algorítmico que podría desarrollarse de forma automatizada, incluso mediante el uso de computadoras. En 1976 Kenneth Appel y Wolfgang Haken, matemáticos de la Universidad de Illinois, marcaron un nuevo hito en la historia de la evolución de las demostraciones en matemática, al presentar una demostración realizada con ayuda de una computadora de una conjetura que había ocupado a matemáticos durante muchos años: El problema de los cuatro colores, consistente en demostrar que todo mapa plano puede ser coloreado usando sólo cuatro colores, aceptando que dos regiones que tienen frontera no puntual común no deben tener el mismo color. Appel y Haken redujeron el problema a comprobar que casi 1800 mapas de tipos esencialmente diferentes se podían colorear con cuatro colores; si lo hacían ellos no terminarían en mucho tiempo, programado en una máquina el resultado se consiguió en varios días. Tras esta demostración, han aparecido otras del mismo estilo. La demostración de Appel y Haken provocó una polémica entre los matemáticos acerca de si era o no lícito aceptarla, ya que en ella había sido necesario utilizar otros elementos, aparte de la razón humana, argumentando que aunque se pueda repetir el experimento en varias máquinas no podemos estar seguros de que no se haya cometido un fallo en su diseño de modo que el resultado sea sólo aparentemente correcto.

Indudablemente, la matemática es mucho más que mero encadenamiento deductivo y formal. Aparece además relacionado con ella un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia de ejemplos y contraejemplos. Durante las últimas décadas la concepción de demostración y de lenguaje para su comunicación, ha ido cambiando notablemente. Muchos son los matemáticos y educadores que consideran en la actualidad que el aspecto deductivo no es el único importante en la matemática, se ha reconocido la realidad de la práctica matemática y la demostración tiene distintos grados de validez formal.

Algunas consideraciones finales

En la actualidad en relación con las características de la actividad docente, existe cierta tendencia presente en investigaciones de matemática educativa acerca de la importancia del análisis de los conocimientos y concepciones que poseen los docentes pues se considera que éstas influyen en la manera en que orientan la enseñanza de los contenidos a su cargo. La importancia de estas investigaciones reside en la hipótesis de que sus ideas, valores y fundamentos se reflejan de manera directa en las decisiones pedagógicas. Diversas investigaciones muestran que el docente de matemática enseña de acuerdo a las concepciones que tiene de esta disciplina. Según estas ideas, si la demostración es considerada como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos. En este caso se hará hincapié en la trascripción de demostraciones. En cambio si considera que los alumnos pueden "hacer matemática", la demostración como contenido matemático adquirirá un perfil de elemento dinámico y modificable desde el punto de vista didáctico pudiendo adaptarse a la situación escolar presentada. La escritura propia de demostraciones cobrará en este caso gran importancia, ya que se valorará en los alumnos la adquisición de formas propias de argumentación para defender sus propias convicciones. Para esta postura, que compartimos, la matemática se basa en la recolección de datos, realización de conjeturas, en la determinación de si las mismas son válidas o no y, en la formulación y validación de las conclusiones correspondientes.

Referencias bibliográficas

Arsac, G. (1987). *El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 8(3), 267-312.

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. Tesis de Maestría sin publicar. CICATA del IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2005). *Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural.* Relime Vol. 8 (3), pp.287-317.

Eggers Lan, C. (1995). *El nacimiento de la matemática griega*. Buenos Aires: EUDEBA.

Gheverghese Joseph, G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Ifrah, G. (1997). *Historia de las cifras*. Madrid: Espasa.

Toranzos, F. I. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina.

ASPECTOS NUMÉRICOS Y GRÁFICOS DE LA DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

Ricardo Cantoral Uriza★, Mario Sánchez Aguilar★ y Juan Gabriel Molina Zavaleta★
Cinvestav-IPN★, Cicata-IPN★. (México)
mosanchez@ipn.mx
Campo de investigación: pensamiento variacional. Nivel educativo: superior
Palabras clave: derivada de orden superior, gráficas, Newton, interpolación, pensamiento y lenguaje variacional

Resumen
En este trabajo se muestran algunos resultados de nuestras indagaciones sobre los significados y representaciones asociados con la derivada de orden superior. Estos resultados se plantean en contextos numéricos y gráficos; y son el resultado del estudio de algunas propiedades matemáticas, y el análisis de fuentes primarias como la producción astronómica de Isaac Newton (Newton, 1687). El trabajo se inscribe en la línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) (Cantoral y Farfán, 1998).

Significados escolares asociados a la derivada de orden superior

Es evidente que en el discurso matemático escolar, existe una ruptura en los significados que se asocian a las derivadas sucesivas, a partir del orden tres: Mientras que en un contexto físico, sólo las derivadas primera y segunda tienen asignados los conceptos de velocidad y aceleración; en un contexto gráfico las relaciones entre las raíces de la derivada de una función y las graficas de sus correspondientes derivadas se limitan a máximos, mínimos y puntos de inflexión (Cantoral, 2005).
Dada esta situación, nos hemos enfocado en localizar significaciones que podrían ser asignadas a este concepto matemático de la derivada. Para tal propósito hemos realizado estudios de corte epistemológico y matemático que nos han generado distintos resultados que a continuación exponemos.

Sobre la obra de Isaac Newton: Aspectos numéricos

Es claro que Isaac Newton nunca trabajó con el concepto de derivada que conocemos hoy en día, pero es innegable que en su trabajo hace uso de objetos matemáticos con una estructura numérica muy similar al de la derivada. Veamos un ejemplo:
En los trabajos astronómicos de Newton (1687) aparece por primera vez un método de interpolación que posteriormente se publica en Newton (1711) bajo el nombre de *Methodus Differentialis*. Este método llama nuestra atención porque la estructura de su funcionamiento está basada en la idea de *diferencia*. Enseguida se hace una breve descripción del método.

En esencia, el Methodus Differentialis es un método aritmético de interpolación. En éste se considera un conjunto finito de puntos en un plano *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, etc., a partir de los cuales se trazan los segmentos de recta *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM* y *FN*. Estos segmentos son perpendiculares a otro segmento de recta *HN* (ver figura 1).

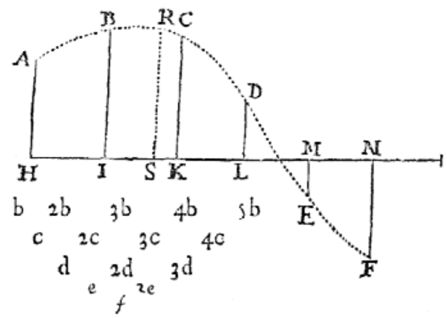


Figura 1. Gráfico que ilustra el Methodus Differentialis tomada de Newton (1687).

El objetivo principal de este método es encontrar la longitud o altura correspondiente a algún punto desconocido, que se encuentre en alguna posición intermedia, entre los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. En la figura 1 esta longitud desconocida se representa con el segmento *SR*. Evidentemente estas longitudes podrían actualmente interpretarse como los valores de las ordenadas correspondientes a los valores H, I, K, L, M y N en el dominio de una función.

Como se verá, el método hace uso de diferencias aritméticas y cocientes de éstas. Estos cocientes de diferencias se encuentran representados en la figura 3 con las expresiones que incluyen las letras minúsculas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*. Los cocientes se encuentran definidos de la siguiente manera:

$$b=\frac{AH-BI}{HI},\ 2b=\frac{BI-CK}{IK},\ 3b=\frac{CK-DL}{KL},\ 4b=\frac{DL-ME}{LE}\ \text{etc.}$$

$$c=\frac{b-2b}{HK},\ 2c=\frac{2b-3b}{IL},\ 3c=\frac{3b-4b}{KM},\ \text{etc.}$$

$$d=\frac{c-2c}{HL},\ 2d=\frac{2c-3c}{IM},\ \text{etc.}$$

$$e=\frac{d-2d}{HM}$$

Para calcular el valor de la ordenada que se desconoce, es necesario calcular los valores de a, p, q, r, s y t. Estos valores se encuentran definidos de la siguiente manera (tómese como referencia la figura 3):

$$\begin{array}{ll} a=AH & r=(q)(SK) \\ p=-HS & s=(r)(SL) \\ q=(p)(-IS) & t=(s)(SM) \end{array}$$

Finalmente, la longitud que se quiere conocer, representada en la figura 1 como *RS*, se encuentra definida por la siguiente expresión:

$$RS = a + bp + cq + dr + es + ft$$

Más allá de la derivada segunda: Aspectos gráficos

En nuestra disciplina, la matemática educativa, es muy difundido el hecho de que la utilización con propósitos didácticos de representaciones concretas de nociones matemáticas, tales como gráficas o imágenes, suelen tener la propiedad de favorecer entendimientos en los estudiantes. Estos entendimientos pueden ir de acuerdo con el significado que la matemática les asigna o contradecirse en algunas relaciones de ésta, una amplia discusión de estos asuntos se puede consultar en Fischbein (1987). Nuestro interés de explorar representaciones concretas y sus propiedades matemáticas originan este trabajo, en él examinamos las *formas graficas* que se reflejan sobre la grafica de una función polinomial $P(x)$, cuando la derivada de orden superior cumple la condición $P^k(x) > 0$, donde k es el orden de la función derivada. En el taller se tuvo la intención de trabajar con un caso particular de estas funciones, una que fuera representativa de las funciones polinomiales de raíces simples, ello en virtud del orden que elegimos para desarrollar la investigación en curso, dentro de la cual en otro momento exploramos la función seno, al respecto se puede consultar en Sánchez y Molina (2006).

En este documento tratamos una situación matemática interesante, la relación entre las raíces de la familia de polinomios $P(x)$ de raíces simples, con la raíz de la derivada de orden *n-1*. Consideremos un caso particular, la función:

$$P_1(x) = \tfrac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6):$$

En la figura 2 mostramos la representación gráfica de la función $P_1(x)$, la sección resaltada es una región donde la derivada de orden *5* de $P_1(x)$ es mayor que cero, es decir $P_1^5(x) > 0$. La forma que describe tal región es a lo que nos referimos con el término *forma gráfica* de la derivada de orden 5, ahora bien, esta forma gráfica tiene algunas propiedades, nos enfocaremos en una de ellas: En el par ordenado que determina en la gráfica el inicio de la forma, su valor de *x* es equivalente al promedio de las raíces de la función $P_1(x)$.

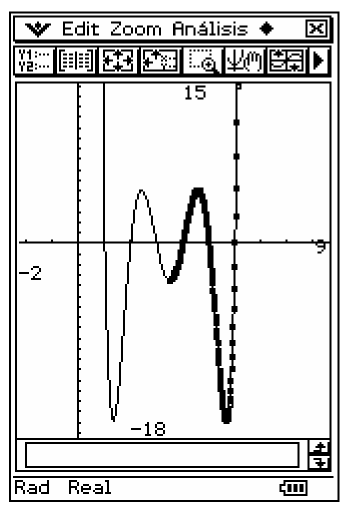


Figura 2

Al calcular el promedio de las raíces de $P_1(x)$ resulta el valor $\frac{7}{2}$, luego al determinar la derivada de orden 5 de $P_1(x)$, tenemos $P_1^5(x) = 720x - 2520$, la cual tiene como raíz el valor $\frac{7}{2}$. Esta es una propiedad sencilla pero interesante, una explicación es la siguiente:
Consideremos el polinomio $P(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_0$. Es sencillo mostrar que si se tiene una función $f(x) = ax^n$, que va de $\Re$ en $\Re$, con $n \in N$, la derivada de orden k de $f(x)$ está determinada por:

$$f^k(x) = {}_nP_k a x^{n-k}, \text{ para } k \le n$$

Ecuación 1. La expresión ${}_nP_k$ se lee "n permutaciones de tamaño k"

Con ayuda de la ecuación 1 se calcula la derivada de orden *n*-1 de $P(x)$, para llegar a la expresión: $P^{n-1}(x) = {}_nP_{n-1}A_n x + {}_{n-1}P_{n-1}A_{n-1}$
La cual es una ecuación de primer grado, ésta se iguala a cero y se despeja x para encontrar su raíz:

$P^{n-1}(x) = 0$ ${}_nP_{n-1}A_n x + {}_{n-1}P_{n-1}A_{n-1} = 0$ $A_n x = \frac{-{}_{n-1}P_{n-1}A_{n-1}}{{}_nP_{n-1}}$ $x = \frac{-(n-1)!A_{n-1}}{A_n n!}$ $x = \frac{-A_{n-1}}{A_n n}$ *Ecuación 2*. El valor de la raíz de la derivada de orden *n*-1 del polinomio $P(x)$.	Por otra parte, dada una función polinomial de grado n: $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$, donde $n \in N \wedge r_n \in \Re$

Entonces los coeficientes $P(x)$ están determinados por las fórmulas de Viète[§§§§], si $P(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_0$ de allí se tiene que los coeficientes de $P(x)$ expresados en notación sumatoria corresponden con los siguientes:

[§§§§] Ver Kurosch (1994). En esta fuente las fórmulas de Vieté no se expresan en notación sumatoria, fue elección nuestra este formato porque se utilizó para facilitar otros cálculos.

$$A_n = 1$$

$$A_{n-1} = -\sum_{k_1=1}^{n} r_{k_1}$$

$$A_{n-2} = \sum_{k_1=1}^{n-1} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n} r_{k_2}$$

$$A_{n-3} = -\sum_{k_1=1}^{n-2} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-1} r_{k_2} \sum_{k_3=k_2+1}^{n} r_{k_3}$$

$$A_{n-4} = \sum_{k_1=1}^{n-3} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-2} r_{k_2} \sum_{k_3=k_2+1}^{n-1} r_{k_3} \sum_{k_4=k_3+1}^{n} r_{k_4}$$

$$\vdots$$

$$A_0 = (-1)^n \sum_{k_1=1}^{1} r_{k_1} \sum_{k_2=k_1+1}^{2} r_{k_2} \sum_{k_3=k_2+1}^{3} r_{k_3} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}+1}^{n} r_{k_n}$$

Ahora bien, si tomamos los coeficientes de Viète: A_n y A_{n-1} y los sustituimos en la ecuación 2, tendremos que:

$$x = \frac{-(-\sum_{k_1=1}^{n} r_{k_1})}{1(n)}$$

$$x = \frac{\sum_{k_1=1}^{n} r_{k_1}}{n}$$

Es decir, el valor de la raíz de la derivada de orden n-1 del polinomio $P(x)$ es igual al promedio de las raíces del polinomio *P(x)*.

Comentarios finales

En el methodus differentialis, y en particular en los cocientes de diferencias representados por b, $2b$, $3b$, $\ldots d$, $2d$ y e; es posible identificar *versiones primitivas* de la derivada de orden superior. Esto se afirma con base en el comportamiento y propiedades que estos objetos matemáticos presentan. En los textos de Análisis Numérico puede verificarse que estos cocientes de diferencias poseen propiedades equivalentes a aquellas de la derivada de orden superior; por ejemplo la posibilidad de proveer información acerca del comportamiento gráfico de una función, como los intervalos en que ésta crece o decrece, o los intervalos donde es concava hacia arriba o hacia abajo (véase por ejemplo el tema de *diferencias divididas*, en Maron y López, 1995). Nuestra investigación continuará indagando acerca de los *usos* prácticos que Newton daba a este método en particular con la finalidad de encontrar más significaciones que posiblemente se pudieran asignar, en un contexto escolar a la derivada de orden superior.

Por otro lado, el escrito también centra su atención en las relaciones matemáticas que se pueden reflejar en las gráficas de funciones polinomiales, en relación con derivadas de orden superior. Nos referimos a las formas gráficas, pues son representaciones concretas que podrían desempeñarse como mediadoras para favorecer nuevos entendimientos en el estudiante. Por esta razón consideramos importante entenderlas y evaluar utilidad en la escuela, con el ambicioso propósito de extender el estudio de la derivada en la clase de Cálculo, y llegar más allá de la derivada segunda. Otras relaciones matemáticas se han encontrado entorno a estas formas gráficas, sin embargo por motivos de espacio no es posible comentarlas en este texto.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2005). Sobre las derivadas de orden superior. [eActivity], México: Casio Computer Co. Ltd, Disponible en: http://classpad.net/members/download/eactivities/calculus_es.html

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353 – 369.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*.
Holanda: Reidel.

Kurosh (1994). *Curso de Álgebra Superior*. Limusa: México.

Maron, M.J. y López, R.J. (1995). *Análisis numérico. Un enfoque práctico*. México: CECSA.

Newton, I. (1687). *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Soc; Regiæ ac Typis J. Strater, Londini.

Sánchez, M. y Molina, J.G. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: Una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez-Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 19, pp. 739-744). CLAME: México.

ENTORNO SOCIOCULTURAL Y CULTURA MATEMÁTICA EN PROFESORES DEL NIVEL SUPERIOR DE EDUCACIÓN. ESTUDIO DE CASO EN EL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE OAXACA. UNA APROXIMACIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA. RESULTADOS

Luz María Minguer Allec, Javier Lezama Andalón
Instituto Tecnológico de Oaxaca. (México)
Luzma16@hotmail.com

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: socioepistemología, cultura matemática, práctica social

Resumen
Se presentan brevemente los aspectos generales y los resultados de una investigación realizada en el marco de la aproximación socioepistemológica. Este marco teórico posibilitó un análisis integral del fenómeno de la *cultura matemática*. El objetivo principal fue: Realizar un análisis de las prácticas sociales que intervienen en la conformación de la *cultura matemática* de un grupo de profesores, dicho análisis está centrado en la identificación de estas prácticas, así como en el efecto de la acción de las mismas sobre las creencias y prácticas de los profesores, resaltando con esto la importancia y complejidad de su naturaleza. Tal aproximación permite definir a la cultura matemática como el producto de un conjunto de construcciones sucesivas de prácticas sociales vinculadas a la actividad matemática que una persona edifica a lo largo de su existencia.

Partiendo de un marco teórico, la aproximación socioepistemológica, que posibilita una percepción mas amplia del fenómeno denominado *la cultura matemática,* identificamos en éste no únicamente el bagaje de conocimientos matemáticos que un individuo posee, sino que estamos en condiciones de reconocer al acervo de prácticas sociales vinculadas con la actividad matemática como puede ser, el saber erudito, los conocimientos matemáticos escolares, las ideas, creencias, y prácticas de uso de las matemáticas, que acompañan la vida de todo individuo. Así mismo, este marco teórico permite establecer que la *cultura matemática* es producto de un conjunto de construcciones sucesivas de prácticas sociales vinculadas a la actividad matemática, que una persona edifica a lo largo de su existencia.

a) Práctica social

A partir de lo que Cordero (2000) expresa con respecto a la actividad humana y la práctica social entendidas como: "*toda actividad intencionada o no que grupos humanos ejercen sobre la construcción de conocimiento matemático";* Comprendemos que existe una correspondencia estrecha entre práctica social e influencias socioculturales.

Nosotros consideramos que las influencias socioculturales pueden ser concebidas como el conjunto de prácticas sociales que un grupo humano con una cultura específica practica en su comunidad; este conjunto de prácticas sociales envuelve y permea a dicho grupo humano, de tal manera que posibilita su propia reproducción, al mismo tiempo este grupo social crea y recrea nuevas prácticas sociales que surgen de las necesidades y motivaciones internas y externas a la comunidad.

Entendemos pues, por *prácticas sociales,* el conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, afectando y conformando la psique de todo individuo. *La práctica social* no es estática es activa se está construyendo día a día y es producto del hombre mismo, su característica principal es que es vigente y genera consenso, no siempre se manifiesta o percibe con toda claridad, puede estar oculta, pero se intuye y se presiente, *la práctica social* puede estar constituida por actividades motrices o intelectuales, es decir, puede tratarse de una práctica de uso de la matemática (utilización del compás de forma intuitiva para el trazo de

una espiral sobre un bloque cilíndrico de madera) o de una idea o sentimiento, creencia, acerca de las matemáticas (“las matemáticas son difíciles”), otra característica de la *práctica social* en matemática educativa es que ésta no atañe a un solo individuo sino a comunidades de individuos.
En la expresión *práctica social* quedan comprendidos: los conocimientos matemáticos eruditos, los conocimientos matemáticos escolares, todas las prácticas de uso de las matemáticas, las creencias, opiniones, ideas, actitudes, ideologías y modas relacionadas con las matemáticas, que surgen en una sociedad.

b) La cultura matemática

En la busca de una expresión que abarcase en toda su extensión el fenómeno sociocultural referido al “saber con el que cada profesor enfrenta su quehacer docente”, encontramos que el término «cultura matemática» es el que mejor se adapta a nuestros intereses y perspectivas conceptuales, pues de la misma manera que «cultura» es lo consecuente de toda persona o individuo –desde el punto de vista antropológico–, así, «cultura matemática» es también toda aquella percepción, noción matemática que está íntimamente ligada a todo ser humano que vive en sociedad.
En este contexto, es posible decir que la «cultura matemática» se constituye en una realidad social integrada por acciones multidireccionales provenientes de influencias socioculturales (prácticas sociales) que rodean al individuo y que acompañarán su existencia, moldeando su percepción del mundo y, por consiguiente, de lo que son las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.
A partir de lo anterior establecemos que la *cultura matemática* se conforma por medio de una sucesión de construcciones de conocimiento matemático, que son prácticas sociales que surgen del contexto sociocultural en el que se desarrolla el individuo, durante su existencia.

c) Problema de investigación

Identificamos como problema de investigación, el análisis de un fenómeno sociocultural que denominamos «cultura matemática» entre los profesores de una institución en particular, el ITO en Oaxaca, México.
Para abordar la problemática mencionada realizamos dos tareas principales: la primera, una clasificación y análisis de las prácticas sociales –que rodean a la conformación de la «cultura matemática»– expresadas a través de las vivencias de un grupo de profesores, mismas que surgen de los ámbitos: familiar, social, y escolar; la segunda, el análisis del efecto que estas prácticas sociales producen sobre los entrevistados (cómo las prácticas sociales generan *cultura matemática*), resaltando con esto la importancia y complejidad de su naturaleza.

d) Una aproximación socioepistemológica de la cultura matemática

La aproximación socioepistemológica de la cultura matemática orienta de manera específica su atención hacia el estudio de la naturaleza compleja de las prácticas sociales que acompañan al proceso por medio del cual la cultura matemática de los profesores llega a definirse. En este estudio, el contexto sociocultural en el que está inmersa la cultura matemática, cobra fuerza y magnitud, confiriéndole a ésta una dimensión integral y humana que reconoce a la matemática como un conocimiento íntimamente ligado al ser humano.
Solamente una aproximación socioepistemológica de la cultura matemática permite visualizar a esta última, como una sucesión de construcciones de conocimiento matemático –cuyo origen son prácticas sociales ligadas a la matemática, a su enseñanza, o a su aprendizaje- que

se lleva a cabo desde que un individuo nace hasta que muere.

e) **El análisis de los datos**.

El análisis de las entrevistas permitió la clasificación de las influencias socioculturales manifestadas por los profesores, estas influencias son expresadas por medio de prácticas sociales que fueron clasificadas de la siguiente manera.

<table>
<tr><th colspan="4">INFLUENCIAS FAMILIARES PRÁCTICAS FAMILIARES</th><th colspan="4">INFLUENCIAS DEL MEDIO SOCIAL PRÁCTICAS DEL MEDIO SOCIAL</th><th colspan="6">INFLUENCIAS ESCOLARES PRÁCTICAS ESCOLARES</th></tr>
<tr><td colspan="2">Motivación familiar.</td><td colspan="2">Necesidades familiares impuestas por el medio.</td><td colspan="2">Los amigos</td><td colspan="2">La cultura popular</td><td colspan="2">Personalidad del profesor</td><td colspan="2">Métodos de enseñanza</td><td colspan="2">Ambientes escolares</td></tr>
<tr><td>Urbanas</td><td>Rurales</td><td>Urbanas</td><td>Rurales</td><td>Urbanas</td><td>Rurales</td><td>Urbanas</td><td>Rurales</td><td>Urbanas</td><td>Rurales</td><td>Urbanas</td><td>Rurales</td><td>Urbanas</td><td>Rurales</td></tr>
</table>

Enseguida presentamos como ejemplo, tres fragmentos de una entrevista en los que se realiza el análisis de la naturaleza y acción de algunas prácticas sociales manifestadas.

<table>
<tr><th colspan="2">ENTREVISTA No. 6:
PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS. 20 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE.</th></tr>
<tr><td colspan="2">Un campesino siempre está en contacto con situaciones que le enseñan a estimar y a desarrollar esta percepción, desde chiquito. Tú tienes un terreno de alfalfa, y te dicen: “¿como cuántos canastos de alfalfa le vas a sacar?” Entonces empiezas a hacer estimaciones de longitud, dices: “mi terreno tiene tantos metros de largo y por cada cuatro metros yo saco un canasto, bueno, entonces con esta longitud y tal anchura voy a sacar tantos, y si mi terreno tiene tantos pedazos así, ¡ah, bueno!, pues entonces voy a sacar tanto.</td></tr>
<tr><td>Naturaleza y origen de la influencia</td><td>Práctica social que tiene su origen en las prácticas de uso de las matemáticas, en el medio rural. Específicamente la práctica de la estimación.</td></tr>
<tr><td>Acción</td><td>La acción de esta práctica social se manifiesta a través del ejercicio continuo durante la niñez del entrevistado de una práctica de uso de las matemáticas. La repetición constante desarrolla habilidades del intelecto en el niño, propiciando el aprendizaje de conceptos matemáticos básicos.</td></tr>
<tr><td>Resultado de la acción</td><td>Se produce aprendizaje de nociones matemáticas: estimación de cantidades de volumen (almudes) a partir de la forma y extensión del terreno, sumas, restas. Se fomenta el desarrollo de la cultura matemática.</td></tr>
<tr><td>Socialización</td><td>En esta práctica se manifiesta la socialización del conocimiento matemático.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ENTREVISTA No. 6:
PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS. 20 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE.</th></tr>
<tr><td>Fíjate que yo de las cosas que sí recuerdo cómo se usan en el campo, es el caso del cálculo de áreas. El hecho de que, estando en la primaria, yo veía que cuando se va a calcular el área del terreno se</td></tr>
</table>

triangula; cuando los terrenos son muy irregulares, porque a veces va el arroyo o una cerca, y el terreno es como un trapecio y ningún lado es igual, entonces se recurre a la triangulación, y, ya después, ya en la prepa, me enteré que los griegos recurrían a la triangulación. Y, fíjate que, en todos los casos, si es un trabajador, si arriendas tu terreno o lo rentas, siempre hacen sus cálculos: ¿como cuánta cantidad de maíz le voy a sembrar?, ¿dos almudes? Muchas veces la referencia en el campo no es cuántos metros cuadrados tiene tu terreno, sino la referencia es cuántos almudes de maíz se pueden obtener en la siembra. Entonces, tú a alguien le dices: "¿y tu terreno de allá arriba, como de que tamaño es?", "es de tres almudes". Entonces, ya tú dices: "si voy sembrando maíz, un paso sí un paso no, con tres almudes lo lleno"; entonces, ya tú dices: "¡ah!, es de tal magnitud", estás asociando una forma de medir con otra muy diferente, con una medida de volumen estas midiendo un área.	
Naturaleza y origen de la influencia	Práctica social que tiene su origen en las prácticas de uso de las matemáticas en el medio rural. Específicamente las prácticas para calcular las áreas de los terrenos y las prácticas de uso de las matemáticas para calcular la producción de los terrenos independientemente de su forma.
Acción	La acción de esta práctica social se identifica a través de las actividades que el entrevistado realiza durante su niñez. Desarrollando aptitudes para estimar y transformar cantidades de naturaleza diferente.
Resultado de la acción	Se produce aprendizaje de nociones geométricas: cálculo de áreas, longitudes, desarrollo de la noción de estimación, proporción, suma, resta etc. Por lo tanto se fomenta el enriquecimiento de la cultura matemática del profesor.
Socialización	La vigencia de estas prácticas de uso de las matemáticas muestra la socialización del conocimiento matemático.

Mi maestro era único, porque te enseñaba todo en la primaria, pero, en especial podría yo considerar como punto de referencia, como ya una convicción hacia las matemáticas. A mi maestro de quinto año, cuando comenzamos a hacer cosas más "complicadas", con decirte que recuerdo problemas en Geometría, como el área de un pentágono o de un hexágono, y él ya nos daba una explicación que, casi ahora estoy seguro que no se usa; él, además de la fórmula que nos daba, pues teníamos la referencia de, por decirte, de un hexágono, lo dividía en triangulitos y explicaba el por qué de la fórmula perímetro por apotema; entonces, pues, qué era la apotema, pues era la altura del triangulito. Y yo recuerdo casi 50 años después el por qué, y así se fue yendo con todas las figuras, y luego con los prismas, los cuerpos, su volumen, pero, siempre justificando las fórmulas con las figuras; ya dentro del área de temas aritméticos también siempre fue muy interesante (…)	
Naturaleza y origen de la influencia	Práctica social que se originan en las prácticas docentes rurales de hace 50 años, en la filosofía de esta educación rural se promovía el aprendizaje altamente significativo.
Acción	Mediante las prácticas docentes creativas de su profesor de quinto y sexto año, logró el aprendizaje de nociones matemáticas.
Resultado de la acción	Despertó interés y gusto por las matemáticas. Contribuyendo al desarrollo de su cultura matemática.
Socialización	En esta práctica se identifica la socialización del conocimiento matemático.

f) Resultados y conclusiones

La realización de este trabajo me permitió: en primer lugar, caracterizar a la *cultura matemática* desde el marco de la aproximación socioepistemológica. Entendiendo por ésta: una sucesión de construcciones de conocimiento matemático que provienen de prácticas sociales, mismas que definen a su vez, el contexto sociocultural que rodea la existencia de todo individuo inmerso en una cultura específica.

El análisis necesario para llegar a establecer la definición anterior, me dejó vislumbrar algunos aspectos relacionados con: la construcción de conocimiento matemático, las características de las prácticas sociales, y la relación que se establece entre el Discurso Matemático Escolar y la cultura matemática

Con respecto a las construcciones de conocimiento matemático, distingo lo siguiente:

La evolución y desarrollo del conocimiento matemático (epistemología) surge de la necesidad del hombre, de resolver, entender, problemas de su entorno sociocultural, de tal manera que, en un proceso que inicia con un conjunto de conocimientos básicos -primeramente constituido por escasos rudimentos matemáticos- se fue acrecentando poco a poco el acervo de conceptos y nociones matemáticas permitiendo de esta forma, el desarrollo científico de nuevas nociones en esta área del conocimiento.

Paralelamente, identifico a través de mi trabajo, que el conocimiento matemático también se ha construido fuera de los espacios en los que los investigadores científicos construyen conocimiento matemático erudito; esto significa que hay conocimiento matemático que se construye por medio de prácticas sociales que surgen en las comunidades como respuestas a problemáticas de origen diferente, como puede ser: la necesidad de resolver dificultades prácticas de la vida cotidiana y de distintos oficios que el ser humano realiza, en las ciudades y en el campo (prácticas de uso de la matemática).

Existe también un espacio creado por la sociedad para propiciar, de manera intencionada, la construcción de conocimiento matemático, éste es la escuela, de ella surge un gran número de prácticas sociales propias de los diferentes ámbitos que la institución escolar genera: practicas escolares que surgen de la personalidad del profesor, prácticas escolares que surgen de las técnicas y métodos de enseñanza empleados, prácticas escolares que surgen de los ambientes y estructuras escolares.

El siguiente aspecto que surge de esta investigación es el relacionado con las prácticas sociales. A este respecto identificamos que la utilización reiterada del conocimiento matemático, es lo que define las prácticas sociales, es el uso repetido, a través del tiempo y en espacios diferentes, lo que genera las prácticas sociales. Esto obedece a que, en las sociedades existe la necesidad constante del uso (aplicación) del conocimiento matemático para la resolución de gran número de situaciones que provienen de las diversas actividades que el hombre de todas las culturas realiza.

Así mismo, la identificación de las prácticas sociales que intervienen en la conformación de la cultura matemática de los profesores del ITO y el análisis de la manera como estas prácticas actúan, determinando su cultura matemática, me aporta información acerca de: categorías que intervienen favoreciendo, o no, la construcción de conocimiento matemático, como pueden ser: las técnicas y métodos de enseñanza, los ambientes y estructuras escolares, las características del profesor que pueden contribuir a mejorar la enseñanza de las matemáticas; la gran influencia que ejercen, en la práctica docente actual de los profesores del ITO algunas prácticas escolares relacionadas con el estilo de enseñanza o con las técnicas y métodos empleados para enseñar matemáticas, utilizados por sus profesores; la influencia favorable del ejercicio constante de prácticas de uso de la matemática, en el desarrollo del gusto por esta materia.

Finalmente el tercer aspecto que surge de esta reflexión, tiene que ver con la relación existente entre cultura matemática y el Discurso Matemático Escolar.

Antes de iniciar, es importante recordar que todo el esfuerzo de la Matemática Educativa, está encaminado a llegar a incidir en el Discurso matemático escolar. Por esta razón y a partir del hecho de que, este trabajo de investigación analiza el proceso por medio del cual se conforma la cultura matemática de un grupo de profesores, identifico en él, una reconstrucción histórica de las vivencias pasadas y presentes, que un grupo de profesores experimentaron con las matemáticas significa entonces que esta investigación constituye un estudio de la epistemología del profesor, en relación al saber matemático que éste construye, en un periodo importante de su vida.

A partir de lo anterior, considero que con este estudio llegamos a la reconstrucción de los fundamentos del Discurso Matemático Escolar –entendiendo por éste el que está compuesto por el discurso institucional y el grupo humano (los profesores), que articulan la propuesta educativa de la institución, en prácticas educativas concretas- de los profesores, ya que, cuando un profesor de matemáticas expone su curso lo hace mediante su cultura matemática, la cual se manifiesta: en la forma de concebir a la matemática misma y a la enseñanza y al aprendizaje de esta materia, así como, a través de la reproducción en el aula, de otras prácticas sociales relacionadas con las matemáticas, que el profesor ha construido a lo largo de su existencia.

Esta cultura matemática es el sustento de sus acciones presentes en el aula, es decir, del Discurso Matemático Escolar que practica.

Por último, si llegamos a identificar cual es la cultura matemática de un profesor de matemáticas, podremos tener una idea acerca de su Discurso Matemático Escolar en el aula. Sin olvidar que es posible llegar a incidir en aspectos claves de esa cultura para asegurar un mejor desempeño docente de los profesores de matemáticas.

Finalmente, la importancia de este trabajo de investigación para el campo de la aproximación socioepistemológica y por consiguiente de la Matemática Educativa, se encuentra en la reconstrucción del concepto, cultura matemática, que incorpora una experiencia de vida y no sólo se restringe a prácticas de aula y de estudio formal, integrando un recorrido que abarca las etapas de la infancia, la adolescencia, y la madurez de la vida de un individuo, periodo que involucra sus vivencias más significativas relacionadas con las matemáticas, haciendo resurgir, a través del análisis de esta historia de vida, la importancia de las prácticas sociales que integran el contexto sociocultural en el que se desenvuelven los individuos.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (2002). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. España: Paidós.

Cantoral, R. (1998). La aproximación Socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. En R.M. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Tomo 12). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001a). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001b). La Socioepistemología: una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. En F. Cordero (Ed.), *Serie Antologías* (Número 1, pp. 331-333). México: CLAME-Red de Cimates.

Camilleri, C. (1985). *Antropología cultural y educación*. Lausana, Suiza: UNESCO.

Chevallard, Y. (1997). *El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori-ICE.

D'Amore, B. y Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 33-45.

Enguita, M. (1999). *Sociología de la educación*. Barcelona, España: Ariel.

Farfán, R.M. y Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.

En F. Cordero (Ed.), *Serie Antologías* (Número 1, pp. 249-291). México: CLAME-Red de Cimates.
González, J. (2001). *Introducción a las fuentes de la epistemología*. México: Porrúa.
Kalman, J. (2003). *Escribir en la plaza*. México: Fondo de Cultura Económica.
Liston, D. y Zeichner, K. (1997). *Formación del profesorado y condiciones sociales de la escolarización*. Madrid, España: Morata.
Nanda, S. (1987). *Antropología cultural*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Pérez, A. (2000). *La cultura escolar en la sociedad neoliberal*. Madrid, España: Morata.
Quintana, J. (2001). *Las creencias y la educación. Pedagogía cosmovisional*. Barcelona, España: Herder.
Rockwell, E. (1995). *La escuela cotidiana*. México: Fondo de Cultura Económica.
Rodríguez, G., Gil, J. y García E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Archidona, Málaga: Aljibe
Sacristán, G. (1998). *Poderes inestables en educación*. Madrid, España: Morata.
Sutherland, R., Mochon, S., Jinich, E., Molyneux, S. y Rojano, T. (1996). Cultura y cognicion: El caso de las matemáticas y la ciencia. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, (pp. 1-16). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Vigotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona, España: Paidós.
Wertsch, J. (1993). Voces de la mente Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada. Madrid, España: Visor.
Wertsch, J. (1988). *Vigotsky y la formación social del la mente*. Barcelona, España: Paidós.

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL A TRAVÉS DE LA INTERPOLACIÓN Y LA PREDICCIÓN

Hipólito Hernández Pérez, Germán Muñoz Ortega, Gabriela Buendía Abalos
Cimate, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
Polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: epistemología, modelación. Nivel educativo: superior
Palabras clave: situación, interpolación, predicción, práctica social, modelación

Resumen
En esta investigación se contextualizaron fenómenos físicos y de ingeniería civil, como: la variación de la velocidad, variación de temperatura, movimiento periódico, e infiltración de agua en suelos. Se realizaron mediciones en cada situación, que para el caso del movimiento periódico fue a través de un sensor de movimiento. En el experimento de la variación de temperatura se utilizó un sensor de temperatura, en la infiltración de agua de un suelo determinado fue la medición de la variación de la columna de agua. En las situaciones fueron abordadas con la práctica social de la predicción y la herramienta de interpolación para la modelación matemática con la finalidad de predecir en los fenómenos tanto físicos y de ingeniería civil. Esta forma de ver a la matemática consideramos que está proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar.

Introducción

En este trabajo se abordaron contextos físicos y de ingeniería civil, a través de la práctica social de la predicción y la interpolación tomando como fundamento teórico, la aproximación socioepistemológica (Cantoral, 2001). Hernández (2006a) ha reportado aspectos de la emergencia de la interpolación y de la predicción en forma implícita desde los estudios del movimiento de los cuerpos por los filósofos del colegio de Merton, los estudios hechos por Oresme hasta el estudio del movimiento realizado por Galileo. También surge la noción de modelación, graficación y esto da origen a la matematización del movimiento. La interpolación y predicción aparecen en forma explícita en el marco epistémico de Newton puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Hernández, 2003). La matematización del sistema genera construcción de herramientas como el binomio de Newton y la serie de Taylor. Por otra parte, Buendía (2005) reporta un estudio socioepistemológico sobre la práctica de predicción como generadora de conocimiento para los fenómenos periódicos.

Se trabajaron situaciones que involucran la interpolación y la predicción en: Movimiento uniformemente acelerado (Hernández, 2006b), variación de temperatura, movimiento periódico y la infiltración de agua en un suelo determinado. Para registrar las mediciones de los experimentos se utilizaron equipos electrónicos como sensores de temperatura y de movimiento conectados a través de una calculadora graficadora. En todos los experimentos se utilizó la herramienta de interpolación y la práctica social de predicción para la modelación matemática. De esta forma se recaba información con respecto a la forma de construcción del conocimiento a través de situaciones diseñadas en contextos físicos y problemas de ingeniería civil. Estas construcciones nos proporcionan elementos de análisis para posteriormente ser presentadas a los estudiantes como experiencias de aprendizaje. Ello proporciona elementos para un cambio epistemológico del Cálculo escolar a través de una visión de Newton-Taylor considerando las prácticas de la predicción e interpolación como reorganizadores del Cálculo escolar.

Antecedentes

Reportamos como antecedentes de nuestra investigación a la emergencia de la interpolación en forma implícita y explícita en la matematización del movimiento, la epistemología del binomio de Newton y la serie de Taylor, la variación de la temperatura en los cuerpos, movimiento periódico, la infiltración de agua en suelos.

Epistemología del binomio de Newton y la serie de Taylor

Cantoral (2001) menciona que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables. Precisa el reconocimiento de los procesos de predicción de corto alcance (la variación del movimiento local) y la predicción de largo alcance (estudio de la variación del movimiento global). El movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen, entonces, herencia: el estado ulterior $P+PQ$ del fenómeno de variación $P \to P+PQ$ depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto P y la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de la predicción asociada con la variación y cambio en la naturaleza: PQ es la variación de la variable independiente.

Con esta idea y en la necesidad de predecir, conocer, adelantar, Newton estableció el binomio que hoy en día lleva su nombre y fue dado como:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + ... \qquad (1)$$

Donde: $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, $C = \frac{m-n}{2n}BQ$, $D = \frac{m-2n}{3n}CD$

Si el exponente *m/n* es un número entero no negativo, entonces el binomio de Newton es una serie finita. Si el exponente *m/n* es un número fraccionario o un número negativo entonces el binomio de Newton es una serie infinita.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Newton y con las diferencias finitas se llegó al polinomio que se conoce como el polinomio de interpolación de Newton;

$$y = y_0 + k\Delta y_0 + k(k-1)/2\Delta^2 y_0 + k(k-1)(k-2)/6\Delta^3 y_0 + ... + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0. \qquad (2)$$

En esencia, Taylor consideró el siguiente proceso: $x = x_o + k\Delta x; k = \frac{x - x_o}{\Delta x}$, y tomando a la variación de la variable independiente muy pequeña $(\Delta x \to 0)$, k muy grande, x fija, llegó a construir la siguiente serie:

$$y = y_0 + (x - x_0)\dot{y}_0 / \dot{x}_0 + (x - x_0)^2 \ddot{y}_0 / 2(\dot{x})^2 + (x - x_0)^3 \ddot{y}_0 / 6(\dot{x})^2 + ... \qquad (3)$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis, el binomio de Newton y la serie de Taylor son instrumentos de predicción en un contexto de variación.

El problema de la infiltración de agua

El problema consiste en la infiltración de agua a través de la superficie del suelo y hacia adentro del mismo, producido por las fuerzas gravitacionales y capilares. La diferencia entre el volumen de agua que llueve en una cuenca y el que escurre por su salida recibe el nombre de pérdidas, debido a la infiltración y vaporización. La infiltración juega un papel importante en la relación lluvia y escurrimiento y, por lo tanto, en los problemas de diseño y predicción asociados a la dimensión y operación de obras hidráulicas.

La fórmula más conocida para este fenómeno es la llamada de Horton, reportada por Gardner y Widdstoe (1921) y por Horton (1940): $f_p = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$, Donde f_p es la capacidad de infiltración y f_0, f_c y k son constantes empíricas.

Aspectos metodológicos

Nuestra investigación está inmersa en el marco teórico de la aproximación socioepistemológica, teniendo en cuenta las prácticas sociales como actividad humana y generación de conocimiento matemático.

El corte metodológico que guía el diseño de situación en la presente investigación es primeramente con un análisis a priori como lo establece la ingeniería didáctica que posteriormente se hará un estudio en puesta en escena y posteriormente un análisis a posteriori. Partimos de la epistemología inicial planteada como el binomio de Newton y la serie de Taylor como marco de referencia para el diseño de la situación donde la práctica de predicción es incorporada intencional.

Resultados

En este apartado presentamos los resultados de las tres situaciones exploradas y en cada una de ellas hacemos su desarrollo y análisis.

<u>Situación 1. Variación de temperatura</u>

Una taza de café cuya temperatura es de 85º C se deposita en un cuarto cuya temperatura es de 18º C. Dos minutos más tarde la temperatura del café es de 80º C. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del café será de 65º C?

$$T_1 = T_0 + \Delta T_0 = 85 - 5.00259 = 79.99741$$

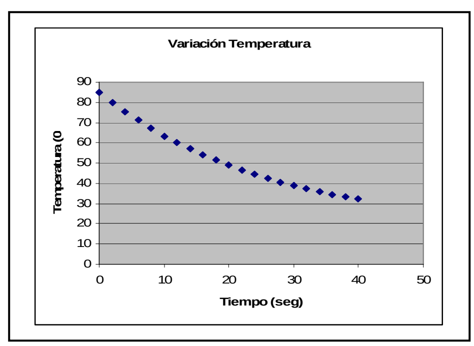
$$T_2 = T_0 + 2\Delta T_0 + \Delta^2 T_0 = 85 + 2(-5.00259) + 0.37359 = 75.3684$$

$$T_3 = T_0 + 3\Delta T_0 + 3\Delta^2 T_0 + \Delta^2 T_0 = 85 + 3(-5.00259) + 3(0.373599 + (-0.0279) = 71.018505 \;\ldots..$$

Se sigue el mismo procedimiento usando el polinomio de interpolación de Newton para hallar la temperatura para cualquier tiempo (ver tabla No.1 y en la gráfica No.1).

t(tiempo)	T(temperatura)	ΔT	$\Delta^2 T$	$\Delta^3 T$	….
0.00000	85.00000	-5.00259	0.37359	- .02795	
2.00000	79.99741	-4.62907	0.34564		
4.00000	75.36834	-4.28343			
6.00000	71.08491	-3.96362			
8.00000	67.12129				
….					

Tabla No. 1. Variación de temperatura



Gráfica No.1

Usando el polinomio de interpolación de Newton, ecuación (2), queda:

$$T_n = T_0 + \frac{t_n - t_0}{\Delta t}\Delta T_0 + \frac{\frac{t_n - t_0}{\Delta t}\left(\frac{t_n - t_0}{\Delta t} - 1\right)}{2!}\Delta^2 T + \frac{\frac{t_n - t_0}{\Delta t}\left(\frac{t_n - t_0}{\Delta t} - 1\right)\left(\frac{t_n - t_0}{\Delta t} - 2\right)}{3!}\Delta^3 T_0 + \ldots.$$

$$T_n = T_0 + \frac{\Delta T_0}{\Delta t}\frac{(t_n - t_0)}{1!} + \frac{\Delta^2 T_0}{(\Delta t)^2}\frac{(t_n - t_0)(t_n - t_0 - \Delta t)}{2!} +$$

$$+ \frac{\Delta^3 T_0}{(\Delta t)^3}\frac{(t_n - t_0)(t_n - t_0 - \Delta t)(t_n - t_0 - 2\Delta t)}{3!} + ...$$

Donde se usó $t_n = t_0 + n\Delta t$, $t_n - t_0 = n\Delta t$, $n = \frac{t_n - t_0}{\Delta t}$

Considerando que la primera diferencia representa la ley de enfriamiento de Newton, entonces:

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta t} = \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = k(T_0 - T_m),$$

$$\frac{\Delta^2 T_0}{(\Delta t)^2} = \frac{\frac{\Delta T_1}{\Delta t} - \frac{\Delta T_0}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{k(T_1 - T_m) - k(T_0 - T_m)}{\Delta t} = k\frac{(T_1 - T_0)}{\Delta t} = k\frac{\Delta T_0}{\Delta t} = k^2(T_0 - T_m)$$

$$\frac{\Delta^3 T_0}{(\Delta t)^3} = k^3(T_0 - T_m),....$$

En este fenómeno físico se presenta que las variaciones no son constantes por lo que se llega a obtener una serie infinita. Por tanto:

$$T_n = T_0 + k(T_0 - T_m)\frac{(t_n - t_0)}{1!} + k^2(T_0 - T_m)\frac{(t_n - t_0)(t_n - t_0 - \Delta t)}{2!} +$$

$$+ k^3(T_0 - T_m)\frac{(t_n - t_0)(t_n - t_0 - \Delta t)(t_n - t_0 - 2\Delta t)}{3!} + ...$$

Cuando Δt es muy pequeño ($\Delta t \to 0$), cuando $n \to \infty$ $t_n = t$,

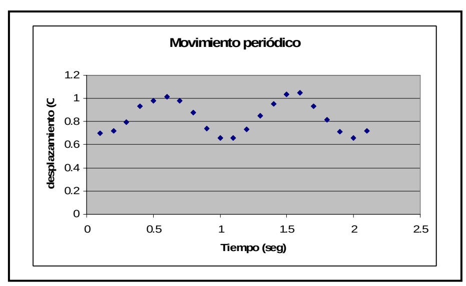
$$T_n = T_m + (T_0 - T_m) + k(T_0 - T_m)\frac{(t - t_0)}{1!} + k^2(T_0 - T_m)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + k^3(T_0 - T_m)\frac{(t - t_0)^3}{3!} + ...$$ Esta ecuación se obtiene con las diferencias finitas y el polinomio de interpolación de Gregory – Newton, reescribiendo la ecuación anterior como una serie exponencial se tiene entonces: $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$, donde, $T(t)$ T_m, T_0 representan la temperatura de un cuerpo, del medio ambiente y la temperatura inicial respectivamente.

Situación 2. Movimiento periódico

Movimiento de un resorte. En la tabla No.2, y la gráfica No. 2, tenemos los datos de los valores de desplazamiento y el tiempo, las primeras, segundas, terceras y cuartas diferencias

T(tiempo)	Y(desplaz)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.1	0.7009	0.0209	0.0523	0.0104	-0.156
0.2	0.7218	0.0732	0.0627	-0.146	0.2092
0.3	0.795	0.136	-0.083	0.0628	-0.104
0.4	0.931	0.0523	-0.02	-0.041	0.0316
0.5	0.9833	0.0314	-0.062	-0.01	0.0521
0.6	1.0148	-0.031	-0.073	0.0418	0.0418
0.7	0.9833	-0.104	-0.031	0.0836	-0.052
0.8	0.8787	-0.136	0.0523	0.0314	-0.041
0.9	0.7427	-0.083	0.0837	-0.01	-0.02
1.0	0.659	0	0.0732	-0.0311	-0.02
1.1	0.659	0.0732	0.0418	-0.052	0.0418
1.2	0.7323	0.115	-0.01	-0.01	-0.041
1.3	0.8473	0.1046	-0.02	-0.052	0.00025
1.4	0.952	0.0837	-0.073	-0.052	0.1775
1.5	1.0357	0.0104	-0.125	0.1253	-0.114
1.6	1.0461	-0.115	-0.00004	0.0104	0.0313
1.7	0.931	-0.115	0.0104	0.0418	0.0209
1.8	0.816	-0.104	0.0523	0.0627	
1.9	0.7113	-0.052	0.115		
2.0	0.659	0.0627			

Tabla No. 2. Movimiento de un resorte



Gráfica No. 2

Se puede predecir el valor del desplazamiento para un tiempo determinado, mediante la interpolación:

$$y(t_k) = (1+\Delta)^k y_0 = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0 . + etc$$

$$y(8) = 0.7009 + 0.8(0.0209) + \frac{0.8(0.8-1)}{2!}(0.0523) + \frac{0.8(0.8-1)(0.8-2)}{3!}(0.0104) +$$

$$+\frac{0.8(0.8-1)(0.8-2)(0.8-3)}{4!}(-0.156). + .. = 0.862244$$

Considerando que $\begin{array}{l} t_k = t_o + k\Delta t \\ k = \dfrac{t_k - t_o}{\Delta t} \end{array}$, $k = \dfrac{8-0}{0.1} = 0.8$

Con estos procesos se puede predecir un movimiento periódico a través de la predicción e interpolación, además el análisis de los datos nos proporciona información de conceptos de cálculo (pendiente, concavidad, periodicidad de la curva).

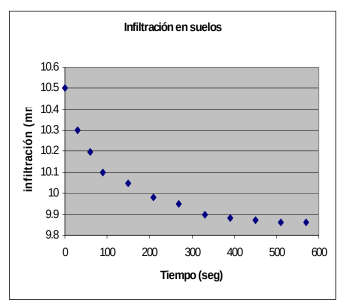
<u>Situación 3. Proceso de infiltración de agua en suelos</u>

Se realizaron mediciones de la infiltración de agua (penetración de la profundidad) de un suelo formado por caliche Los datos forman una gráfica con pendiente variable, es decir, tiene un comportamiento de forma exponencial con pendientes negativas tendiendo a un valor constante de f_c llamado constante de saturación. De los datos obtenidos del experimento de infiltración de agua en suelos se utilizó la herramienta de interpolación y la predicción para la modelación matemática con la finalidad de predecir la infiltración de agua en un suelo con respecto a un tiempo determinado (tabla No. 3 y en la gráfica No.3).

Proceso de infiltración de agua en suelos

t(s)	h(mm)	Δh	$\Delta^2 h$	$\Delta^3 h$	$\Delta^4 h$	$\Delta^5 h$
0	10.5	-0.2	0.1	-0.1	0.15	-0.27
30	10.3	-0.1	0	0.05	-0.12	0.25
60	10.2	-0.1	0.05	-0.07	0.13	-0.25
90	10.1	-0.05	-0.02	0.06	-0.12	0.23
150	10.05	-0.07	0.04	-0.06	0.11	-0.18
210	9.98	-0.03	-0.02	0.05	-0.07	0.08
270	9.95	-0.05	0.03	-0.02	0.01	0.01
330	9.9	-0.02	0.01	-0.01	0.02	
390	9.88	-0.01	0	0.01		
450	9.87	-0.01	0.01			
510	9.86	0				
570	9.86					

Tabla No. 3. Proceso de infiltración de agua en suelos



Gráfica No.3.

Con el binomio de Newton en la forma de interpolación se llega a predecir la infiltración de agua en tipo de suelo, como se muestra en el siguiente cálculo.

$$h(t_k) = (1+\Delta)^k h_0 = h_0 + k\Delta h_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 h_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 h_0 +$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 h_0 . + etc$$
$$h(150) = 10.5 + 5(-0.2) + \frac{5(5-1)}{2!}(0.1) + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(-0.1)$$
$$+\frac{5(4-1)(5-2)(5-3)}{3!}(0.15) + etc.. = 10.25mm$$

Considerando que $\begin{matrix} t_k = t_o + k\Delta t \\ k = \dfrac{t_k - t_o}{\Delta t} \end{matrix}$, $k = \dfrac{150-0}{30} = 5$

Estos datos y cálculos para predecir la infiltración de agua en suelos nos dan elementos de análisis como obtienen Widdstoe (1921) y Horton (1940). Esta forma de ver a la matemática consideramos que está proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar (Hernández, 2006a).

Conclusiones

En el manejo de los datos obtenidos a partir de los diferentes experimentos, el uso y desarrollo de herramientas como la interpolación se dio en el marco de la práctica de predicción. Ello favorece una reconstrucción del cálculo escolar normada por el desarrollo intencional de prácticas en el salón de clases de tal manera que conceptos como el binomio de Newton y la serie de Taylor puedan tener un desarrollo más significativo que la memorización de sus elementos. Habrá que desarrollar alguna situación que articule dichos experimentos para una resignificación de ambos conceptos.

Referencias Bibliografía

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como procesos de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). *Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study.* Educational Studies in Mathematics 58, 299-333.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hernández, H. (2003). *Una epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(2), 594-600.

Hernández, H. (2006a). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Hernández, H. (2006b). *El papel de la interpolación y la predicción en el cálculo*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19(1), 786-792.

Muñoz, G. (2000). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2), 131-170.

Gardner, W., Widstoe, J. (1921). *The movement of soil moisture.* Soil Sci. 11:215-232.

Horton, R. E. (1940). *An approach to the physical interpretetion of infiltration capacity.* Soil Sci. AM. Proc. 5, 399-417.

SOBRE LA CONSTRUCCIÓN ESCOLAR DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: LA TRANSICIÓN $grados \to radianes \to reales$

Claudia Leticia Méndez Bello, Gustavo Martínez Sierra, Elika Sugey Maldonado Mejía
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (México)
claudia_mendez_bello@yahoo.com.mx, gmartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: gráfica y funciones. Nivel educativo: medio superior y superior
Palabras clave: convención matemática, función trigonométrica, radián

Resumen
El concepto de función ha sido objeto de estudio de numerosas investigaciones. En algunas de ellas se han analizado específicamente los diferentes tipos de función, como las algebraicas y las trascendentes, y han dado muestra que poseen una naturaleza específica y por ende producen fenómenos didácticos distintos. En particular, la presente investigación que tiene como objetivo, estudiar la construcción escolar de la Función Trigonométrica y en específico, la transición $grados \to radianes \to reales$. Presentamos aquí nuestros primeros resultados.

Introducción

Investigaciones realizadas alrededor del concepto de función han dado muestra que cada tipo de ellas tienen una naturaleza específica, en la cual pueden observarse fenómenos didácticos a su vez específicos. Por ejemplo alrededor del concepto de función mencionamos las investigaciones de Lezama (1999, 2003) y Martínez-Sierra (2000, 2003), con respecto a la función logaritmo a Ferrari (2001) y alrededor de las funciones trigonométricas a Maldonado (2005) y a Montiel (2005).

Para nuestra investigación ubicamos nuestro interés en la Función Trigonométrica (FT). Escolarmente en la construcción de la FT se trata, entre otras cosas, el triángulo, círculo trigonométrico, medición de ángulos (presentados regularmente en grados y radianes) y razones trigonométricas y al momento de mencionar a la FT como una función real de variable real, el argumento x de $sen\ x$ es dado como un número real, para satisfacer que sea una función que va del conjunto de números reales al conjunto de números reales.

Analizando investigaciones recientes referentes a la FT, hemos corroborado que existen diferentes concepciones por parte de estudiantes del Nivel Medio Superior (NMS) al enfrentarse con la transición (conversión) de $grados \to radianes$ y la transición (equivalencia) $radianes \to reales$. Al estudiar cómo se construye la FT centraremos nuestra atención en la transición por la que pasa el argumento x de $sen\ x$, es decir, por qué x pasa de ser una medida angular expresada en el sistema sexagesimal (cuya unidad de media es el grado) para convertirse a la expresión dada por el sistema cíclico (en la cual su unidad de medida es el radián) y así ser considera como un número real para que $sen\ x$ sea una función real de variable real.

Para cumplir el objetivo anterior nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo se construye escolarmente la Función Trigonométrica?, y de forma específica, ¿Cuáles son los fenómenos didácticos que se producen en el tratamiento de la transición $grados \to radianes \to reales$ por la que pasa x de $sen\ x$? La hipótesis básica es que estos fenómenos pueden explicarse mediante la noción o proceso de la Convención Matemática (CM) (Martínez-Sierra, 2003, 2005).

Marco teórico

De manera general, nuestra investigación encuentra su marco de referencia en dos líneas de investigación: *desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* (Cantoral y Farfán 1998) y el estudio de los *procesos de convención matemática como generadores de conocimiento* (Martínez-Sierra 2005). En la primera buscamos determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio, algunos estudios se han referido específicamente al estudio de la construcción de la noción de función. En este ámbito es que surge la idea de un proceso particular de construcción de conocimiento: la convención matemática. En esencia se busca identificar y caracterizar los procesos de convención matemática en la construcción de saber matemático con referencia especifica en las matemáticas de la variación y el cambio (Martínez-Sierra, 2005). En términos generales la Socioepistemología centra su atención en la caracterización de "aquello que permite la construcción del conocimiento matemático". La Convención Matemática aísla las características de un mecanismo particular de construcción de conocimiento.

> *La convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados al momento de la integración sistémica de un conjunto de conocimientos y puede tomar la forma de una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras* (Martínez-Sierra, 2003).

Metodología

Hemos considerado realizar diversos análisis sobre programas de estudio y libros de texto, diseñar y aplicar un cuestionario a profesores de NMS, así como diseñar una actividad matemática con base a lo que encontremos en nuestro análisis didáctico y trabajarla con estudiantes del NMS. Por el momento los criterios que hemos tomado en cuanta para ubicar y analizar los libros de texto es que esos libros los usan profesores y estudiantes del NMS y NS para el tratamiento de la FT. Los puntos que consideramos para el análisis didáctico son: la forma de definir la medida angular en ambos sistemas (sexagesimal y cíclico), cuál es la razón para la conversión $grados \rightarrow radianes$, cómo es el transito de $radianes \rightarrow reales$, y cuál es la justificación de tales transiciones para la graficación de las FT.

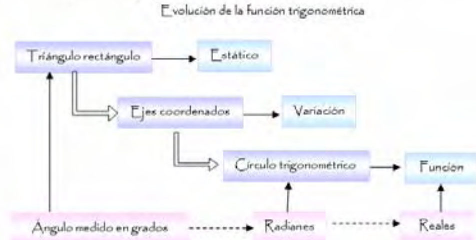
Estado del arte

En Maldonado (2004) y Montiel (2005), a pesar de que en sus investigaciones analizaron a la FT de forma general, notaron que no es explícito el proceso por el que pasa el argumento de la FT. Para esto nosotros centraremos la atención justamente en la transición $grados \rightarrow radianes \rightarrow reales$ por la que pasa x. En seguida mencionaremos investigaciones recientes que han tenido como objeto de estudio temas relacionados sobre el tratamiento de la FT, las aportaciones que éstas brindan a nuestro trabajo y de manera breve cómo realizan su investigación. Uno de los criterios que usamos para ubicar las investigaciones relacionadas con nuestro interés es que las investigaciones precedentes a nuestro trabajo, contienen temas de Geometría Plana (medición de ángulos, ángulo, triángulo, círculo, la medida angular denominada grado sexagesimal, el sistema cíclico conocida su unidad de medida como radián) y Trigonometría (círculo trigonométrico, funciones trigonométricas, triángulo rectángulo) dado su contenido temático.

Martínez y Rodríguez (2005). Con la intención de dar cuenta del discurso y vida escolar de los conceptos de ángulo, ángulo negativo, ángulos mayores de 360º, razones y FT, realiza un análisis de libros de textos utilizados por profesores y alumnos, además diseñan un cuestionario con base en lo encontrado tras su análisis didáctico y lo aplican a diecinueve estudiantes. Al confrontar sus análisis didáctico y cognitivo encuentran: que los fundamentos para tratar los temas de su interés no son muy amplios, la mayoría de los estudiantes asumen la inexistencia de ángulos negativos y mayores de 360º, solo tres de diecinueve estudiantes pudieron relacionar a las FT con sus gráficas y notan una dislexia[*****] tras la confrontación.

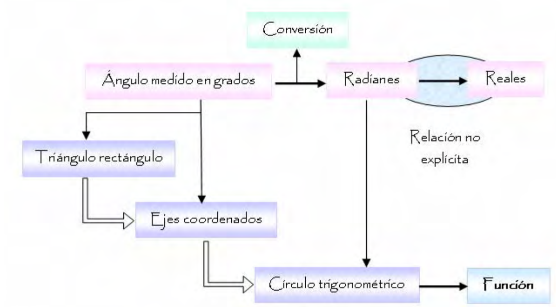
Navarro (2004). Ella diseña una *ingeniería didáctica* para abordar el tema de funciones con la intención de resarcir la ruptura conceptual entre las gráficas de las funciones algebraicas y trigonométricas. En su investigación reporta concepciones que tienen profesores para graficar una FT dado que no comprenden el uso que tiene el grado y el radián. Presenta los límites especiales $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$, y realiza un análisis sobre los libros de textos que aparecen en los programas de estudios del NMS. Uno de los fenómenos que observó es que la mayoría de las formas para abordar los límites singulares consideran al ángulo medido en radianes (autores señalan que, si dicho ángulo fuera medido en grados, entonces no se cumple que tales límites tengas los valores de 1 y 0, según sea el caso, Navarro, 2005). Al abordar a las FT y las relaciones con las funciones algebraicas, consideró *números medidos en radianes y en reales* para que al graficar pudiera observar que ambos tipos de números están sobre el eje *x*, dado que en el transcurso de la aplicación de un cuestionario preliminar, a algunos profesores esto se les dificultó.

Maldonado (2005). Enfoca su interés en inferir la presencia de la FT en el medio escolar. Para esto, ella realiza un análisis sobre los programas de estudio del NMS con el fin de detectar los objetivos y propósitos planteados, así como de libros de texto que son utilizados para el estudio de la FT con el propósito de mirar cómo es su tratamiento ubicando que tipo de ejercicios, conceptos, definición y ejemplos presentan antes y después. Con la finalidad de indagar sobre la vida escolar e inferir sobre la concepción que queda en el estudiante sobre la FT y con base en el resultado de su análisis didáctico diseña y aplica un cuestionario a estudiantes del NMS. De acuerdo a su análisis didáctico la autora reporta que antes de mencionar a la FT como función real de variable real, la definen como razón que *involucra a los ángulos medidos en grados, después realizan la conversión de estos ángulos para pasar a los radianes en el círculo unitario*. Al analizar los cuestionarios que aplicó a los estudiantes muestra que algunos de ellos al usar la calculadora les era indiferente teclear los ángulos en grados que en radianes.
Con intención de dar una visión global del tratamiento escolar que tiene la FT, es decir, observar por cuáles contenidos se debe pasar antes de llegar a la FT como una función real de variable real, la autora proporciona un esquema donde representa la evolución de la FT.



[*****] Dislexia: una confrontación entre concepciones que representan los libros de texto y los alumnos (citado en Martínez y Rodríguez, 2005).

Con base en sus análisis, concluye que es en las concepciones de los estudiantes y en libros de texto donde se refleja que no es explícita, en el medio escolar, la relación que existe entre los radianes y los reales para poder a través de ello definir a la FT como una función real de variable real. Y es mediante el siguiente esquema donde hace reflejar la vida escolar de la FT.



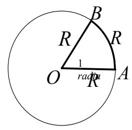
Montiel (2005). En su investigación atiende al fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la FT. Respecto al análisis que realiza Montiel retomaremos lo expuesto Spivak (1992): "*El método más antiguo consiste en «medir ángulos en grados». Un ángulo «todo alrededor» se asocia a 360, un ángulo de «mitad de vuelta» se asocia a 180, un ángulo de «un cuarto de vuelta» a 90, etc. El ángulo asociado de esta manera al número x recibe el nombre de «ángulo de x grados»*". "*Este enfoque presenta dos dificultades. Aunque puede estar claro lo que entendemos por ángulo de 90 o 45 grados, no está del todo claro qué cosa es un ángulo de, por ejemplo, √2 grados. Aun cuando se pudiera obviar esta dificultad, no es probable que el sistema, al depender como depende de la elección arbitraria de 360, conduzca a resultados tan elegantes; sería pura casualidad que la función sen tuviera propiedades matemáticamente agradables*". Y según este enfoque es la ***medida en radianes* la que parece ofrecer el remedio para los dos defectos mencionados.**
De acuerdo al análisis didáctico realizado por Montiel distingue seis etapas, las cuales de igual manera que los esquemas expuestos por Maldonado, proporcionan el proceso o la construcción escolar por la que pasa la FT para considerarse como una función real de variable real. Estas etapas son: **Etapa escolar 1.** Sobre los ángulos: clasificación, unidad de medida, ángulos dirigidos. **Etapa escolar 2.** Sobre los triángulos: clasificación, propiedades, razones trigonométricas, solución de triángulos, las razones trigonométricas en el plano y sus signos de acuerdo a su posición. **Etapa escolar 4.** El círculo trigonométrico: círculo unitario, ángulos - arcos, conversión de unidades ↔ grado → radian real, graficación de la función trigonométrica.

Análisis de algunos libros

En seguida mostraremos de manera muy breve lo encontrado tras nuestro análisis de libros de texto, donde expondremos textualmente lo escrito en los libros de texto analizados. En general hasta el momento, en los libros de texto analizados, no se hace explícito el transito de $radianes \rightarrow reales$, y se hace notoria la existencia de las CM, en frases como "*se acostumbra omitir la palabra radianes*".

Trigonometría plana y esférica (Granville, 2003).

> Medida circular. *En este sistema la unidad es el radián, que es el ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es igual a la longitud del radio del círculo.*



$$ángulo\ AOB = 1\ radián$$

La *medida circular* de un ángulo es su magnitud expresada en función de su radio y tiene la ventaja de que la longitud de un arco cualquiera tiene la misma medida en radios que el ángulo correspondiente en radianes. Este sistema fue introducido en los comienzos del siglo pasado. En la actualidad se usa bastante en los trabajos prácticos, y su empleo es universal en las ramas avanzadas de las matemáticas. En este libro se usarán ambos sistemas. Por lo tanto,

$$2\pi\ radianes = 360^o,$$

$$\pi\ radianes = 180^o,$$

$$1\ radián = \frac{180^o}{\pi} = \frac{180^o}{3.141593},\ o\ sea,$$

$$1\ radián = 57.2958^o = 57^o 17' 44{,}8''$$

Al escribir las funciones trigonométricas de los ángulos expresadas en medida circular se acostumbra omitir la palabra "radianes", así:
$sen\ (\pi\ radianes)$ se escribe simplemente $sen\ \pi$ y es lo mismo que $sen\ 180^o$.

Trigonometría plana (Niles, 1994).

Definición: Un radián es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan u arco de circunferencia de longitud igual al radio.

$$1\ radián = \frac{180^o}{\pi} = 57.3^o \quad aprox.$$

, consideradas cómo fórmulas para la conversión.

$$1^o = \frac{\pi}{180^o} = 0.0175\ \ radianes.$$

El estudiante debe adquirir práctica para convertir rápidamente de grados a radianes y viceversa; tal conversión puede hacerse mediante el uso de las fórmulas. Con frecuencia, un ángulo en radianes se expresa como fracción de π; por ejemplo, $60^o = \pi/3$ radianes.

Si no se estipula la unidad de medida de 30 es un ángulo de 30 radianes, en tanto que un ángulo de 30º, es uno de 30 grados.

Sea u un número real y θ un ángulo dirigido medido en radianes. De la relación $T(\theta) = T(u)$, se obtiene: $sen(180^o) = sen(\pi)"radianes" = sen(\pi)$ y

$$\tan 3 = \tan 3(radianes) = \tan\left[3\left(\frac{180^o}{\pi}\right)\right] = \tan 171.9^o$$

"Si al expresar el argumento no se utiliza ningún símbolo quiere decir que el argumento es un ángulo expresado en radianes o un número real; esto es, sen 30º es "el seno de un ángulo de 30 grados", en tanto que sen 30 es "el seno de un ángulo de 30 radianes" o "el seno de un número real 30"

Consideraciones finales

De acuerdo a lo mencionado aquí consideramos que podemos ubicar, describir y dar explicación a los fenómenos didácticos que ocurren respecto a la transición $grados \rightarrow radianes \rightarrow reales$, tras un estudio que reporte su vida escolar y proporcionar explicaciones mediante el proceso de CM. En particular hemos notado que en los libros de texto consultados el tránsito de radianes a reales es ambiguo e impreciso y suponemos que esto es así debido a la falta de conciencia de la convención matemática presente.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México, DF, México: Pearson Educación

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Granville, W. (2003). *Trigonometría plana y esférica*. México: Limusa.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Martínez-Sierra, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación Sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 5(1). pp. 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 8(2). pp. 95-218

Martínez, J. y Rodríguez, P. (2005). *La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º y sus Funciones Trigonométricas. (Un estudio en el nivel medio superior*). Tesis de licenciatura no publicada, CIMATE, Guerrero, Chilpancingo, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites* $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ *y* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Niles, N. (1994). *Trigonometría plana*. México, D.F., México.: Limusa

Spivak, M. (1992). *CALCULUS. Cálculo Infinitesimal*. España: Reverté.

ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LOS PROCESOS DE MATEMATIZACIÓN DE LA PREDICCIÓN EN LA ADMINISTRACIÓN INDUSTRIAL

Eduardo Ortiz Hernández, Germán Muñoz Ortega
Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
pitagoras31@hotmail.com ; yaltzil@unach.mx

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: administración, calidad, predicción, estadística, socioepistemología

Resumen
Los procesos de modernización en el mundo industrial que han generado mayor productividad están anclados en el empleo de los métodos estadísticos. Como se originó esta simbiosis y su relación con la variación y la predicción es una primera vertiente que revisamos en éste artículo. Explicamos como otros orígenes y desarrollos dieron lugar al cálculo de probabilidades y paralelamente destacamos como el método estadístico da sustento al surgimiento de las ciencias sociales relacionadas con el manejo de datos y toma de decisiones como lo son la demografía, la economía, las finanzas...Así, de acuerdo a nuestra investigación sostenemos que para lograr pensar estadísticamente en el contexto de la administración industrial se requiere como condición un análisis de los procesos de variación y cambio y las necesidades de predecir la evolución ulterior de las variables involucradas en un sistema industrial.

Introducción

Los nuevos desarrollos curriculares de las carreras de administración y contabilidad han incluido con mayor énfasis, la enseñanza de las matemáticas, en particular el cálculo de probabilidades y la estadística. Pero resolver problemas del plano inclinado en física o calcular las fuerzas de gravitación en la astronomía poco tiene que ver con las ciencias sociales, en particular con la administración y la contabilidad. Calcular el "progreso nacional" en términos de desarrollo económico e industrial es mucho mas complicado. Aquí están involucradas miles de voluntades humanas junto con sus miserias, los recursos naturales, las relaciones entre países, los efectos de las guerras y su efecto en los precios de las materias primas y muchos factores más. La administración es gobernar, regir, usar eficientemente los recursos de una empresa u organización para el logro de sus objetivos (Larousse, 2000). Es una ciencia compuesta de principios, técnicas y prácticas cuya aplicación a conjuntos humanos permite establecer sistemas racionales de esfuerzo cooperativo, a través de los cuales se pueden alcanzar propósitos comunes que individualmente no se pueden lograr en los organismos sociales. El estudio de la variación presente en la operación de los sistemas de producción industrial se logra mediante un método matemático nuevo por completo, el método estadístico (Gutiérrez & De la Vara, 2004).

Pero ¿cómo ha funcionado el cálculo de probabilidades y la estadística desde su origen hasta su época actual en la ciencia de la administración?, ¿De que forma se enseña en el ámbito escolar e industrial? Estos son aspectos que estudia la Matemática Educativa, ya que es su función explicar como se construyen estos conocimientos y como ingresan al sistema escolar. Entonces también nos preguntamos ¿Cómo el cálculo de probabilidades y la estadística que tienen sus orígenes en la práctica social de predecir, se integra a otras prácticas sociales en comunidades industriales asociadas a la administración de empresas? El marco teórico para revisar esta pregunta es la socioepistemología, que nos brinda una aproximación teórica cuya tesis primordialmente plantea dar cuenta del conocimiento a través de las prácticas sociales de los grupos humanos que los posibilitaron, y la transformación de estas prácticas cuando existe una intencionalidad para que el saber matemático ingrese al sistema didáctico (Arrieta, 2003).

Algunas investigaciones en socioepistemología han dado evidencia del papel crucial de la predicción en la reconstrucción del Cálculo diferencial e integral con fines de enseñanza (Alanís, 1996; Cantoral, 2001; Muñoz, 2005).
A través de esta aproximación teórica planteamos la hipótesis de que: La matemática que utiliza la ciencia de la administración en especial la probabilidad y la estadística están ligadas a la predicción como práctica social y a los procesos de variación y cambio en los sistemas industriales. Reportamos algunas evidencias que hacen plausible nuestra hipótesis a través de analizar tres líneas de desarrollo histórico de la probabilidad y la estadística: a) el control estadístico de calidad, creado en el mundo de la industria como respuesta a los problemas de producción generados por la variación en los procesos b) El desarrollo del cálculo de probabilidades como una rama de la matemática a partir de los juegos de azar y c) las aplicaciones estadísticas en el universo de las sociedades humanas: la demografía, la economía, las finanzas (y demás ciencias sociales) que dan a la estadística el estatus de ser una ciencia vital para el funcionamiento del Estado y el diseño de las políticas públicas.

Calidad y administración industrial: antecedentes históricos

En la época artesanal el concepto de calidad estaba asociado con hacer las cosas bien y ello independientemente del costo o esfuerzo del artesano. Esto implicaba reconocer al artesano por el trabajo bien elaborado y se creaba un producto único.
En la Revolución Industrial se trataba de satisfacer los nuevos mercados con gran demanda de bienes y esto implicaba producir mucha mercancía no importando su calidad. En esta etapa de la historia se identifica calidad con producción.
La Segunda Guerra Mundial modifica el concepto de la calidad: se trata de que el armamento sea eficaz pero además que se produzca en forma masiva, en la cantidad y en el momento preciso. En la Posguerra hay que diferenciar lo que ocurre en Japón y en el resto del mundo. En Japón gracias al trabajo de dos matemáticos norteamericanos Joseph Juran y Edwards Deming, la calidad implica hacer las cosas bien a la primera vez reduciendo las variaciones en los procesos y los costos y de acuerdo a los requisitos del cliente. Esto para ser cada vez más competitivos. En el resto del mundo se trata de satisfacer la gran demanda de bienes después de la guerra ante el crecimiento de las economías europeas y norteamericanas.
Aparece el control de calidad como una técnica de inspeccionar la producción para impedir la salida de producto defectuoso. Se trata de cumplir con los requerimientos técnicos del producto.
La Calidad Total es una teoría administrativa en que se combinan el conocimiento y la acción. Exige trabajo en equipo de todos en la empresa. Su objetivo es la permanente satisfacción del cliente tanto externo como interno. Empieza con educación para todos y termina con educación para todos. Promueve la mejora continua (Cimat, 2005; Evans & Lindsay, 2005).

Génesis histórica de los métodos estadísticos en las ciencias sociales

En el siglo XVII inician las aplicaciones estadísticas a las ciencias sociales. El señor John Graunt acaudalado propietario inglés inicia el registro de información demográfica que parecía tener un comportamiento puramente al azar, pero al ser analizados por Graunt presentan una sorprendente regularidad. Todo ello John Graunt lo procesó en 1662 en su histórico texto "Observaciones naturales y políticas...basadas en los registros de mortalidad" -Natural and political observations…upont the bills of mortality- , (citado en Kline, 2000 p. 497).

Graunt abre las ciencias sociales al método estadístico, al método científico, y con ello la estadística hace honor a su nombre, datos para el Estado, paralelamente funda una de las ciencias básicas para el diseño de políticas públicas, la demografía.
En el siglo XIX L.A.J. Quetelet elaboró y empleo métodos estadísticos adaptados a las investigaciones sociales y sociológicas. En 1848 presenta ante la Real Academia de Bélgica su memoria *De las estadísticas de la moral*.
Morris Kline en su excelente texto de las Matemáticas para Estudiantes de Humanidades plantea una pregunta que hace la diferencia entre las grandes áreas de la matemática y la Estadística en cuanto al método científico de trabajo:
¿En qué difiere el método estadístico del método deductivo?
El enfoque estadístico de un problema es antes que otra cosa una confesión de ignorancia. Cuando ni los experimentos, ni la observación, ni la intuición nos conducen a los principios fundamentales que pudieran utilizarse como premisas para desarrollar cadenas de razonamiento, nos volvemos a los datos y tratamos de recoger cuanta información sea posible sobre lo que ha ocurrido. Quizás, remata Kline, "…la diferencia más importante entre el método deductivo y el método estadístico se halle en que este último nos dice lo que ocurre con grandes grupos pero no permite hacer predicciones definidas sobre lo que ocurrirá en un caso dado, particular , mientras que el primero predice precisamente lo que debe ocurrir en cada caso…" (Kline, 2000).

El origen de la probabilidad
La historia refiere que un jugador llamado el Chevalier de Méré, en el siglo XVIII quería obtener algunos informes sobre el juego de dados y estableció contacto con Blais Pascal, un apacible y religioso personaje, alejado del mundo de los juegos de azar, el que a su vez, escribió al celebre Pierre Fermat, consejero parlamentario de la ciudad de Toulouse, y es en ésta correspondencia donde surgió por primera vez la teoría de las probabilidades. Mark Kac en su excelente texto escrito para la colección de Scientific American llamada Matemáticas en el Mundo Moderno nos detalla lo que siguió después con las probabilidades. Dice Kac que Laplace desarrolla la teoría de las probabilidades sobre el análisis combinatorio, que se denomina a veces "contar sin contar", y escribe su libro Teoría Analítica de las Probabilidades en el que trata de fundamentar la nueva ciencia. Pero después de este autor, el interés por esta ciencia casi desapareció por completo en todo el siglo XIX y las primeras dos décadas del siglo XX como disciplina matemática (Selecciones de Scientific American, 1974).

Un nuevo lenguaje industrial: su majestad la estadística
En el área industrial y específicamente en el de las empresas de manufactura se define calidad como el resultado deseable de una práctica de ingeniería y manufactura, es decir, de cumplimiento de especificaciones. Las especificaciones son metas y tolerancias determinadas por los diseñadores de los productos y de los servicios.
La variación en los procesos se presenta debido a diversos factores que se resumen en las 6M´s: materiales, máquinas, medición, mano de obra (gente), métodos y medio ambiente. Estos factores sufren desajustes a través del tiempo producto de la operación, afectando al proceso en general.
Existen dos tipos de variaciones, la variación común e inherente al proceso, es al azar y es la que se presenta día a día, jornada tras jornada, lote a lote; la aportan las 6M´s en su diario accionar. A largo plazo representan una mayor oportunidad de mejora ya que la acumulación

de pequeñas variaciones que generan las 6M´s son bastante difíciles de poder detectar y eliminar. El otro tipo de variación se le llama variación por causas especiales o atribuible, la cual es provocada por situaciones o circunstancias especiales que no son permanentes en el proceso, por ejemplo, la acción de un operario que no está capacitado, o el uso de materiales defectuosos en el proceso. Las causas que provocan estas variaciones se pueden localizar y eliminar mediante herramientas estadísticas, en virtud de su naturaleza relativamente discreta.

Un proceso que esta en Control Estadístico es aquel que trabaja solo con causas comunes de variación o que su variación a través del tiempo es estable.

"*La predicción del futuro inmediato del proceso es en el sentido de que su tendencia central y la amplitud de su variación se espera que se mantengan al menos en el corto plazo, esto independientemente de que su variación sea mucha o poca. Un proceso en el que se presentan causas especiales de variación se dice que esta fuera de control estadístico (es inestable). Este tipo de procesos no son predecibles, son impredecibles sobre el futuro inmediato porque en cualquier momento pueden aparecer de nuevo esas situaciones que tienen un efecto especial sobre la tendencia central o sobre la variabilidad*" (Gutiérrez & De la Vara, 2004).

Cuando no se sabe distinguir sobre estos tipos de variación se cometen serios errores en la operación en la planta y la estadística nos dice que se presentan dos tipos de errores: el error tipo I (alfa) y el error tipo II (beta).

El error tipo I: se presenta al confundir el efecto o cambio como provocado por la variación especial cuando en realidad es producido por una variación de naturaleza común.

El error tipo II: Tratar un efecto o cambio en el proceso como si fuera variación común cuando en realidad es provocada por una causa especial o asignable, como también se le llama.

Estos errores, como todos los errores, son costosos. Se puede evitar uno u otro, pero no se pueden eliminar ambos. Y para no cometerlos, el doctor Walter Shewhart creó en 1924 las cartas de control.

La presencia de variación y por ende la presencia de estos errores en el mundo de las actividades de la planta industrial genera reacciones que tienen que ver con los hábitos de acción y dirección, es decir, con la praxis y la toma de decisiones.

Cuando se presenta el error tipo I hay generalmente una sobre reacción, se actúa con las vísceras y todos corren ante la presencia de cambios, hay enojo y reclamo a los trabajadores ante cualquier problema que se presente. Se ignora que las soluciones del grueso de los problemas en una organización están fuera del alcance de los trabajadores (Gutiérrez & De la Vara, 2004).

Las consecuencias de todo esto es que se van a atacar los efectos provocados por las variaciones, pero inevitablemente los problemas se van a volver a presentar, produciendo más deterioro del clima de trabajo y de la producción. Es un círculo vicioso infernal que va destruyendo las capacidades de acción positivas sobre las causas reales. Cuando se presenta el error tipo II, aparece el Departamento de Ingeniería o Departamento Técnico para "ajustar" un proceso incapaz que se sale de especificaciones ante una variación excesiva de una variable, lo cual genera más variabilidad.

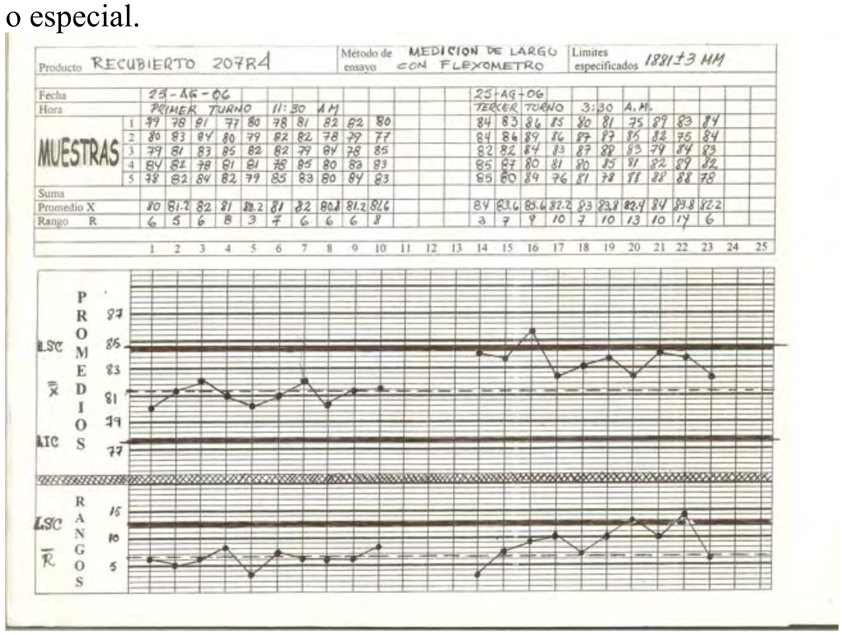
La alta administración tiene que hacer un alto y preguntarse ¿Qué efecto tiene lo que se hace? Y entonces comienza a aparecer esa distinción que caracteriza a la variabilidad, la de ser especial o común: Los problemas presentes se deben a una situación especial o son parte de una problemática general y común que prevalece en toda la empresa.

Las respuestas a estas preguntas solo es posible darlas utilizando como herramienta el pensamiento estadístico y el enfoque de procesos, en donde más que atender el resultado hay que atender y entender el proceso que los genera, trabajando para modificar el sistema, tomando en cuenta las variaciones usando para ello la herramienta de las cartas de control estadístico de procesos.

Vamos a ilustrar el proceso de aplicar la carta de control a un proceso de fabricación del piso de una llanta para automóvil, también llamado recubierto, efectuado en la Compañía Hulera Euzkadi. La dimensión de la longitud es clave en el proceso de construcción de la llanta, ya que excesivas variaciones generan llanta defectuosa con balanceo fuera de especificación. Se toman 5 mediciones por muestra o subgrupo a lapsos de 5 minutos, de tal manera que por cada muestra se tendrá una media y un rango que nos informarán sobre la tendencia central y la variación.

En la carta X se analiza la variación entre las medias de los subgrupos, para detectar variación excesiva o cambios en la media del proceso. La carta R revisa la variación entre los rangos de los subgrupos, y esto nos permite detectar cambios en la amplitud o variación del proceso.

Cuando indicamos que un proceso es estable quiere decir que el proceso es predecible sobre el futuro inmediato. La forma de operar con las gráficas es la siguiente: iniciamos el muestreo de subgrupos de tamaño cinco en un turno y con un operario que nos garantizan un proceso “limpio”, centrado y en control estadístico, predecible y con poca variación. A cada subgrupo le calculamos su media y su rango, luego calculamos el promedio de los promedios y el promedio de los rangos. Con base en el promedio de los promedios calculamos los límites de control superior e inferior de la gráfica de promedios y los límites de control de la gráfica de rangos. Los límites de control son las líneas oscuras que resaltan en la gráfica de abajo. Cartas con los límites trazados se entregan a los operarios para que controlen sus procesos. Ellos deberán tomar muestras cada cierto periodo de tiempo y verificar que sus promedios y sus rangos se encuentran dentro de los límites trazados, si no es así estamos ante la presencia de variación asignable o especial.



Veamos la siguiente parte de la gráfica que corresponde al turno de la madrugada, la media del proceso se movió y se encuentra por encima de la media exigida y esto está siendo provocado por variación excesiva en las longitudes de los recubiertos según nos refleja la gráfica de los rangos. La tendencia es a dispararse hacia arriba del promedio de 1881 mm con variaciones a partir de los cinco mm entre mediciones. Estamos ante un proceso fuera de control estadístico y que requiere acción inmediata. Los cálculos para el caso del recubierto de la llanta arrojaron los siguientes resultados:

$$\overline{\overline{x}} = 81.1,\ \ \overline{R} = 6.1,\ \ LSC_{\overline{X}} = 84.61,\ LIC_{\overline{X}} = 77.58,\ LSC_R = 12.89,\ \ LIC_R = 0$$

Conclusiones

En esta primera aproximación a los procesos de construcción de la probabilidad y estadística en sus vertientes históricas aquí reseñadas y que son fundamentales para entender su praxis y uso en la toma de decisiones en el mundo de hoy, hemos encontrado una ciencia matemática que vive fuera del mundo escolar y en acción ante la modelación de la evolución ulterior de los sistemas, así sea en la industria como en los servicios o en las áreas de competencia del Estado y sus políticas públicas. Un fenómeno que hemos hallado es la presencia de comunidades que articulan su práctica utilizando como lenguaje común la estadística. Ishikawa (1997) lo resume muy bien: "Hablemos con datos…" dice, y continua "…utilicemos los métodos estadísticos". En estas comunidades lo que ocurre es que no basta con conocer las herramientas y métodos estadísticos. Como dice Juran, hay que entender el papel de la estadística en las decisiones administrativas y esto solo se logra si los administradores piensan estadísticamente (Evans & Lindsay, 2005). Así de acuerdo a nuestra investigación para lograr pensar estadísticamente, en el contexto de la administración industrial, se requiere como condición un análisis de los procesos de variación y cambio y las necesidades de predecir la evolución ulterior de las variables involucradas en un sistema industrial, lo cual permite la construcción de éste herramental matemático nuevo (la estadística como lenguaje industrial) cuya significación está íntimamente ligada a las ciencias sociales y los sistemas industriales.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. A. (1996). *La Predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo.* Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Arrieta J. (2003) *Las prácticas de modelación como procesos de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav. México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la Analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cimat, (2005). Evolución del concepto de Calidad. Boletín Informativo No.12 en www.cimat.mx (versión de julio).

Evans J. & Lindsay W. (2005). *Administración y Control de Calidad.* México: Thompson Editores.

Gutiérrez H.& De la Vara R. (2004). *Control Estadístico de Calidad y Seis Sigma.* México: McGraw Hill.

Ishikawa, K. (1997). ¿Qué es el control total de calidad?. Bogotá: Ed. Norma

Kasner & Newmann.(1981) .*Matemáticas e Imaginación.* México: CECSA.

Kline, M. (2000). *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades.* México: FCE-Conacyt.

Larousse, (2000). Diccionario Larousse. México: Larousse.

Muñoz, G. (2005). Naturaleza de un campo conceptual del Cálculo infinitesimal: una visión epistemológica. *Acta Latinoamericana Matemática Educativa*18,589-595.

Selecciones de Scientific American, (1974). Con introducciones de Morris Kline. *Matemáticas en el Mundo Moderno.* Madrid: Editorial Blume.

LA DIDÁCTICA Y LA COGNICIÓN DE LOS ÁNGULOS NEGATIVOS Y MAYORES A 360º Y SUS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: UN ESTUDIO EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR[†††††]

Jorge Martínez Tecolapa, Gustavo Martínez Sierra
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
teco_mtz@yahoo.com.mx, gmartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: funciones. Nivel educativo: medio superior, superior
Palabras clave: convención matemática, concepciones, representaciones, ángulo

Resumen
El trabajo que desarrollamos en esta investigación tiene por objetivo analizar la relación que hay entre la didáctica y cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º. Para ello se hizo un análisis de libros de texto utilizados por los profesores y alumnos, se propuso un cuestionario que fue aplicado a 19 estudiantes de nivel medio superior con un promedio de edad de 18 años; para con ello analizar las relaciones entre el discurso matemático escolar, las concepciones y representaciones de los alumnos. Cabe señalar que nosotros entendemos al proceso de definición del significado de los ángulos negativos y mayores a 360 grados como un proceso de convención matemática (Martínez-Sierra, 2003, 2005) para que las funciones trigonométricas sean periódicas y tengan sentido en los reales.

Introducción y problema de investigación

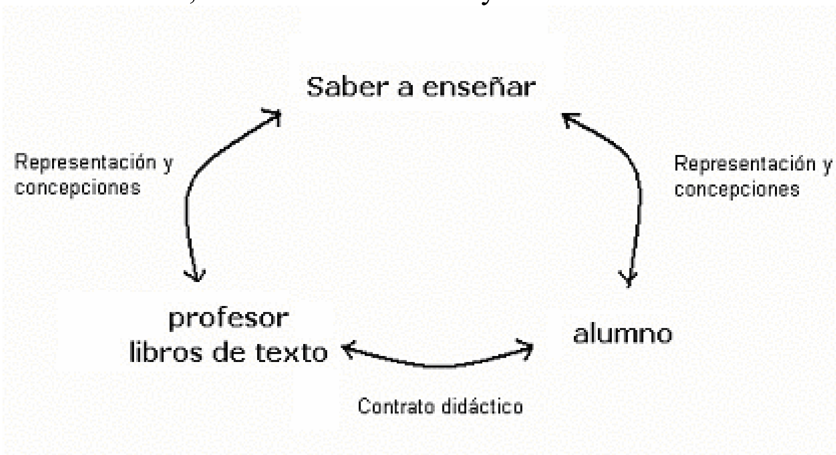
Las investigaciones en los últimos años referente a función han sido tratados desde diferentes perspectivas, pero recientemente algunos investigadores se han enfocado específicamente a las funciones trigonométricas tal es el caso de Montiel (2005) que presenta un estudio de la formación social de las funciones trigonométricas. Por otra parte Maldonado (citado en Montiel, 2005) que centró su atención en cómo vive la función trigonométrica en el sistema educativo mexicano, en distintos programas de estudio, e hizo una exploración en las concepciones de los estudiantes. Por otra parte Buendía (2004), trata las funciones como un estudio socioepistemológico (funciones y su periodicidad). Aunque las perspectivas son diferentes el objetivo es saber que acontece en el proceso epistemológico, didáctico y cognitivo en particular de las funciones trigonométricas.

En el contexto anterior nuestro problema de investigación surge de la necesidad de saber que fenómenos didácticos acontecen en el desarrollo del tema de ángulos (negativos y mayores a 360º) en el marco de las funciones trigonométricas. El presente trabajo plantea el problema de investigación como un análisis didáctico a través de libros de textos con el objetivo de adquirir conocimiento de cómo es el discurso matemático escolar, relacionado a los temas de ángulos y trigonometría; se centró principalmente en los temas de ángulos (ángulos negativos y ángulos mayores que 360°), razones trigonométricas y funciones trigonométricas interpretados por los estudiantes de preparatoria, así como el uso que hacen de algunos conceptos.

[†††††] La realización de este trabajo fue financiado por el Fondo Sectorial de Investigación para la educación SEP-CONACYT. Clave: SEP-2004-C01-46917.

Marco teórico y metodológico

Nuestra aproximación teórica descansa en la aproximación sistémica a los fenómenos didácticos. Es decir, consideramos que el objeto de estudio de la matemática educativa son los fenómenos didácticos que suceden en el sistema didáctico; en decir en el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos.



Desde el punto de vista anterior nuestro objetivo es analizar la relación que hay entre la didáctica y cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º y de sus funciones trigonométricas y el problema de investigación surge de la necesidad de saber que fenómenos didácticos acontecen en el desarrollo del tema de ángulos y trigonometría en torno al saber especifico; fenómenos ligados respecto a las diversas concepciones utilizadas en los libros de texto sobre ángulos, funciones y razones trigonométricas, además de la existencia de ángulos positivos y mayores a 360 grados.

Desde el punto de vista metodológico hemos realizado dos análisis:

1. Un análisis cognitivo que busca indagar las concepciones que tienen los alumnos del nivel medio superior referente al concepto de ángulo, razones y funciones, además de la vida escolar de las ángulos mayores a 360 grados y menores a cero ó negativos.

2. Un análisis didáctico acerca de ángulos y funciones trigonométricas a través de los libros de texto que son utilizados en el nivel medio superior; para ver las concepciones utilizadas en cada libro y el proceso de los temas llevados en ellos mismos.

Análisis didáctico

Los ángulos positivos o negativos lo relacionan con las manecillas de reloj, si la dirección del giro (indicado por una flecha curvilínea) es en contra de las manecillas del reloj, el ángulo así formado será positivo; y cuando la dirección de la flecha sea en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo será negativo; algunos libros no tratan ángulos negativos.

La mayoría de los libros trabajan ángulos mayores a 360º pero de diferentes formas y los demás restantes no hacen mención de ello; se trabaja como ángulo coterminales y cofinales, ángulos con mas de una reducción o simplemente mención de dichos ángulos; algunos dan formula para ángulos mayores de 360º.

En trigonometría hay una dislexia[‡‡‡‡‡] entre las relaciones trigonométricas existentes; ya que en los libros hay diversas concepciones en lo que es razón trigonométrica y función trigonométrica.

Para la graficación de las funciones las unidades de medida son los radianes y los grados, se trabaja con intervalos de 0 a 2π ó 0º a 360º; de los cuales los libros que dan una formula hacen referencia sobre la periodicidad de las funciones.

Análisis cognitivo

Se propuso un cuestionario que fue aplicado a 19 estudiantes de nivel medio superior con un promedio de edad de 18 años, para indagar sobre las concepciones que los estudiantes tienen, además del proceso que llevan referente al tema que se esta abordando en esta investigación; las actividades se referirían fundamentalmente a ángulos, ángulos negativos, ángulos mayores a 360º, razones y funciones trigonométricas.

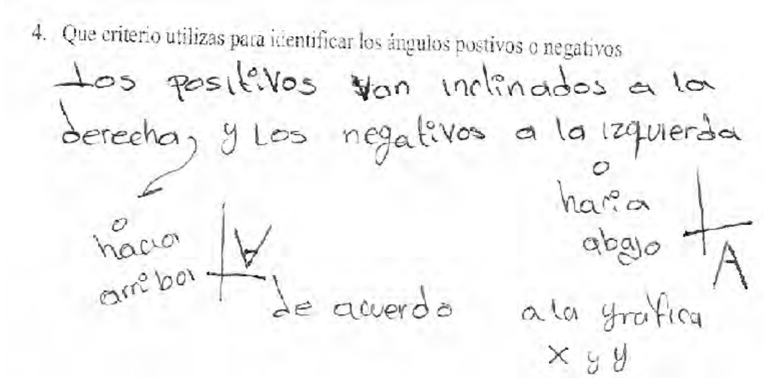
El cuestionario fue dividido en cinco secuencias en el cual se describieron los momentos claves del proceso llevado en los temas de ángulos y trigonometría.

La primera secuencia trata sobre la concepción de ángulo, ángulo de 0 a 360 grados y la utilización de medidas angulares. La segunda secuencia trata sobre ángulos negativos, así como criterios utilizados para su identificación. La tercera secuencia trata sobre ángulos mayores a 360º y su justificación, además de equivalencia de los sistemas de medición de medidas angulares. La cuarta secuencia trata sobre razones dadas en un triangulo rectángulo y sobre las funciones seno, coseno y tangente en los cuadrantes; además de reducción de expresiones relacionadas a seno y coseno. Finalmente la quinta secuencia trata sobre las funciones trigonométricas y sobre el comportamiento de las graficas concernientes a la periodicidad.

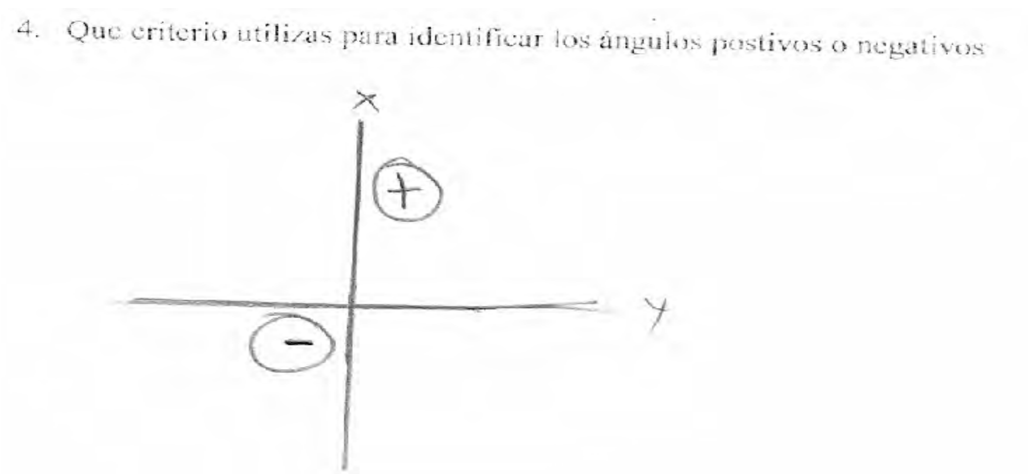
Al analizar cada una de las respuestas de los estudiantes, nos damos cuenta de que existen diversas concepciones entre algunos conceptos, así como en sus representaciones. En general, en la secuencia 1 podemos distinguir en cada estudiante una concepción diferente sobre el concepto de ángulo. De las definiciones dadas por los estudiantes podemos ver que sólo cuatro definiciones son semejantes a las que dan los libros.

En seguida llegamos a la conclusión de que a pesar que algunos estudiantes tienen una noción del concepto de ángulo cómo suele utilizarse en los libros tienen diferentes concepciones acerca de ángulos positivos y negativos, ya que de estas concepciones podemos concluir 2 criterios que ellos tienen para interpretar o representar ángulos positivos y negativos.

[‡‡‡‡‡] dislexia: lo tomaremos como una confrontación de conceptos o ideas adquiridas



El primer criterio es el siguiente: Un ángulo es negativo si este abre hacia la izquierda y positivo si este abre hacia la derecha y el segundo criterio: Un ángulo es negativo si esta construido a la izquierda del eje y positivo si esta construido a la derecha del eje y. Algunos estudiantes desconocen la existencia de ángulos negativos y mayores que 360º.



En la representación de las razones trigonométricas que es el tema principal de la trigonometría, vemos que existe una gran dislexia por parte de los estudiantes, ya que de los 19 estudiantes sólo uno; las representó.

En el estudio de las gráficas de las funciones trigonométricas, al igual que en las razones trigonométricas; la mayoría de los estudiantes no identifican cada función trigonométrica con su gráfica respectiva; sólo 3 estudiantes relacionaron correctamente cada función trigonométrica con su gráfica correspondiente, notamos que existen diferentes concepciones en el estudio de una gráfica; ya que la mayoría de los estudiantes asimila la inexistencia de ángulos negativos y mayores que 360º, ya que una de las propiedades de las funciones trigonométricas que en la mayoría de los libros se menciona es la periodicidad en ángulos mayores que 360º y en ángulos menores que 0º, representándolos con el círculo unitario en el plano cartesiano.

Conclusiones

Así llegamos una conclusión de que hay una confrontación entre concepciones dadas y establecidas en los libros y por los profesores, esto lleva también a una confrontación en los alumnos para asimilar una concepción establecida referente al tema dado.

Además que la confrontación de estas concepciones ha presentado un obstáculo en la enseñanza del alumno al no existir un convenio para la utilización de las concepciones mismas.

De acuerdo con ello también hemos resaltado la inexistencia de argumentos para ángulos negativos y mayores de 360º, además del comportamiento y la representación gráfica de las funciones estudiadas (periodicidad).

Referencias bibliográficas

Albarrán, D., Ávila, L., Avilés V., Bracho I., Casarrubias S., Fitz E., Manrique F., Marmolejo E., Muñoz A., Jiménez R., Vázquez F., (2001). *Geometría y trigonometría (UAG)*. México: Editorial Limusa.

Ayres, F. (1984). *Trigonometría plana y esférica* (Serie Scham). México: Editorial Mc Graw Hill.

Bruño, G. (1961). *Elementos de trigonometría*. México, DF: Editorial enseñanza S. A.

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de practica sociales (un estudio socioepistemológico). Tesis de doctorado sin publicar, México, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Cantú, H., Galicia, M., Paz, H. (1983). *Matemáticas IV (funciones circulares)*. México: SEP (Preparatoria abierta).

Farfán, R. M (1998). Pe*rspectiva y métodos de investigación en matemática educativa*. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica*. *Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría sin publicar, México, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Guzmán, A. (2003). *Geometría y trigonometría (bachilleres)*. Décima novena edición, México: publicaciones cultural.

Granville, Smith y Mikesh., (1963). *Trigonometría plana y esférica (Con tablas trigonométricas)*. México, DF: Editorial Uteha.

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral sin publicar. CICATA-IPN. México

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistemática de fenómenos didácticos ligados a convenciones matemáticas de los exponentes. Tesis de maestría sin publicar, México, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Martínez-Sierra, G. (2003). Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 8(2). pp. 95-218.

Rojano, T; Zertuche, F. (1984). *Trigonometría (Serie matemática educativa)*. México, Bogota, Caracas, Santiago, San Juan, Panamá: Fondo educativo interamericano.

Silva, E. (2001). *Apuntes de geometría y trigonometría* (UAG) para el nivel bachillerato.

Ruiz, L. (2002). *Ingeniería didáctica*. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. Área de Matemática Educativa de la universidad de Jaén- España.

PROPORCIONALIDAD Y ANTICIPACIÓN, UN NUEVO ENFOQUE PARA LA DIDÁCTICA DE LA TRIGONOMETRÍA

Gisela Montiel Espinosa
CICATA del IPN. (México)
gmontiel@ipn.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio
Palabras clave: socioepistemología, razón trigonométrica, proporcionalidad

Resumen
La enseñanza de la trigonometría juega un papel importante en la currícula escolar, desde el nivel medio básico hasta el nivel superior. Sin embargo, la investigación en matemática educativa (De Kee, et al, 1996 y Maldonado, 2005) ha dado evidencia de las dificultades en el aprendizaje que muestran los estudiantes de distintos niveles escolares al manipular, interpretar y significar a las razones, ecuaciones, identidades y funciones vinculadas a las relaciones trigonométricas. Las explicaciones reportadas a los diversos fenómenos didácticos vinculados a la trigonometría y las funciones trigonométricas han sido de corte cognitivo y didáctico. El presente escrito bosqueja cómo un acercamiento sistémico estudia, analiza e interviene en el fenómeno didáctico ligado a las nociones trigonométricas, contemplando cuatro componentes a la investigación: el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión social del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

El fenómeno didáctico

En la investigación reportada por De Kee, et al (1996) se estudió la *comprensión* de las nociones seno y coseno en dos contextos: el del triángulo rectángulo y el del círculo trigonométrico, desde el modelo constructivista de Herscovics y Bergeron[§§§§§] (1982).

En el contexto del triángulo rectángulo

La *comprensión global*. El estudiante mostró a la relación trigonométrica como la relación entre dos lados de un triángulo rectángulo o la evocación a una relación proporcional, pero donde el término *trigonométrica* no contribuía a dicha relación o al sentido que le daban.

En lo que corresponde a la unidad de medida asignada a la relación trigonométrica podían hablar de centímetros, grados, centímetros sobre grados o no asignarle unidades, pero sin explicar el porqué.

Calcular el seno y el coseno de un ángulo dentro del triángulo rectángulo no fue conflictivo para el estudiante, pero cuando se presentó en ángulo definido únicamente por dos segmentos de recta no pudieron hacerse los cálculos. Hubo la necesidad de completar el dibujo para construir un triángulo y algunos, erróneamente, intentaron usar la ley de senos para resolver el planteamiento.

La *comprensión inicial*. El estudiante mostró reconocimiento de los conceptos previos, pero en algunos casos se reconoció a la hipotenusa como el lado más largo del triángulo, sin importar que fuera o no rectángulo, con lo cual se aplicaban erróneamente las definiciones de las relaciones trigonométricas.

[§§§§§] Citado en De Kee, et al (1996)

La *comprensión de procedimiento*. El estudiante no tuvo dificultades en medir los lados de un triángulo rectángulo y formar una fracción, tampoco se evidenció dificultad para construir un triángulo a partir de un seno expresado en fracción. Cuando se les proporcionó un seno igual a 0.6 algunos transformaron la expresión en fracción y construyeron el triángulo, otros necesitaron de una recomendación. Sin embargo, lo que llamó la atención de las investigadoras fue que ninguno consideró 0.6 como la relación 0.6 sobre 1.

La *abstracción*. Sólo uno de los cinco estudiantes entrevistados mostró conflictos con la invariablidad de las relaciones trigonométricas al rotar, reflejar, trasladar o ampliar los triángulos rectángulos.

La *formalización*. Esta etapa se dedujo del comportamiento general del estudiante en la resolución de todas las tareas. Se mostró que el alumno manejaba el simbolismo de forma adecuada, definían correctamente las nociones de seno y coseno, y las aplicaban correctamente en los triángulos rectángulos.

La experiencia de aula, algunos de los resultados de Maldonado (2005) y lo reportado por De Kee, et al (1996) muestran la falta de significados proporcionales que el estudiante encuentra en la razón trigonométrica. Esto podría relacionarse directamente con la exposición escolar tradicional que encontramos en el nivel medio superior que inicia por definir qué al seno, coseno y tangente, como división de dos longitudes en un triángulo rectángulo, y continúa con las aplicaciones (encontrar el valor faltante en una relación trigonométrica).

Una reflexión histórica sobre la naturaleza proporcional de las relaciones trigonométricas

Con Aristarco (310 – 230 A. C.) se tiene la primera muestra existente de la geometría pura utilizada con un objeto trigonométrico. Aristarco sostenía que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto (90°) formado por las líneas Sol - Luna y Luna - Tierra. Aristarco, como todos sus contemporáneos, suponía que la órbita de la Luna era un círculo en cuyo centro está la Tierra y que la Luna lo recorría siempre a la misma velocidad. Si el sol se encuentra a una distancia infinita los cuartos de la Luna ocurrirían cuando el ángulo Sol – Tierra - Luna es recto, es decir, el lapso entre Cuarto creciente-Luna llena, Luna llena-Cuarto menguante, Cuarto menguante-Luna nueva y Luna nueva-Cuarto creciente, serían iguales.

En cambio si el Sol se encuentra a una distancia finita, sus rayos divergen formando un ángulo (Fig. 1). El lapso entre la Luna nueva y el cuarto creciente es menor que el lapso entre éste último y la luna llena. Por la misma razón el intervalo entre la luna llena y el cuarto menguante es mayor que el intervalo entre éste y la siguiente luna nueva.

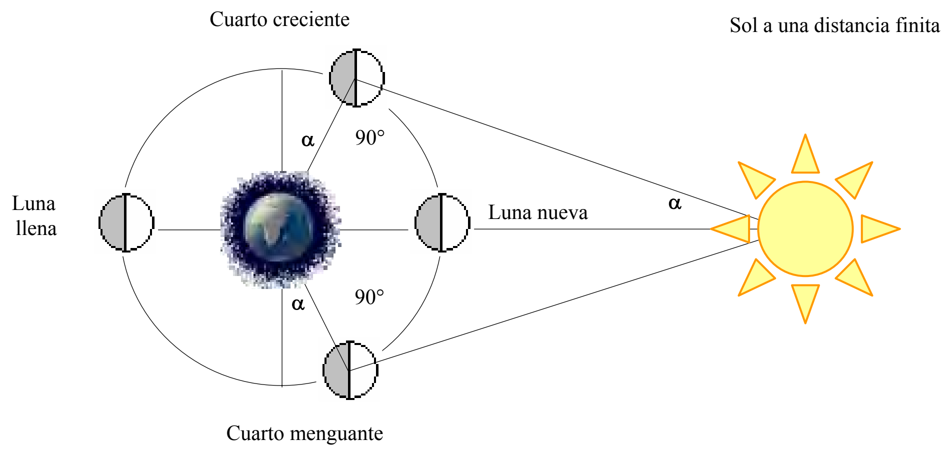


Figura 1

Aristarco encontró que el ángulo α, que forman los rayos del Sol que abarcan la órbita de la Luna, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la posición de la media luna. Si llamamos *A* la distancia de la Tierra a la Luna y *B* a la distancia de la Luna al sol, resulta que hay una sencilla razón entre A, B y el ángulo α, que hoy conocemos como tangente: $\tan\alpha = \frac{A}{B}$,

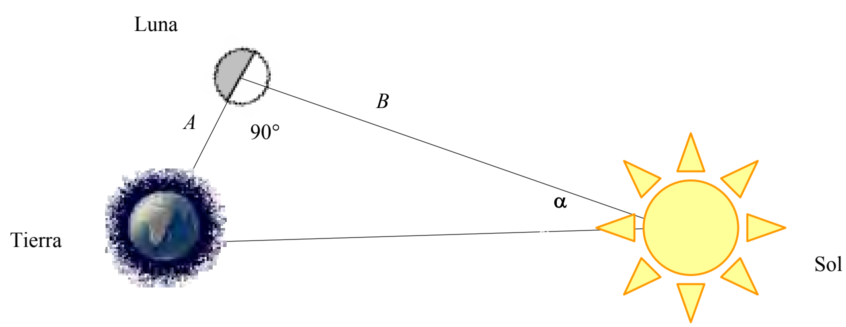


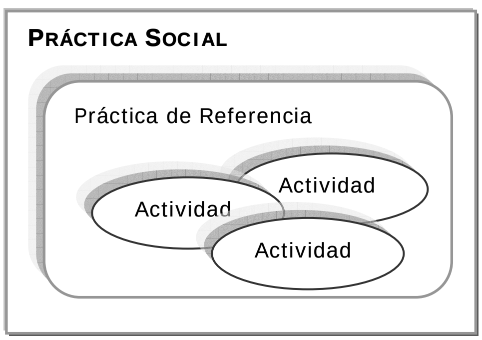
Figura 2

En otras palabras, determinando α se puede calcular qué tanto más lejos está el Sol de la Luna que la Luna de la Tierra. Si para Aristarco la Luna se movía en una órbita circular y con velocidad constante alrededor de la tierra, debía medir cuánto tarda la luna en darle una vuelta completa a la Tierra, para lo cual bastaba con medir el tiempo que transcurre, por ejemplo, entre dos Lunas nuevas. Una vez determinado ese lapso, y si el sol estuviera a una distancia infinita, hay que dividirlo entre cuatro para obtener el tiempo que debería transcurrir entre cada fase de la luna. Entonces, la secuencia de las fases de la Luna estaría dividida en cuatro intervalos iguales. Empleando números concretos, si el periodo de la luna es 29 días y medio, o 708 horas y las fases sucedieran a intervalos perfectamente regulares, entre cualquier fase y la siguiente transcurrirían 177 horas (708 ÷ 4). Aristarco observó que el cuarto creciente ocurría seis horas antes de lo esperado, si el sol estuviera a una distancia infinita. El ángulo α de nuestra figura correspondía, por lo tanto, a seis horas de movimiento de la Luna. De aquí, Aristarco deduce que, puesto que la Luna recorría su órbita con velocidad constante, el ángulo

α que se busca determinar debería estar en la misma proporción a una vuelta completa (360°) y que las seis horas de discrepancia al periodo completo de 708 horas: $\frac{a}{360°} = \frac{6}{708}$ de donde $\alpha = \frac{6}{708} 360°$.

Aristarco expresó la relación entre las distancias $\frac{Tierra - Luna}{Luna - Sol}$, que hoy día es $\tan 3° = 0.05$, cómo "*la distancia del Sol a la Luna es veinte veces la distancia de la Luna a la Tierra*". Este cálculo es erróneo, pero no por el método, sino por los datos numéricos. El método geométrico es perfectamente válido, el problema estriba en que la discrepancia entre el lapso Luna nueva – Cuarto creciente con el sol a una distancia infinita y el mismo lapso con el sol a la distancia infinita que se encuentra no es de seis horas sino de cerca de 18 minutos (Ruiz y de Regules, 2002). Con esta cifra y el razonamiento anterior se obtiene la cifra correcta: *el sol esta 400 veces más lejos de la Luna que la Luna de la Tierra*.

Un acercamiento socioepistemológico al estudio del fenómeno



En (Montiel, 2005) se ha propuesto un modelo a la construcción social de la función trigonométrica en tres momentos: *anticipación*, *predicción* y *formalización*. El nombre de cada momento obedece a la *práctica social* que regula aquellas *actividades* asociadas a la *práctica de referencia*, que le dan *uso* y *vía de construcción* a las nociones trigonométricas en su contexto de origen.

El siguiente cuadro sintetiza lo que hemos llamado *principios básicos para la construcción social de la función trigonométrica*,

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización del movimiento oscilatorio	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estable – Analítico
Herramienta Matemática Asociada	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	sen θ θ ángulo (grados) sen θ (longitud)	sen x x (tiempo / radian - real) sen x (distancia)	sen t t (tiempo / real) sen θ (longitud)

Proporcionalidad y Anticipación

La construcción social de la función trigonométrica en su primer momento, regulado por la anticipación, propone el estudio de fenómenos macro no manipulables donde la proporción genere las nociones y los modelos asociados a la razón trigonométrica. Sin embargo, la recreación del contexto de origen de estas nociones puede provocar que sea más compleja la tarea de simular la realidad, en este caso la astronómica, que la construcción de la razón trigonométrica. Por ejemplo, Ros (1996) reporta la dificultad de realizar una maqueta a escala del sistema solar cuando se cuenta sólo con las instalaciones de una escuela. Ello la obliga a simular el sistema solar en un mapa, aunque esto se convierta a su vez en un modelo a escala (el sistema solar) dentro de otro modelo a escala (el mapa): una escala de otra escala.

Ahora bien, la construcción de conocimiento depende también de las herramientas tecnológicas de que se disponga y sobre todo del conocimiento que antecede a los problemas que abordamos. Los estudiantes que tienen un primer acercamiento a la trigonometría ya tienen conocimientos de la heliocentricidad del sistema solar, es probable que sepan que las órbitas no son circulares sino elípticas, que tengan acceso a las dimensiones de los planetas y del sistema, etc. Además de contar con aparatos de medición y procesamiento de datos más avanzados. Esto es, una génesis ficticia en un contexto similar al de origen es poco más que compleja.

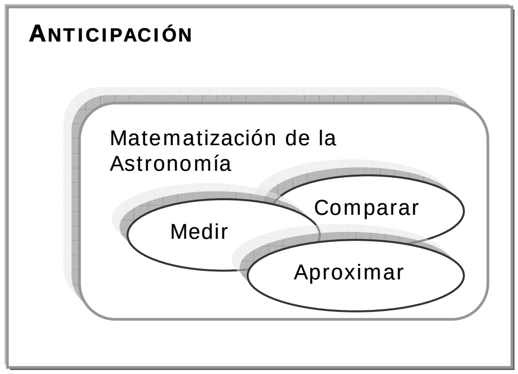
Cuando proponemos recrear la *práctica social de anticipación* en este momento nos referimos a que el discurso matemático escolar debe reconciliar el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad, donde objetos como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos (estáticos), donde surja la *cantidad trascendente trigonométrica*.

Nuestra reflexión histórica busca contrastar con el discurso escolar tradicional el sentido de *usar una noción matemática* con la *aplicación de definiciones matemáticas*. Esto es, mientras que la solución de un problema macro no manipulable obliga a escribir los resultados en formas que hoy conocemos como razones trigonométricas, la escuela define el objeto que da solución a un problema de valor faltante y que resulta en una medida en términos de distancia, alturas, longitudes, etc., sin expresar la relación proporcional que guarda con un objeto manipulable (el triángulo, por ejemplo).

Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico

El discurso matemático escolar se ha organizado durante años (siglos), *para responder a cuestionamientos de orden teórico e ideológico que muestren la coherencia interna del discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis inusuales* (Cantoral y Farfán, 2004). Llevar al aula una propuesta basada en la *construcción social* de la función trigonométrica presupone entonces la modificación del discurso escolar, con el propósito general de *desarrollar el pensamiento matemático* de los y las estudiantes.

Un discurso escolar constituido con base en el estudio de la *proporcionalidad* y en la práctica social de la *anticipación* debe considerar las actividades del estudiante (medición, comparación, aproximación,…) como la vía para descubrir relaciones proporcionales en su realidad, mediada por las situaciones problema que el profesor organice para la construcción de las nociones trigonométricas asociadas. La construcción de modelos *geométricos-estáticos* será entonces la forma de sintetizar, exponer y argumentar la actividad experimental, para concluir con la institucionalización del saber escolar como mecanismo de comunicación por parte del profesor. En esta postura encontramos una diferencia significativa entre el usar y construir, versus el definir y aplicar, aun cuando el contexto de aplicación le proporcione cierto sentido a los objetos matemáticos preconstruidos.



A partir de estas consideraciones hemos iniciado proyectos de investigación con propósitos específicos, donde buscaremos diseñar secuencias de aprendizaje que se adapten a las condiciones y restricciones naturales que impone la escuela, pero que rompan las tradiciones escolares que no problematizan el saber y la actividad como parte del aprendizaje y en consecuencia, para nuestro caso en particular, despojen de su naturaleza proporcional a la razón trigonométrica.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics 16*(2), 19 - 22.

Herscovics, N. y Bergeron, J. (1982). Des modèles de la compréhension. *Revue des sciences de l'éducation 8*(3), 576 - 596.

Maldonado, E. (2005). U*n análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Ros, R. (1996). Matemática Aplicada y Relaciones de Proporcionalidad. *Revista EMA 1*(2), 12 – 139.

Ruiz, C. y de Regules, S. (2002). *El piropo matemático. De los números a las estrellas*. México: Lectorum.

LAS SERIES NUMÉRICAS INFINITAS EN LA INDIA EN LOS SIGLOS VI AL XVI

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
CICATA-IPN. (México)
alerosas@ipn.mx

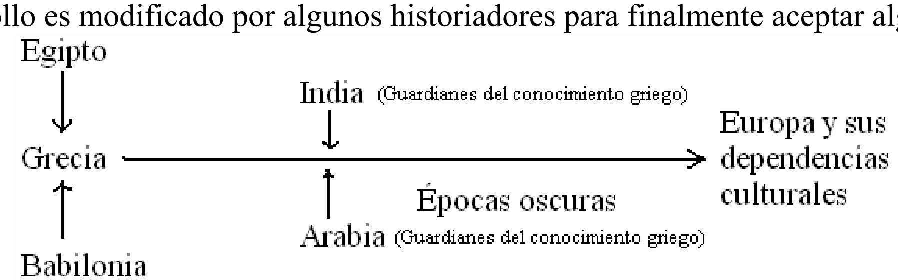
Campo de investigación: epistemología. Nivel: superior
Palabras clave: serie numérica infinita, expansión, aproximación

Resumen.
En la historia de las matemáticas se hace un gran énfasis en el desarrollo logrado por los matemáticos europeos, desde los griegos hasta el presente. A manera de anécdota se describen los avances de algunos pueblos no europeos como los egipcios, chinos, hindúes, mayas, etc., pero siempre indicando el avance inferior logrado en sus matemáticas en comparación con los pueblos europeos. En este trabajo se muestran algunos de los avances de los matemáticos de la antigua India, y en particular los avances alcanzados en la expansión de funciones en series de funciones así como sus aplicaciones para el cálculo de tablas de funciones trigonométricas y las aproximaciones del valor de π con hasta 12 decimales exactos.

La historia matemática vista por los europeos

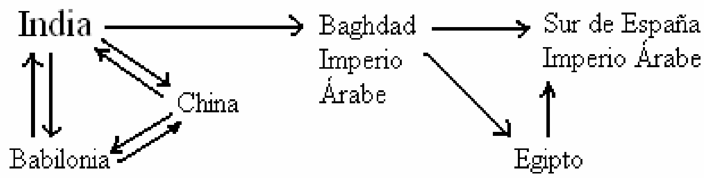
En todos los campos de la matemática podemos observar un marcado eurocentrismo, es decir, el enfoque de los historiadores que asignan los avances en matemáticas casi exclusivamente a los matemáticos europeos. En la mayoría de las obras de historia de las matemáticas pueden verse pequeños resúmenes de las contribuciones matemáticas hechas por los pueblos no europeos. En general sólo se hace un recuento de la geometría y la aritmética que fueron desarrolladas por egipcios, babilonios, árabes e hindúes. Fuera de estas ramas de la matemática sólo se mencionan pequeñas contribuciones que son vistas como poco importantes.

En Pearce (2006) puede verse una discusión acerca de cómo el eurocentrismo ha dominado la historia de las matemáticas indicando que la matemática tiene un desarrollo como: Grecia (origen) $\rightarrow$ Edad Media $\rightarrow$ Renacimiento $\rightarrow$ Europa actual posteriormente comenta que este desarrollo es modificado por algunos historiadores para finalmente aceptar algo como



Este esquema establece la visión de que los pueblos no europeos sólo reprodujeron o reconstruyeron los conocimientos que previamente habían realizado los griegos (europeos), Pearce (2006) dice que varios historiadores hablan de este modo y cita como ejemplo a Duhem "*...Arabic Science only reproduced the teachings received from Greek science*", a Sarton "*...One could almost omit Hindu and Chinese developments in mathematics*" y a Tannery "*...The more one examines the Hindu scholars the more they appear dependent upon the Greeks…(and)…quite inferior to their predecessors on all aspects*"

Pearce propone una modificación en el esquema histórico para un enfoque no eurocentrista durante lo que él llama épocas obscuras



Si nos restringimos a un área en particular como las series infinitas las contribuciones casi desaparecen por completo. Por ejemplo, para Reiff (1992) las series infinitas aparecieron con Arquímedes, por casi dos mil años las series infinitas desaparecieron de las matemáticas para reaparecer con Mercator y ser finalmente desarrolladas por Newton y todos sus sucesores. Smith (2005) nombra a Reiff como referencia pero sólo considera a las series infinitas como resultado de Newton y Leibniz para sólo enfocarse a los resultados que siguieron a Gauss.

En la página 44 de Mankiewickz (2000) podemos ver una breve referencia a los adelantos en series infinitas por parte de los hindúes, pero sólo es un comentario de apenas madia página. Además dentro de este comentario se menciona al trabajo de Newton a modo de darnos una idea de que el trabajo realizado por los hindúes es semejante al que hicieron los matemáticos europeos.

Las series infinitas en la India

El desarrollo de las matemáticas en la India es muy antiguo como puede verse en De Mora y Ludwika (2003) donde se cita el pasaje

> *Indra, ven hacia aquí con dos corceles castaños,*
> *Ven con cuatro, con seis cuando se te invoca.*
> *Ven tú con ocho, con diez, para beber el Soma.*
> *He aquí el jugo, valiente guerrero, no lo desdeñes*
> *¡Oh Indra!, ven tú aquí habiendo enganchado a tu carro*
> *veinte, treinta, cuarenta caballos.*
> *Ven tú con cincuenta corceles bien adiestrados, Indra,*
> *sesenta o setenta, para beber el Soma.* (De Mora y Ludwika, 2003, p. 28)

Versos en los que se tiene la representación de dos progresiones aritméticas, la primera de diferencia 2 y la segunda de diferencia 10. Estos versos aparecen en el *Mandala II* del *Ṛg Veda* en el himno 18 y cuyo origen está calculado entre los años 2000 a. C. al 1750 a. C. Pero no se mencionan evidencias de que se haya realizado la suma de las progresiones como para sugerir un uso inicial de series infinitas; aunque, sí existe el concepto de infinito como se lee en De Mora y Ludwika (2003) cuando se cita el pasaje del *Dhavalā*:

> ***Ananta*** *es aquello que mediante la sustracción de números* $sa\dot{m}khy\bar{a}ta$ *(numerables) y* $asa\dot{m}khy\bar{a}ta$ *(innumerables) por siempre, por un tiempo sin fin, no se agota.* (De Mora y Ludwika, 2003, p. 51)

Las series numéricas aparecen, después de *Arquímedes* y sin evidencia de la influencia griega, en los trabajos de *Aryabhata* un matemático hindú cuya obra *Aryabhatiya* fechada aproximadamente en el año 499 d. C. cubre temas como

- Fórmulas para encontrar la suma de diferentes tipos de series
- Reglas para encontrar el número de términos de una progresión aritmética
- Tablas de valores del seno.

En Hayashi (1997) puede verse una discusión completa de la forma en que *Aryabhata* realiza sus cálculos y presenta la traducción del sánscrito al inglés de algunos pasajes de *Aryabhatiya.* Hayashi reproduce grabados y los métodos seguidos por *Aryabhata* al utilizar dos diferentes aproximaciones al seno mediante diferencias de segundo orden las cuales aparecen en el primer capítulo ($da\check{s}ag\bar{i}tik\bar{a} - p\bar{a}da$) y en el segundo capítulo ($ganita - p\bar{a}da$) respectivamente de *Aryabhatiya*. Este trabajo de Hayashi (1997) nos permite ver que para el siglo IV la matemática hindú ya utilizaba series finitas para realizar cálculos y aproximaciones de valores de la función seno que les permitía elaborar tablas de gran exactitud.

El trabajo de *Aryabhata* fue continuado por *Brahmagupta* (598 d. C. – 670 d. C.) quien escribió la obra *Brahmasphutasiddhanta* (La comprensión del Universo) en la cual, de acuerdo a The MacTutor History of Mathematics Archive, aparecen reglas para sumar series (aunque no indica si estas series son finitas o infinitas), también aparecen reglas para sumar los cuadrados de los n primeros enteros y la suma de los cubos de los primeros n enteros. De acuerdo a The MacTutor History of Mathematics Archive, Pearce (2002) y Mankiewickz (2000), en *Brahmasphutasiddhanta* se utilizaron fórmulas tan avanzadas como las que casi 1000 años después descubrirían los matemáticos europeos y serían nombradas fórmulas de interpolación de Newton-Stirling y fórmulas iterativas de Newton-Raphson. Además *Brahmagupta* fue el primero en intentar asignar valores a fracciones como $\frac{n}{0}$ y en particular a la expresión $\frac{0}{0}$.

Alrededor del año 850, *Mahavira* (o *Mahaviracharya ~Mahavira el maestro*) escribió la obra *Ganitasar Sangraha* considerada como brillante. *Mahavira* proporcionó muchas fórmulas para trabajar con progresiones geométricas (Pearce, 2002).

Sridhara fue otro matemático cuyos trabajos se consideran realizados alrededor del año 900 (Pearce, 2002), en particular en su obra *Patiganita* aparecen secciones del libro dedicadas al cálculo de progresiones aritméticas y progresiones geométricas, además de fórmulas para calcular la suma de algunas series finitas que se vuelven una referencia estándar para obras posteriores.

Hacia el año 1100 d. C. el desarrollo de la matemática hindú recae en *Bhaskaracharya* o *Bhaskara II*, considerado el más grande matemático hindú de la antigüedad (Pearce, 2002,

cap. 8-IV; Mankiewickz, 2000). En su obra *Lilavati* (La hermosa) que versa sobre matemáticas se encuentra en el capítulo 5 la resolución de problemas sobre progresiones aritméticas y progresiones geométricas.
En el año 1350 d.C. el matemático *Narayana Pandit*, escribió la obra *Ganita Kaumudi* de 14 capítulos (Pearce, 2002). El capítulo 13 de esta obra (llamado *Red de números*) está dedicado a las sucesiones de números y algunos problemas relacionados con las progresiones aritméticas. En el capítulo 14, discute cuadrados mágicos, y utiliza fórmulas y reglas para trabajar las relaciones entre los cuadrados mágicos y las series aritméticas.

Hacia el año 1350 d.C. nace el matemático *Madhava* de Sangamagramma, (2002). En los trabajos de *Madhava* aparecen expresiones que siglos después serán redescubiertas por los matemáticos europeos. *Madhava* calcula la expansión en serie infinita de la función arctang. Lo que los matemáticos hindúes escribían **seno de q** en notación actual lo escribiríamos como **r senq** donde r es el radio, de la misma forma el **coseno de q** se escribiría **r cosq**, con lo que *Madhava* obtuvo el equivalente a la expresión

$$rq = \frac{r \cdot r\sin q}{1 \cdot r\cos q} - \frac{r \cdot (r\sin q)^3}{3 \cdot (r\cos q)^3} + \frac{r \cdot (r\sin q)^5}{5 \cdot (r\cos q)^5} - \frac{r \cdot (r\sin q)^7}{7 \cdot (r\cos q)^7} + \cdots$$

y haciendo $\tan q = \frac{\sin q}{\cos q}$ y cancelando el radio **r** tenemos $q = \frac{\tan q}{1} - \frac{\tan^3 q}{3} + \frac{\tan^5 q}{5} - \frac{\tan^7 q}{7} + \cdots$ que se considera equivalente a la serie $\arctan q = q - \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^7}{7} + \cdots$ redescubierta por *Gregory* alrededor del año 1668, casi 300 años después de *Madhava*.

Madhava también conoció la expresión $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$ que redescubrió *Newton* y por lo cual Pearce (2002) la llama *Serie de potencias de Madhava-Newton*.

De la misma manera conoció $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$ nuevamente una *Serie de potencias de Madhava-Newton*. Esta serie también se conoce como *Serie de Maclaurin*.

Madhava también sustituyó el valor $q = \frac{\pi}{4}$ en $q = \frac{\tan q}{1} - \frac{\tan^3 q}{3} + \frac{\tan^5 q}{5} - \frac{\tan^7 q}{7} + \cdots$ y obtuvo la serie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ la cual es redescubierta por *Leibniz* (casi 300 años después). Sorprendentemente *Madhava* también proporcionó un término de corrección para esta serie que queda expresada como $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n} \pm R_n$

donde R_n tiene alguna de las tres formas siguientes $R_n = \frac{1}{4n}$, $R_n = \frac{n}{4n^2+1}$ o $R_n = \frac{n^2+1}{4n^3+5n}$. Además al sustituir $q = \frac{\pi}{6}$ obtuvo la serie $\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 3^2} - \frac{1}{7\times 3^3} + \cdots\right)$ y utilizó esta expresión para proporcionar el valor $\pi = 3.14159265359$ que consta de 11 lugares decimales correctos. Esta expresión precede a los trabajos de *Wallis* (~1645) sobre productos continuos. Otra expresión atribuida a *Madhava* es $\pi d \approx 2d + \frac{4d}{2^2-1} - \frac{4d}{4^2-1} + \cdots \pm \frac{4d}{n^2-1}$ la cual le permitió calcular 13 lugares decimales exactos de π.

También le son atribuidas a *Madhava* las siguientes expresiones que se consideran casos especiales de la Serie de Taylor $\sin(x+h) \cong \sin x + \frac{h}{r}\cos x - \frac{h^2}{2r^2}\sin x$ y $\cos(x+h) \cong \cos x - \frac{h}{r}\sin x + \frac{h^2}{2r^2}\cos x$ donde **h** y **r** son cantidades pequeñas. Además se tiene la expresión $\sin(x+h) \cong \sin x + \frac{h}{r}\cos x - \frac{h^2}{2r^2}\sin x + \frac{h^3}{6r^3}\cos x$ considerada como una aproximación de tercer orden de la serie de Taylor para la función seno, atribuida a *Gregory* (O'Connor y Robertson, 2000).

Parameśvara nació en 1360 y fue alumno de *Madhava* y escribió varias obras en las que realiza comentarios sobre los trabajos de sus predecesores. En Gupta (1974) y en Plofker (2001) se trata a profundidad la aproximación de tercer orden a la función seno que aparece en la obra *Siddhāntadīpikā*. En Gupta (1974) se ven las citas de las estrofas en sánscrito de la forma de encontrar estas aproximaciones y que equivalen a $R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \cfrac{R\cos\alpha - \cfrac{R\sin\alpha + \cfrac{R\cos\alpha}{2D}}{2d}}{D}$ en donde si escribimos $D = \frac{R}{\theta}$ de acuerdo a nuestra notación actual se obtiene

$$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{\theta}{R}R\cos\alpha - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2\frac{R\sin\alpha}{2} - \left(\frac{\theta}{R}\right)^3\frac{R\cos\alpha}{4}$$

Nilakantha Somayaji nació en 1444 d.C. y escribió varias obras, entre ellas *Tantrasamgraha* que se considera una fuente importante de las matemáticas que utilizó. Aparentemente *Nilakantha* no sólo utilizó los descubrimientos de *Madhava* sino que además hizo extensiones y mejoras de los resultados de *Madhava*. Se dice que obtuvo la serie $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ al obtener una expresión aproximada para un arco de circunferencia de un círculo y entonces tomó el límite. Además proporcionó diversas series para $\frac{\pi}{4}$ que convergen más rápidamente que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Jyesthadeva nació en 1500 d.C. en *Kerala*. Escribió la obra *Yuktibhasa* que es un compendio de las matemáticas de Kerala y es un texto especial porque presenta teoremas con sus demostraciones y contiene también la deducción de las reglas tratadas en la obra. *Yuktibhasa* está basada en *Tantrasamgraha* (de *Nilakantha*) y además contiene la prueba de muchos de los resultados de *Madhava* y *Nilakantha*. Entre esas pruebas se encuentra la explicación de cómo *Madhava* pudo obtener sus expansiones en series.

Conclusiones

En esta breve recopilación de los avances matemáticos hindúes queda claro que la historia de tipo eurocentrista, hasta ahora aceptada, ha omitido grandes avances logrados por civilizaciones no europeas. En particular la matemática hindú lentamente se ha revelado como una de las más avanzadas. En estas regiones han existido diversas civilizaciones y existen indicios de desarrollos matemáticos desde el año 3000 a.C. lo que nos da una historia matemática de casi cinco mil años y de la cual poco se sabe. Es de desearse que al pasa del tiempo nuevas investigaciones históricas nos permitan conocer otros avances que por el momento son conocidos sólo por referencias aisladas.

Finalmente, es necesario establecer un nuevo enfoque histórico que permita observar a las culturas no europeas como contribuyentes importantes a la matemática mundial.

Referencias bibliográficas

Gupta, R. C. (1974). An Indian Approximation of Third Order Taylor Series Approximation of the Sine. *Historia Mathematica* **1**, 287-289.

De Mora, J. y Ludwika, M. (2003). *Apuntes para una historia de las matemáticas y astronomía en la india antigua*. Departamento de Investigaciones Filológicas. UNAM, México.

Pearce, I. (2006). *Indian Mathematics: Redressing the balance*. Tomado de la página WEB http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Projects/Pearce/index.html el 13 de febrero de 2006.

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas, del cálculo al caos*. Barcelona, España. Ediciones Paidós Ibérica

Reiff, R. (1992). *Geschichte der unendlichen Reihen* [Historia de las Series Infinitas]. Verlag. Liechtenstein. (Obra original de 1889).

Smith, D. (2005). *History of Modern Mathematics* [Historia de las Matemáticas Modernas]. Mathematical Monographs No.1. 4ta edición. (Versión original de 1906) Obtenido de la página del Proyecto Gutemberg el 17 de marzo de 2006

URL: http://www.gutenberg.org/catalog/

Hayashi, T. (1997). Āryabhata's Rule and Table for Sine-Differences. *Historia Mathematica* 24, 397-406

O'Connor, J. y Robertson, E. (2000). Madhava of Sangamagramma. Obtenido de la página de la School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Scotland

http:///www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Madhava.html

el 7 de marzo de 2006.

Plofker, K. (2001). The "error" in the Indian "Taylor series approximation" to the sine. *Historia Mathematica* 28, 283-295.

LOS PROCESOS DE CONVENCIÓN MATEMÁTICA Y LA INCLUSIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL MARCO DEL ANÁLISIS EULERIANO•

Gustavo Martínez Sierra
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
gmartinez@cimateuagro.org , gamartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: socioepistemología, construcción de conocimiento, convención matemática, función, funciones trigonométricas

Resumen
Lo aquí presentado es parte de los resultados de una línea de investigación que busca elaborar explicaciones de los procesos sociales de generación de conocimiento matemático. En particular estamos interesados en el estudio de los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado *procesos de convención matemática* (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez-Sierra, 2002; Martínez-Sierra, 2003, 2005, 2006). De manera más específica lo aquí presentado tiene por objetivo presentar los avances en la búsqueda por identificar los procesos de convención matemática presentes en la inclusión de las funciones trigonométricas en el contexto del análisis euleriano.

Introducción

De manera general, la presente investigación encuentra su marco de referencia en dos líneas de investigación: Aquella denominada desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998) y aquella que estudia los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento (Martínez-Sierra, 2005). La primera línea busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio y ha prestado parte de su atención al estudio de la construcción de la noción de función (Farfán, 1997; Farfán et al., 2000). Dentro de la primera línea es de señalar que algunas de estas investigaciones elaboran explicaciones que dotan de particularidades a las funciones trascendentes, como lo son las funciones logarítmicas (Ferrari, 2001), exponenciales (Lezama, 2003; Martínez-Sierra, 2003) y trigonométricas (Buendía y Cordero, 2005; Montiel, 2005). Como es de notarse en las investigaciones anteriores se han analizado específicamente los diferentes tipos de funciones trascendentes; como la exponencial, logaritmo y las funciones trigonométricas. Tales investigaciones han dado muestra que cada tipo de función naturaleza y significados específicos y por ende producen fenómenos didácticos también específicos. La segunda línea de investigación tiene por objetivo estudiar los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado *procesos de convención matemática*. En términos generales la línea de investigación descansa en dos hipótesis:

- **H1**: La naturaleza y significados de algunos contenidos matemáticos, presentes en diversos corpus de conocimiento pueden ser explicados a través del proceso de convención matemática.
- **H2**: El manejo escolar de tales contenidos provoca la existencia de fenómenos didácticos explicables, precisamente, en términos del proceso de convención matemática.

• Este trabajo es financiado por el Fondo Sectorial de Investigación para la educación SEP-CONACYT, Clave: SEP-2004-C01-46917 y por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero, Clave: GUE-2002-C0-7626.

En particular en este trabajo tiene por objetivo presentar los avances en la búsqueda por identificar los procesos de articulación y convención matemática presentes en la construcción de las funciones trigonométricas en el contexto de la obra de Euler.

Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

Dentro de la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes circunstancias condicionan/determinan la construcción del conocimiento matemático en las personas: las cognitivas, las didácticas, las sociales y las epistemológicas. Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales. Nuestro interés es el estudio sistémico de todas las circunstancias. La consideración anterior plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza.

La noción de convención matemática

Un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la *práctica de integración sistémica de los conocimientos*; es decir existe una *normativa de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes (Martínez-Sierra, 2003).

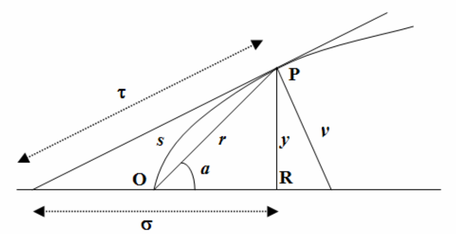
Esencialmente, la búsqueda de integración puede resolverse optando por alguna de las siguientes vertientes: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Así vista la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

Veamos el siguiente ejemplo ilustrativo. Partamos del supuesto que queremos asignarle un significado al símbolo $2^{1/2}$. La multiplicación reiterada no puede ser utilizada para ello, por lo que buscamos otro camino. ¿Qué significado tomar? Si retomamos la operatividad de las potencias de la misma base podemos postular que sería conveniente que $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ por lo que tenemos que "convenir" que $2^{1/2}=\sqrt{2}$. Lo anterior también muestra que la igualdad $2^{1/2}=\sqrt{2}$ *no se puede demostrar sino se debe convenir.*

La inclusión de las cantidades trigonométricas al análisis euleriano

De acuerdo con Bos (1975) dentro de la matemática de fines del siglo XVII el principal objeto de estudio era la curva. Una curva en un sistema de referencia (independientemente de las concepciones de ésta: como dibujo de una regla de construcción, como punto en movimiento, o como poligonal de lados infinitamente pequeños, etc.) involucra las relaciones entre distintas cantidades geométricas variables definidas con respecto a un punto variable sobre la curva. Tales cantidades geométricas variables son, por ejemplo, (ver figura 1): ordenada, abscisa, longitud de arco, radio, arco polar, subtangente, normal, tangente, área entre curva y eje, rectángulo circunscrito, sólido de revolución, etc.

> "La relación entre variables [ordenada, abscisa, radio, subtangente, entre otras] eran expresadas, cuando era posible por medio de ecuaciones. Esto no era siempre posible, ya que justo antes del final del siglo XVII no existían formulas para las relaciones trascendentes y éstas eran expresadas por medio de prosas explicativas que básicamente expresaban el método geométrico para la construcción de la curva" (Bos, 1975).



x: abscisa, y: ordenada, s: longitud de arco, r: radio, a: arco polar, σ: subtangente, τ: tangente, v: normal, OPR: área entre la curva y la abscisa

Figura 1. Cantidades geométricas variables definidas con respecto a un punto variable sobre la curva

La búsqueda de las relaciones entre cantidades geométricas propició la búsqueda de diversos métodos para lograr tal objetivo. Esto produjo, entre otros aspectos, diferentes series infinitas que establecían las relaciones entre las cantidades. Por ejemplo Gregory, (Malet, 1994-1994) establece, hacia el año 1670, que, en el cicloide MOPA (Figura 2) que es generado por el punto A y llamando DA=r y Dβ=b, la ordenada PQ de cualquier punto sobre el cicloide puede ser expresado en términos de la abscisa a = OQ por

$$\frac{ra}{b}-\frac{r^2a^2}{2b^3}+\frac{r^3a^3}{2b^5}-\frac{ra^3}{6b^3}+\frac{7r^2a^4}{24b^5}-\frac{5r^4a^4}{8b^7}+\frac{7r^5a^5}{8b^9}-\frac{r^3a^5}{2b^7}+\frac{ra^5}{120b^5}.$$

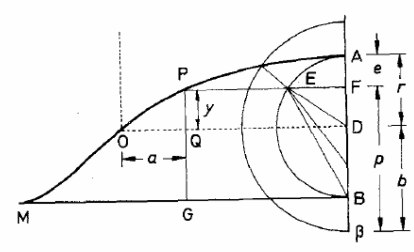
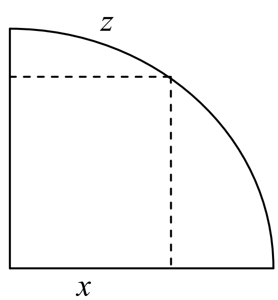


Figura 2. Cantidades geometricas presentes en una Cicloide según Gregory (Malet, 1994-1994)

En el mismo sentido Babini (1978, p. 121), afirma que entre las series remitidas a Collins por Gregory, en correspondencia fechada en el año 1671, figuran las siguientes ecuaciones para encontrar el arco, dada la tangente, y la tangente, dado el arco (en donde r el radio de un círculo, a el arco y t la tangente):

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - etc.$$
$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{5r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + etc.$$

Por la misma época Newton (1669), a través de su método de fluxiones, encontró las relaciones entre un arco (z) y su seno correspondiente (x) en un círculo de radio 1 (Figura 3).



$$x = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} - \frac{z^{10}}{3628800} + \ldots$$
$$z = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$$

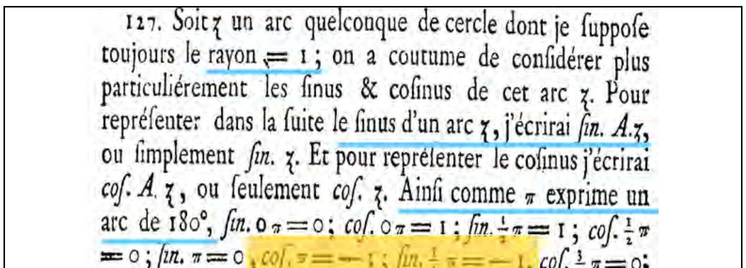
Figura 3. Series que relacionan un arco (z) y su seno correspondiente (z) (Newton, 1669)

Montiel (2005) menciona que quizá fueron los nuevos usos de las cantidades trigonométricas lo que las despojó de su carácter geométrico, descrito con anterioridad, pues pasaron de ser consideradas líneas de círculo a cantidades que describían ciertos fenómenos, particularmente movimientos periódicos. Tan pronto como se acometió el estudio del movimiento y se empezó a disponer de los instrumentos matemáticos adecuados, y en cuanto sus leyes comenzaron a introducirse como fundamento de la física, resultó que, al estudiar la naturaleza, no era posible seguir considerando el número determinado o sus equivalentes geométricos (punto, recta, círculo, etc.) como objeto único de las investigaciones (Loi, 1999; citado en Montiel, 2005). Es decir, el ente matemático dejó de ser el número: la ley de variación, la función, se convirtió en el centro en torno al cual se organizó la ciencia. De acuerdo con Katz (1987):

> *"...ningún libro de texto antes de 1748 trata con el calculo de de tales funciones. Esto es, en ninguno de una docena de libros de texto escrito en Inglaterra o en el continente durante la primera mitad del siglo 18 se encuentra un tratamiento de la derivada y la integral del seno el coseno o alguna discusión de la periodicidad o de las propiedades de adición de tales funciones. Esto contrasta ampliamente con el caso de las funciones exponencial y logaritmo. Aquí intentaremos explicar porque las FT no entraron al análisis hasta 1739. En ese año Euler invento este cálculo. El tuvo conducido para esta invención*

> *porque necesitaba las FT como soluciones de ecuaciones diferenciales lineales. En adición, su descubrimiento de un método par resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes fue influenciado por su conocimiento que de esas funciones debe proveer parte de esta solución"* (Katz, 1987, p. 311)

De esta manera Euler proporciona en su libro de *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1738/1845) un tratamiento de lo que podemos llamar el precálculo de las funciones trigonométricas. Las define numéricamente, discute varias de sus propiedades incluyendo fórmulas de adición y el desarrollo de sus series de potencias, con lo que les dio el status de función[******]. Del primer Tomo, en el Capítulo VIII, *Des Quantités transcendantes qui naissent du cercle* (Figura 4), define las funciones trigonométricas como cantidades trascendentes que nacen del círculo y señala que π es la semicircunferencia de un círculo (de radio 1) y en consecuencia es la longitud del arco de 180° y entonces, establece sen 0π =0, cos 0π = 1, sen 2π =0 y cos 2π = 1.



127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je ſuppoſe toujours le rayon = 1; on a coutume de conſidérer plus particuliérement les ſinus & coſinus de cet arc z. Pour repréſenter dans la ſuite le ſinus d'un arc z, j'écrirai ſin. A.z, ou ſimplement ſin. z. Et pour repréſenter le coſinus j'écrirai coſ. A. z, ou ſeulement coſ. z. Ainſi comme π exprime un arc de 180°, ſin. 0π = 0; coſ. 0π = 1; ſin. ½π = 1; coſ. ½π = 0; ſin. π = 0, coſ. π = −1; ſin. ³⁄₂π = −1, coſ. ³⁄₂π = 0;

Figura 4. Cantidades trascendentes que nacen del círculo (Euler, 1738/1845)

Lo que llama fuertemente nuestra atención es notar que Euler no menciona por que, por ejemplo, $\cos\pi = -1$. La información que tenemos hasta ahora sólo nos permite conjeturar que quizá Euler utilizó la fórmula del seno de la suma dos arcos: $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ & $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ para construir la convención $\cos\pi = -1$. Un posible razonamiento es el siguiente:

> Partamos del supuesto que queremos asignarle un significado al símbolo $\cos\pi$.¿Qué significado tomará? Si tomamos a la fórmula
>
> $$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
>
> como conocimiento base, que deseamos preservar, debería cumplirse que
>
> $$\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\times\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2} = 0-1 = -1$$
>
> por lo que debemos convenir que $\cos\pi = -1$.

[******] Recordemos que para Euler "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada arbitrariamente con esta variable y con números o cantidades constantes" Euler (1738/1845, p. 3) y que cuando establece: "...expresión analítica formada arbitrariamente..." está aceptando el uso de las operaciones usuales del álgebra como sumas, productos, diferencias, cocientes y operaciones trascendentes como exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Admite también la extensión de éstas al infinito y la solución de ecuaciones algebraicas -incluso de grado infinito- en donde las constantes pueden incluso ser números complejos.

La conjetura anterior encuentra apoyo al notar que en artículo siguiente Euler hace una serie de cálculos basados en las fórmulas del seno y coseno de la suma dos arcos (Figura 5) o en la manera en que en su *Institutiones Calculi Differentialis* (Euler, 1755) calcula la diferencial del seno (Figura 6).

118. On sait aussi qu'étant donnés les deux arcs y & z, $\sin.(y+z) = \sin.y.\cos.z + \cos.y.\sin.z$, & $\cos.(y+z) = \cos.y.\cos z - \sin.y.\sin z$; de même $\sin.(y-z) = \sin.y.\cos.z - \cos.y.\sin.z$; & $\cos.(y-z) = \cos.y.\cos.z + \sin.y.\sin.z$.
Par conséquent, en substituant à y les arcs $\frac{1}{2}\pi$, π; $\frac{3}{2}\pi$, &c. nous obtiendrons

$\sin.(\frac{1}{2}\pi+z) = +\cos.z$	$\sin.(\frac{1}{2}\pi-z) = +\cos.z$
$\cos.(\frac{1}{2}\pi+z) = -\sin.z$	$\cos.(\frac{1}{2}\pi-z) = +\sin.z$
$\sin.(\pi+z) = -\sin.z$	$\sin.(\pi-z) = +\sin.z$
$\cos.(\pi+z) = -\cos.z$	$\cos.(\pi-z) = -\cos.z$
$\sin.(\frac{3}{2}\pi+z) = -\cos.z$	$\sin.(\frac{3}{2}\pi-z) = -\cos.z$
$\cos.(\frac{3}{2}\pi+z) = +\sin.z$	$\cos.(\frac{3}{2}\pi-z) = -\sin.z$
$\sin.(2\pi+z) = +\sin.z$	$\sin.(2\pi-z) = -\sin.z$
$\cos.(2\pi+z) = +\cos.z$	$\cos.(2\pi-z) = +\cos.z$

Figura 5. Uso de fórmulas del seno y coseno de la suma dos arcos (Euler, 1738/1845)

140 CAPUT VI.

& $\sin x$ denotet eius sinum, cuius differentiale investigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac posito $x+dx$ loco x, quia y abit in $y+dy$, erit $y+dy = \sin(x+dx)$, & $dy = \sin(x+dx) - \sin x$. Est autem $\sin(x+dx) = \sin x.\cos dx + \cos x.\sin dx$. atque cum sit, uti in introductione ostendimus

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2.} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

erit reiectis terminis evanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, unde fit $\sin(x+dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusvis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x, erit simili modo $d.\sin p = dp \cos p$.

Figura 6. Uso de la fórmulas del seno de la suma dos arcos para el calculo de la diferencial se seno (Euler, 1755. p. 140)

Referencias bibliográficas

Babini, J. (1978). *El cálculo diferencial. Origen y polémica*. México: Balsal Editores S.A.

Bos, H. J. M. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics,* 59(2).

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Euler, L. (1738/1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Euler, L. (1755/1787). Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum (Vol. 1). TICINI. Tiphographeo Petri Galeati.

Farfán, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M.; Martínez, G. & Ferrari, M. (2000). Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades (Cap. 7, pp. 89-145). En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, et al. (2000) *Desarrollo de Pensamiento Matemático*. ITESM-Universidad Virtual. México: Editorial Trillas.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14*. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I*. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Katz, V. (1987). The Calculus of the Trigonometric Functions. *Historia Mathematica* 14, 311-324

Lezama, J. (2003). *Estudio de la reproducibilidad*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Loi, M. (1999) Prologo en Guenard y Lelièvre (Eds.). *Pensar la Matemática*. España: Tusquets Editores.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)* (pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Malet, A. (1993-94). James Gregorie on Tangents and the 'Taylor' Rule for Series Expansions. *Archive for History of Exact Science* 46, 97-137.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(2).

Martínez-Sierra, G. (2006). Los procesos de convención matemática como constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19* (pp. 745-751). México: CLAME. ISBN: 970-9971-08-5.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

CATEGORÍA 4:

Uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

RETOS Y DESAFÍOS ANTE LAS PUERTAS DE LA TECNOLOGÍA

Juana Acosta Ganém
Secretaría de Educación Pública en Hidalgo. (México)
ganem_pachuca@hotmail.com, andresri@hotmail.com
Campo de investigación: formación docente, tecnología avanzada. Nivel educativo: básico
Palabras clave: actualización, nuevas tecnologías, implicaciones didácticas y pedagógicas

Resumen
En este trabajo se pretende presentar de una forma crítica los desafíos y retos cotidianos de los docentes relacionados con la incorporación e implicaciones de la tecnología, mostrando algunos cambios y renovación en las formas de enseñanza-aprendizaje a través de las herramientas tecnológicas, incursionando sobre la reflexión del docente y en la necesidad de actualización. Además, se tratarán algunas alternativas ante los desafíos desde la experiencia de operatividad del proyecto Enseñanza de la Matemática con Tecnología (EMAT-Hidalgo).

Vivimos actualmente en una sociedad cada vez más avanzada en la información y el conocimiento: época de grandes cambios en los distintos niveles, lo social, lo tecnológico y científico y en especial en el ámbito educativo, exigiéndose en cada uno de estos, continúas actuaciones a lo largo de todo proceso.
En consecuencia, la revolución digital, se ha convertido en uno de los elementos más importantes de los últimos tiempos, la imagen real que se presenta tiene como fuente principal la globalización de la economía, y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y comunicación. Entre ambas se observa el enlace que tiende a construir nuevas formas de conocer e interpretar la realidad particularmente en el ámbito escolar.
Ante este panorama dinámico de cambio que la educación afronta, la incorporación de las herramientas tecnológicas en la educación se abren como nuevos canales de información y de enseñanza que las hace imprescindibles, pero constituyen un verdadero reto para los profesionales que laboran en el campo educativo, ya que están cambiando no sólo en lo práctica educativa, sino fuertemente en la reflexión pedagógica y en el modo de incorporar las tecnologías; por lo tanto, la actitud del docente ante la tecnología y ante el uso de la misma es esencial para una buena enseñanza y un exitoso aprendizaje; según Barroso. J. (2003) las actitudes de los profesores hacia los medios tecnológicos se pueden analizar desde una doble perspectiva, una se refiere a las actitudes que los profesores suelen tener hacia las nuevas tecnologías en los centros educativos y otras a la importancia que las actitudes pueden tener para facilitar o dificultar la interacción con los medios.
La introducción de las nuevas tecnologías en los centros educativos pone de manifiesto la preocupación de los profesionales de la educación por las consecuencias que este fenómeno suscita, como señala Aguaded (2001) va a definir nuevos esquemas de enseñanza, los cuales van a ser desarrollados por los profesores de los centros, estén o no preparados para asumirla.
Esta incorporación de las nuevas tecnologías en el curriculum exige del docente una preparación y una actitud de apertura y aceptación de las dificultades que inicialmente va a encontrar, un esfuerzo de adaptación, actualización y perfeccionamiento permanente. En la mayoría de los docentes se citan causas generadoras de actitudes de inseguridad, negación, resistencia al cambio, el escaso conocimiento de los software y la falta de dedicación y de medios (Chevallard, Y., 2000).
Así también Alonso y Gallegos (1996) nos citan que los docentes de nuestros días deben desempeñar ciertas funciones básicas con relación a dichos cambios:

- Poseer una actitud positiva ante la integración de los nuevos modelos tecnológicos.

- Integrar los medios tecnológicos como un medio para fortalecer la transmisión de la información.
- Disposición a la innovación
- Adoptar una postura crítica, de análisis y de adaptación al contexto escolar, de los medios de comunicación.

Cabe destacar que la educación de hoy gira en torno a las exigencias sociales y por ello debe ligarse con la dinámica de cambio y adaptación constante en la relación entre el conocimiento científico, cultural y el desarrollo tecnológico mediante:

- La mejora de la atención educativa.
- La gestación de una cultura tecnológica.
- La alfabetización audiovisual y tecnológica.
- La aplicación didáctica de otras tecnologías.
- La apertura al cambio.

Ante estos retos sociales donde los cambios tecnológicos han modificado los espacios sociales y áulicos transformándolos en espacios virtuales, han cambiado la manera de pensar y las formas de acceder al aprendizaje mediante un lenguaje interactivo con pretensión de mejorar la práctica cotidiana: generando que los docentes se encuentren en "estado de sitio" de ahí se deriva la necesidad de definir nuevos esquemas de enseñanza, los cuales van a ser desarrollados por los profesores desde las instituciones, estén o no preparados para asumirlos.
Desde esta perspectiva el perfil del docente debiera configurarse como un profesional atento a todas las posibilidades de comunicación que las herramientas tecnológicas le ofrecen, para hacer más adecuado, exitoso y atractivo el proceso de aprendizaje de los alumnos. Un maestro que revise críticamente su propia práctica desde la reflexión de sus intervenciones como docente, y que pueda ayudar a sus alumnos a "aprender a aprender" en una sociedad cambiante y en constante evolución.

Dentro de los desafíos elementales del docente interesado en mejorar su quehacer educativo se encuentran:

a) El conocer a fondo las estrategias cognitivas para ayudar a los alumnos a reflexionar acerca de cómo mejorar su propio aprendizaje, no sólo con el conocimiento mismo, sino con las tecnologías disponibles.
b) Le corresponde explorar y valorar cómo interactúan estos medios con el aprendizaje, y observar qué efectos producen en el estilo cognitivo de los alumnos, cómo elegir los más adecuados y disponer una experiencia significativa para su utilización como herramienta en situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Desde esta perspectiva la visión que ha de despertar en el docente es:

1) El perfil del docente debiera configurarse como un profesional atento a todas las posibilidades de comunicación que las herramientas tecnológicas le ofrecen.
2) Un docente que revise críticamente su propia práctica desde la reflexión de sus intenciones como docente que pueda ayudar a su alumno a "aprender a aprender".
3) Mirar las nuevas tecnologías integradas al curriculum desde diferentes perspectivas: recurso didáctico, objeto de estudio, elemento para la comunicación y la expresión, instrumento de organización, gestión o instrumento de investigación.
4) Hacer más adecuado, exitoso y atractivo el proceso de aprendizaje de los alumnos.
5) Revisar críticamente su propia práctica desde la reflexión de sus intervenciones.

6) Trascender y fomentar la construcción de una perspectiva integradora que desarrolle las finalidades de las herramientas tecnológicas.

Bajo este esquema de retos nuestra reflexión de investigación se centra en el ámbito de los profesores iniciando el acercamiento de los docentes hacia algunos software educativos mediante el modelo didáctico del Programa EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología).

Las interrogantes que guiaron el estudio y fueron conduciendo el camino de la investigación fueron:

1. ¿Qué retos y desafíos plantean al docente la incorporación de las nuevas herramientas tecnológicas?
2. ¿Cuál es la visión que ha de despertar en el docente la incorporación de las nuevas tecnologías?
3. ¿Cuáles son las perspectivas educativas para el futuro con la incorporación de las nuevas tecnologías?
4. ¿Hacia dónde nos llevarán los alcances tecnológicos actuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje?
5. ¿Cuál es la visión que ha de desempeñar el docente ante la nueva sociedad del conocimiento?

En el programa EMAT-HIDALGO particularmente en su puesta en marcha y seguimiento (2003-2006) se establece como una propuesta pedagógica, la cual tiene como objetivo incorporar el uso de las tecnologías computacionales a la cultura escolar, con el fin de facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que aparecen en el currículum establecido y acercar a docentes y alumnos a ideas matemática avanzadas.

Tiene una cobertura a 68 instituciones de Educación Secundaria Técnica del Estado, en cuya área geográfica se encuentran ubicados en 12 zonas escolares en sus distintos contextos: urbano, semi-urbano y rural, implicando a una comunidad de 187 profesores que imparten la asignatura de matemáticas en un proceso de capacitación como una oportunidad de crecimiento académico en la incorporación de la tecnología en el aula de matemáticas.

Se cuenta con el apoyo de la Dirección de Materiales y Métodos de la SEP., México quién con su equipo de investigadores nacionales expertos en el uso de la tecnología computacional, se encargaron de la capacitación inicial de los software del proyecto y de establecer la dotación de los materiales bibliográficos, tanto del alumno como para el docente.

Particularmente en el desarrollo del programa se decidió la aplicación de las cuatro herramientas que integra el paquete EMAT: Cabri Géometrè para dar tratamiento a la enseñanza de la geometría; Hoja de Cálculo como apoyo a la enseñanza de la aritmética, preálgebra y el álgebra, Logo para el acercamiento de ambientes de cómputo de tipo micro mundos y Calculadora TI-92 para situaciones de acercamiento al conocimiento de cálculo, manipulación numérica y algebraica, representación gráfica y manipulación secuenciación de tablas similares a una hoja de cálculo, modulación y repetición.

Así también la intervención en la situación de gestión y apertura del proyecto se ve guiada por parte del Jefe del Departamento de Educación Secundaria Técnica en el Estado, de los jefes de sector, supervisores y apoyos técnicos-pedagógicos de las zonas escolares y de la asignatura quienes en una forma sustantiva colaboran en las estrategias de logística en su implementación.

En la puesta en práctica del programa se proporciono capacitación en una forma sistemática y gradual en el uso de las herramientas tecnológicas, a fin de iniciar a los profesores en el conocimiento y uso del software y del modelo pedagógico de EMAT. Por un lado, se impartieron

Cursos-Taller en los cuales cada profesor se fue apropiando de las características fundamentales de cada uno de los software que subyacen en el modelo pedagógico propuesto. En esos espacios académicos, se discutieron con los profesores las implicaciones didácticas y pedagógicas de la puesta del uso de la tecnología.
En está investigación se contempló realizar observaciones en el ámbito local y general de las situaciones pedagógicas vivenciadas dentro del aula y de entrevistar a los implicados en el proyecto sobre sus enfoques hacia las herramientas tecnológicas.
El recorrido de investigación y acercamiento con los profesores en sus ambientes de trabajo y observar el gran universo de situaciones que fueron complementando la imagen hacia las herramientas tecnológicas nos llevaron a la localización de distintos rostros, los cuales plasman los retos y desafíos que los entornos tecnológicos han propiciado como son:

- Modificar los conceptos de organización y funcionamiento del ambiente escolar.
- Rectificar la concepción de proceso enseñanza-aprendizaje.
- Modificar las tendencias pedagógicas al uso para que se ajusten al sentido nacional.
- Hacer que la pedagogía nueva sea más operativa y funcional, no instrumentalista sino realista y efectiva.
- Diseño de modelos y propuestas didácticas.
- Planificar para las nuevas demandas de aprendizaje y socialización.
- Desarrollar la motivación en los estudiantes.
- Realización de propuestas didácticas en el aula.
- Colaboración en el intercambio de experiencias didácticas.

Roles y funciones

- Actuar como dinamizador y asesor.
- Docencia centrada en el estudiante considerando la diversidad.
- Consultores de la información
- Colaboradores en grupo.
- Facilitadores de la formación
- Favorecedores del cambio de los contenidos curriculares
- Disposición a la innovación.

Respecto a los Software

- Es patente la adopción de posiciones activas al cambio, mientras que otros mantienen estrategias de tolerancia pasiva a cambiar.

Escenario de Aula

- Las prácticas docentes han mostrado cambios, pero no en el alcance que se desea. pues no siempre el maestro dispone de la información suficiente para encontrar la solución ante ciertos problemas. Y de esta forma anticipar algunas ideas de solución que pueden sugerir los alumnos.
- La interacción con las herramientas tecnológicas por parte del docente y los alumnos reflejan un encuentro frágil debido a que se requiere de establecer un clima más estimulante de exploración, diálogo y confrontación con las situaciones didácticas que se estén tratando.
- Se observan conforme se va vivenciando situaciones de desconcierto e incertidumbre con las herramientas. El impacto de la tecnología sólo pude esperarse, en el terreno individual, cuando se opera un cambio de actitud, acorde con el cambio social que implica la tecnología y que afecta al individuo en su contexto. En este sentido, no es suficiente la manifestación

de una actitud positiva general hacia la tecnología, sino que es necesario desarrollar una disposición para adoptar las herramientas tecnológicas en el propio entorno.

- Las imágenes de resistencia expresadas se manifiestan, mostrando signos de ansiedad, resistencia, inseguridad, dichas actitudes van dando origen a distintas tipologías de los docentes. También es palpable que en aquellos docentes que muestran problemas en el manejo de las herramientas y la falta de conocimiento de las metodologías y de su utilización, se produce una fractura que da como resultado una disminución de entusiasmo natural de inicio los cuales abandonan las herramientas para volver a sus prácticas habituales. En la mayoría de los docentes se citan causas generadoras de actitudes de inseguridad, negación, resistencia al cambio, el escaso conocimiento de software y la falta de dedicación y de medios (Chevallard, Y., 2000).

En el rostro de la perseverancia se manifiesta que para que el docente vaya encontrando las ventajas de estos medios es necesario: su familiarización, aceptación, entendimiento, adaptación, contextualización, innovación y aplicación didáctica.
Para su aceptación, es necesario propiciar una continua motivación y una permanente actualización. Así se podrá lograr conocer y comprender las potencialidades de interactividad, a la vez contextualización de las nuevas tecnologías.

Perspectivas educativas para el futuro

- Incorporar las nuevas tecnologías como un medio de educación que transforma las formas de pensar y construir conocimiento.
- Difusión y popularización de los recursos tecnológicos entre los docentes en forma colectiva para que aprendamos a usar los medios tecnológicos y no que los cambios nos instrumenten.
- Propiciar en los maestros una educación para los medios de aprendizaje tecnológico a través de redes académicas y lograr la alfabetización tecnológica.

Conclusiones

- La educación de hoy debe ligarse con la dinámica de cambio y adaptación constante en relación con el conocimiento científico cultural y el desarrollo tecnológico.
- Las tecnologías se convertirán en parte primordial del quehacer educativo penetrando en la sociedad del conocimiento.
- Los motores de la sociedad serán la revolución del saber y el encuentro al conocimiento.
- Exige de un docente con un nuevo perfil, sin resistencia al cambio.
- En el rostro de la perseverancia se manifiesta que para que el docente vaya encontrando las ventajas de estos medios es necesario: su familiarización, aceptación, entendimiento, adaptación, contextualización, innovación y aplicación didáctica.

"No dejarnos llevar como la hoja que va a donde los vientos quieran llevarla, la única vía de no alejarnos es el conocimiento”

Referencias bibliográficas

Aguaded Gómez, J. I. (2001). *La educación en medios de Comunicación*. Barcelona Editorial Kr.

Alonso y Gallegos. D. (1996). F*ormación de profesor en Tecnología Educativa*. Barcelona. Editorial Oikos-Tau.

Artigue, M. (1997). Teacher training as a key issue for integration of computer technologies. En los anales de *Secondary School Mathematics in the World of Communication Technologies. Learnig, Teaching and the Curriculum*.

Barroso, J. (2003). L*as Nuevas Tecnologías de la información y la comunicación y la formación del profesorado.* Madrid: Morata

Chevallard, Y. (2000). L*a transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Colección: Psicología, Cognitiva y Educación. Argentina, Buenos Aires: Editorial. Aique.

Hargreaves A., et al. (1999). *Una Educación para el cambio* (Reinventado la Educación de los Adolescentes). España. Editorial Octaedro.

SEP (2000). *Enseñanza de la Matemática con Tecnología* (EMAT). Dirección General de Materiales y Métodos Educativos .México.

EL JUEGO UTILIZANDO CALCULADORA GRAFICADORA COMO MEDIO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Ruth Rivera Castellón, Maximiliano De Las Fuentes Lara, José Alvaro Encinas Bringas
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California. (México)
ruthrc58@uabc.mx, maximilianofuentes@uabc.mx, aencinasb@uabc.mx
Campo de investigación: visualización. Nivel educativo: superior
Palabras clave: calculadora graficadora, ecuaciones paramétricas, heurística

Resumen
El propósito de esta investigación es indagar sobre los efectos cognitivos que provoca en los estudiantes el incorporar el uso de tecnología en la enseñanza. Se utiliza la calculadora para programar un juego situado en una cancha de básquetbol. El juego permite la interacción entre el estudiante y el objeto matemático en estudio: las ecuaciones paramétricas. En cada etapa del juego se busca que el estudiante asocie en uno y otro sentido el efecto físico y geométrico de los parámetros asignados a cada ecuación. La heurística forma parte esencial de esta actividad. La experiencia didáctica se aplicó a estudiantes de ingeniería observándose una actitud favorable al aprendizaje. Se obtuvieron evidencias de sus logros en cuanto a la asociación de los parámetros y sus efectos geométricos; su habilidad para transitar del contexto algebraico al grafico y viceversa.

Introducción

Los cursos de matemáticas de nivel superior buscan que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos. Los conceptos aprendidos deben ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. También se espera que los estudiantes desarrollen habilidades en el manejo de dichos conceptos en sus diferentes representaciones: marco algebraico, numérico y gráfico. Esta acción presupone la plena comprensión de un concepto matemático, cuanto más si la situación de aprendizaje esta enmarcada en un contexto físico o de ingeniería.
La calculadora graficadora programable ha tenido en los últimos años influencia en la enseñanza de la ingeniería, las ciencias básicas y particularmente en las matemáticas. Especialistas en educación matemática reconocen la necesidad de incorporar esta tecnología en los procesos de enseñanza e investigar los efectos cognitivos que provoca en los estudiantes, las habilidades y actitudes que favorece, los problemas nuevos que contrae dicha incorporación, así como también la consideración de una evaluación distinta a la que habitualmente se realiza. Cuando se considera a la tecnología como mediador de la enseñanza, deberá hacerse una evaluación pertinente en función de los objetivos y habilidades establecidos en los programas curriculares, que permita "medir" la proporción de los logros.

Planteamiento del problema

Partiendo de una investigación anterior (De Las Fuentes, 1998) efectuada con estudiantes de segundo semestre, se observaron las dificultades y obstáculos que se señalan a continuación:

- La escasa o nula manipulación del ambiente gráfico; en un curso tradicional, difícilmente un estudiante pueda graficar mediante patrones de comportamiento, sobre todo que pueda interpretar un modelo gráfico.
- La deficiente manipulación en el contexto numérico, no permite estimular las habilidades y la agilidad mental en los estudiantes.
- La calculadora graficadora esta subutilizada, tanto para el ámbito grafico como para el numérico.

- La manipulación predomina en el contexto algebraico, lo cual no permite interactuar las diversas representaciones del objeto matemático, solo sobre un algoritmo institucionalizado, buscando una respuesta descontextualizada y carente de significado, incluso matemáticamente.

El problema que se aborda es el de los estudiantes con dificultades para articular o cambiar de un contexto a otro, particularmente del gráfico al algebraico, o bien del verbal al gráfico, al numérico y al algebraico. El éxito se presenta en el tránsito del marco algebraico al numérico e inclusive al gráfico; que muestra el énfasis que ha tenido la enseñanza desde el punto de vista algebraico.

Algunas consideraciones teóricas

Para desarrollar este trabajo nos apoyamos en la Teoría de las Representaciones de Raymound Duval, debido a que gran parte de la disponibilidad conceptual de los objetos matemáticos, particularmente las ecuaciones paramétricas; se centra precisamente en la habilidad del estudiante para transitar de un registro a otro. La heurística forma parte esencial en esta actividad; según Polya constituye el mejor método de enseñanza de la matemática. Puesto que el planteamiento involucra tecnología, es importante apuntar que una de las bondades de los recursos tecnológicos, computadoras y/o calculadoras actuales, es que permite visualizar los fenómenos, ayudando a contextualizar el objeto matemático para promover los significados y su movilidad en distintas representaciones.
La concepción del profesor sobre la manera en que el pensamiento del estudiante se activa es importante. Enfrentar a un estudiante con ejercicios y problemas no es suficiente para que éste acepte el reto y se active mentalmente. Se considera necesario que el estudiante interactúe con los objetos matemáticos y, como producto de los conflictos entre conocido y lo que se desea conocer, se construya el conocimiento.

Desarrollo de la propuesta

Esta propuesta didáctica se basa en la utilización de los recursos tecnológicos, especialmente en la calculadora-graficadora. Utilizando su capacidad para programar, se ha diseñado un juego situado dentro de una cancha de básquetbol, que permite la interacción entre el estudiante y el objeto matemático a estudiar. El estudiante propone de manera arbitraria y basándose en su esquema conceptual, las ecuaciones para que el balón desarrolle la trayectoria deseada (figuras 1 y 2).
En cada propuesta por parte del estudiante, se va vinculando el efecto físico y geométrico de los coeficientes y parámetros incorporados en las ecuaciones. Se busca en este juego asociar en uno y otro sentido el efecto físico y geométrico de los coeficientes y parámetros incorporados en las ecuaciones propuestas, y la posibilidad de transitar del contexto algebraico al gráfico y viceversa.

La actividad se desenvuelve en dos etapas: en la primera el estudiante propone las ecuaciones paramétricas que generen la trayectoria de la pelota dentro de la cancha de tal forma que los participantes se pasen la pelota entre sí (fig. 1).

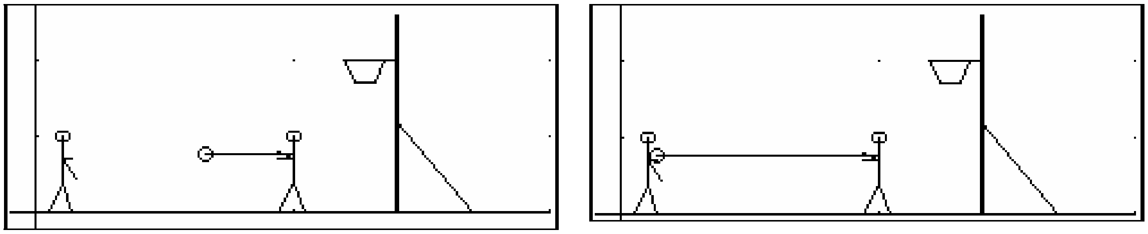


Fig. 1 El árbitro le lanza la pelota al jugador para que este se la regrese

En la segunda etapa los estudiantes deberán proponer las ecuaciones que permitan al jugador realizar el tiro de tal forma que enceste en la canasta. (fig. 2)

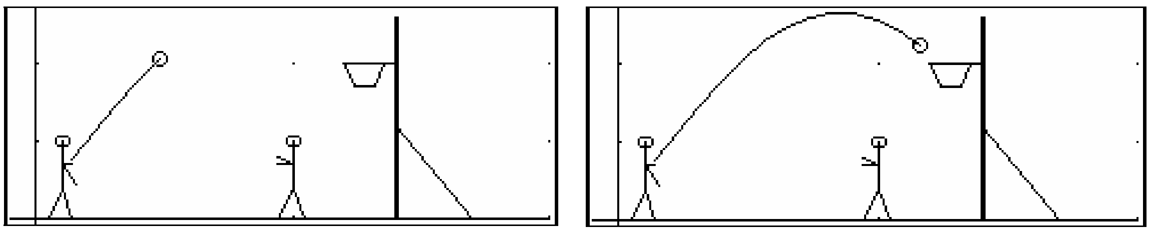


Fig. 2 El jugador tira a la canasta para encestar.

Para realizar la experimentación los estudiantes se organizaron en grupos formados por tres integrantes; entregándoles una calculadora con el programa respectivo por equipo. Previamente se les capacitó en el uso básico de la máquina. Se les entrega a cada equipo una hoja con el objetivo y las instrucciones a seguir; para iniciar el juego los integrantes de cada equipo van proponiendo la ecuación y observando el efecto correspondiente en la pantalla de la calculadora, anotando en la hoja de papel todas las propuestas sin borrarlas.

Esta etapa es hacia el interior de cada equipo. Posteriormente, se discuten las propuestas a nivel grupal y en enseguida el profesor institucionaliza el conocimiento adquirido.

Análisis de algunos resultados

A continuación se presenta seis de las ocho propuestas hechas por uno de los equipos de estudiantes para "regresar la pelota al árbitro".

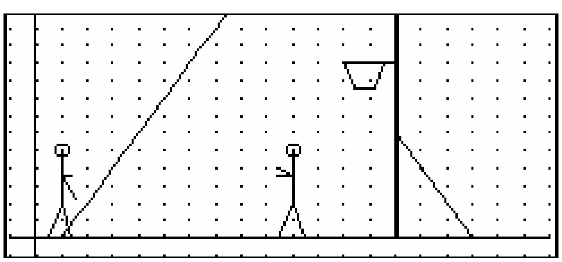


Fig. 3 $x=2t+1$, $y=4t$

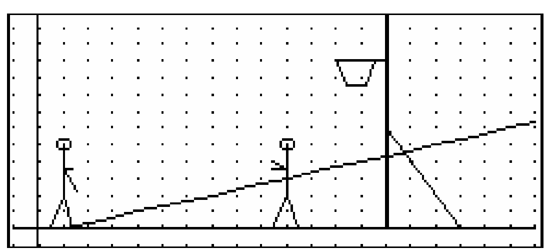


Fig. 4 $x=6t+1$, $y=2t$

Su primera propuesta está formada por dos ecuaciones de primer grado (fig. 3); esto indica que ya tenían la noción de linealidad. En los dos siguientes intentos (figuras 4 y 5) tratan de "acostar" la recta.

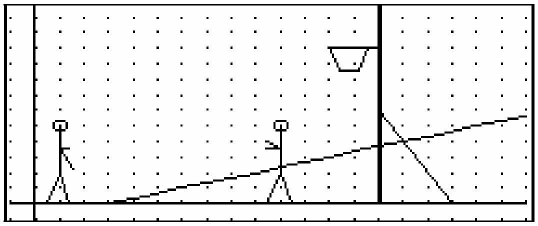


Fig. 5 x=6t+1, y=2t

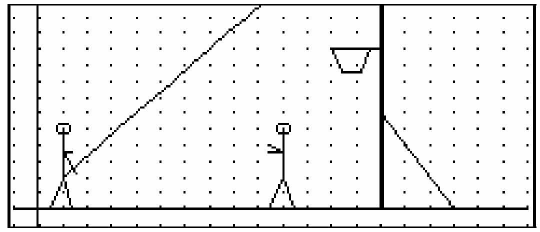


Fig. 6 x=3t+1, y=4t+2

En la fig. 6, le agregan un 2 para la parte en *y*, al parecer para "subirla";

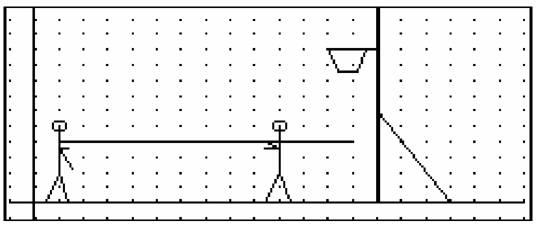


Fig. 7 x=2t+1, y=4

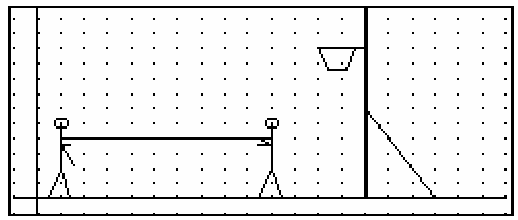


Fig.8 x=1.5t+1, y=4

En la fig. 7 se puede observar que suben la recta a cuatro unidades, pero "se les pasa", ajuste que logran hasta su octavo intento (fig. 8).
Con esta actividad los estudiantes asocian los términos independientes de las ecuaciones con la posición de salida de la pelota, así como también el establecimiento de la constante en la ecuación $y(t)$ para controlar el movimiento horizontal y la estimación adecuada de la velocidad que corresponde al coeficiente del término lineal de la ecuación $x(t)$, para que la pelota llegue a su destino. Asociaciones de este estilo también fueron observadas en el lanzamiento a la canasta durante la segunda parte del experimento, en cuyo caso el objetivo era encestar la pelota en la canasta. En este caso aparece el término cuadrático para que la pelota tenga un movimiento de tipo parabólico.
A continuación se muestran algunas de las propuestas para el caso del enceste.

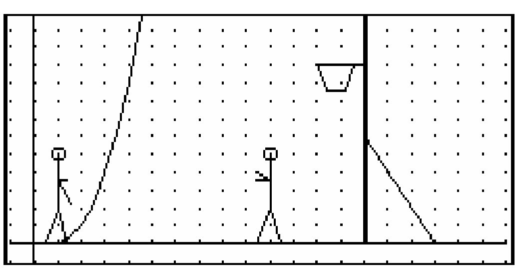


Fig. 9 $x = 2t+1$, $y = 4t^2$

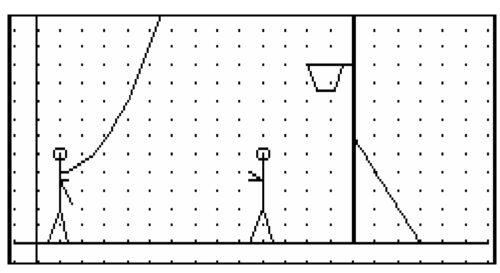


Fig. 10 $x=1.5t+1$, $y=4+t^2$

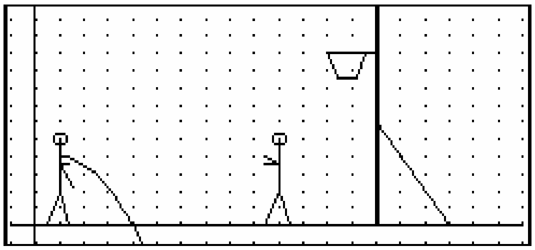


Fig. 11 $x=1.5t+1$, $y=4-t^2$

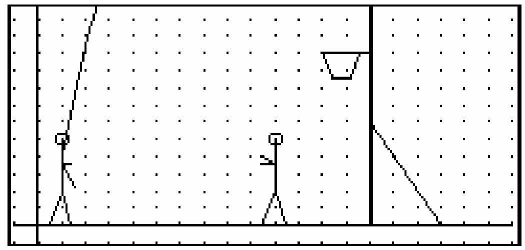


Fig. 12 $x=1.5t+1$, $y=4t+10t-t^2$

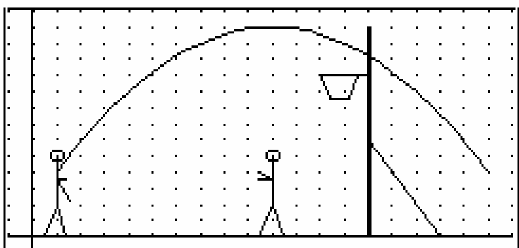


Fig. 13 $x=3t+1$, $y=4+10t-t^2$

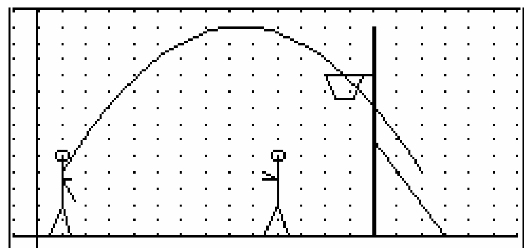


Fig. 14 $x=2.5t+1$, $y=4t+10t-t^2$

Esta experiencia didáctica, permitió observar en todos los equipos en primera instancia un gran entusiasmo y apropiamiento del problema planteado, de tal manera que dos de los equipos finalizada la sesión y no habiendo culminado la práctica se negaban a abandonar su tarea, cuando estos mismos estudiantes en su clase tradicional están deseosos por abandonar la sesión; se observó que algunos de los estudiantes no querían anotar sus propuestas de ensayos, tal vez por temor a evidenciarse. Comentarios posteriores de estudiantes aseguran que "ahora si entendieron" y que deseaban mas sesiones de este mismo corte.

Conclusiones

La experiencia puede considerarse como exitosa en varios aspectos:

1. Logra que los estudiantes se apropien intelectualmente del problema.
2. Se consigue que después de varios intentos y sin la ayuda del profesor los estudiantes asignen un significado a las constantes dentro de las ecuaciones así como los coeficientes de la parte lineal y cuadrática.
3. Los estudiantes alcanzan a predecir el movimiento de la pelota modificando los parámetros adecuadamente.
4. Promueve la habilidad de plantear ecuaciones al observar la trayectoria de la pelota.

Referencias bibliográficas

Barton, R. y Dile, J. (2002). *Exploraciones, Aplicaciones de cálculo para la TI-89*. México. Editorial Oxford /Texas Instruments.

De Las Fuentes, M. (1998). *Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas*. Tesis de Grado no publicada. Universidad de Sonora, México.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. *Antología en Educación matemática*, Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1993). *Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognoscitivo del pensamiento.* Traducción: Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN.

Douglas, J. (2002). *Exploraciones, aplicaciones de cálculo y matemáticas previas al cálculo para la TI-92 y la TI-92 Plus*. Editorial Oxford/Texas Instruments.

Morgan, L. (2002). *Exploraciones, aplicaciones de estadística para la TI-83*. México. Editorial Oxford/Texas Instruments.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista educación Matemática*, Vol.10, (1).

Purcell, Varberg, Rigdon. (2001). *Cálculo*. (8$^{va.}$ ed.) México. Editorial Prentice Hall.

TI-89/Voyage^{TM} 200. (2002). *Referencia Técnica*. USA. Texas Instruments.

PROPUESTA DE UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE TÓPICOS DE COMPUTACIÓN A ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Jorge Rey Díaz Silvera, Larisa Zamora Matamoros
Universidad de Oriente. (Cuba)
jdiaz@csd.uo.edu.cu, larisa@csd.uo.edu.cu
Campo de investigación: educación continua. Nivel educativo: superior
Palabras clave: programación, TIC, matemática, enseñanza

Resumen
El presente trabajo tiene como propósito hacer una propuesta de estructuración de contenidos a enseñar sobre tecnologías de la informática y las comunicaciones (TIC) al futuro profesional matemático de perfil amplio, más versátil y adaptable a las condiciones reales donde realizará su actividad una vez graduado y apto para resolver una serie de problemas comunes a distintas esferas de actuación, ya sea en el campo de las investigaciones aplicadas o puras, o en el campo de la enseñanza de la matemática, de tal forma que tenga una sólida base para emplear estas técnicas en su futuro desempeño profesional.

Introducción

Los perfiles actuales de trabajo del profesional matemático exigen cada vez más que éste deba realizar labores muy vinculadas a la computación y/o emplear las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en su trabajo diario, por otro lado, han ido apareciendo paquetes profesionales que cada vez hacen más dinámico y efectivo el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, todo lo cual exige continuos cambios en el currículo del Matemático.
La actividad profesional del matemático se caracteriza, entre otros aspectos, por la aplicación de los métodos y modelos matemáticos ya conocidos a la resolución de problemas reales surgidos en las diferentes esferas de actuación, la elaboración de nuevos métodos, cuando los ya conocidos no sean aplicables, la modelación matemática de situaciones diversas que forman parte del objeto de otras profesiones, la utilización de los algoritmos de cálculo que posibiliten la aplicación de las programotecas existentes, la asesoría a otros profesionales sobre estas materias y la enseñanza en el nivel superior de educación.
El uso de herramientas computacionales favorece el perfeccionamiento de categorías importantes dentro del razonamiento matemático como el análisis, la síntesis, la abstracción, la inducción y la deducción, entre otras, evidenciando que las mismas no son sólo un instrumento para resolver problemas, sino también un modelo de razonamiento. De hecho, la relación entre matemática y computación es natural y está dada en un doble sentido: la matemática ha permitido desarrollar y formalizar las teorías informáticas y de otra parte, el empleo de la computación favorece la formación matemática.
El matemático hace uso de las técnicas computacionales básicamente como herramienta de trabajo y/o para construir programas de mediana o poca complejidad, usando, además de un lenguaje de programación de alto nivel, las capacidades de programación que brindan los paquetes matemáticos, como en el Mathematica, el Statistica, etc. Por ello el entrenamiento de los estudiantes en las técnicas computacionales pasa por tres momentos importantes en la carrera:

- Aprendizaje de un lenguaje de programación de alto nivel, preferentemente dentro del paradigma de orientación a objetos.
- Aprendizaje de otras TIC, que complementen los conocimientos básicos que debe tener en tales técnicas.

- Familiarización con el empleo de paquetes profesionales orientados a la solución de problemas matemáticos y otros de propósitos generales, como los de ofimática.

Necesidad del aprendizaje por parte de los estudiantes de la carrera de Matemática de un lenguaje de programación de alto nivel

Existen ciertos aspectos que refuerzan esta necesidad, entre los que podemos citar:
- Las habilidades que aprenden en la programación con un lenguaje de alto nivel le facilitan la comprensión de cómo programar en paquetes matemáticos que brindan tal posibilidad y poder emplear estos de forma atractiva en la solución de problemas matemáticos que actualmente muchos profesores orientan resolver con técnicas no interactivas, aumentando así la capacidad de representación de los estudiantes, habilidad de suma importancia en esta profesión.
- La posibilidad de programar rutinas matemáticas para obtener mejores prestaciones, por ejemplo, en cuanto a la precisión de los cálculos, que los que pueden brindar las rutinas incorporadas en paquetes profesionales, cuando esto resulte necesario.

Más que decidir cuál lenguaje debe enseñarse para programar, hay dos cuestiones que debemos tener en cuenta al elaborar una estrategia para la enseñanza de esta materia:
- Determinar cuáles son las invariantes de conocimientos que serán tratadas, que faciliten la posterior profundización en otras características de lenguajes no enseñadas en el curso, la comprensión de algoritmos que pueden ser expresados en seudocódigos de lenguajes de programación existentes y las formas de programar en paquetes profesionales que brinden esa capacidad.
- Establecer un orden de impartición de los contenidos de la asignatura, que facilite al estudiante apropiarse de los conceptos y constructores del subconjunto del lenguaje que se determine, a tenor de lo planteado en el punto anterior.

Diferentes lenguajes se han usado en un primer curso de programación, entre los que podemos citar Pascal, Ada, Modula, C, C++, C# y Java. De una parte los criterios de selección no se desligan de las necesidades de programación del sector industrial, científico y empresarial; por otra parte son bien conocidos los requerimientos que debe reunir un buen lenguaje orientado a objetos, fundamentalmente si se usa en un primer curso de programación, que se expresan, entre otras fuentes, en (Kolling, 1999). A partir de nuestras propias experiencias (Diaz, 2006), brindamos algunas orientaciones metodológicas que pueden ser tenidas en cuenta al impartirlo, que se detallan a continuación.

1. *No abandonar a lo largo del curso un estilo de enseñanza de la programación basada en la resolución de problemas*. El estudiante debe quedar convencido, desde que comienza la asignatura, de que su eficacia como programador no está precisamente en dominar la herramienta de programación, cosa evidentemente necesaria, sino en saber resolver problemas con la computadora para lo cual se requiere dominar una *metodología de la programación* cuyo eje central es el algoritmo. Consecuentemente, debe dedicarse las primeras semanas de clase al desarrollo de algoritmos, usando para su expresión alguna forma de seudocódigo.
2. *Enseñar la estructura del programa en el lenguaje de programación seleccionado*. Introducir las declaraciones de constantes, definiciones de variables, características de algunos tipos primitivos y estudiar, con mayor grado de formalización sintáctica y semántica, los operadores y las estructuras de control básicas del lenguaje, así como nociones de alcance y tiempo de vida. Se sugiere usar solamente las operaciones imprescindibles de estrada/salida. Deben dedicarse varias actividades prácticas en computadoras, para que los estudiantes se familiaricen con el ambiente de

trabajo del lenguaje y puedan correr algunos de los problemas, cuya expresión algorítmica dio en clases anteriores.

3. *Introducir los conceptos de procedimiento y/o función desde un punto de vista algorítmico,* definiendo los parámetros de entrada, salida, entrada/salida y formas que eventualmente usará la función para retornar valores que calcula. Debe evitarse la declaración global de constantes y variables.
4. *Introducir el concepto de clase*. El punto de partida es la definición de tipos de datos abstractos que nos ayuden en la representación de un problema, por ejemplo, la definición de alguna clase para datos numéricos (números fraccionarios, números complejos) donde se implementen algunas operaciones apropiadas, luego se presenta el concepto de clase como una herramienta eficaz para codificar en el lenguaje de programación la definición de tal tipo, junto con los conceptos de atributos y métodos y su empleo en el problema.

Deben ser estudiadas las formas de visibilidad que implementa el lenguaje de programación para las componentes de clase, las partes de la clase (interfase e implementación), constructores simples y destructor.

Si usamos el lenguaje C++, debe darse a la variable *this* un tratamiento muy simple, que evite mezclarnos con los punteros y lograr que en este momento sea aceptado por definición que **this* es el objeto actual que envía el mensaje en proceso.

Debe explicarse el concepto de estado de un objeto y a partir de aquí las funciones de acceso y modificación de un objeto (funciones Get y Set) y su importancia.

5. *Introducir los tipos enumerativos y fundamentalmente tipos de arreglos* y introducen las formas en que éstos se operan o transforman (lecturas, escrituras, cálculos, búsquedas, etc.) construyendo clases en que sus atributos sean la cantidad real de elementos que tiene el arreglo y la definición de los elementos del arreglo usando el constructor por defecto de un arreglo.
6. *Introducir el concepto básico de herencia*, los conceptos de clases y superclases, las formas en que se heredan atributos y métodos, la visibilidad protegida o equivalente, todo a través de un ejemplo de entrada y las características de los constructores y destructores de las clases derivadas. Se debe demostrar a partir de dicho ejemplo, desarrollado en laboratorio, la importancia de definir métodos virtuales, enfatizando además que esta definición constituye una forma de polimorfismo.
7. Si se emplea el lenguaje C++ será imperioso *enseñar el concepto de punteros*, como vía para definir variables dinámicas usando las funciones *new* y *dispose* y como un ejemplo la definición de arreglos dinámicos usando punteros, disciplinando a los estudiantes en el chequeo del rango de sus índices y dar herramientas para evitar la aparición de referencias nulas o basura. Deben estudiarse las cadenas de caracteres, usando las bibliotecas más evolucionadas que posea el lenguaje.
8. *Retomar el concepto de herencia*, para enseñar conceptos relativos a la definición de tipos-subtipos en una jerarquía y cómo esto permite definir objetos polimórficos.
9. *Introducir el manejo de estructuras de datos de listas, pilas y colas*, usando las facilidades de definición de estructuras dinámicas que brinda el lenguaje, implementadas como tipos de datos usando el concepto de clases.

Los ejercicios que se desarrollan en la asignatura deben facilitar la definición de tipos de datos abstractos para entidades matemáticas, trabajo con fórmulas matemáticas, aproximaciones, confección de gráficas y similares.

Uso de otras herramientas computacionales

Se hace imperioso que los estudiantes de la carrera adquieran conocimientos adicionales sobre tecnologías informáticas, de tal forma que puedan tener una mejor adaptación a entornos de trabajo cooperativos y al procesamiento de datos, lo mismo de forma centralizada que de forma remota. Es por ello que proponemos una segunda asignatura de perfil computacional, que podemos denominar Complementos de Informática, que contemple, al menos, las siguientes temáticas y sistema de conocimientos que pasamos a detallar:

- Sistemas de bases de datos.

Conceptos fundamentales de bases de datos, sistemas de gestión de bases de datos (SGBD) y sus características y sistemas de bases de datos. El modelo relacional, álgebra y cálculo relacional y lenguajes que permitan expresar demandas sobre la base de datos (SQL), presentando los comandos básicos de sus sublenguajes de manipulación y creación de datos. Formas normales ligadas a dependencias funcionales. Cuestiones esenciales del trabajo con un SGBD (si es en ambiente propietario puede ser SQL Server o Access, si es software libre MySQL), elementos de seguridad e integridad que incluyen y los elementos básicos de una plataforma cliente-servidor para bases de datos y la conectividad con bases de datos a través del lenguaje estudiado en la asignatura de programación, usando componentes ADO.

- Conceptos elementales de redes y su administración.

Propósito de los sistemas y redes de comunicación de datos. Redes locales y globales. Medios de transmisión. Topologías de red. Acceso a los medios de transmisión. Estándares de red. Dispositivos de interconexión. Modems. Tipos de servidores. Correo electrónico. Principales software de red. Protocolos y direcciones. TCP/IP. Seguridad en redes. Configuración de redes. Manejo de usuarios y de grupos. Establecimientos de derechos. Políticas de Administración. Configuración y administración Windows NT.

- Confección de páginas web dinámicas y acceso remoto a bases de datos.

Introducción a los servicios de web e Internet, elementos básicos del lenguaje HTML y del diseño de páginas estáticas, JavaScript, introducción a la programación en Web usando PHP o ASP con JScript y confección de páginas dinámicas y administración remota de bases de datos.

Uso de paquetes profesionales

Otras herramientas ampliamente utilizadas en la inserción de la tecnología informática al currículo del matemático son los procesadores simbólicos y los geométricos. El uso de estos procesadores le permitirá, tanto al estudiante -en el proceso de aprendizaje- como al profesor -durante el proceso de enseñanza- acercarse más a una representación de objetos y reglas, que de otra forma quedarían representados de forma abstracta.

Los procesadores simbólicos como Derive, Mathematica, Maple, Mathlab, Mathcad, etc son programas que resuelven, calculan, simplifican, desarrollan series y grafican expresiones del álgebra y el cálculo por medio de símbolos. Ellos permiten proponer situaciones problémicas para ser resueltas por el estudiante y confirmadas mediante expresiones simbólicas por el sistema.

Resulta de vital importancia que el estudiante se familiarice y logre un dominio de las principales características de algunos paquetes profesionales en el área de la estadística, como el Statistica, el SPSS, etc., de preferencia el primero. Es bueno que el estudiante aprenda también a resolver problemas estadísticos usando el Excel, que aunque de menos alcance que los primeros paquetes mencionados, brinda posibilidades básicas de cálculo que no son de desdeñar. También se propone el uso de otros editores como el Latex y software para la optimización, como el PLEC++.

Sistematización multidisciplinaria del uso de las técnicas computacionales

Consideramos que la capacidad para algoritmizar la solución de un problema puede ser dinamizada a través de las disciplinas matemáticas que se imparten paralelamente a la enseñanza de la programación, tales como Álgebra, Análisis Matemático y Geometría, y que la propia asignatura de Programación puede dinamizar la capacidad codificadora a través de sus ejercicios, tanto teóricos como prácticos, basándose en problemas provenientes de esas asignaturas. Programar algoritmos para la solución de problemas provenientes de las diferentes disciplinas matemáticas tendrá un influjo muy positivo en la consolidación de los sistemas de conocimientos propios de las mismas. Esto se manifestará también en los años superiores y, por ejemplo, el profesor de Matemática Numérica puede indicar la programación de ciertos métodos, cuya presentación analítica se ha discutido en clases y podrá entonces profundizar en otras cuestiones teóricas relacionadas, por ejemplo, formas de minimizar errores.

La implementación de tipos de datos abstractos para números racionales y complejos, polinomios, matrices, vectores y otros algoritmos desarrollados en la disciplina de Álgebra son ejemplos que deben convertirse en clásicos en la asignatura de Programación. De otra parte las habilidades de programación se verían favorecidas con la utilización en asignaturas propias del perfil de algunos de los paquetes profesionales para la actividad del matemático existentes para el cálculo de límites, derivadas, integrales, etc. El empleo de los paquetes matemáticos profesionales, en general, le dará al profesor en su asignatura la posibilidad de ganar tiempo de cálculo y poder dedicar más tiempo a la discusión de nuevas teorías, de incentivar el espíritu investigativo y el conocimiento productivo en el estudiante, pues le puede orientar trabajos más complejos y de mayor aplicabilidad que el estudiante puede enfrentar con mayor individualidad.

Los conocimientos de bases de datos, redes y tecnologías de Web son empleados en las prácticas laborales investigativas, dentro de la disciplina Práctica Profesional del Matemático (que tiene asignaturas presentes en cada año de la carrera), para dar solución a problemas concretos que emplean el procesamiento de grandes volúmenes de información, incluido el procesamiento remoto de los datos e incluso construcción de hipermedias y sitios web que pueden apoyar, por ejemplo, la gestión del profesor y el aprendizaje autónomo e interactivo del estudiante. Es precisamente esta disciplina el momento idóneo para el empleo de todas las tecnologías informáticas aprendidas con la solución de los problemas propios de la profesión.

Resultados de las encuestas

Con el objetivo de indagar cuáles eran los elementos de programación a tener en cuenta en el currículo del Licenciado en Matemática, así como el uso que se hace de otras tecnologías de la computación y su vínculo con los modos de actuación del profesional matemático, fueron aplicadas dos tipos de encuestas, una dirigida a graduados de la carrera y la otra a estudiantes de tercero a quinto año. Estos resultados, de los cuales a continuación mostramos los principales, fueron tenidos en cuenta al elaborar la estrategia que propone el presente trabajo:

- Se evidencia un mayor empleo de las TIC en las disciplinas de Práctica Profesional del Matemático (87,50%), Matemática Numérica (62,50%) y Estadísticas (37,50%).

- Los graduados, en su etapa estudiantil, usaron, en una clasificación de algunas veces o frecuentemente, la Programación en un 75%, Sistemas de bases de datos en un 62,50% y Estructuras de Datos en un 50%.

Por su parte los estudiantes han opinado en su totalidad que los conocimientos recibidos en la asignatura de Programación son adecuados para su formación como futuros profesionales, que los aplican fundamentalmente en las asignaturas de Matemática Numérica (100% de los estudiantes), Práctica Profesional (40%) y Criptografía (20%) y un 80% de los estudiantes opina que son usadas situaciones relacionadas con temáticas afines a la matemática.

Conclusiones

En el trabajo se ha presentado una estrategia para enseñar un conjunto de conocimientos básicos sobre tecnologías computacionales, haciendo un mayor hincapié en la enseñanza de la programación, además de presentar una propuesta de estructuración de contenidos de esta asignatura y de otra asignatura que complementa los conocimientos de tales tecnologías y las formas en que se pueden introducir los paquetes profesionales matemáticos y de la ofimática.

Es incuestionable el hecho de que el dominio de un conjunto básico de las TIC contribuye a la mejor preparación de los estudiantes, ampliando el espectro de su futura ubicación laboral. De hecho, la mayor parte de los estudiantes que se han graduado en los últimos años han realizado sus labores profesionales vinculados principalmente con aplicaciones de la computación. Para aquellos que se dediquen a la enseñanza de la matemática, el desarrollo de esta cultura informática les permite tempranamente comprender las potencialidades de las TIC en el ámbito educativo y, una vez graduados, hacer un uso eficiente de las potencialidades de las mismas en el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Consideramos que con las dos asignaturas, Programación y Complementos de Informática, se pueden lograr los objetivos de dar una formación básica al estudiante de Matemática en técnicas computacionales, a la vez que el estudio de paquetes profesionales matemáticos y estadísticos, como el Mathematica, MatLab, Statistica, PLEC++ y otros, pueden ser introducidos a través de las asignaturas básicas o del ejercicio de la profesión, incluyendo la Práctica Laboral e Investigativa. Esta propia disciplina puede propiciar la adquisición de habilidades en el empleo de los paquetes del Office, principalmente Word, PowerPoint y Excel.

Referencias bibliográficas

Ministerio de Educación Superior (1998). Programa de la disciplina. Programación y algoritmos para la carrera de Matemática. MES, República de Cuba.

Departamento de Matemática, Universidad de Oriente. (2004). Programa Director de Computación de la carrera de Matemática. Santiago de Cuba, Cuba.

Diaz, J. (2006). Enseñando programación con C++: una propuesta didáctica. Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales, 3(7), junio 2006, 12-21.

González, W., Estrada, V. y Martínez, M. (2004). Contribución al desarrollo de la creatividad a través de la enseñanza de la Programación. Revista Pedagogía Universitaria, 9(3), 115-148.

Kölling, M. (1999). The problem of teaching object-oriented programming. Part I: Languages. Journal of Object-Oriented Programming, 11(8), 8-15.

Oteiza, F., Silva, J. y Equipo Comenius (2001). Computadores y comunicaciones en el curriculo del matemático. En http://www.eduteka.org/pdfdir/SilvaMatematicas.pdf (Citado el 9 de Marzo de 2005).

CAMPO DE DIRECCIÓN. MÉTODO DE LAS ISOCLINAS, EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Pedro Castañeda Porras, Arelys Quintero Silverio, Aura Matilde Moreno Fierro
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca". (Cuba)
pcasta@mat.upr.edu.cu, arelys@mat.upr.edu.cu
Campo de investigación: resolución de problemas. Nivel educativo: superior
Palabras clave: isóclinas, campo de dirección, ecuaciones diferenciales, DERIVE

Resumen
En la descripción del proceso de modelado se habla acerca de formular un modelo matemático de un problema del mundo real a través de un razonamiento intuitivo acerca del mismo o a partir de leyes físicas basadas en la evidencia proveniente de la experimentación. El modelo matemático a menudo toma la forma de una ecuación diferencial, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas.

Introducción

Buscar una posible solución a un modelo matemático de un problema del mundo real requiere de conocimientos, experiencias, medios para el tratamiento de la información y una comunidad capaz de enfrentarlo. A los profesionales de la Matemática les corresponde resolver esta tarea con el auxilio del uso de las nuevas tecnologías que imponen cambiar sustancialmente la forma de enseñar vigente hasta ahora en los diferentes niveles.
En este trabajo se plantean modelos ya creados de un problema. Es importante subrayar que existe una diferencia básica entre el concepto "problema" y el de "ejercicio". No es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema. Al respecto, en (Campistrous y Rizo, 2000) se señala que unos de los retos es ¨l*ograr que en las aulas se planteen verdaderos problemas y que los profesores conviertan la resolución de problemas en objeto de enseñanza y no que la utilicen como un medio para ¨fijar¨ el contenido de la enseñanza¨.*
En este trabajo se utiliza el concepto de Ecuación Diferencial de primer orden para interpretar un modelo ya creado.
Para el trabajo con el modelo se precisa de los componentes orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del mismo y evaluación de la solución, los cuales constituyen el proceso para el tratamiento del problema. A partir del desarrollo de este proceso los estudiantes llegan a la solución del mismo de forma activa y conciente a través del procedimiento Heurístico, el cual permite encontrar un algoritmo para resolver este tipo de problemática.
Es interesante hacerle entender al estudiante la necesidad de utilizar recursos tanto gráficos como analíticos. Mediante el uso del Asistente Matemático (DERIVE) se da solución a una Ecuación Diferencial, de las que se encuentran en aplicaciones del mundo real, donde no se conoce la fórmula para su solución. Esto es de gran utilidad pues aunque se tuviese la suerte de obtener una solución implícita, sería difícil usar esta relación para determinar una forma explícita. De ahí que sea necesario basarse en otros métodos para analizar o aproximar la solución. Para visualizar (graficar) las soluciones de una Ecuación Diferencial de primer orden es preciso bosquejar el campo de direcciones de la ecuación. (Saff y Zinder 2001).
Suponga que se pide dibujar la gráfica de la solución del problema con valor inicial, $y' = f(x, y)(1)$, $y(x_0) = y_0$ y no se conoce una fórmula para la solución, de modo que, ¿cómo adquirimos la posibilidad de dibujar su gráfica?

La ecuación diferencial (1), determina un campo de direcciones. La terna de números (x, y, y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y), el conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo de direcciones. Para darle solución a este problema, es posible apoyarse en el Asistente Matemático *DERIVE*, que permite trazar la curva solución y comparar los resultados.

PROBLEMA:

Trazar un campo de dirección para la ecuación diferencial $y' = y\,sen\,2x$. Obtener una impresión y dibujar en ella la curva solución que pase por (0,1). Utilizar el Asistente Matemático DERIVE para trazar la curva solución y comparar los resultados.
A continuación utilizaremos el File ODE_APPR.MTH, el cual contiene un fichero que nos ayuda a trazar el campo de dirección, DIRECTION_FIELD(r, x, x0, xm, m, y, y0, yn, n) se aproxima a la matriz de puntos (segmentos) que describen la dirección del campo. Use la orden Options > Pantalla > Puntos para que los puntos se representen uniendo los segmentos que definen (Ver Fig. 1)

DIRECTION_FIELD(y·SIN(2·x), x, -3, 3, 6, y, -3, 3, 6)

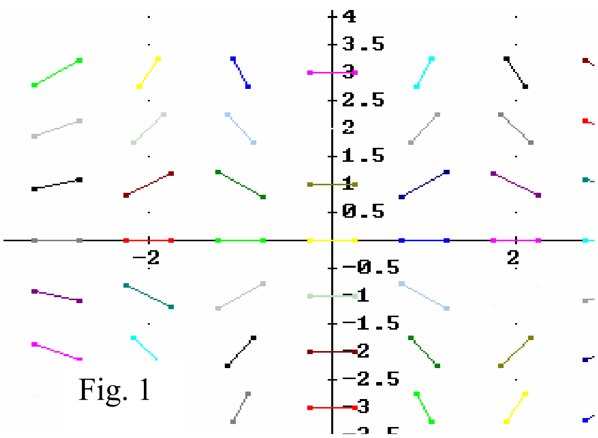


Fig. 1

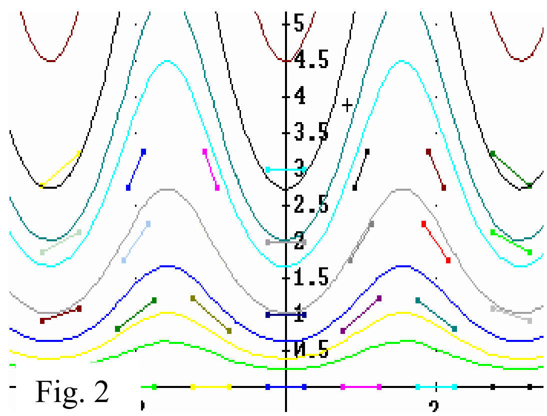


Fig. 2

Dibujo de algunas curvas solución de la ecuación diferencial. Advierta que hemos trazado la curva de modo que sea paralela a segmentos rectilíneos cercanos.

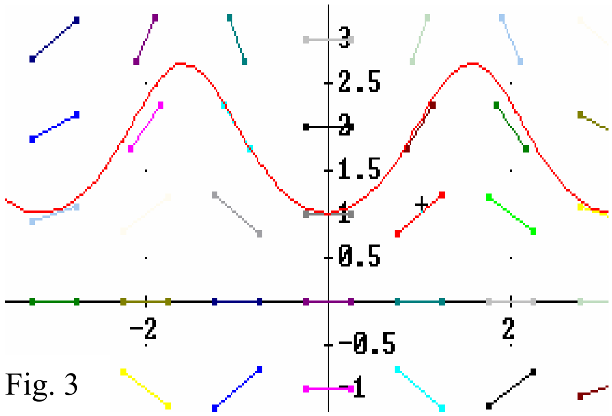


Fig. 3

Después de observar el campo de dirección que permite visualizar la forma general de las curvas soluciones (ver Figuras 1 y 2), podemos dibujar la curva solución que pasa por (0,1) siguiendo el campo direccional de la Fig. 1

Observación: El bosquejo con pequeños segmentos de recta trazadas en diversos puntos del plano ¨xy¨ para mostrar la pendiente de la curva solución en el punto correspondiente es un campo de dirección de la Ecuación Diferencial.

En el problema que trataremos a continuación, también veremos la construcción de curvas integrales introduciendo las isoclinas.

Se llaman *isoclinas* al lugar geométrico de puntos en los que las tangentes a las curvas integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia de las isoclinas de la ecuación diferencial (1) se determina por la ecuación f(x, y) = k, donde k es un parámetro. Dando al parámetro k valores numéricos próximos dibujamos una red bien compacta de isoclinas, sirviéndose de las cuales se pueden trazar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación diferencial (1). (Saff y Zinder 2001).

PROBLEMA:

Sirviéndose de las isoclinas, trazar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = x^2 + 2x - y$.

Solución.

Para obtener las ecuaciones de las isoclinas, ponemos $y' = k$ (k es una constante).

Se tiene $x^2 + 2x - y = k$, o bien $y = x^2 + 2x - k$, las isoclinas son parábolas con el eje vertical de simetría x = -1 (Ver Fig: 4).

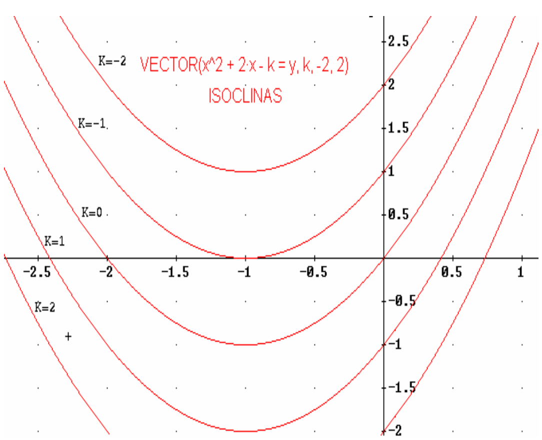


Fig. 4

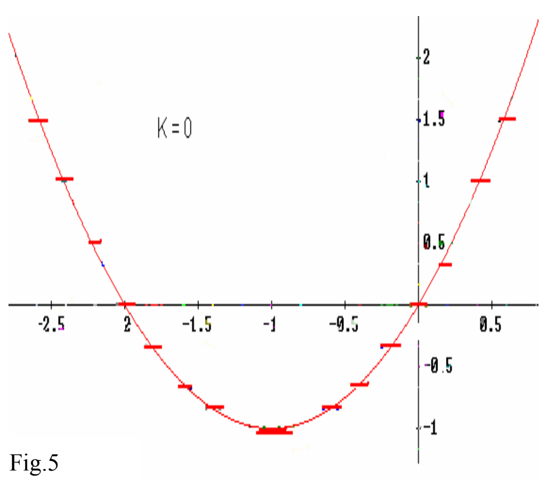


Fig.5

$x^2 + 2x - k = y,\ y' = 2x + 2,$

se tiene que 2 = -2x + k, esta igualdad no puede verificarse idénticamente con respecto a x. ver Fig.5

Sea k=0, en este caso, las curvas integrales tienen tangentes horizontales en los puntos de intersección con la isoclina y = x2 + 2x (Ver Fig. 5)

La parábola $y = x^2 + 2x$ divide el plano ¨xy¨ en dos partes:

Una de ellas es $y' < 0$ (las soluciones decrecen); mientras que en la otra $y' > 0$ (las soluciones crecen).

Como esta isoclina no es una curva integral, en ella están situados los puntos de extremos relativos de las curvas integrales:

Los puntos de máximo se encuentran en la parte de la parábola $y = x^2 + 2x$, en que x <-1, y los puntos de mínimo, en la otra parte de la misma, en que x>-1.

La curva integral que pasa por el punto (-1, -1), o sea, por el vértice de la parábola $y = x^2 + 2x$, no tiene extremo relativo en ese punto (Ver Fig.6).

Familia de curvas integrales

Isoclina con vértice (-1, -1)

Curva integral que pasa por (-1, -1)

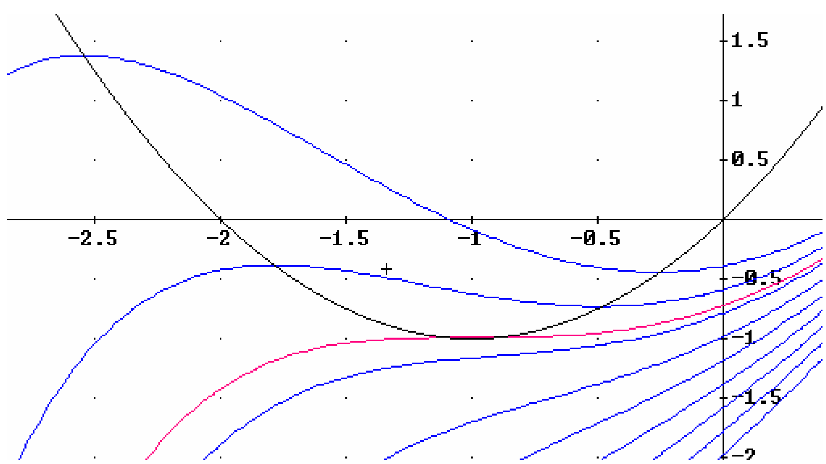


Fig. 6

Para analizar las direcciones de las concavidades de las curvas integrales, hallemos la segunda derivada.

$y'' = 2x + 2 - y' = 2x - + 2 - x^2 - 2x + y$

$y'' = -x^{2\prime} + y + 2,\ y'' = 0,$ tenemos que $y = x^2 - 2$

Esta se anula solamente en los puntos situados en la parábola $y = x^2 - 2$.

En los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la condición $y''<0$, es decir, $y < x^2 -2$, las curvas integrales tienen sus concavidades hacia abajo. Los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la condición $y''>0$, donde $y > x^2 -2$, sus curvas integrales tienen concavidades dirigidas hacia arriba (Ver Fig. 7).

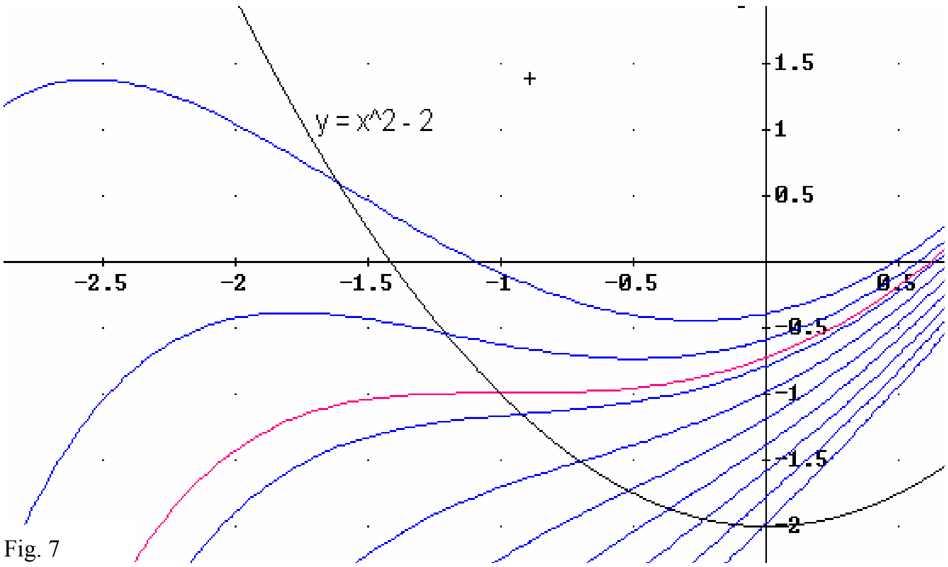


Fig. 7

Los puntos de intersección de las curvas integrales con la parábola $y = x^2 -2$, son los puntos de inflexión de éstas. Como podemos observar la parábola $y = x^2 -2$ es el lugar geométrico de los puntos de inflexión de las curvas integrales.

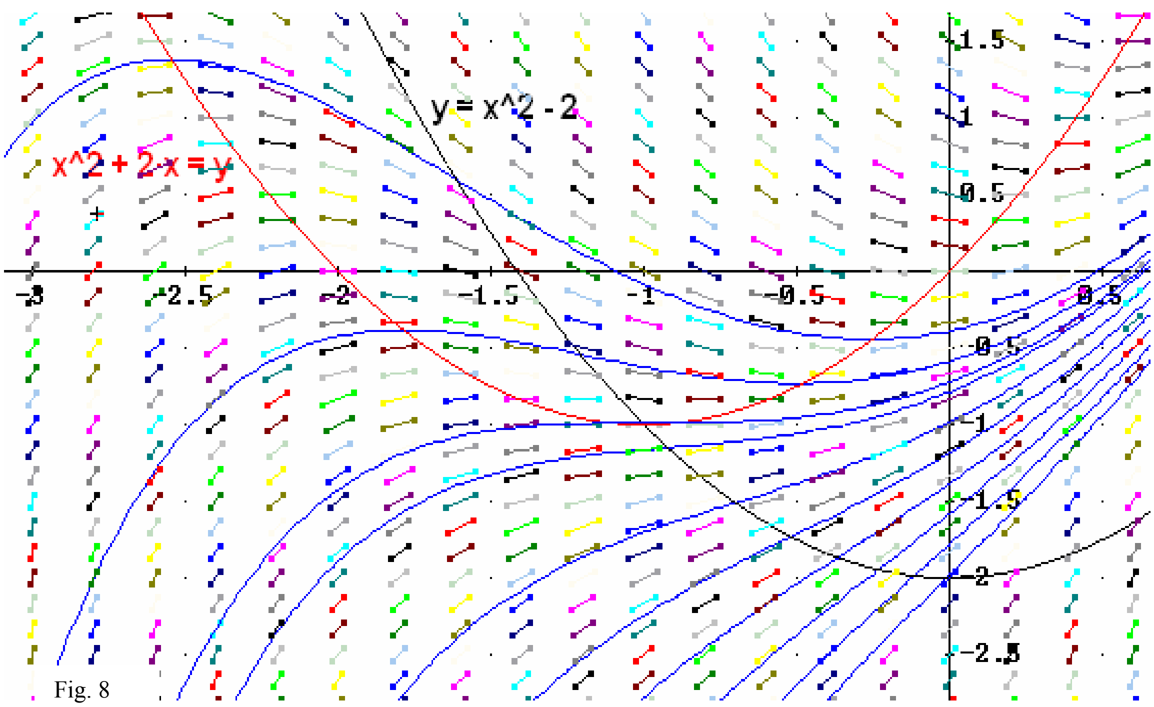


Fig. 8

En la construcción de la Fig. 8 nos apoyamos en el Asistente Matemático DERIVE para trazar la familia de curvas integrales, el campo de dirección y así comparar los resultados.
A continuación utilizaremos el File ODE_APPR.MTH, el cual contiene un fichero que nos ayuda a trazar el campo de dirección DIRECTION_FIELD(r, x, x0, xm, m, y, y0, yn, n). Este nos construye todos los segmentos cortos de diferentes colores y nos da la orientación del campo de dirección de las curvas integrales.
Con el file ODE1.MTH - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden encontramos el fichero INTEGRATING_FACTOR_GEN(p, q, x, y, c), que nos daría la solución general de dicha ecuación diferencial y, como ya conocemos, con
$VECTOR(e^{X}\,(X^{2}-Y)=c, c, 0.4, 2,\ 0.2)$ se construye dicha familia (Llorens, 1993).

Conclusiones

Las capacidades gráficas del Asistente como se pudo observar son extraordinariamente valiosas a la hora de visualizar funciones y estas pueden en un momento dado reemplazar una analítica y en otro, indicar la necesidad de un análisis mas profundo, sobre todo cuando las gráficas producidas no iluminan, ya sea debido a un escalamiento inadecuado que las comprima hasta hacerlas difícilmente visualizables o al hecho de que una función pueda tener alguna singularidad.
Dentro del fichero ODE1.MTH - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, se encuentra la aplicación INTEGRATING_FACTOR_GEN(p, q, x, y, c) que permite obtener la solución general de dicha ecuación diferencial. Como ya se conoce y con la ayuda de $VECTOR\,(e^{X}\,(X^{2}-Y)=c, c, 0.4, 2,\ 0.2)$ se construye dicha familia, construcción ésta que a punta de lápiz no sería posible en un tiempo razonable.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L. y Rizo, C. (2000). Curso especial geometría y resolución de problemas. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-14*. Universidad de Panamá, 38.

Castañeda, P. (2001). Necesidad actual del uso del ordenador en el aprendizaje de la Matemática. *Experiencias Matemáticas y Didácticas en la Universidad de Pinar del Río* (pp.523-528). Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, España. I.S.B.N. 84-699-4419-3.

Leyva, P. (1985). *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. 2da ed. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.

Llorens, J. L. (1993). *Introducción al DERIVE. Aplicaciones al Álgebra y al Cálculo*. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia. Servicios de publicaciones. ISBN 84-7721-199-x.

Pérez, P. (1996.). *Matemática Asistida por Ordenadores: Cálculo Infinitesimal*. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia. Servicio de publicaciones. ISBN 84-7721-420-4.

Saff, E. y Zinder, A. (2001). *Ecuaciones Diferenciales con valores en la frontera*. 3ra Edición México: Pearson Educación. ISBN 968-444-483-4.

EXPERIENCIA EN EL USO DEL ASISTENTE MATEMÁTICO DERIVE, EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS FÍSICOS Y/O GEOMÉTRICOS

Pedro Castañeda Porras, Arelys Quintero Silverio, Pablo R. Chávez Hernández
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca". (Cuba)
pcasta@mat.upr.edu.cu, arelys@mat.upr.edu.cu
Campo de investigación: resolución de problemas. Nivel educativo: superior
Palabras clave: DERIVE, funciones, gráficos

Resumen
En este trabajo se tratarán problemas, en los cuales se tendrá en cuenta el aspecto de modelación, resolución e interpretación de resultados, donde predomina el análisis geométrico en cada situación.
La obtención de estos resultados será sobre la base de la aplicación de las nuevas tecnologías, que favorecen el aprendizaje del estudiante y estimulan los procesos de creación y abstracción, permitiendo realizar operaciones con rapidez y exactitud. Además facilitan el intercambio ágil de información con el ordenador, aprovechando las capacidades tanto simbólicas como gráficas de los Asistentes Matemáticos (en este caso DERIVE).

Introducción

La solución de problemas está sustentada en el aprendizaje significativo, es decir, tomando en cuenta el nivel de partida de los estudiantes y una motivación que orienta al alumno hacia el problema. "El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente" (Ausubel, 2006).

Es natural que el estudiante presente ciertas dificultades a la hora de la formulación Matemática, por no tener claro los conceptos físicos y/o técnicos al respecto, de aquí la importancia de la introducción de las nuevas tecnologías a través de los Asistentes Matemáticos. Estas liberan al estudiante de esos cálculos engorrosos, pudiendo profundizar aún más en los elementos físicos y/o técnicos, comprobar y evaluar los resultados obtenidos visualmente, constituyendo este el objetivo de este trabajo que se desarrollará a través de la solución de problemas mediante el asistente matemático DERIVE. "El uso de este asistente matemático se fue incrementando paulatinamente y actualmente se hace una necesidad como un elemento más dentro del proceso Enseñanza – Aprendizaje" (Castañeda, 2001). La solución de estos problemas haciendo uso de las nuevas tecnologías le proporciona al alumno una ilustración viva del objeto, que le permite efectuar operaciones del pensamiento suficientes para llegar a generalizaciones teóricas.

PROBLEMA 1

Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t,\ t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
d) ¿Cuándo se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda?
e) Encuentre la aceleración en el instante t y después de 3 segundos.
f) Trace las gráficas de las funciones de posición, velocidad y aceleración, para $0 \leq t \leq 8$.
g) ¿Cuándo se acelera y desacelera la partícula?

Fuente: Leithold, (1998).

En este problema se utiliza el concepto de derivada para interpretar un modelo ya creado. Para el trabajo con el mismo se precisa de los componentes:

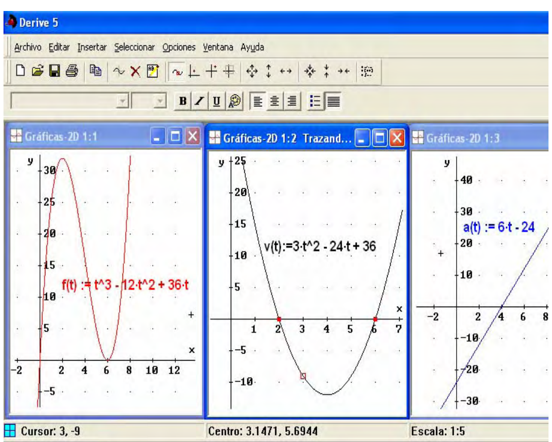
Orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema y evaluación de su solución, los cuales constituyen el proceso para el tratamiento de problemas.
A partir del desarrollo de este proceso, los alumnos llegan a la solución del mismo de una forma activa y conciente de la actividad que realiza.

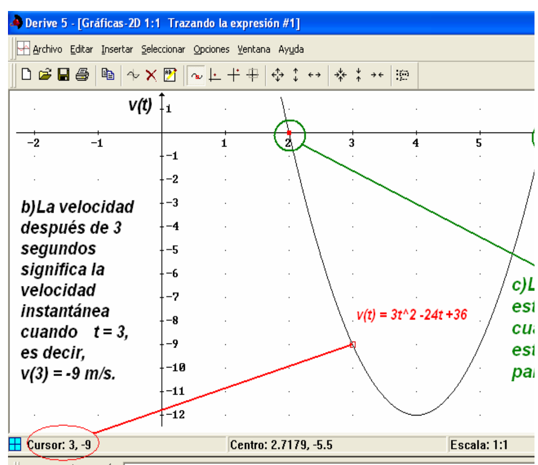
Ideas básicas para el problema 1. Metodología.

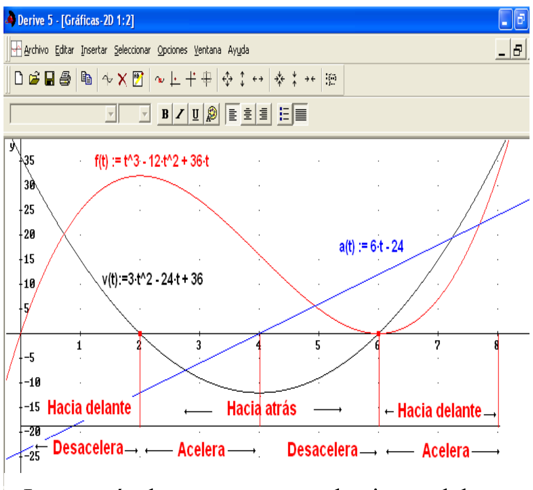
Si y = f(x), entonces la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ se puede interpretar como la razón de cambio de y con respecto a x, examinaremos algunas ideas de la Física.

Si s = f(t) es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, entonces $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ representa la velocidad promedio en un periodo Δt y $v = \dfrac{ds}{dt}$ representa la velocidad instantánea (la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo) y la aceleración $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ que está dada por la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Este conocimiento lo veremos a continuación en problemas de velocidad.

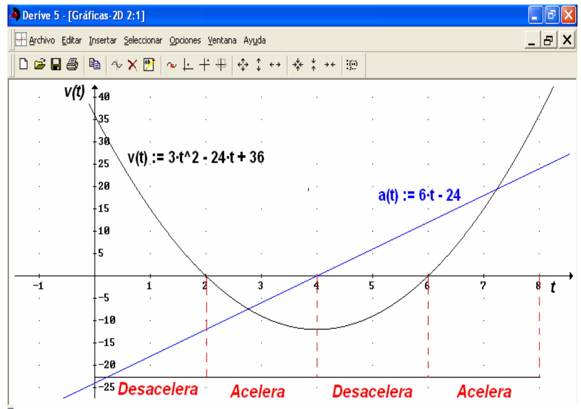
A continuación la representación gráfica de forma simultanea de las funciones *posición, velocidad y aceleración.*







La partícula se mueve hacia delante (derecha) cuando la $v(t) > 0$, en el gráfico esto sucede para $0 < t < 2$ y $6 < t < 8$ respectivamente, aquí la partícula se mueve en dirección positiva. La partícula se mueve hacia la izquierda cuando la $v(t) < 0$, se



La partícula se acelera cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, la partícula se acelera cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. En la figura vemos que esto sucede cuando $2 < t < 4$ y cuando $6 < t < 8$. La partícula se desacelera cuando v y a tiene signos opuestos, es decir, cuando $0 \leq t < 2$ y $4 < t < 6$.

En esta situación que acabamos de analizar, el estudiante puede mediante orientaciones por parte del profesor aplicar los conceptos estudiados, reflexionar e interpretar físicamente por medio de gráficas cómo es el movimiento de la partícula. El estudiante no tiene por qué tener conocimientos físicos tan profundos para entender el problema; sin embargo a través de esta metodología se les puede inducir hacia su comprensión y orientarles situaciones más o menos complejas que podrán ser resueltas con la ayuda del Asistente Matemático.

PROBLEMA 2

Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por calcular los límites cuando $x \to \pm\infty$. Identifique cualesquiera valores de transición de c, donde cambia la forma básica.

¿Qué sucede a los puntos máximos y mínimos y a los puntos de inflexión cuando c cambia?. Ilustre lo anterior graficando varios miembros de la familia.

Fuente: Leithold, (1998).

Para la solución de este problema se aplican teoremas, conceptos y propiedades del cálculo infinitesimal y diferencial con el objetivo de determinar el comportamiento de una función a partir del valor de un parámetro. De igual forma que en el problema anterior aquí se precisa de los componentes que constituyen el proceso "para el tratamiento con problemas". También en éste los estudiantes arriban a la solución de forma activa y conciente a través del procedimiento inductivo.

Ideas básicas para el problema 2. Metodología

Aquí el Asistente Matemático DERIVE nos ilustra el comportamiento de la función f(x):= x·EXP(-c·x) tanto para $c > 0$ como para $c < 0$.

VECTOR(x·EXP(- c·x), c, -5, 5, 0.2), este nos representa una familia de curcas entre -5 y 5 con un paso de 0.2 (Llorens, 1993). (Fig. 2a y 2b)

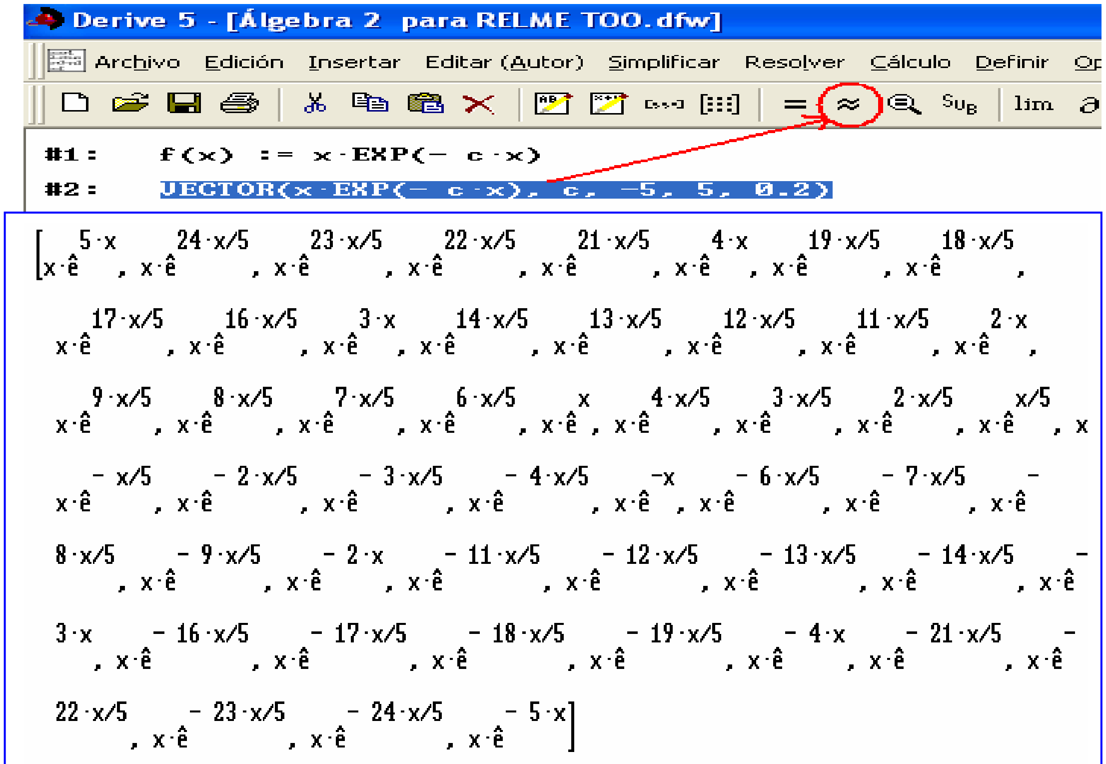

Derive 5 - [Álgebra 2 para RELME TOO.dfw]
Archivo Edición Insertar Editar (Autor) Simplificar Resolver Cálculo Definir
#1: f(x) := x·EXP(− c·x)
#2: VECTOR(x·EXP(− c·x), c, −5, 5, 0.2)

Fig. 2a

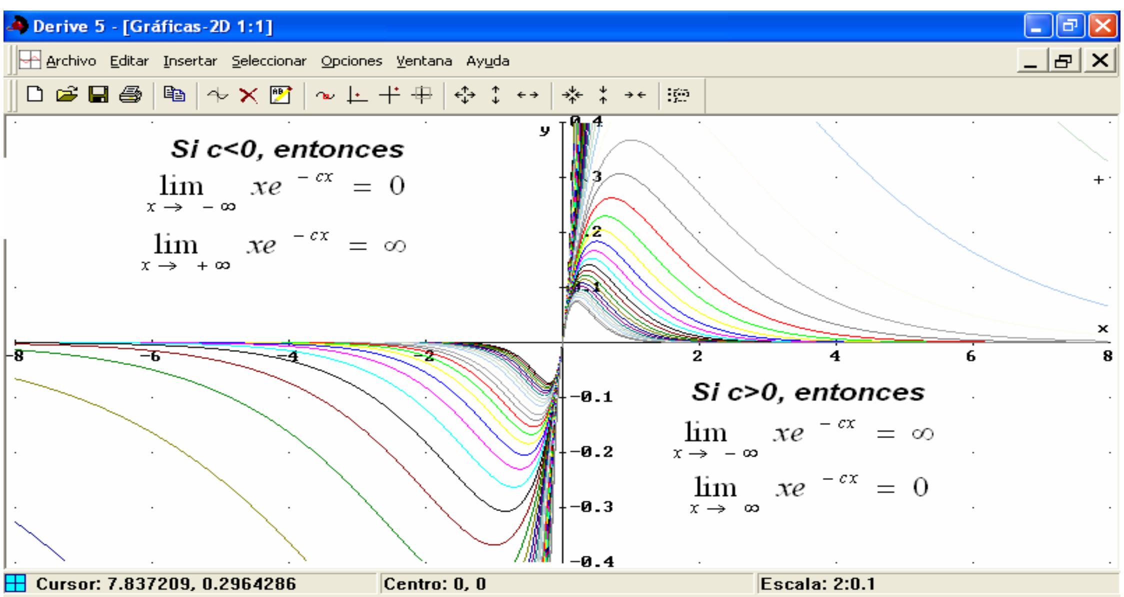
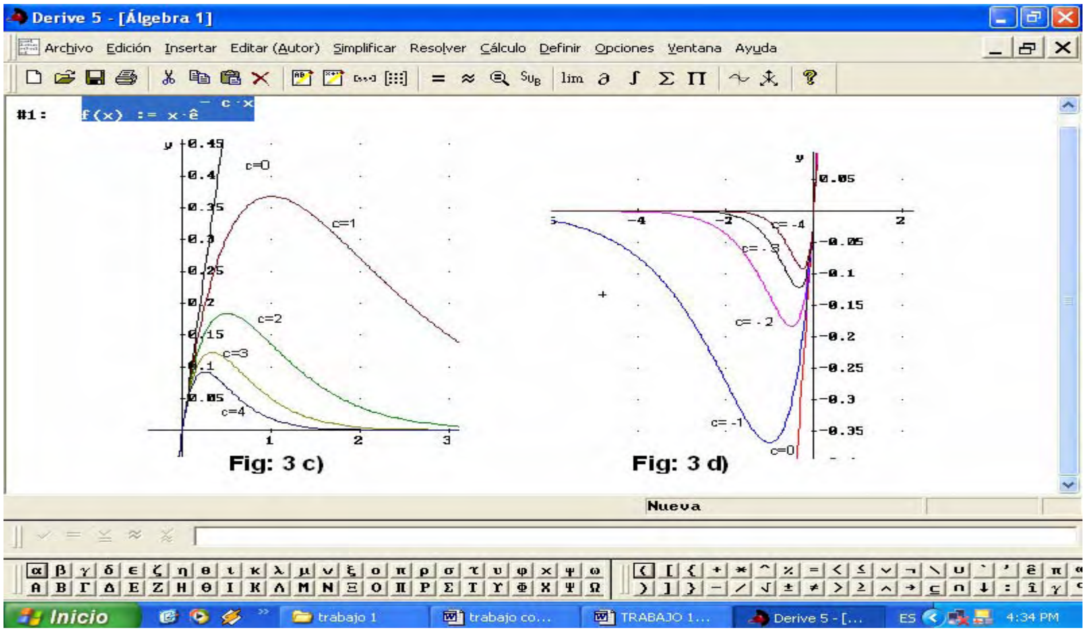

Derive 5 - [Gráficas-2D 1:1]
Archivo Editar Insertar Seleccionar Opciones Ventana Ayuda
Si c<0, entonces
$\lim_{x \to -\infty} xe^{-cx} = 0$
$\lim_{x \to +\infty} xe^{-cx} = \infty$
Si c>0, entonces
$\lim_{x \to -\infty} xe^{-cx} = \infty$
$\lim_{x \to \infty} xe^{-cx} = 0$
Cursor: 7.837209, 0.2964286
Centro: 0, 0
Escala: 2:0.1

Fig. 2b



En la figura, se puede observar cómo a medida que aumenta c, los máximos de la función se acercan a cero, análogamente se observan los mínimos, y estos a medida que disminuye c se acercan al origen.

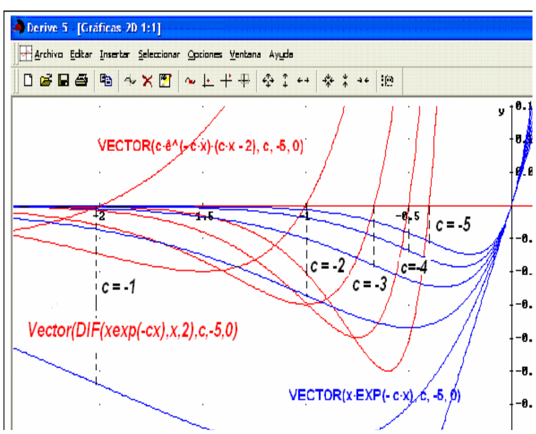


Fig. 4

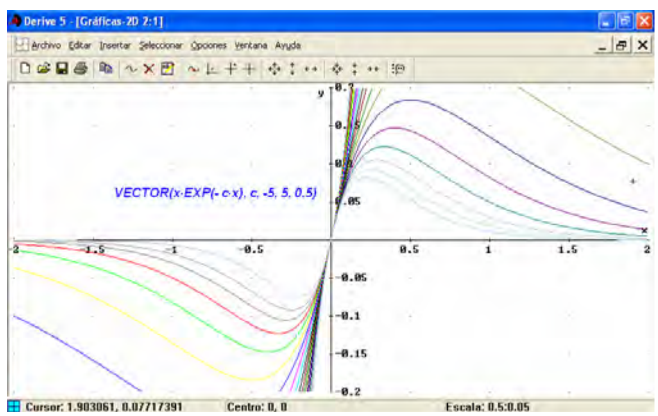


Fig. 5

En la Figura 4, se nota cómo los puntos de inflexión se acercan al origen a medida que c disminuye, estos se señalan con las líneas trazadas desde la intersección de la segunda derivada con el eje ¨x ¨ y donde cambia la función de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo y viceversa.

En la Fig: 5, se precisa lo siguiente:

$Para\ c>0, \lim_{x\to\infty} f(x)=0\ y\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty. Para\ c<0, \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\ y\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, además cuando $|c|$ crece, los puntos máximos, mínimos y de inflexión se acercan al origen.

El estudiante podrá con simples orientaciones observar el comportamiento de la familia de curvas que se obtiene al darle valores a la contaste c, notará las capacidades gráficas del Asistente, sin el

cual sería bien difícil interpretar y analizar geométricamente elementos como puntos de máximo, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y crecimiento.
Sin dudas este aprendizaje con el ordenador y el uso del Asistente hace pensar a los estudiantes desde otro ángulo, pues le brinda tantas posibilidades visuales que a punta de lápiz sería bien incómodo lograrlo y ni pensar en el tiempo que les pudiera llevar.

Conclusiones

1.Este método de solución proporciona al alumno una ilustración viva del objeto, que le permite efectuar operaciones del pensamiento suficientes para llegar a generalizaciones teóricas.
2.Las capacidades gráficas del Asistente DERIVE son extraordinariamente valiosas a la hora de visualizar funciones y pueden reemplazar una función analítica o indicar la necesidad de un análisis más profundo para el caso de funciones con alguna singularidad.
3.Los beneficios pedagógicos que proporciona la incorporación de las nuevas tecnologías en la docencia de la enseñanza de las Matemáticas se pueden resumir en que el estudiante:

- Es capaz de mover el pensamiento de lo concreto a lo abstracto y de este a lo concreto.
- Puede profundizar en el análisis teórico de los conceptos tratados en dichos problemas.
- Puede establecer conjeturas, ejemplos, contraejemplos, sin manifestar impaciencia alguna cuando comete errores repetidamente.

4.Los Asistentes actuales son lo suficientemente potentes y bien construidos como para tratar temas Matemáticos avanzados de forma sencilla y manejable por estudiantes sin la calificación de expertos.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (2006). *Teoría del Aprendizaje significativo*. [En red]. Enero 2007. Disponible en: http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml.

Castañeda, P. (2001). Necesidad actual del uso del ordenador en el aprendizaje de la Matemática. *Experiencias Matemáticas y Didácticas en la Universidad de Pinar del Río* (pp.523 _ 528). Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, España. I.S.B.N. 84-699-4419-3.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press México, S.A. Editorial Mexicana ISBN 0-673-46913-1.

Llorens, J.L. (1993). *Introducción al DERIVE, Aplicaciones al Álgebra y al Cálculo*. Universidad Politécnica de Valencia, España. Servicios de publicaciones. ISBN 84-7721-199-x.

EL ORDENADOR COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco. (Argentina)
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Campo de investigación: resolución de problemas, tecnología avanzada. Nivel educativo: superior
Palabras clave: resolución de problemas, métodos numéricos, procesos iterativos, uso de tecnología

Resumen
Se abordó la resolución de problemas en el ámbito de un curso de cálculo de 1º año utilizando métodos numéricos con el auxilio de un software diseñado en C++ para tales fines.
Las experiencias desarrolladas nos han facilitado obtener conclusiones experimentales acerca de la utilización del ordenador: a) como recurso didáctico y evaluar los modos en que el profesor puede asumir un rol como usuario de medios para enseñar y mostrar; b) como instrumento para el aprendizaje, dónde el estudiante lo emplea para experimentar, conjeturar hipótesis, descubrir regularidades, simular, resolver y obtener conclusiones; c) como instrumento al servicio de la evaluación de las etapas de aprendizaje, con un enfoque no tradicional.

Introducción

Una de las herramientas con las cuales los sujetos pueden lograr una mayor interacción en los diferentes ámbitos educativos, lo es sin dudas el ordenador. Este medio cuenta con determinadas características que lo convierten no sólo en un simple elemento mediador sino en la herramienta más completa creada por el hombre, hasta el momento, para favorecer cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje, entre ellos: la rapidez en el procesamiento y presentación de información, una constante y rápida comunicación, además de la interactividad, entre otras.

Tal como lo plantea Torres (1997 y 2001) los ordenadores juegan un papel importante pues con ellas se puede revelar la importancia práctica del conocimiento impartido, trabajar con datos reales en las asignaturas de ciencias, facilitar la labor del alumno en el cumplimiento de las diferentes acciones que conforman la actividad docente, facilitar el tránsito de lo concreto a lo abstracto y viceversa a través de representaciones y las manipulaciones de ellas, lograr una mayor visualización de procesos y fenómenos abstractos, entre otras.

En este sentido, hemos trabajado sobre los modos de encontrar soluciones numéricas a los modelos que dan origen las diferentes situaciones problemáticas.

Desarrollo

La mayoría de las veces la búsqueda de la solución de un problema conduce a la elaboración de un modelo matemático. Si el modelo incluye ecuaciones o sistemas muy sencillos, seguramente el alumno podrá utilizar los algoritmos básicos de resolución. Sin embargo, en la mayoría de los problemas, aún los más sencillos, que se plantean en ingeniería, los alumnos llegan a concebir un modelo que incluyen ecuaciones cúbicas o de orden superior. La resolución algorítmica tradicional suele ser tan engorrosa, debido a que generalmente que se involucran muchos cálculos y procesos iterativos, que se termina por desvirtuar el propósito por el cual se planteó el problema.

Si se tratara de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales, éstas admiten el cálculo de sus raíces por métodos algebraicos, pero sólo en algunos casos.

Creemos que, no sin hacer un previo análisis del modelo a resolver, en muchos casos es necesario recurrir a técnicas numéricas. Es aquí donde un software específico puede resultar de mucha utilidad.

En este sentido hemos diseñado una aplicación que permite buscar una o más soluciones aproximadas en un intervalo acotado, utilizando tres métodos, entre los cuales el alumno deberá elegir cuál le resulta más adecuado, según las características del problema. La comparación de resultados en cada caso constituye además, una muy valiosa oportunidad de iniciar el aprendizaje acerca la utilización de procesos iterativos numéricos.

Metodología

La siguiente experiencia fue realizada en el ámbito de primer año de un curso de cálculo con utilización del ordenador como recurso didáctico.

Las actividades propuestas se desarrollaron durante dos clases consecutivas, luego se analizaron las producciones grupales y se realizó la devolución a cada grupo.
Por último, la experiencia concluyó con una puesta en común sobre las bondades y debilidades de cada método utilizado.

Primer problema propuesto, en el cual el docente a cargo de la experiencia tuvo un rol más participativo:

Un silo consiste en una sección principal cilíndrica, con altura 10,5 m y un techo hemisférico. Con el fin de lograr un volumen total de 1700 m^3 (incluyendo la parte interior de la sección del techo). ¿Cuál tendría que ser el diámetro del silo?

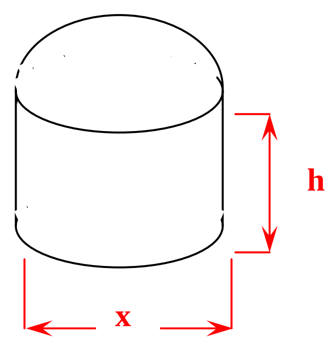


Figura 1

En primer lugar se analizaron los datos (figura1):
Volumen $V = 1700\ m^3$ Altura $h = 10{,}5\ m$
Y las incógnitas: diámetro x
En segundo lugar se analizaron y plantearon los volúmenes parciales:
Vol. del cilindro = $\pi\ (x/2)^2\ h$ Vol. del techo = $4/6\ \pi\ (x/2)^3$
Finalmente, el volumen total:
$\pi\ (x/2)^2\ h + 4/6\ \pi\ (x/2)^3 = 1700$, con lo cual surgió ácilmente el modelo matemático:

$$y = \pi.\frac{x^2}{4}.h + \frac{2}{3}.\pi.\frac{x^3}{8} - 1700$$

Los alumnos organizados en pequeños grupos discutieron diferentes caminos que permitieran encontrar al menos una raíz real que satisfaga esta ecuación. Al tratarse de una ecuación cúbica con coeficientes no enteros, se plantea un obstáculo salvable mediante el uso de métodos numéricos de cálculo de raíces.

La herramienta desarrollada contempla el cálculo de raíces de una ecuación en una variable de tres maneras diferentes. Al acceder a cada uno de ellos, el usuario debe plantear el modelo y graficar la función en un intervalo por él escogido. Esto les permitió a los alumnos conjeturar acerca de la posible existencia de una raíz en las proximidades de un cierto punto x_o sobre el eje de abscisas.

En el caso del problema planteado, el gráfico permite suponer la existencia de una raíz en las proximidades de x=12 (gráfico 1), dónde además la función cambia de signo.

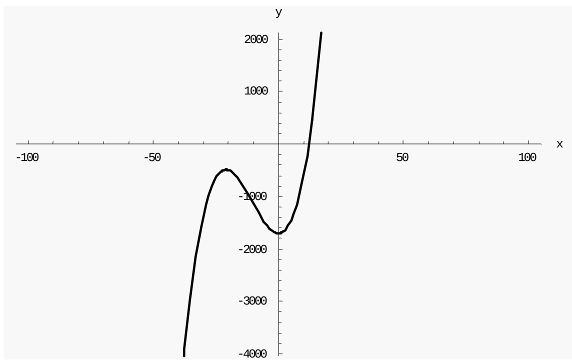


Gráfico 1

f(x)= $\pi/12*x^3 + 8.2467*x^2 - 1700$
en el intervalo [-100,100]

Uno de los métodos utilizados para resolver el problema fue el ideado por Newton. Este es uno de los métodos más eficientes para aproximar las soluciones de la ecuación f(x)=0. A partir de un valor inicial x_0, la aplicación del algoritmo genera una sucesión <xn>, definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ para n>= 0.

Cuando ésta converge, se obtienen los resultados con relativa rapidez.

Sin embargo, *algunas veces el método de Newton no converge*. En este sentido los diferentes grupos de trabajo debieron discutir y obtener conclusiones sobre la eficiencia en la aplicación del método en diferentes situaciones tales como: *si no existe raíz real, si la raíz es un punto de inflexión, si el punto inicial corresponde a un máximo o mínimo de la función o si la aproximación inicial está muy lejos de la raíz buscada.*

Luego, con el propósito de lograr un análisis más profundo sobre las ventajas y desventajas del uso del método, se propuso un problema donde los valores aparecían dados en forma tabular. A partir de un análisis geométrico de la primera derivada en relación con la tangente del ángulo, los diferentes grupos de trabajo lograron reemplazar la derivada por una interpolación lineal, es decir, utilizando el hecho de que:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

El segundo método, bisección, se basa en el teorema del valor intermedio y parte del supuesto que en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$ tienen signos opuestos. Aunque el procedimiento funciona

bien para el caso en el que existe más de una solución en el intervalo total [a,b], se considera por simplicidad que es única la raíz en dicho intervalo.
Básicamente, el método plantea una iteración que consiste en dividir a la mitad repetidamente los subintervalos de [a,b] y en cada paso, localizar la mitad que contiene a la solución, *m*.

Al aplicar el método de bisección en la resolución del problema original propuesto, los alumnos descubrieron sus más importantes inconvenientes: no es aplicable si la función no cambia de signo y además es muy lento en su convergencia, n tiene que ser muy grande para que $|m-m_n|$ sea pequeño.

Finalmente se propuso la aplicación del algoritmo de separación de raíces, el cual consiste en elegir un intervalo del dominio dentro del cual se encuentre la raíz a partir de un análisis geométrico desde la gráfica de la función, dividir al mismo en *n* partes iguales, calcular los valores que toma la función en los bordes de cada una de las divisiones. En aquellos subintervalos donde se produzca un cambio de signo de los valores que toma la función, se encuentra una raíz. Es por ello que como valor representativo de ésta se toma el promedio de los extremos del subintervalo. Por otra parte, cuando más fina sea la partición, se logrará una mejor aproximación al valor numérico de la raíz.

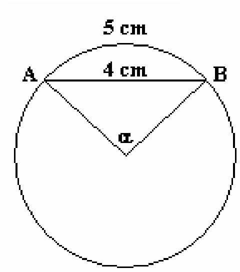
La utilización del mismo en los diferentes problemas propuestos permitió a los alumnos concluir que la principal ventaja que presenta este método con respecto al de la bisección es la facilidad en su programación y la localización de todas las raíces en el intervalo considerado, sin embargo su convergencia es muy lenta y al igual que el método anterior se requiere un cambio de signo de la función.
Creemos que, respecto del método de Newton, tiene la bondad de poderse aplicar y explica en cualquier nivel educativo, dado que el teorema del valor intermedio es abordable, aunque intuitivamente en niveles de escolaridad no universitaria.

Con el propósito de que los alumnos pudieran indagar sobre las bondades y debilidades de cada uno de los métodos al trabajar sobre ecuaciones no algebraicas y sobre todo en los casos de no convergencia, cada grupo debió trabajar sobre las siguientes propuestas:

Actividad 1

En la figura 2, la longitud de la cuerda AB es de 4 cm. y la del arco AB es de 5 cm.
a) Encuentre el ángulo central α, en radianes, correcto hasta cuatro cifras decimales.
b) ¿De que manera incide la selección del intervalo?
c) ¿De qué manera incide la selección del valor inicial en el método de Newton?,

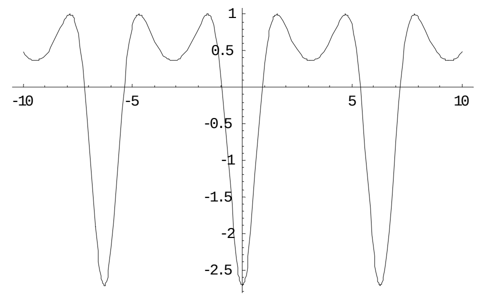
Figura 2



Actividad 2

Se presenta la gráfica de la curva $y = e^{\cos(x)}$

a) ¿Cuáles de los métodos disponibles permiten determinar las coordenadas de los puntos de inflexión correctas hasta cuatro decimales, en el intervalo considerado?



b) Explicite que dificultades ha encontrado al utilizar cada uno de los métodos.

c) ¿De que manera incide la selección del intervalo?

Actividad 3

¿Qué problema presenta cada uno de los métodos propuestos para calcular los ceros de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *?*

Conclusiones

Las interacciones entre los diferentes grupos y con el docente que guió la experiencia por una parte, y las producciones escritas de los alumnos, por la otra, nos han permitido obtener las siguientes conclusiones que tal vez puedan generalizarse a otros ámbitos educativos de características similares.

La utilización del ordenador como recurso didáctico en la resolución de problemas:

a) permite al alumno interactuar con objetos matemáticos de forma simple y natural, lo que favorece su autonomía en el aprendizaje, además de tener un mayor acercamiento a la matemática, siéndole ésta más familiar.
b) facilita la representación gráfica y de forma dinámica de los conceptos y procedimientos matemáticos. En este sentido, decimos que agiliza el cambio entre diferentes sistemas de representación.
c) facilita la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades.
d) permite ampliar el abanico de ejemplificaciones y se minimizan los cálculos tediosos. (Hernández Fernández, Delgado Rubí y Fernández de Alaíza, 1998).
e) facilita el tratamiento de muchos temas sin exigir al alumno grandes conocimientos matemáticos favoreciendo una metodología en la que participen de forma activa en su aprendizaje.
f) permite combinar los datos de forma numérica, simbólica y gráfica, tratando a las matemáticas de manera global.

De manera más general creemos que:

- El uso del ordenador no deshumaniza el proceso de enseñanza aprendizaje, siempre y cuando el alumno sea guiado por el profesor correctamente, y reciba un seguimiento por parte del docente sobre sus trabajos. (Jiménez, 1992)
- La comunicación usuario-ordenador no permite utilizar el lenguaje natural. Las respuestas de los alumnos se dan, generalmente, mediante elección múltiple, palabras y frases cortas y es el docente quien debe guiar al alumno en la construcción de sus justificaciones. (Alonso, 1992)
- Es importante que el alumno tenga clara cual es la finalidad de su utilización. Creemos que constituye una experiencia muy enriquecedora tanto para el docente como para el alumno, pero es importante que no se utilice el ordenador como fin único.
- Permite evaluar en forma continua el desempeño del alumno a través de sus producciones.

Referencias bibliográficas

Alonso, J.(1992). *Motivar en la adolescencia: Teoría, evaluación e intervención.* Madrid, España: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J. R, y Fernández de Alaíza, B. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y Procedimientos en la Educación Polimodal y Superior*. Buenos Aires, Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Jiménez, J.A.(1992).*Una propuesta de introducción de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza.* En J. Pablos y C. Gortari (Eds.). *Las nuevas tecnologías de la información en la educación.* (pp158-177). Madrid, España:Alfar.

Torres L., P. (1997) *Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática.* Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias no publicada. Sancti Spíritus.

Torres L., P. (2001) Didáctica de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. *Pedagogía - Curso 40.*

UNIVERSIMAT, ENTORNO PARA LA COMPRENSIÓN DE LA MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE UNIVERSALIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Andrés Tellería Rodríguez, Dámasa Martínez Martínez, Aida María Torres Alfonso, Angel Aljadis Díaz Peña, Yuniesky Carralero Cuellar
Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas. (Cuba)
atelle@uclv.edu.cu

Campo de investigación: educación a distancia. Nivel educativo: superior
Palabras clave: formación flexible, comprensión, tecnologías, educación a distancia

Resumen
Con la inclusión de las nuevas tecnologías de la información han surgido nuevas perspectivas para la enseñanza, apoyando al desarrollo de las clases en las que no esté presente el profesor. Sin embargo, sigue existiendo problemas en el aprendizaje de la matemática superior por parte de los estudiantes de algunas carreras. El trabajo expone una propuesta didáctica para lograr que en las sedes universitarias cubanas estudiantes y profesores dispongan de recursos que le permitan cambiar esta situación, de acuerdo a las necesidades cognitivas de los estudiantes, mediante un entorno web para el aprendizaje de la Matemática, que incluye orientaciones para su uso, a través de él los estudiantes se conectan al centro rector universitario desde diversos lugares del país y pueden adquirir no solo las orientaciones del profesor y los materiales que éste disponga en el entorno, sino de aclarar sus dudas a través del chat online, en los horarios y momentos establecidos para ese fin. Nuestro objetivo fundamental es contribuir a lograr la comprensión de los contenidos matemáticos, en los estudiantes de este modelo de formación flexible que desarrolla la Educación Superior cubana.

Introducción

Dadas las nuevas perspectivas surgidas de la extensión de la Universidad cubana a los municipios, surgen nuevos retos encaminados al mejoramiento y consolidación de la calidad del proceso de enseñanza aprendizaje en este modelo pedagógico. Analizando este contexto de desarrollo cultural irreversible al que contribuye el sistema de enseñanza universitario, es imprescindible diseñar investigaciones didácticas que den al traste con los obstáculos que de manera natural se enfrentaran profesores y estudiantes de carreras que necesiten una formación básica en matemática, que al ser asignaturas impartidas de manera presencial durante décadas, siempre manejadas con determinadas dificultades, dado el grado de su complejidad y relativamente poca aceptación por parte del estudiantado, ahora enfrentarán una tarea mas difícil aún. Debido principalmente a la diversidad de preparación de cada uno de los estudiantes matriculados en estos cursos, para los cuales la formación se realizará según su propio desarrollo, por lo que se hace imprescindible contribuir a la flexibilidad del currículo real. La propuesta didáctica que exponemos en este trabajo es parte del resultado del proyecto de investigación: "Estrategia Didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Universalización de la Educación Superior", que se desarrolla en la actualidad y de manera conjunta por docentes e investigadores de Educación Matemática de tres universidades cubanas. Es por tanto *Universimat*: un entorno web para la Comprensión de la Matemática en el proceso de Universalización de la Educación Superior.
El marco teórico general en el que se sustenta el trabajo es en las características del modelo social – cognitivo, el cual tiene como teorías de base a las teorías vigoskianas y en correspondencia con estos postulados, y muy particularmente, según el enfoque de la Didáctica de las Matemáticas, está sustentada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.

Desarrollo. La comprensión como meta pedagógica en un proceso de formación flexible

En el enfoque del modelo social cognitivo el objetivo fundamental será evitar el conocimiento trivial (el que se olvida), el ritual (el que en realidad no se comprende) y el inerte (el que no se usa activamente) como causas fundamentales del fracaso escolar (Perkins 2000). Siendo responsabilidad del profesor encontrar las dificultades en el proceso de aprendizaje y crear las condiciones para que el alumno retenga, comprenda y use el conocimiento. Sin perder de vista los fines de aprendizajes que requieren esos estudiantes para el desarrollo de la sociedad en que viven.
Si asumimos una educación que tenga como una de sus metas lograr la comprensión, estaremos favoreciendo el aprendizaje significativo en los estudiantes. Pero éstos a su vez deberán ser capaces de transitar por diferentes niveles de comprensión: de lo reproductivo a la productivo, lo que exigirá de los estudiantes un gran esfuerzo que tienen que estar favorecido por un accionar constante del profesor en el establecimiento de ayudas que contribuyan al éxito de tales propósitos.
En este trabajo adoptamos la concepción siguiente: Comprender es entender y entender algo implica buscar pautas en las ideas, encontrar ejemplos propios, relacionar los conceptos nuevos con conocimientos previos para poder atribuirles sentido y fundamentar ese conocimiento en sus dimensiones teóricas y prácticas, tanto en situaciones previstas y estandarizadas como en otras distintas (Ruiz 2004: 78). Una de las ideas más ampliamente aceptadas en la Educación Matemática es que los estudiantes deberían comprender las matemáticas (Hiebert y Carpenter 1992). El término comprensión es usado de manera diversa según los contextos institucionales, predominando el enfoque psicológico, el cual enfatiza la faceta mental de la comprensión, abiertamente contestada por Wittgenstein. La revolución cognitiva que reclaman autores como Vygotsky: prioridad analítica y genética de los factores socioculturales cuando se trata de comprender los procesos psicológicos en el individuo (Vygotsky, 1934) ó Bruner con su propuesta de una *psicología cultural (*Bruner 1990) y con posterioridad Chevallard quien habla de una de *antropología cognitiva y didáctica* que necesita una reconceptualización del propio saber matemático y en qué consiste su comprensión (Chevallard, 1992). Como hemos enunciado varios autores definen el conocimiento matemático como información internamente representada, por ejemplo, según Hiebert y Carpenter la comprensión ocurre cuando las representaciones logran conectarse en redes progresivamente más estructuradas y cohesivas. Similar concepción la encontramos en la teoría APOS, donde se considera que para lograr la comprensión de un concepto matemático el individuo ha de producir acciones, procesos, objeto y esquema. (Asiala, 1996 citado por Torres y Martínez 2004: 42).
En nuestro trabajo adoptamos el enfoque constructivista para la formación de competencias en los profesionales al que se le ha incorporado el punto de vista vigostkiano de la competencia, de acuerdo con el cual esta se homologa con el Zona de Desarrollo Próximo. Esta perspectiva enmarca los procesos formativos dentro de una concepción del desarrollo progresivo y gradual, adjudicando un lugar secundario a la demostración observable de los resultados como la que representa por ejemplo, un examen o un test. Entender la comprensión como competencia reconoce la necesidad de un desarrollo mental, pero centra su interés en las descripciones y representaciones a medida que se "construyen" mediante las interacciones que se desarrollan en una institución escolar dada, ya sea entre los alumnos, entre ellos y sus profesores, entre estos últimos y entre cualquiera de estos sujetos y el contexto social en el cual se desarrolla el proceso de aprendizaje. Y atendiendo las características del mismo, nuestra propuesta requiere de un análisis acerca de la flexibilidad del currículo de matemática en la Educación Superior, por considerarse una modalidad de aprendizaje abierto, donde se produce una oferta educativa flexible. Este tipo de modelo educativo, según Salinas (2000) requiere materiales diseñados para que los estudiantes accedan al aprendizaje a

través de una variedad de medios y con la posibilidad de clases tutoriales y entrevistas personales. Y según el autor se debe tener en cuenta en el diseño de estos nuevos ambientes o entornos virtuales que lo fundamental no es la disponibilidad tecnológica, sino que debe atenderse a las características de los otros elementos del proceso instructivo y en especial al usuario del aprendizaje: el estudiante.

La comprensión de la matemática en la Universalización de la Educación Superior.

En la Educación Superior la formación de un profesional activo, reflexivo y creativo es una aspiración social del modelo pedagógico cubano, para alcanzar esta finalidad se consideran varias dimensiones, curricular, extensión universitaria y actividades socio-política de la universidad. Los profesionales altamente calificados que requiere el país deben, entre otros aspectos, caracterizarse por el alto grado de independencia en la búsqueda activa de nuevos conocimientos y su aplicación en la solución de los problemas con pensamiento creador, con convicciones político ideológicas y morales que le permitan orientarse de modo independiente y según los principios de nuestra ética poniendo estas cualidades al servicio de la sociedad.

Con el objetivo de lograr tan altruistas propósitos, la Educación Superior actual se orientan hacia la renovación del proceso de enseñanza aprendizaje pues tradicionalmente se ha centrado en modelos de enseñanza, en los cuales se atiende a la materia y a la forma de impartirla, cuando en realidad se requiere de una óptica más centrada en el sujeto que aprende. Partimos del reconocimiento que la experiencia docente nos ha brindado de que los obstáculos que tradicionalmente aparecen en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática universitaria se diversifican al enfrentarnos a este nuevo modelo pedagógico que es la Universalización de la Educación Superior. Y también, de que es una evidencia que la informática es un recurso importante para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, en particular en Matemática, de hecho son ya varios los centros de enseñanza e investigación donde se trabaja en esta dirección. Sin embargo, aún se producen un conjunto de problemáticas que son necesarias abordarlas con espíritu científico. Una de ellas lo es *Adaptar el currículo de Matemática para enfrentar la Universalización de la Enseñanza Universitaria*, de forma tal que se logre la real flexibilización del mismo, donde se pueda constatar una transformación entre las relaciones alumno - profesor /tutor y que se utilicen las ventajas que ofrece el uso de la tecnología en la comprensión de la Matemática. Como parte de los resultados de este proyecto de investigación en el cual los autores del trabajo estamos inmersos, se ha creado un entorno web: Universimat: http://universimat.uclv.edu.cu al cual tienen acceso los profesores y estudiantes de las carreras de Licenciatura en Contabilidad y de las de Ingeniería: Industrial y Agropecuaria, que realizan su proceso de enseñanza aprendizaje en las sedes universitarias del país.

En el recurso informático creado se trabajó con asignaturas correspondientes al ciclo básico de estas carreras: Matemática Básica, Matemática I y Matemática II para las Ingenierías y las Matemática Superior I y Matemática Superior II para los estudiantes de la licenciatura.

Las características de este recurso tienen muy en cuenta que el estudiante de matemáticas es un sujeto cognitivo que se enfrenta a retos importantes y complejos al aprender matemáticas e intentar participar en un entorno de prácticas matemáticas. Este sujeto, además de actuar según su propio desarrollo cognitivo, debe ajustarse a un cierto entorno sociocultural que genera en él unas determinadas respuestas emocionales y ejerce, a su vez, una acción mediadora sobre su desarrollo cognitivo. El estudiante que se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas en el contexto cubano actual, se halla inmerso en un entorno que le exige respuestas en relación con su preparación

cultural, su estatus social, sus posibilidades económicas y sus sentimientos. De ahí que muchas de las dificultades de aprendizaje que habitualmente se explican en base al desarrollo cognitivo del sujeto deban serán reinterpretadas de acuerdo con las características socioculturales del entorno donde aprende dicho sujeto.
El recurso que presentamos está representado por una página que conforma una vista en el navegador. El diagrama de navegación está formado por un conjunto de estados y sus correspondientes enlaces, a través de los cuales un usuario: estudiante, profesor o tutor, puede transitar de un estado a otro con la posibilidad de retornar a la página inicial cuando se estime conveniente. Ver Anexo 1. Aquí destacamos entonces, la localización de la especialidad cursada por el usuario y dentro de cada una de ellas, los elementos de su interés para ser accedidos, como son: Programa, Guías Temáticas, colecciones de ejercicios, laboratorios virtuales o bibliografía recomendada. Cada uno de estos elementos surge como fruto de la preparación conjunta de todos los profesores participantes en el proyecto y han sido sometidos al criterio de especialistas, de manera que orientan la trayectoria que el estudiante debe realizar para lograr la comprensión de la matemática que estudia.

Evaluación del entorno web: Universimat como recuso informático creado para lograr la comprensión matemática en un modelo de aprendizaje flexible

En cuanto a la flexibilidad del recurso creado: Universimat, evaluaremos los elementos necesarios, que según (Salinas, 1999) deben estar presentes en los entornos virtuales de formación para entender un modelo de formación flexible. Partiendo de que considerar estos componentes es meramente metodológico ya que las divisiones entre ellos no son precisas. No obstante nos ayuda a ordenar algunos de los elementos que deben tenerse en cuenta en relación a los entornos flexibles de formación, su diseño, gestión y la investigación relacionada.

a) Entorno organizativo (Componente institucional)
b) Comunicación mediada por ordenador (Componente tecnológico)
c) Aprendizaje y tutoría (Componente didáctico)
d) Medios didácticos para un aprendizaje flexible. (Componente didáctico)

En nuestra experiencia los elementos a) y b) están garantizados pues son objetivos del Modelo Pedagógico de la Educación Superior Cubana en la actualidad. Baste decir que en cada municipio del país al menos existe una Sede Universitaria que organiza y dirige el proceso docente educativo contando con profesores, tutores, asesores y una red informática en bibliotecas y jóvenes club de computación del municipio que garantizan la conexión con la sede del centro rector.
Por lo que nos centraremos en las características de nuestro recurso en las que se verifican que se cumple con la dimensión didáctica que debe tener los nuevos entornos de aprendizaje para garantizar la flexibilidad como una de sus cualidades más importantes. Ver anexo 2
Aprendizaje y tutoría:
En Universimat los estudiantes, profesores y tutores encontrarán:

- Los programas de las asignaturas y la misión y visión de la carrera que estudia.
- Núcleos temáticos que generan todo el contenido de las diferentes asignaturas.
- Guías de estudio que le indican a los estudiantes los requerimientos básicos que deben conocer para enfrentar los objetivos específicos del tema que indica la guía. Así como ejercicios resueltos, visualización de conceptos relacionados y algunos links con documentos complementarios que presentan el tema de diferentes puntos de vista.

- Material; complementario para la preparación de profesores y tutores tanto en materia de Educación Matemática, como en Didáctica de la Matemática, como en lo referido al Modelo Flexible de aprendizaje.

Medios didácticos para un aprendizaje flexible:

En Universimat los estudiantes, profesores y tutores encontrarán:

- Laboratorios virtuales utilizando el Derive.
- Entrenadores inteligentes creados por el grupo de investigación para la comprensión del Límite, la Derivación y la Integración.
- Tutoriales para la utilización del Derive, el Cabri y los entrenadores inteligentes.
- Graficadores de funciones que son fueron bajados de Internet por ser software libre.

En sentido general es un recurso que sus elementos están muy relacionados con el aprendizaje centrado en el alumno: secuencias flexibles de aprendizaje, objetivos, contenidos y métodos de aprendizaje negociados, así como la elección del sistema de apoyo que elegirán todos los componentes del sistema didáctico implicado en este objetivo de la comprensión matemática.

En cuanto a facilitar la comprensión matemática por parte del recurso creado: Universimat, tendremos en cuenta que según Godino, Batanero y Font (2003) los recursos didácticos virtuales pueden ser el soporte para el planteamiento de problemas y situaciones didácticas que promuevan la actividad y comprensión matemática. Y como tales recursos, tienen unas potencialidades que deben ser hechas realidad por el profesor, lo cual no es inmediato, ya que no es suficiente con el enunciado de las tareas sino que es necesario identificar e implementar los conocimientos matemáticos y la trayectoria de estudio correspondiente.

Emplearemos la herramienta elaborada por este colectivo de expertos en Educación Matemática para determinar las dimensiones a tener en cuenta, tanto de tipo epistémico (conocimientos institucionales), cognitivo (significados personales) como instruccionales (funciones docentes, discentes y patrones de interacción) para evaluar recurso, situaciones y trayectorias didácticas.

En correspondencia con el análisis realizado con anterioridad para abordar la flexibilidad, también nos centraremos en la dimensión didáctica de esta herramienta, es decir, en la instruccional. Cuestiones a evaluar relacionadas con las funciones del proceso de enseñanza aprendizaje que proporciona el recurso:

- Establecer trayectorias didácticas que se implementarán de acuerdo a unas *guías de estudio*, en los cuales se hará una selección de los distintos tipos de conocimientos y su secuenciación temporal.
- Representatividad de los significados pretendidos respecto de los significados de referencia

Universimat tiene como eslabón primario para el logro de la comprensión matemática, los *Núcleos Temáticos* y tanto profesores como tutores y estudiantes encontrarán en cada uno de ellos las guías de estudio que contienen indicaciones para todos los actores del proceso, lo que permite a cada cual diseñar su propia trayectoria de aprendizaje en función de los significados personales que tienen del objeto matemático puesto en juego. Por otra parte la visualización de muchos de ellos (OM) y las diferentes formas de analizarlas en cuanto a la posibilidad de transferencia de una representación a otra facilita la comprensión matemática, al entender la misma como competencia, es decir, el estudiante podrá resolver problemas y ejercicios propuestos, utilizará los software y entrenadores que contiene el entorno para resolverlos y comprobar sus conocimientos.

Conclusiones

El entorno web Universimat les permite a los estudiantes comprender los contenidos matemáticos de una manera significativa y motivadora. Su diseño basado en el uso de las nuevas tecnologías pretende lograr que los alumnos se transformen en nuevos usuarios de su propia formación, posibilitándole aprender matemática desde cualquier lugar del país, accediendo a los niveles de ayuda que ofrecen las guías y la posibilidad de enviar dudas y participar en los chat online con los profesores en los tiempos de que se dispone al respecto. También podrán los profesores realizar revisiones simultaneas y ponerse de acuerdo a la hora de actualizar o modificar los contenidos publicados de manera que queden dispuestos de la mejor manera posible para su comprensión.

Referencias bibliográficas

Asiala, M. y col.(1996),A framework for research and curriculum development in undergraduate Mathematics Education, *CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. 6, pp. 1-32.

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Cambridge, MA: Hardward University Press.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportés par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 12 (1), 73-112.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada, España. Recuperado el 14 de diciembre del 2004, de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Hiebert, J. y Carpenter, Th. (1992). Learning and teaching with understanding. En: D. W. Grouws (Ed.). *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* (pp. 65-97). New York, E.U: Macmilan.

Perkins, D. (2000). La escuela inteligente, Ediciones Gedisa, México.

Ruiz, M (2004). Arcadia: La competencia pedagógica didáctica para aprender con sencillez y significatividad. Ediciones Norma. México.

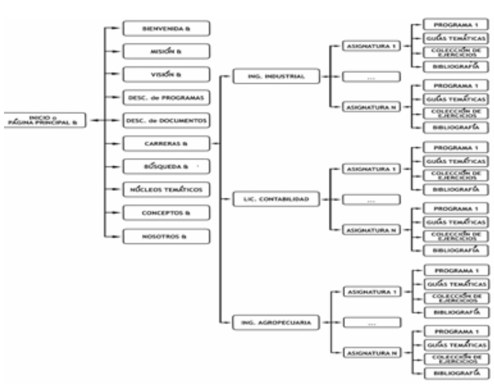
Salinas, J. (1997). Nuevos ambientes de aprendizaje para una sociedad de la información. *Revista Pensamiento Educativo, 20*, 81-104

Salinas, J. (1999). ¿Qué se entiende por una institución de educación superior flexible? En Cabero, J. (Ed.). *Las Nuevas tecnologías para la mejora educativa*, (pp.451-466). Sevilla, España: Kronos.

Torres A y Martínez D. (2004) Enfoques y Metodologías de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Santa Clara, Villa Clara, Cuba: Editorial Samuel Feijó.

Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje.* Buenos Aires, Argentina: La Pléyade.

Anexo 1



Anexo 2

ENTORNOS VIRTUALES PARA EL LOGRO DE COMPRENSIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Aida María Torres Alfonso, Dámasa Martínez Martínez, Andrés Tellería Rodríguez
Universidad Central de Las Villas. (Cuba)
fresasjun22@yahoo.com

Campo de investigación: visualización. Nivel educativo: superior
Palabras clave: visualización, motivación, comprensión

Resumen
El trabajo propone como elemento innovador el uso de la visualización usando la tecnología desde la presenciabilidad de un curso de Análisis Matemático donde el estudiante se convierte en un elemento activo y critico de los recursos que se encuentran en Internet y desarrolla la capacidad de elaborar materiales didácticos que ayuden a la comprensión de objetos matemáticos. Los principales logros alcanzados en los estudiantes con esta experiencia fueron: la motivación por su formación matemática, el trabajo en grupo, la formación de competencias y su formación didáctica, lo que los prepara como futuros profesionales vinculados a lo docencia en las sedes universitarias.

Introducción

El proceso de transformación cualitativa por el cual transita la enseñanza superior cubana y la reformulación de las funciones de la Universidad, enfatizando en su responsabilidad social es un fenómeno palpable por toda la sociedad en los últimos años. En este contexto la problemática del aprendizaje y su optimización se incluye entre las cuestiones investigativas que son priorizadas.
Por otra parte resulta indudable, el impacto que ha causado el uso de las nuevas tecnologías en la Educación Superior y dentro de ellas es significativo las posibilidades que brinda Internet. Pero el reto pedagógico al que nos enfrentamos consiste en ¿cómo emplearlas en el proceso docente educativo, controladas y dirigidas por el profesor para lograr los objetivos previstos en la formación de los especialistas que se forman en nuestras universidades?
La utilización de entornos virtuales para la formación universitaria ha generado nuevos escenarios de enseñanza y también de aprendizaje en los que ni el profesor ni los alumnos necesitan las sesiones cara a cara típicas de los planteamientos presenciales. Coincidimos además que su eficacia va a depender tanto del alumno, como del tipo de actividad, contenido u objetivo pretendidos.
En el aprendizaje del Análisis Matemático las ideas, conceptos y métodos, presentan una gran riqueza de contenidos visuales, intuitivos, geométricos, que están constantemente presentes tanto en las tareas de presentación y manejo de los teoremas y métodos, como en la de resolución de problemas, pero que rara vez pasan a las presentaciones escritas, ya sea por la dificultad material de realizarlo o tal vez por una especie de atadura inconsciente a las formas tradicionales de presentación.
La visualización es la capacidad del individuo de poder reconocer en un registro de acciones y representaciones, las reglas con las cuales fueron construidas, y así pues, que de tal forma esta información le permita realizar las conversiones adecuadas a otro registro. Al respecto Fernando Hitt menciona: "*El conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de lograr articular sin condición algunas diferentes representaciones del mismo objeto, así como el de recurrir a ellas, las representaciones, en forma espontánea durante la resolución de problemas*" (Hitt, 1998).
La visualización es por consiguiente, extraordinariamente útil, tanto en el contexto de la enseñanza-aprendizaje, como, evidentemente, en el de la investigación.

El trabajo se inscribe por tanto en una experiencia educativa que forma parte de un modelo didáctico centrado en las necesidades de preparación matemática del estudiante, que potencia el uso de Internet en un curso de Análisis Matemático presencial, concibiendo la evaluación formativa para lograr comprensión, utilizando de manera intencionada la tecnología.

Desarrollo

La comprensión desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática
En el trabajo adoptamos el enfoque constructivista para la formación de competencias en los profesionales al que se le ha incorporado el punto de vista vigostkiano de la competencia, de acuerdo con el cual esta se homologa con el Zona de Desarrollo Próximo. Esta perspectiva enmarca los procesos formativos dentro de una concepción del desarrollo progresivo y gradual, adjudicando un lugar secundario a la demostración observable de los resultados como la que representa por ejemplo, un examen o un test.
Entender la comprensión como competencia reconoce la necesidad de un desarrollo mental, pero centra su interés en las descripciones y representaciones a medida que se "construyen" mediante las interacciones que se desarrollan en una institución escolar dada, ya sea entre los alumnos, entre ellos y sus profesores, entre estos últimos y entre cualquiera de estos sujetos y el contexto social en el cual se desarrolla el proceso de aprendizaje.
Este enfoque general es compatible con el que están desarrollando y se pueden encontrar en diferentes trabajos de Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Contreras y Font, en prensa) los que han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.
En correspondencia con este enfoque constructivista asumimos que comprender un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus características, propiedades y representaciones; relacionarlo con otros objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problémicas que sean propuestas por el profesor.
Bajo esta perspectiva la comprensión asumida por un sujeto en un momento, difícilmente será total o nula, sino parcial. Se necesita por tanto, concebir por parte del profesor una secuencia de actividades que tengan como objetivo que la emergencia de objetos matemáticos personales como resultado de una organización didáctica diseñada a priori por el profesor.
Del otro lado del problema didáctico a resolver, el alumno habrá comprendido un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas situaciones didácticas, en las que requerirá utilizar diferentes notaciones, así como convertir una representación en otra de manera natural, y además tenga la capacidad de poder expresarlo públicamente, con argumentos que demuestren que su pensamiento ha evolucionado tras un esfuerzo intelectual productivo y no igualar estas prácticas evaluativas con la participación "activa" de los estudiantes en las cuales solo se analiza si participó o no en clases, pero no si la misma se sustenta en un desarrollo de su pensamiento y actividad matemática concreta.

Uso de Internet en la Educación Superior, algunas referencias

En la bibliografía consultada, se reconoce que el uso de Internet en la docencia universitaria puede oscilar entre la elaboración de pequeñas experiencias docentes: por ejemplo, publicar una página web con el programa de la asignatura, hasta la creación y puesta en funcionamiento de todo un sistema de formación a distancia *on line* desarrollado institucionalmente por una universidad. Por esta razón, podemos identificar distintos niveles de integración y uso de los recursos de Internet que va de lo simple a lo complejo, de lo personal a lo institucional, siempre con estrategias para contribuir al éxito de nuestro objetivo fundamental como educadores universitarios: formación de profesionales competentes.
Postulamos que si en nuestra practica docente concebimos de manera consciente su uso, puede ser un factor que ayude a construir y desarrollar un modelo de enseñanza más flexible, donde prime más la actividad y la construcción del conocimiento por parte del alumnado a través de la utilización de una gran variedad de recursos didácticos que están disponibles en Internet ante la mera recepción pasiva del conocimiento a través de los apuntes y libros de texto. Siendo, a juicio de varios autores y nuestro también, uno de los retos pedagógicos de la docencia universitaria a corto y medio plazo.

Utilización de Internet como elemento innovador de un modelo didáctico para un curso de Análisis Matemático presencial

Muchos son los autores que con diferentes puntos de vista, reconocen las ventajas de las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de enseñanza. Por la relación que guarda con nuestro trabajo, citamos a Miguel de Guzmán (1996), quien sostiene que la visualización en las Matemáticas es la representación concreta de relaciones abstractas.
En la experiencia nos afianzamos en el supuesto de que los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.
Desde este punto de vista, el conjunto de prácticas que puede realizar en un momento determinado el alumno es lo que se entiende por significado del objeto personal del alumno en este momento, las que podrán ser utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Un cambio de representación puede activar un subconjunto de prácticas públicas y privadas, que puede facilitar o dificultar la resolución de la actividad. Generalmente los objetos matemáticos se representan mediante notaciones diferentes que ayudan a producir diferentes sentidos. Cada una de las notaciones ayuda a producir sentido, pero no produce todos los sentidos. Por lo tanto, comprender un objeto matemático requiere utilizar diferentes notaciones y adquirir la capacidad de convertir una representación en otra.
Presentamos en el trabajo algunas de las experiencias desarrolladas en el proceso docente educativo en el primer año de la carrera Licenciatura en Matemática, integrando el uso de entornos virtuales que están disponibles en Internet, con el objetivo de lograr la comprensión de los objetos matemáticos implicados en ese curso académico, diseñando actividades docentes que combinan la búsqueda de información del tema a estudiar, de forma dirigida, evitando que el estudiante divague

en la "bruma" de la información de temáticas tan tratadas en la red, así como propiciamos el trabajo cooperativo y la responsabilidad individual de cada estudiante, no solo ante los objetos matemáticos a comprender, sino también hacia su actividad matemática.

Características generales de las situaciones didácticas diseñadas donde se utilizan los entornos virtuales para el logro de la comprensión de los objetos matemáticos

- Atención a las diferencias individuales de los estudiantes del grupo.
- Posibilidad de realizar de manera complementaria trabajo colaborativo.
- Desarrollar el pensamiento crítico reflexivo en los estudiantes en el manejo de la información encontrada en Internet.
- Concepción de actividades docentes y evaluaciones ínter disciplinares que reportan beneficios motivacionales en los estudiantes y reducción de evaluaciones parciales.
- Los estudiantes exponen públicamente la interpretación que han asumido del objeto matemático que analizaron en el entorno virtual que fue indicado por el profesor.
- Se desarrollan actividades de seminarios teóricos donde los estudiantes refieren en sus fundamentaciones a los problemas y teoremas planteados, los objetos matemáticos discernidos en los entornos virtuales que consultaron en actividades anteriores.
- Uso de la visualización de conceptos matemáticos y de su historia en la motivación de profesores y estudiantes del colectivo.
- Los estudiantes elaboraron recursos didácticos con el uso de las tecnologías que contribuyen a la comprensión de conceptos, temas y problemas matemáticos resueltos, de manera que se convierten en sujetos activos del proceso de aprendizaje.
- Se contextualiza la matemática pero evitando dar un simple maquillaje a las matemáticas, sino diseñando situaciones didácticas ricas que desarrollen el pensamiento y logren la comprensión. Este enfoque potencia la práctica evaluativa pública ante la privada que sustenta la comprensión como proceso mental.
- Utilizar los recursos didácticos que aparecen en este sitio con el objetivo de realizar una valoración crítica de los productos atendiendo a las diferentes representaciones que se utilizan y a la visualización: http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/

Algunos de los resultados obtenidos al desarrollar esta experiencia educativa:

- Los estudiantes expresan una mayor motivación por el estudio de la matemática y disposición investigativa hacia ella.
- Se lograron índices de aprovechamiento escolar muy superiores a cursos anteriores en cuanto a resultados docentes, participación en eventos científicos, exámenes de mejora de notas, así como en actividades extradocentes.

Conclusiones

Debemos contribuir con los resultados de nuestras investigaciones pedagógicas a fundamentar porque las nuevas tecnologías por si solas no contribuyen a un desarrollo ascendente de nuestras misiones educativas, cuestión que nos precisa reflexionar en un uso correcto de los recursos que disponemos.

En esta comunicación hemos expuesto nuestras experiencias con el uso de Internet en el marco de un modelo didáctico no tradicional.
Defendemos la postura de que la integración real de las tecnologías de la información y en específico Internet en el papel motivador hacia el aprendizaje matemático necesita de un replanteamiento de la práctica desde la óptica de un modelo sistémico, el cual debe potenciar el uso de la reflexión en el proceso enseñanza aprendizaje, la estimulación a la autonomía del aprendizaje donde cada cual describa su propio camino hacia el saber, así como los enfoques centrados en el sujeto que aprende, lo que permitirá guiarlo en su proceso de aprendizaje a lo largo de la vida, sin necesidad de utilizar nuevos modelos.
Formar a los futuros matemáticos bajo un espíritu de solidaridad, cooperación, responsabilidad individual y unidad, los preparará para trabajar en equipos multidisciplinarios donde estos valores primarán sobre las necesidades individuales.

Referencias bibliográficas

Area, M. (2000). ¿Qué aporta Internet al cambio pedagógico en la Educación Superior? *Actas del III Congreso Internacional de Comunicación, Tecnología y Educación. Universidad de Oviedo*, 128-135.

Borrás, I. (1999). Aprendizaje con la Internet: una aproximación crítica. Recuperado de: http://www.sav.us.es/pixelbit/articulos/n9/n9art/art91.htm

Contreras, A. y Font, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas SIIDM*, 14, 1-21.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25 (2), 151-186.

Hitt, F. (1998) Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista de Educación Matemática*, 10, 23-45.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22, 237-284.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Godino, J. (1996). Significado y comprensión de los objetos matemáticos. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference,* Vol 2, pp. 417-424). Valencia, 1996

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 3-36.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Guzmán M. de, El papel de la visualización. Recuperado en: http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm

Guzmán M. (1996) El papel del matemático en la Educación Matemática. Actas del Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8, *Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla.* Recuperado en: http://usuarios.bitmailer.com/mdeguzman/guzmanpa/papeldelmatematico.htm

Marques P.G. (1998) Usos educativos de Internet ¿hacia un nuevo paradigma de la enseñanza? Recuperado en: http://dewey.uab.es/pmarques/usosred2.htm

Anexo 1

Tema de la actividad docente: Aplicaciones de la derivada

Objetivos

1. Lograr que los estudiantes localicen y consulten literatura matemática en Internet, relacionada con el tema: Derivada de una función real y sus aplicaciones, tanto en Idioma español como en inglés.
2. Elaborar esquemas y resúmenes en español sobre los materiales consultados en ingles.
3. Exponer en una actividad docente, utilizando las NTIC, los conceptos fundamentales que abarcan el tema tratado.
4. Valorar el uso de estos entornos virtuales, en la comprensión de los objetos matemáticos estudiados que se relacionan con el tema de estudio.

Tareas a realizar

1. Analizar tutoriales disponibles en INTERNET para el estudio del tema propuesto:

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/

2. Trabajar con materiales interactivos que están en INTERNET para el análisis y discusión de varios aspectos del tema propuesto.

http://www.ies.co.jp/math/java/calc/index.html

Organización de la Actividad

1. Se dividirá el grupo en dos equipos:
A (Responsabilizado con la primera tarea) y
B (Responsabilizado con la segunda tarea).
2. Cada estudiante responderá por un objetivo distinto en cada tarea, pero el equipo responde por el objetivo general.
3. Cada estudiante dispone de 6 minutos para socializar sus conocimientos.
4. La evaluación de la actividad tendrá en cuenta el cumplimiento tanto de los objetivos particulares como lo general. Y cada estudiante se propondrá su evaluación en función del cumplimiento de los objetivos generales y los individuales que cada cual se haya propuesto.

Temas por equipos

Equipo A:
$A_{1:}$ Derivadas
http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/index.html
$A_{2:}$ Aplicaciones del diferencial
http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/3/index.html

Equipo B:
Derivadas de orden superior y otras propiedades
http://www.ies.co.jp/math/java/calc/index.html

ESTRATEGIAS PARA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN MATEMÁTICA

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco. (Argentina)
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Categoría: estrategias de aprendizaje, Nivel educativo: superior
Palabras clave: estrategias de aprendizaje, resolución de problema, analogías, recursos informáticos

Resumen
Esta comunicación forma parte de las conclusiones elaboradas al concluir la etapa exploratoria sobre las estrategias más favorecedoras para superar las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático en alumnos universitarios de primer y segundo año, en el marco del Proyecto "Los errores en el aprendizaje del Análisis Matemático" de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Pacheco.
Consideramos que tales estrategias están vinculadas a *los modos de abordar la resolución de problemas*, a la *utilización de analogías* con el propósito de establecer un puente entre las ideas previas de los alumnos y los nuevos conocimientos, y a la *utilización del ordenador* como herramienta facilitadora en la simulación de experiencias y en el intercambio entre diferentes sistemas de representación.

La utilización del ordenador

Los primeros trabajos en un entorno informático se remontan a la década del cincuenta, con el diseño e instrumentación de sistemas educativos basados en los principios conductistas de Skinner. Luego surge la concepción de instrucción asistida por computadoras, considerando que puede simularse en computación el proceso tutorial del ser humano. A finales de la década del sesenta y principios de los años setenta se desarrollaron una serie de proyectos, dirigidos por S. Papert, donde se deja de un lado el enfoque conductual y desde una perspectiva influida por Piaget se pone el énfasis en los procesos creativas (del niño) en contraposición a la memorización de contenidos programáticos, y se plantea la necesidad de una comunicación niño-máquina; aunque su implementación estaba limitada por la tecnología existente. A finales de los años setenta aparece la computadora personal, equipo que resulta independiente, de pequeño tamaño, de fácil manejo y de menor costo. Es a partir de este momento que se inicia una revolución en el uso de esos medios en las clases de cualquier asignatura y con mucho más énfasis en las de Ciencias y genera un ambiente propicio para la realización de diversos trabajos de investigación que dan origen a diferentes perspectivas sobre los modos de utilización del ordenador como herramienta facilitadora en los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Jiménez, 1992; Escalona Reyes, 2004; Torres, 1997 y 2001).
Es así como se comienza a valorar el ordenador como recurso didáctico facilitador en los procesos de conocer, analizar e investigar la realidad, actuando sobre ella; como contenido curricular; como recurso de la organización escolar: se concibe su uso para mejorar los procesos de comunicación, gestión y administración de las escuelas; como instrumento al servicio de la evaluación: se utilizan como un potente instrumento para facilitar y mejorar el proceso evaluativo respecto al análisis de las relaciones profesor-profesor, profesor-alumno y alumno-alumno; en la evaluación del funcionamiento de la institución y como recurso de desarrollo comunitario.
Hemos focalizado nuestro interés en las posibilidades de este medio como facilitador del tránsito de lo concreto a lo abstracto y viceversa a través de diferentes representaciones y manipulaciones de ellas.
La mayoría de las veces la búsqueda de la solución de un problema conduce a la elaboración de un modelo matemático. Si el modelo incluye ecuaciones o sistemas muy sencillos, seguramente el alumno podrá utilizar los algoritmos básicos de resolución.

Sin embargo, en la mayoría de los problemas, aún los más sencillos, que se plantean en ingeniería, los alumnos llegan a concebir un modelo que incluyen ecuaciones polinómicas cúbicas o de orden superior, ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales. La resolución algorítmica tradicional es sumamente engorrosa debido a que se involucran muchos cálculos y procesos iterativos, de tal modo que se termina por desvirtuar el propósito por el cual se planteó el problema.
En ese sentido nuestro trabajo consistió en el desarrollo de diferentes experiencias en el ámbito de primer año de un curso de cálculo con utilización del ordenador como recurso didáctico. Se utilizó para tales fines un software, diseñado sobre *Mathemática*, que permite obtener diferentes visualizaciones de la función que resulta del modelo planteado, analizar la existencia de una o más raíces reales y calcular numéricamente, mediante iteraciones, su valor aproximado en cada caso, con el error deseado.
La utilización del entorno descripto:

- no sólo facilitó, sino que dinamizó la interacción entre los modos de representación gráfica, algebraica y numérica,
- permitió a los alumno interactuar con objetos matemáticos de forma simple y natural, lo que favoreció su autonomía en el aprendizaje, además de permitirles un mayor acercamiento a la matemática, siéndole ésta más familiar,
- facilitó la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades,
- permitió ampliar el abanico de ejemplos y enriquecer la propuesta,
- permitió minimizan los cálculos tediosos.

También observamos que existe una desmedida confianza en los resultados obtenidos a partir del uso del software, cuestión que debe alertarnos sobre una adecuada propuesta de actividades y las conclusiones rápidas que obtienen los alumnos habitualmente.

La resolución de problemas

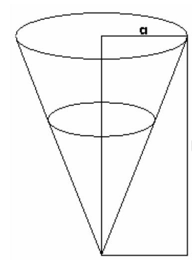
Uno de los principales objetivos a conseguir en el área de las matemáticas universitarias, consensuado por gran parte de los docentes, es que los alumnos sean *competentes en la resolución de problemas*, con el propósito de mejorar la significatividad del aprendizaje de contenidos matemáticos, tanto de tipo conceptual, como en lo procedimental y en lo actitudinal.
Para resolver un problema, se requiere del uso de pausas, reflexiones y hasta es posible que surjan propuestas originales que el docente no había tenido en cuenta en anteriores oportunidades. Esta característica de dar una especie de *paso creativo* en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción es relativa al nivel instruccional desde el que se aborda. Para un niño pequeño puede ser un problema encontrar cuánto es 3 + 2. O bien, para niños de los primeros grados de primaria responder a la pregunta ¿Cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad?, mientras que para un alumno avanzado de escuela primaria constituye un ejercicio rutinario.
De la misma manera, el modo en que fluye agua hacia fuera de un tanque, puede constituir un problema para alumnos de escuela media o preuniversitarios y un ejercicio sencillo de razón de cambio de la velocidad de salida, para un alumno universitario que haya transitado por las materias de ciencias básicas.

Entre las cuestiones que inciden en conseguir que los alumnos aprendan a resolver problemas, Pifarré y Sanuy, (2001) señalan cuatro diferentes variables que hacen referencia tanto a la dimensión del aprendizaje como a la dimensión de la enseñanza. Ellas son: a) la importancia del conocimiento declarativo sobre el contenido específico del problema; b) el repertorio de estrategias generales y específicas que es capaz de poner en marcha el sujeto para resolver el problema concreto; c) el papel de las estrategias metacognitivas; y d) la influencia de los componentes individuales y afectivos.
Nuestra experiencia incluyó la resolución, por parte de un grupo de alumnos de 1º año de ingeniería, de varios problemas relacionados con las razones de cambio aplicados a la física, a la química y a la biología. A modo de ejemplo, presentamos el enunciado y la secuencia de resolución de uno de ellos.

Problema (Stewart, 1999)

> *Se vierte agua en un recipiente de forma cónica con una rapidez "r". El radio de la base del cono es "a "y su altura es "b". Determinar la velocidad a la que la superficie del agua se eleva cuando la profundidad del agua es "y".*

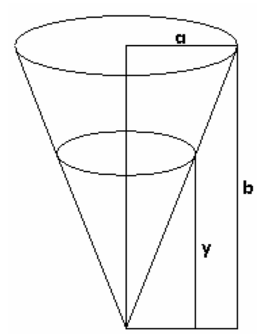
La primera dificultad fue lograr una adecuada representación del cono. Luego, en el reconocimiento de los datos, los alumnos no tuvieron problemas en identificar radio *a* y la altura *b*, pero sí con *la rapidez con que entra el agua.*



Si bien habían desarrollado otros problemas dónde la razón de cambio estaba asociada a la velocidad de movimiento respecto del tiempo, les resultó difícil vincularlo, en este caso, a la variación de volumen respecto del tiempo y más aún identificar que se trata de un radio variable, al cual denominaron *r*.
Una vez identificada la incógnita (denominaron *y* a la altura variable), se les solicitó que rescribieran el problema simbólica y gráfica mente.

Datos
- Altura: b
- Radio: a
- Rapidez con que fluye el agua: $r = \dfrac{dV}{dt}$

Incógnita: $\dfrac{dy}{dt}$



La etapa siguiente consistió en que, recordando la relación entre el volumen del cono con su altura y radio, trataran de expresar el volumen en función de *y* solamente,

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

A partir del gráfico advirtieron con facilidad que:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{a}{b} y$$ *con lo cual expresaron:* $$V = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{b^2} y^3$$

La siguiente etapa, en la cual debieron relacionar el dato pendiente de utilización: *dV/dt* con la incógnita: *dy/dt,* no les ofreció mayor dificultad dado que, en general manejaban con bastante fluidez las técnicas de derivación. De todas maneras, resultó necesario solicitarles que establecieran las dependencias entre variables con el propósito de que advirtieran que y = y(t)

Así: $\frac{dV}{dt} = \pi \frac{a^2}{b^2} y^2 \frac{dy}{dt}$ con lo cual $\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi \frac{a^2}{b^2}} = \frac{r}{\pi \frac{a^2}{b^2}}$

Finalmente una visión retrospectiva sobre las etapas seguidas y su secuencialidad, incluyó las siguientes preguntas:

¿Cómo se relaciona V con x e y?, ¿Cómo se relaciona x con y?, ¿Cómo se relaciona V con y?, ¿Cómo se relaciona la variación del volumen con la variación de la altura del cono?

El análisis de los resultados obtenidos en las experiencias realizadas nos permitieron detectar algunas regularidades que creemos importante mencionar. La resolución de problemas en áreas o dominios específicos, en este caso referidos al calculo diferencial, requiere del conocimiento de la disciplina involucrada, pero la sola presencia del conocimiento almacenado en el sistema de memoria, no implica necesariamente que éste va a estar disponible en el momento de abordar la resolución. El ser capaz o no de resolver un problema depende de la adopción de un modo apropiado de encarar el problema. Específicamente en matemática, es muy valioso que el alumno, frente a una situación problemática, logre decidir eficazmente acerca cual es el sistema de representación que más le conviene. En cada una de las situaciones problemáticas propuestas, les pedimos a los alumnos que argumenten acerca de la conveniencia sobre utilizar el lenguaje geométrico, o un simple diagrama, o talvez el lenguaje algebraico, o bien comenzar por un planteo analítico de la situación.

Los patrones de razonamiento plausible, denominados *"Patrones de inferencia plausible"* por el mismo Polya, (1995) constituyen una guía muy apropiada para la secuencia de abordaje de las diferentes etapas.

Creemos que es de mucha utilidad la utilización de mecanismos de inferencia no deductivos, dado que se trata de un proceso no directo, dónde el alumno realiza varios intentos. Cada uno, en la medida que permite circunscribir más el problema, contribuye al progreso en la solución del mismo.

Frente a una situación problemática los alumnos debieran:

- Aceptar el reto de resolver el problema.
- Reescribir el problema en tus propias palabras.
- Tomarse un tiempo para explorar, reflexionar, conjeturar,...
- Abordar el problema con números simples.
- Analiza el problema desde varios ángulos.
- Revisar la propia lista de estrategias para ver si una (o más) pueden servir como punto de partida.
- Tener presente que habitualmente existen diferentes caminos para llegar a la solución.Cambiar de estrategia, volver a comenzar, es un indicio positivo cuando no se logran progresos.
- Los procesos de revisión son necesarios en más de una oportunidad, ya que la comprensión del problema aumenta a medida que se avanza en el trabajo de solución.
- *Siempre* mirar hacia atrás: Tratar de establecer con precisión cuál fue el paso clave en la solución.

- Explicitar la solución escrita con suficiente claridad de tal modo que sea posible entenderla tiempo después.

La analogía

Esta estrategia ocupa un lugar importante en el ámbito de la enseñanza, en general, y de la enseñanza de las ciencias, en particular dado que sirve para ayudar a comprender una determinada noción o fenómeno a través de las relaciones que establece con un sistema *análogo* y que resulta para el alumno más conocido y familiar.

Desde la perspectiva constructivista, el razonamiento analógico es la llave que permite el acceso a los procesos de aprendizaje, ya que todo nuevo conocimiento incluye una búsqueda de aspectos similares entre lo que ya se conoce y lo nuevo, lo familiar y lo no familiar y en este sentido, el efecto de las ideas previas de los alumnos es enorme.

Nuestras experiencias tuvieron el propósito de abordar algunos conceptos de cálculo en tres variables a partir de una relación analógica con los conceptos estudiados en dos variables. La estrategia seleccionada consistió en presentar el *modelo didáctico analógico (análogo base) (Paruelo, 2004)* previo al tema científico a abordar: las integrales de superficie. Para ello se estableció una analogía con el concepto de integral definida en una variable que se desarrolló en el primer curso de cálculo. La analogía se planteó introduciendo en primer lugar una revisión sobre el concepto de integral definida, a partir del problema del cálculo del área bajo una curva positiva.

Fue necesario revisar y escribir cada uno de los elementos intervinientes, secuencialmente en el proceso de reconstrucción del concepto de integral definida, los cuales no se detallan por razones de espacio. Luego se planteó el concepto a abordar (el análogo objetivo): el cálculo de la integral de una función de dos variables (x e y).

Un conjunto de preguntas fueron necesarias para guiar a los alumnos en el establecimiento de las correspondencias entre los diferentes elementos del análogo base y el análogo objeto.

Finalmente, hicimos extensiva la estrategia a la deducción de la regla del punto medio para integrales dobles.

Es importante remarcar y no perder de vista una tercera etapa relacionada con la *metacognición*, en cuanto a una toma de conciencia por parte del alumno sobre el salto cognitivo que se ha logrado en el tema. En este momento, es donde consideramos que se debe trabajar sobre un análisis riguroso para explicitar las transposiciones que operaron en los procesos de analogación: *los recortes, simplificaciones y aproximaciones* que se produjeron, las *transferencias y desplazamientos del contenido*, los *rangos de validez conceptual y operacional*, y el *conjunto de operaciones inversas* que nos permiten recuperar el modelo original. Esta etapa de metacognición, en tanto que supone un tipo de pensamiento del más alto nivel de conceptualización y la revisión de los mecanismos propios de adquisición del conocimiento, es la etapa de mayor resistencia por parte de los alumnos sin mayor experiencia en el uso de analogías, y tanto mayor es la dificultad cuanto menor es la edad. Consideramos que sobre esta tercera etapa se debe prestar fundamental atención en cuanto a no descuidar su implementación adecuada y en tiempos previamente pautados. Habitualmente, justamente por falta de tiempo, no se lleva a cabo y por ende no se completa el proceso de enseñanza adecuadamente.

Referencias bibliográficas

Escalona Reyes, M. (2004).Los ordenadores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias. Fundamentos para su utilización. *Revista Iberoamericana de Educación.*

Guzmán, M y Colera, J. (1989). *Matemáticas I.* Madrid, España: Anaya.

Jiménez, J. A. (1992). Plan ZAHARA XXI: Una propuesta de introducción de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza. En Pablos, J y Gotardi,C. (1992). *Las nuevas tecnologías de la información en la educación.* (pp. 158-177).Madrid, España: Alfar.

Paruelo, J y Miguel, H. (2004). Diferentes usos de la analogía en la formación en ciencias formales y en ciencias fácticas. En *V Jornadas Rolando Chuaqui Kettlun en Filosofía y Matemáticas*. Viña del Mar, Chile

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 297-308.

Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rinaudo, M, Chiecher, A y Donolo, D. (2003). Motivación y uso de estrategias en estudiantes universitarios. Su evaluación a partir del *Motivated Strategies Learning Questionnaire*. *Anales de Psicología*, 19 (1), 107-119

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos*. México: International Thomson Editores.

Torres, P. (1997). *Influencias de la computación en la enseñanza de la Matemática.* Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas no publicada. Sancti Spiritus, La Habana, Cuba

Torres, P. (2001). Didáctica de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. *Pedagogía, Curso 40*.

OBJETOS PARA APRENDIZAJE QUE INTEGRAN UN AMBIENTE VIRTUAL

Rafael Pantoja Rangel, Ricardo Ulloa Azpeitia
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán. Universidad de Guadalajara. (México)
rpantoja@prodigy.net.mx, rulloa@matedu.webexone.com
Campo de investigación: educación a distancia. Nivel educativo: superior
Palabras clave: objeto para aprendizaje, ambiente virtual, multimedia

Resumen
Un elemento importante en un ambiente para aprendizaje de las matemáticas son los objetos para aprendizaje (Learning Objets), materiales educativos diseñados y elaborados para un tema específico (Teoría de Polinomios), que tienen como propósito que el alumno tenga un primer acercamiento con el contenido, y pueda consultarlo cuantas veces sea necesario. El objeto para aprender funge como la base orientadora de la acción, porque le proporciona al usuario el conjunto mínimo de conocimientos del tema seleccionado, además de que son un buen apoyo para el docente. Se describen los objetos para aprendizaje que se elaboraron para el curso obligatorio de álgebra superior de la Maestría en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas.

Introducción

Echenique (1994, p. 18) señala que para los cursos no presenciales se debe elaborar "material audiovisual que complemente el material escrito, que ilustre situaciones que de otra manera resultan difíciles de describir", además, "programas de computadora que permitan la realización de prácticas o simulaciones que complementen el aprendizaje de una asignatura o área de conocimiento". El diseño y desarrollo de material didáctico con base en las nuevas tecnologías se ha visto relegado, entre otras razones por: (a) La dificultad para producir un programa multimedia, ya que incluye aspectos de programación que requieren de habilidades específicas, usualmente no proporcionadas en la formación profesional de los profesores de matemáticas, (b) La gran cantidad de tiempo que consume desarrollar un material didáctico para sistematizar la información, (c) La facilidad de elegir uno o varios libros existentes en el mercado, aunque los objetivos para los que fueron elaborados no coincidan con los del curso y (d) Por los altos costos.

Para la educación a distancia la situación es crítica, porque se acostumbra que recursos didácticos utilizados para un curso presencial se adapten para la modalidad a distancia de acuerdo a la experiencia del profesor. Estos medios y materiales se ubican en alguna plataforma virtual en internet, que se ofrece de manera gratuita o en algún servicio público (e-learning, 2004) para que el alumno pueda consultarlo desde cualquier lugar donde tenga acceso al servicio de la red mundial de la información (WWW).

Esta falta de materiales, aunada a los antecedentes que se tienen sobre los problemas de aprendizaje de la matemática (Howson & J. P. Kahane, 1990), hacen necesaria la creación de nuevos ambientes para aprender, presenciales o virtuales, soportados con las tecnologías de la información y comunicación (TIC), que propician, entre otras cosas, la interactividad y la comunicación entre los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Característica importante de las TIC es que brindan la posibilidad de reorganizar los cursos y los métodos pedagógicos en universidades del mundo, tendientes a ofrecer servicios de instrucción, capacitación y actualización (UNESCO, 1998). En diferentes investigaciones (Materi, R. y Fahy, P., 2004; Mason y Rennie, 2004; Pimentel, 1999; Knox, 1997) se afirma que la utilización o diseño de medios y materiales es un factor importante para lograr aprendizaje. En Guàrdia y Sangrà (2005) se especifica como un punto medular que la estructura de los medios y materiales se fundamente en alguna de las teorías modernas del conocimiento como lo es aprendizaje significativo, el constructivismo endógeno o el

constructivismo social (Kelly, 1997; Kolb, 1985; Dubinsky, 1991; Alexander y De Alba, 1997; Zañartu, 2005; Yelland y Masters, 1997; Ballester, 2002).
En el proyecto que engloba lo presentado en este escrito, se diseñó un ambiente virtual para aprendizaje con soporte en actividades desarrolladas con tres programas multimedia, el software MathCad, Foros de Discusión y un libro de texto elaborado para el curso. Se investigó el efecto producido sobre el aprendizaje de la Teoría de Polinomios y se exploró la efectividad de los elementos que integraron la alternativa instruccional propuesta para el aprendizaje autogestivo en las modalidades presencial y a distancia. En el estudio se asevera la satisfacción de los estudiantes por los objetos para aprendizaje que soportaron el ambiente virtual y que ayudaron a solucionar las dudas metodológicas y tecnológicas surgidas durante el proceso educativo. Se afirma que el ambiente virtual propuesto para esta investigación produce satisfacción y aprendizaje a los estudiantes sujetos a la experimentación.
En este artículo se describe el software con el que se generaron los objetos para aprendizaje, parte integral de la estructura del ambiente virtual para aprendizaje propuesto.

Objetos para aprendizaje de Teoría de Polinomios

Un objeto para aprendizaje, (IEEE en Martínez, 2002) es cualquier entidad digital o no digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado con tecnología. Algunas características de los objetos para aprendizaje son:
a) faciliten su descubrimiento y almacenamiento en bases de datos locales y globales, para lo cual los objetos de aprendizaje deben estar dotados de información semántica (meta-datos) que facilite su descubrimiento y reutilización
b) favorezcan el uso de ontologías que permitan resaltar la estructura de los objetos de aprendizaje confiriéndoles significado pedagógico y
c) potencien la personalización de los contenidos educativos y el desarrollo de objetos de aprendizaje inteligentes que puedan asistir al usuario en la realización de tareas más significativas dentro de la web semántica.
Se diseñó material con la filosofía de los objetos para aprendizaje (Makenzie, 2005), i.e., reusable, sustentado en el aprendizaje significativo, portable, con contenidos específicos y que colaborara para que el usuario aprenda en el aula, fuera de ella o en donde tuviera acceso a una computadora y en su caso, a Internet. En el sitio http://matedu.webexone.com se ubicaron los objetos elaborados.
Para el caso de un polinomio de grado n con coeficientes reales, se sabe por el teorema fundamental del álgebra, que tiene n raíces, reales o complejas, que, de ser el caso, son conjugadas, $\alpha \pm i\beta$, que por el teorema de Budan-Fourier se acotan en un intervalo de tamaño predeterminado, que desde el renacimiento se conoce la solución de los polinomios de segundo, tercer y cuarto grado, que por varios siglos se buscó una fórmula para determinar las raíces de cualquier polinomio de grado mayor que cuatro y no se encontró, que por el teorema de Taylor se aproxima mediante un polinomio una función trascendente, en fin, de tal magnitud es la importancia de los polinomios.
Para acotar las raíces del polinomio los cálculos son tediosos, al igual que para aproximar una raíz real por los métodos de Newton, bisecciones o aproximaciones, por lo que se requiere que el profesor le programe al alumno alternativas para aprender todo lo referente a los polinomios. El planteamiento que se hace en este escrito, toma en consideración que los procesos dinámicos son difíciles de representar con lápiz y papel, así que se promueve la utilización de las TIC para motivar al estudiante para que aprenda todo lo referente a polinomios. Para el caso que se ocupa, el

programa POLMULTI, los videos en formato AVI, la guía de estudio, los archivos en MathCad, son objetos para aprendizaje que los estudiantes utilizaron para lograr conocimiento.

Descripción de los objetos para aprendizaje

ToolBook Instructor II

El *software* ToolBook producido por la compañía *Asymetrix Learning System, Inc*, es sencillo de manejar y es especial para producir programas multimedia, porque sus rutinas permiten integrar imágenes, gráficas, video, animaciones y audio digitalizado. Otra característica muy especial es que puede compilar el programa creado (Asimetrix, 1999). A un programa multimedia generado con ToolBook se le conoce como un libro, porque al igual que cualquier obra literaria, se integra de un determinado número de páginas. Una propiedad importante del ToolBook es que todos los programas pueden ser vinculados de una manera muy sencilla, situación que permite, en caso que sea decisión del programador, construir un libro para cada tema o contenido seleccionado, porque un libro demasiado extenso puede provocar errores difíciles de detectar o porque al usuario se le haga demasiado extenso el contenido incluido.

Las gráficas, videos, animaciones y audio con sus extensiones respectivas, como gif, bmp, jpeg, avi, flc, mov, wav y mp3, que fueron generados en otros programas como DERIVE, MathCad, Digital Video Producer o PhotoMorph, se incluyen en el libro ToolBook.

Authorware

Este programa integrador de multimedia, trabaja en la plataforma de Windows y tiene una forma muy especial para generar las rutas de navegación, los botones interactivos y los demás objetos que lo conforman. Los iconos se activan al arrastralos con el ratón de la computadora a la línea de ejecución del programa, lo que indica que el objeto se ejecutará en forma secuencial, hasta que mediante un icono de interacción, indique una transferencia de control no lineal. Una vez que se ubica el icono en la línea de ejecución del programa, mediante un doble Clic se activan las propiedades del objeto, que puede ser insertar una gráfica, mover un objeto de un punto a otro, que aparezca una texto en un determinado tiempo, transferir el control a otro punto, que se ejecute un video o que se pase de una página a otra. Con el Authorware se elaboró el programa multimedia POLMULTI, archivo que tiene un tamaño de 8.802 MB con un total de 3537 íconos.

DERIVE

El DERIVE es un *software* del área de Matemáticas, que requiere de un equipo de cómputo de poca capacidad para ejecutarse, porque la instalación completa requiere de 3 Megabytes (MB) de espacio en disco duro, que no demerita la función de sus rutinas, en la solución de una gran cantidad de ejercicios de matemáticas. En el modo de álgebra se escriben las expresiones matemáticas, las indicaciones y las rutinas matemáticas, mientras que en los otros dos modos PLOT 2D y PLOT 3D, se grafican las funciones en dos y tres dimensiones.

DERIVE se utilizó para generar las gráficas de las funciones matemáticas que se incluyeron en los objetos para aprendizaje ASUPERIOR, POLMULTI, NCOMPLEJOS y MNUMÉRICOS; las gráficas se capturaron con la opción *Copy windows* del menú *Plot*, que permite copiar al escritorio de Windows todas las gráfica en un mismo tamaño, las que posteriormente se procesaron con el programa Microsoft Paint ® para colocar texto, líneas, cambiar de tamaño o de color alguna sección de la gráfica.

PhotoMorph

El PhotoMorph es un programa que es utilizado para el diseño gráfico y la producción multimedia, que combina de manera sencilla la edición de gráficas, los efectos especiales y el video digital, en

los diversos formatos que acepta la plataforma Windows. PhotoMorph se conforma de dos secciones principales: *Image* and *Project*. La opción *Image* se elige para modificar el color y el tamaño de una imagen, mientras que el menú *Project* se selecciona cuando se pretende realizar un video a partir de gráficas previamente elaboradas, elegir diferentes tipos de efectos, abrir un video y ejecutarlo con el comando AVI.
La transición, que es un concepto importante en PhotoMorph, porque es la base para elaborar un video y que significa la transformación de una imagen en otra, mediante alguno de los efectos *Morph*, *Warp*, *Tansition*, *Colorize*, *Distor* u *Overlay*. El video NEWTON.AVI se elaboró con PhotoMorph a partir de las gráficas Newton1.jpg, Newton2.jpg,… Newton25.jpg, que previamente se generaron con el programa DERIVE y se modificaron con el Microsoft Saint. Los parámetros para el video son:

Parámetro	Unidades
Cuadros por segundo (FPS)	15
Efecto de transición de la primera gráfica a la segunda gráfica	Morph
Unidades del video	320x240
Controlador de Compresión	Intel indeo
Duración de la transición	4 seg. o 60 FPS
Opciones de transición (la transformación de una grafica a otra)	100 %

En el recuadro *Start* del escritorio de PhotoMorph se inserta la primera gráfica y en el recuadro *End,* la segunda gráfica. Hacer Clic en el icono que representa una cinta de película y que se ubica entre los dos recuadros, para insertar este segmento del video. A continuación se hace Clic en la instrucción *Create Animation*, que activa una ventana donde el usuario debe escribir el nombre del video y el lugar donde se guardará, previamente seleccionado por el desarrollador del multimedia. Cuando se genera la primera transición, de manera automática se genera el espacio para la tercera gráfica, y así sucesivamente hasta incluir todas transiciones para el video sin audio. Con este procedimiento se generaron los videos:

Nombre	Tamaño	Número de Gráficas JPEG	Dimensiones
newton.avi	17.2 MB	25	508x316
MCAD.avi	70 MB	25	556x432
BISEC.avi	15 MB	16	508x316
Iter1.avi	37.1 MB	32	508x316
Iter2.avi	8.44 MB	20	508x316
Iter3.avi	29.2 MB	33	508x316
Iter4.avi	19.9 MB	21	508x316
		172 Gráficas	

Autorunner
Autorunner es un programa para generar un menú de presentaciones autoejecutables, característica que tiene un CDROM que al insertarlo en la unidad lectora, la computadora lo detecta y lo presenta en la pantalla del monitor para su instalación. Se recomienda que el usuario tenga ya organizados

los archivos que se incluirán en el proyecto del CDROM autoejecutable, que en esta investigación, se integró en el directorio C:\asuperior\setup\SETUP.exe.
En Windows XP, de *Inicio* ➔ *programas* ➔*Autoruuner* ejecutar *Inimaker*. En la siguiente fase, se insertan los mensajes que orientarán al usuario para instalar el programa, la gráfica del Background y un archivo de sonido.
Se selecciona el icono que simbolizará el programa en el ambiente Windows.
El paso siguiente es elegir el archivo que se ejecutará una vez que la computadora detecta el CDROM, que fue SETUP.EXE.
En este paso se opta por un icono adicional con el que se identifica el programa y se hace Clic en *OK.*
Por último, se guarda el proyecto en el subdirectorio seleccionado, para ello se hace Clic. Se procede a grabar los archivos del subdirectorio donde se encuentra el programa a ejecutar y los archivos adjuntos generados por el *software* Autorunner.

Conclusiones

El ambiente para el aprendizaje de los Polinomios de Grado Superior diseñado con soporte en los objetos para aprendizaje ASUPERIOR, NCOMPLEJOS y MNUMÉRICOS, el Libro Electrónico con Mathcad, el software Mathcad, la Guía de Estudio de Álgebra Superior, los foros de discusión y los correos electrónicos, resultó ser una buena alternativa para que el estudiante mediante un trabajo autogestivo, adquiera un aprendizaje que sea significativo.
Es importante tener claros los objetivos del curso para la selección y/o elaboración de los objetos para aprendizaje, que se sugiere tengan una alta correlación con la naturaleza de los contenidos, para que sea posible la transferencia y adquisición de aprendizajes desde diferentes perspectivas. Un objeto para aprendizaje de las matemáticas es un elemento que fortalece un ambiente para el aprendizaje de las matemáticas, que debe estar integrado al diseño instruccional del curso en cuestión.

Referencias bibliográficas

Alexander, D. y De Alba, L. (1997). Groups for proofs: Collaborative Learning in a Mathematicas Reasoning Course. *PRIMUS, Problems, Resources, and Issues in Mathematicas Undergraduate Studies, Vol. VII, No. 3*, September, Ed. Published Quarterly United States Military Academy, West Point, N.Y. 10996, USA.

Dubinski, E. (1991). Cap. 7: *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. Editado por Tall, D. Mathematics Education Library.

Echenique, J. (1994), La asesoría y las técnicas para el aprendizaje en los sistemas abiertos y a distancia. *Parámetros de calidad de la Educación Abierta y a Distancia*, Quinta Reunión Nacional de Educación Abierta y a Distancia. México: UNAM.

e-learning: Soluciones de e-learning. Formación a Distancia. Disponible en línea: http://e-learning.bankhacker.com/. 05-05-04

Guàrdia, L. y Sangrà, A. (2005). Diseño instruccional y objetos de aprendizaje; hacia un modelo para el diseño de actividades de evaluación del aprendizaje *on-line*. Universitat Oberta de Catalunya, Barcelona. http://www.uoc.edu

Howson, G. y Kahane, J. P. (1990), *Mathematics and Cognition, A research Synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education*. ICMI Study Series. USA: Cambrige University Press.

Kelly, C. (1997). The Theory of Experiential Learning and ESL. *The Internet TESL Journal,* Vol. III, No. 9, September. The Internet TESL Journal. Disponible en línea http://iteslj.org/Articles/Kelly-Experiential/. 16-02-05

Knox, D. (1997). A review of the use of video-conferencing for actuarial education –A three-year case study. *Distance education*, Volume 18, number 2, pp. 225-235. Australia

Kolb, D. (1985). *Experiential Learning: Experience as the Source of Learning and Development*. USA: Prentice-Hall.

Mackenzie-Robb, L. (2005). Packaging and publishing learning objects: best practice guidelines. BECTA. Recuperado el 30 de octubre del 2006 de http://www.becta.org.uk/page_documents/industry/content_packaging.pdf.

Martínez, J. (2002). Objetos de aprendizaje. Una aplicación educativa de Internet 2. Recuperado el 28 de Octubre de 2006 de:
http://eae.ilce.edu.mx/objetosaprendizaje.htm

Mason, R. and Rennie, F. (2004). Broadband: A solution for Rural-e Learning? International Review of Research in Open and Distance Learning. ISSN: 1492-3831. Disponible en línea:
http://www.irrodl.org/content/v5.1/mason_rennie.html. 11-05-04

Materi, R. y Fahy, P. (2004). Interim report: A case study of internet based Distance Education Program Development in Vietnam. International Review of Research in Open and Distance Learning. ISSN: 1492-3831. Disponible en línea: http://www.irrodl.org/content/v5.1/materi_fahy.html. 11-05-04

Pimentel, R. (1999). Design of Net-learning Systems Based on Experiential Learning. *JALN Volume 3, Issue 2 – November, Department of Electrical and Computer Engineering, Kettering University, Flint, Michigan 48504*. Disponible en línea: http://www.sloan-c.org/publications/jaln/v3n2/v3n2_pimentel.asp. 16-02-04.

UNESCO (1998). La educación superior en el siglo XXI : visión y acción. Extractada por Elisa Morales Flores. *Biblioteca Virtual de Bibliotécnic Consultores* Lima: Bibliotécnic Consultores. Disponible en línea: http://www.bibliotecnic.org/archivos_biblioteca/doc51.pdf. 22-02-05

Yelland, N. y Masters, J. (1997). Learning Mathematics with technology: Young Children´s understanding of Paths and Measurement. *Mathematis Eduation Research Journal,* Vol. 9 No. 1, Mayo de 1997, Mathematics Education Research Group of Australasia, Inc. pp. 83-99.

Zañartu, L. (2005). Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de Diálogo Interpersonal y en Red. *Contexto Educativo. Revista Digital de Educación y nuevas Tecnologías*, Número 28 - Año V.

DISEÑO DE UN CURSO EN LÍNEA DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SU EFECTO SOBRE EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES

Edgar Gilberto Añorve Solano, Elena Dmitrievna Nesterova
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, Universidad de Guadalajara. (México)
eanorve@gmail.com
Campo de investigación: educación a distancia. Nivel educativo: superior
Palabras clave: modelos de cursos en línea, aprendizaje autogestivo

Resumen
La investigación que se reporta, surgió de la necesidad de analizar los procesos de aprendizaje y de comunicación, en un curso en línea de ecuaciones diferenciales con materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo. La investigación consistió en el diseño e implementación de un curso en línea. Se hizo uso de los medios tecnológicos de información y comunicación, donde la comunicación entre los actores fue sincrónica y asincrónica. Los materiales didácticos y la interacción entre los actores se concentraron en un espacio virtual en la plataforma de webexone. Se hace un análisis de las discusiones en los foros virtuales, y se describen sus características didácticas y su relación en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Introducción

Las nuevas tecnologías han incursionado en la educación convencional, como una herramienta más para las actividades de los profesores de matemáticas, además, las Instituciones de Educación Superior se han apoyado de las bondades que ofrece la red Internet para la capacitación de sus docentes y estudiantes.

El Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica (SNEST), órgano rector de los 84 institutos tecnológicos federales establecidos a lo largo del territorio mexicano, preocupado por la calidad educativa, y con la intención de enfrentar los cambios de la sociedad y principalmente de la educación, estableció en el año 2003 un Modelo Educativo para el Tercer Mileno que consistió básicamente en renovar la estructura organizacional y académica de los Institutos Tecnológicos. Entre las metas del Modelo Educativo destacan[*] (Zapatero, 2004): a) el atender el 5% (13,500 alumnos) de la matricula total de los Institutos Tecnológicos federales en programas no presenciales; b) disminuir en 10% el índice de deserción en las materias correspondientes a las ciencias básicas; c) en todas las instituciones del sistema, contar con un programa de apoyo o alternativo para los estudiantes que presenten deficiencias académicas; d) diseñar y actualizar los programas de estudio de educación continua y de educación no presencial.

El Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán perteneciente al SNEST, ha implementado estrategias para reducir el índice de deserción y de reprobación en las asignaturas de matemáticas, entre las que se encuentran: un curso de inducción para estudiantes de nuevo ingreso y la asesoría personalizada. Empero, los resultados no han sido satisfactorios y, además, el número de docentes es escaso comparado con las solicitudes de los estudiantes para las asesorías. Por ende, surgió el interés e inquietud por instrumentar una estrategia alternativa e innovadora, con el apoyo de las bondades que ofrece las nuevas tecnologías y que permitan principalmente, incidir en los procesos de aprendizaje de los alumnos, y por consiguiente, propiciar el aprendizaje autogestivo de las ecuaciones diferenciales.

La investigación se enfocó a diseñar y desarrollar un curso en línea de ecuaciones diferenciales con materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo, y, evaluar el efecto en la base de las bondades que ofrece la red Internet, al aprendizaje de los alumnos, el desarrollo de sus habilidades

[*] El Modelo Educativo para el Tercer Milenio del SNEST contiene 74 metas. Para el presente documento, sólo se exponen las más relevantes en relación al contexto de la investigación.

en la resolución de los problemas y en consecuencia, el rendimiento académico. La comunicación sincrónica y asincrónica entre los estudiantes y el profesor se realizó en el medio virtual que ofrece la compañía webexone. Para verificar el efecto del curso, se realizó un análisis de regresión lineal múltiple, al observar las relaciones de las variables predictoras, la participación en los foros y actividades de estudio, sobre el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Las actividades de estudio, fue el elemento esencial para el diseño y elaboración de los materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo. El análisis del modelo estadístico se realizó en el programa Statgraphics. El aprendizaje de los alumnos se evaluó mediante exámenes acorde a los objetivos del curso. En cambio, para evaluar las actividades de aprendizaje de los alumnos, se establecieron criterios que consistieron en la argumentación de cada paso de la solución del problema, el procedimiento y resultado final correctos, la elaboración e interpretación de gráficas, y la comprobación de resultados.
La ponderación de las interacciones en los foros de discusión, se clasificaron a partir de la estructura definida por Henri (1995), que consiste en discriminar las interacciones en comunicación Implícita y Explícita. La primera se refiere a los mensajes registrados dentro del tema de discusión, pero sin conexión a los mensajes de otras personas. Y la segunda, interacción explícita, aquellos mensajes en que su contenido se dirige a los mensajes de otras personas en el tema de discusión. Además, en la interacción explícita, se consideró en los mensajes las categorías de organización, eficiencia, pertinencia y aportación. En la investigación fue importante evaluar la calidad de las participaciones de los foros, aún cuando la división de las participaciones fue en “clases”, como variable cualitativa, pero el tratamiento de dichas variables es estadístico cuantitativo (Córica & Holloway, 2003).
Por la encuesta se valoró la satisfacción de los alumnos con respecto al material didáctico, el software Maple y las actividades de equipo, que cuantificaron con una escala de Likert (González, 2005).

Metodología

La enseñanza de las Matemáticas en los cursos en línea. La didáctica de las matemáticas se ha trasladado a otros contextos, por la facilidad de integrar los documentos de hipertexto en los medios tecnológicos para la navegación en la red Internet. En Vanderlbilt University desarrollaron una pedagogía matemática basado en el uso de juegos interactivos y lúdicos en línea con problemas matemáticos. La herramienta central fue el *Mathematica*, un programa de álgebra simbólica, en que la finalidad fue el organizar las clases y materiales para sus cursos presenciales desde cualquier lugar que permitiera el acceso (Crooke, Froeb & Tschantz, 2000). En cambio, la Open University, estudiaron la carga de trabajo y el tiempo de las actividades que conlleva a los estudiantes en los cursos de matemáticas en el nivel superior, e investigaron la correlación que existe entre el aprendizaje de los contenidos y el tiempo de estudio para completar las actividades del material didáctico (Zand, 2000).
Por otro lado, en los cursos a distancia y en línea por las características que la modalidad implica, la comunicación mediada por computadora es preponderante para el aprendizaje y el trabajo colaborativo. La comunicación es uno de los problemas que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debido a la semántica y semiótica del lenguaje algebraico (Cantoral, 2000, 2001; Hitt, 1998). Chomienne y Malaison (2000) destacan que el aprendizaje de las matemáticas en un curso en línea, la comunicación mediada por computadora y el trabajo colaborativo son elementos fundamentales para enriquecer el conocimiento. Para el diseño del curso en línea de ecuaciones diferenciales, se consideró un programa de álgebra simbólica que

permitiera en el estudiante trabajar con las actividades de aprendizaje, tanto, en el trabajo individual y colaborativo. Además, de diseñar las actividades para que el estudiante las trabajara en un tiempo óptimo y que principalmente se reflejara en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, mediante en la comunicación sincrónica y asincrónica.

Aprendizaje Autogestivo. El proceso de aprendizaje es diferente para cada estudiante, y en consecuencia se presentan estilos de aprendizaje diferentes. Con respecto al estilo de aprendizaje se han creado teorías sobre cómo las personas aprenden mejor (Woolfolk, 1999, pp. 27-50). El sustento teórico del proyecto fue el aprendizaje autogestivo. Si bien, en la literatura no se presenta una definición concreta de esta forma de aprender, existe un marco teórico fundamentado en las teorías constructivistas del aprendizaje (Abdullah, 2001; Grow, 1993; Kennedy, Petrovic, Lawrence, Dodds, & Harris, 2000).

Los materiales didácticos se diseñaron de tal manera que fueran orientados al aprendizaje autogestivo. Para tal fin se trataron de: a) reducir progresivamente la dependencia del docente; b) apoyar al estudiante para que fortalezca el autoestima con el fin de que sea capaz de trabajar en grupo; c) promover la autoevaluación con un enfoque autoreflexivo, autorregulador y autocorrector; d) guiar al estudiante en la definición de sus necesidades de aprendizaje (contenido y contexto); e) ayudar al estudiante para que asuma la responsabilidad en definir sus objetivos de aprendizaje y evaluación de su progreso; f) procurar la transferencia del conocimiento (relacionarlo con problemas de la vida real); g) facilitar la identificación y planteamiento de problemas; y h) fomentar la toma de decisiones para seleccionar alternativas de solución a problemas planteados. Fischer y Scharff (2000) mencionan que con el *aprendizaje autogestivo* el estudiante logra desarrollar las competencias que le permite desempeñarse con éxito en su proyecto de vida. Así pues, en la investigación, se consideró el proceso que implica esta forma de aprender para diseñar un curso en línea de Ecuaciones Diferenciales, mediante el apoyo de las nuevas tecnologías de información y comunicación, y que fue la base para crear un ambiente que propició el aprendizaje autogestivo.

Modelos de los cursos en línea. Mason (2001) distingue tres tipos de modelos usados comúnmente en la red Internet: a) tutorial; b) envolvente; y c) integrador. El primer modelo es el más utilizado en los cursos en línea, básicamente están compuestos de material didáctico impreso en la estructura de una página Web y de un tutorial de apoyo. Los cursos en línea del modelo envolvente, consisten de una guía de estudio, actividades y discusión alrededor de materiales existentes, por ejemplo, libros de texto, fuentes de cd-rom, y tutoriales. El modelo integrador se fundamenta en actividades de una comunidad de aprendizaje. La esencia es a través de la discusión síncrona y asíncrona, el acceso y proceso de la información. Los contenidos del curso son fluidos y dinámicos, debido a que están determinados por las actividades individuales y de grupo, y depende de la creatividad y el aprendizaje de la comunidad participante (Fischer & Scharff, 2000; Wayand & Dee, 2001; Zañartu, 2002). Para el curso de ecuaciones diferenciales que se utilizó el modelo integrador, tiene por dirección http://mateitcg.webexone.com.

Diseño del curso en línea. La columna vertebral del curso en línea de Ecuaciones Diferenciales, fue la guía de estudio constituida por nueve secciones con la finalidad de facilitar el aprendizaje de los contenidos (Ulloa, 2003, pp. 49-59). Se plantearon actividades de estudio, diseñadas de manera que contemplaran las cinco dimensiones de aprendizaje (Marzano, 1997). Estas actividades fueron una importante connotación en el diseño de la guía de estudio, ya que el alumno tuvo idea de cuánto tiempo pudiese dedicar a cada actividad, así como, la forma y el medio en el que se presentaron los productos. Las actividades de aprendizaje de la guía de estudio, tuvieron soporte en los materiales: notas de apoyo y apuntes de ecuaciones diferenciales con Maple 8™.

Los materiales didácticos fueron diseñados con una secuencia lógica apropiada con el cuidado de presentar, en un principio los elementos más simples y generales y posteriormente introducir la información más detallada y compleja (Añorve & Nesterova, 2003). En cada uno de ellos se delimitó la intencionalidad. Los documentos expuestos en el aula virtual, se presentaron en tres formatos electrónicos, Word OFFice, PDF y el formato web (HTML), con el propósito fue ofrecer diversas posibilidades de trabajo.

Reporte

Comunicación asíncrona y síncrona. Se analizaron 103 mensajes registrados en el foro entre los estudiantes y el instructor. La tabla 1, muestra los mensajes registrados según la categoría de Henri (1995):

Tabla 1
Mensajes registrados por categoría

Categoría	Número de Mensajes	Porcentaje
Interacción Implícita	32	31 %
Interacción Explícita	35	33 %
Independiente	36	36 %

Los mensajes que predominaron se encuentran en enunciados independientes, es decir, aquellos mensajes que no están relacionados con el tema de discusión. Los mensajes dirigidos a otra persona dentro del tema de discusión corresponden al 33% (interacción explícita). Los mensajes dentro del tema a discutir, pero que no están dirigidos a otras personas corresponden al 31% (interacción implícita). Si bien los mensajes independientes son altos, el coeficiente de interactividad[†] del foro es significativo 0.64, lo que nos dice que moderadamente, se generó discusión de las actividades contempladas en la guía de estudios.

Con respecto a la conversación en línea mediante MSN Messenger fue mayor en este tipo de comunicación. Se registraron 176 llamadas, donde el 75 % fueron preguntas o comentarios en relación a las actividades de estudios, y el uso del Maple 8. El 15 % de las llamadas encaminadas a los comentarios de las discusiones del foro y el resto (10%), sin relación alguna con el curso. La participación en los foros fue baja, al ser la conversación en línea de las más solicitadas.

Análisis del modelo de regresión lineal múltiple. Después de verificar los supuestos de linealidad, independencia, homocedasticidad, normalidad y no colinealidad, para garantizar la validez del modelo de regresión. El modelo lineal que arrojó el programa Statgraphics fue *Examen = -0.592449 + 0.833527*Actividades + 0.668551*Foros.*

El modelo describe la relación entre los puntajes que obtuvieron los estudiantes en las actividades de estudio, las participaciones en los foros de discusión, y la evaluación de los contenidos del curso mediante los exámenes. Para el análisis, se consideró la calidad de las participaciones en los foros. En el menú *Regresión model selection* del Statgraphics se realizó el mejor ajuste de las variables predictoras (actividades y foros) tomadas de una y dos. De la columna del estadístico error cuadrado medio se seleccionó el menor valor, que se relaciona con la mejor combinación de variables predictoras.

Tabla 2
Resultados del Modelo

Error cuadrado medio	R^2	R^2 *(ajustada)*	Cp	Variables incluidas
0.00348189	73.1556	70.3298	3.0	Actividades y Foros

El modelo explica 73.1556 % de la variabilidad de evaluación de contenidos del curso, la diferencia (26.8444 %) se debe a otros factores que no están considerados, por ejemplo, la conversación en línea, ya que esta fue el tipo de comunicación de mayor frecuencia, lo que refleja que los alumnos

[†] El coeficiente de interactividad es la suma de los mensajes de interacción implícita e interacción explícita entre el número total de mensajes.

prefieren comunicarse directamente con el instructor, saber que ellos están de alguna manera presentes con él, por lo que es parte de la seguridad y motivación en el estudiante.
Análisis de la encuesta. La estructura de la encuesta fue en tres secciones, con objeto de conocer la opinión de los estudiantes con respecto al material didáctico, las actividades y el *software* Maple. En cada uno de los ítems de la encuesta se le asignó un valor en la escala de Likert. El promedio con respecto al material fue de 4.3, superior al asignado a la opción Buena de la encuesta. De la misma forma, para las actividades y Maple consideran los estudiantes que fue Buena con un promedio de cuatro.
Desarrollo del curso. El profesor en su papel de observador en la fase experimental, se orientó a registrar el desempeño de los estudiantes, como lo fueron: la entrega de los trabajos, la participación en los foros y la asesoría en línea (conversación síncrona). En el aula virtual la participación de los 22 estudiantes en la entrega de las actividades fue activa. El software Maple 8, fue un elemento esencial para que los estudiantes trabajasen las actividades, este programa, permitió que los estudiantes se preocuparan por reconocer y recordar conceptos para resolver problemas y adquirir habilidad en el manejo de la información en su contexto, reflejándose principalmente en la interpretación de los resultados.

Conclusiones

La comunicación en ningún momento se interrumpió, al ser la conversación en línea el medio que prevaleció en el curso y fue reflejado en el trabajo de los alumnos en las actividades de estudio. Los parámetros que correlacionan las respuestas de la encuesta de opinión con la actividad propia del estudiante en relación al curso en línea se centraron en el cumplimiento de las actividades y objetivo planteados. Las respuestas a la encuesta, una vez censado por el estudiante sobre la satisfacción del uso de los materiales didácticos y sus contenidos, reflejan que es favorable y constituyen un elemento activo en el proceso de aprendizaje en línea. El promedio de las respuestas al cuestionario con respecto a los materiales didácticos es superior a la media (4.2774), por lo que al cumplir este parámetro se concluye que los materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo como parte de los elementos del curso en línea son aceptables.
El uso de los foros de discusión en conjunto con los materiales didácticos, influyen positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, lo anterior es el resultado de los puntajes obtenidos en las actividades de estudio, en la evaluación del aprendizaje de los estudiantes y la participación en los foros, que según con la propuesta están interrelacionados todos los elementos, confirmándose en el estudio de regresión lineal. En este trabajo, se destaca la satisfacción de los estudiantes por el uso de los medios y materiales, principalmente la comunicación síncrona, por la razón de que el profesor esté en línea con los estudiantes, los motiva a trabajar en las actividades, al excluir la frustración de soledad a lo largo del curso.

Referencias bibliográficas

Abdullah, M. (2001). Self-directed learning (Informe No. D169.). Bloomington, In, EEUU: Indiana University,U S Department of Education. (No. de servicio de reproducción de documentos ERIC EDO-CS-01-10)

Añorve, S. E., Nesterova, D. E. (2003). Un curso de ecuaciones diferenciales autogestivo en línea. Teleduc´03. La Habana, Cuba, 3, 189-205.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Córica, J. L., Holloway, M. (2003). Un estudio cuantitativo de las discusiones en los foros. *Revista de Educación a Distancia*. 10, 31-56.

Chomienne, M. & Malaison, S. (2000). L'implantation d'un cours de mathématiques sur internet au CCFD: un travail collaboratif [La implementación de un curso de matemáticas vía Internet en CCFD: Un trabajo colaborativo]. *Journal collegial des technologies de l'information et des communications*, 11(2). Recuperado el 25 de junio de 2003 de http://clic.ntic.org/clic11/math.htm

Crooke, P., Froeb, L. y Tschantz, S. (2000). Pedagogy using mathematica through the web. *Asynchonous Learning Network Magazine*, 2(2). Obtenido el 2 de enero del 2001, de http://www.aln.org/publications/magazine/v2n2/froeb.asp

Fischer, G. & Scharff, E. (2000). Learning Technologies in Support of Self-Directed Learning [Versión electrónica]. *Journal of Interactive Media in Education*, 98 (4), 117-123. Obtenido el 21 de enero del 2002 de http://ww-jime.open.ac.uk/98/4

González, V. (2005). Método de Escalamiento Unidimensional de Likert. Obtenido en junio 14, 2005, del sitio Web de la Universitat de Valencia: http://www.uv.es/~hbaesa/PS_TEMA_Likert.pdf

Grow, M. (1993). *Pedagogía Institucional. La escuela hacia la autogestión*. Buenos Aires: Humanitas:

Henri, F. (1995). Formación a distancia y teleconferencia asistida por ordenador: interactividad, cuasi-interactividad o monólogo. *Revista de Educación a Distancia*. 12, 61-77.

Hitt, F. (1998). Researching a problem of convergence with Mathematica: History and visualization of a mathematical idea, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., 28 (2) ,697-706.

Kennedy, G., Petrovic, T., Lawrence, J., Dodds, A., & Harris, P. (2000). The personal learning planner: A software tool for self directed learning. En R. Diensber (Ed.), *2000 Annual ASCILITE Conference*: Vol. 5. Obtenido el 23 de abril de 2003 de
http://www.ascilite.org.au/conferences/coffs00/

Marzano, R. (1997). *Las dimensiones del aprendizaje* (Gómez, L. F. Trad.). Guadalajara, México: ITESO. (Trabajo original publicado en 1992).

Mason, R. (2001). Models of Online Courses. *Ed at a Distance Journal*, 15(7). Obtenido el 10 de mayo del 2001, de http://www.usdla.org/html/journal/JUL01_Issue/article02.html

Ulloa, R. (2003). *Fundamentación y construcción de guías de estudio*. Guadalajara, México: UDG.

Wayand, L. & Dee, J. (2001). *A Framework for Understanding Distance Interaction/Distance Comunication*. En Mitchell (Ed), Syllabus Technology for Higher Education Confernce. Obtenido el 25 de febrero de 2001, de http://www.syllabus.com

Woolfolk, A. (1999). *Psicología Educativa*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Zand, H. (2000). Using learning activities in mathematics: workload and study time. *Studies in higher education*, 25(1), 97-111.

Zañartu, L.M. (2000). *Aprendizaje colaborativo: Una nueva forma de diálogo interpersonal y en red*. Barcelona, España: UAB.

Zapatero, A. (Ed). (2004). *Modelo Educativo para el Tercer Milenio.* Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos. México: SEP.

EL LABORATORIO DE COMPUTACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. UNA FORMA CONSTRUCTIVA PARA EL APRENDIZAJE

Rafael Jiménez M, Rosa Vázquez C, Milagros Gutiérrez Á.
Departamento de Matemática. Universidad de Camagüey. (Cuba)
rafael.jimenez@reduc.edu.cu, ravazquez@uci.cu, milagros.gutierrez@reduc.edu.cu
Campo de investigación: estudios socioculturales. Nivel educativo: superior

Resumen

El objetivo de este trabajo es el de fundamentar y orientar el diseño del Laboratorio de Computación para la Matemática en función de lograr su utilización coherente en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje (PEA), haciendo énfasis en la formación conceptual de la ciencia, fundamentada en la Teoría de Asimilación por Etapas de las Acciones Mentales y bajo un fundamento constructivista.

Se parte del sistema de principios al concebir la enseñanza con el uso de la computadora, y las acciones que se requieren en el proceso para su introduccion, lo que posibilita concebir el laboratorio como tipo de clase, y se inserta en la cadena temática según convenga, para sistematizar los conceptos y que se transite por las etapas de la asimilación, desde una perspectiva donde el individuo construye sus conocimientos.

Introducción

En la actualidad se ha producido un incremento significativo en la introducción de las técnicas de computación en la docencia y por otra parte, aún persisten dificultades en la asimilación de los conceptos básicos en las asignaturas de la Disciplina Matemática para Ciencias Técnicas. Se requiere aprovechar las posibilidades que aporta el desarrollo tecnológico, pero su introducción no constituye un proceso sencillo, pues un uso incorrecto puede producir resultados contraproducentes. Se trata por tanto o de dar respuesta al problema de investigación: "¿Como contribuir a elevar el nivel de asimilación de los conceptos matemáticos?", tomando como campo de acción en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje las actividades docentes asistidas con los asistentes matemáticos. Se muestra cómo puede encauzarse ese desarrollo tecnológico, en función de lograr mejores resultados en la formación conceptual en nuestras asignaturas, mediante la estructuración de los tipos de clases a utilizar, con una nueva concepción en la utilización del Laboratorio de Computación, con enfoque Constructivo dada la participación de los alumnos en su propio conocimiento y la Asimilación por Etapas de las Acciones Mentales.

Desarrollo

I. *Situación actual*

El surgimiento y desarrollo acelerado de las técnicas de computación ha provocado un aumento notable en el papel de la matemática discreta, como elemento fundamental para la modelación de problemas de la realidad, que posibilite la utilización de las técnicas de cómputo para su solución. Pero, a pesar de este hecho, en primer lugar, aún el peso fundamental en la enseñanza de la Matemática en la Universidad, descansa en la matemática del continuo, y, en segundo lugar, persiste la utilización de gran cantidad de tiempo en el desarrollo de habilidades de cálculo de procesos rutinarios. En este sentido, Guzmán [1] señala: "*Parece que no se deberían enseñar tal vez cosas muy diferentes, sino que simplemente se podría prescindir de muchísimo esfuerzo rutinario dedicado a tener bien presentes y activas ciertas técnicas que el ordenador va a poder hacer mucho mejor, más rápido y más seguro*".

Por otra parte, en la enseñanza tradicional se presentan dificultades en la formación de los conceptos básicos: función, límite, etc., en los que se imponen tratamientos formales, sin que el estudiante llegue a su verdadera materializacion y lo que es mas importante su aplicación e insercion en la vida como entes reales necesarios y no como simples herramientas producto del intelecto.
Existe la tendencia a introducir los conceptos en su forma acabada, abstracta, lo cual ocasiona grandes dificultades en su asimilación, ya que en lo fundamental el individuo participa, para su asimilacion, de forma externa y no como parte de sus construcciones y necesidades. Al respecto se ha investigado la opinión de algunos docentes, tanto en Cuba, como en el ámbito latinoamericano que de una forma u otra reafirman estas concepciones.
Collel (1994) plantea, haciendo referencia al concepto de límite… "*base de cualquier concepto del Cálculo Diferencial e Integral, (…) se le presenta en un contexto puramente lógico, y, por lo tanto, abstracto.(...) constituye para las personas que lo reciben, algo así como un "jeroglífico" que deben descifrar, sin comprender su verdadero significado*".
Por su parte, Wenzelburger (1993) expresa: *"...el tratamiento tradicional (…) no contribuye nada a la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo. Las ideas básicas del Cálculo Diferencial e Integral permanecen escondidas bajo una capa de "deltas-épsilon". De esta manera se niega al estudiante la posibilidad de una comprensión auténtica, y con ello la aplicación creativa(...). El Análisis Matemático desarrollado en forma abstracta y con perfección matemática, no alcanza a tener un verdadero significado para la mayoría de los alumnos, sobre todo para los que más adelante van a ser usuarios de las matemáticas (…).*
Blanco (1998. p. 33) hace énfasis sobre*:"...la necesidad de que el alumno interiorice lo mejor posible este concepto, lo cual no quiere decir que el alumno pueda repetir rigurosamente la definición o que haya memorizado un buen número de propiedades de los límites: pues estas memorizaciones están muy lejos de ser acciones mentales (...).*
Esta situación relativa al concepto de límite, se hace extensiva a los conceptos básicos del Cálculo Diferencial. De esta manera, se convierte en práctica cotidiana la siguiente afirmación de Elfriede Wenzelburger: *"Pero tal tipo de introducción es la causa de la falta de comprensión de las ideas fundamentales del cálculo por arte del alumno, ya que se pierde en la precisión matemática, las demostraciones rigurosas y en un lenguaje formal impecable. De esta manera tenemos muchos alumnos de Cálculo que saben manejar métodos, definiciones y reglas en forma rutinaria, sin comprender el sentido de esas operaciones, reproduciendo los pasos, por ejemplo, de los métodos de diferenciación e integración, más de memoria que en forma significativa".* (Wenzelburger, 1993)
Al respecto, R. Skemp (1980) sugiere tener en cuenta en la enseñanza de la Matemática dos principios:
1. Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos.
2. Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende.
A lo cual añade que: *"La gran mayoría de los libros de texto, pasados y presentes quebrantan el primero de estos principios. En casi todos se ven nuevos temas, introducidos no a base de ejemplos, sino por conceptos a los cuales se refieren), pero ininteligibles para el estudiante".* (Skemp, 1980)

II. Propuesta didáctica

Para la comprensión adecuada de los conceptos, deben tenerse en cuenta las regularidades que se presentan en el proceso de asimilación. De acuerdo con Davidov (1988), en el pensamiento teórico se produce una reelaboración de los datos de la contemplación viva y se representan mediante conceptos, lo cual permite develar su esencia, es decir permite reproducir sus nexos internos, lo que no puede lograrse en la contemplación.

Este aspecto ha sido tratado por varios investigadores en nuestro colectivo. Al respecto, Blanco precisa: *"...el proceso de asimilación se desarrolla a través de las acciones externas materializadas, a las internas y mentales, esto es de lo abstracto a lo concreto, de lo particular a lo general, y de aquí a lo particular de nuevo. (no podemos decir que se ha asimilado una teoría si no se puede resolver ningún problema particular de la misma)"*. (Blanco, 1998, p. 43)

Por su parte, Portuondo (1999) plantea que la representación del concepto no es suficiente para su asimilación, debe además, pasar a lo racional, ya que la representación es un proceso sensorial, de aquí que si no se enjuicia el contenido del proceso, sus acciones necesarias y suficientes (esenciales), el alumno, por lo tanto, no se apropia de éste. Es decir, que el alumno puede saber que de forma general la derivada de funciones de R^n en R^m, pero no ha interiorizado el concepto, si no puede deducir, a partir de esta definición (expresión general del concepto), la derivada ordinaria, las derivadas parciales, etc.

Se requiere entonces que la asimilación vaya de lo particular a lo general en la formación del concepto (la invariante) y regrese a lo particular, tanto en la deducción de los casos particulares del concepto (Derivada ordinaria, Derivada Parcial, etc.), como en la interpretación y posibles aplicaciones, a fin de lograr lo inductivo y lo deductivo en el proceso de asimilación.

Para lograr que se produzca la inducción y posteriormente la deducción, lo que, al mismo tiempo, le permite aplicar este método científico - teórico, por lo que también se incluyen actividades prácticas preparatorias a la introducción de los conceptos.

Para estas actividades se impone analizar las ventajas y desventajas que proporciona la introducción de las técnicas de cálculo, que en concordancia a los criterios de diversos autores Guzmán (1991), Legañoa (2001), etc. se sintetizan en: la computadora proporciona la respuesta con rapidez y seguridad por lo que se ahorrar una gran cantidad de trabajo. Posibilidad de ilustrar gráficamente. Permite desarrollar el pensamiento conjetural. Puede trabajarse en los procesos de pensamiento que han conducido a esas soluciones. En cuanto a los riesgos que se corren con una aplicación incorrecta: la enseñanza de conceptos abstractos en el momento incorrecto puede ser peligrosa; las respuestas se proporcionan demasiado pronto, es decir sin insistir en la necesidad de pensar primero; la existencia de programas de computación puede mejorar la calidad de nuestra enseñanza, pero también existe una fuerte posibilidad de mantenerse dentro de los esquemas de la enseñanza tradicional, por tanto, su efecto puede ser más aparente que real; es un riesgo importante que la incorporación de tales procesos de pensamiento en la mente del estudiante pueda ser entorpecida mediante un uso inadecuado del mismo.

Teniendo en cuenta estos elementos, se requiere profundizar en el estudio de esta temática.

Se parte de los *Principios al concebir la enseñanza con el uso de la computadora* tal y como fueron enunciados por Legañoa (2001):

Principio de la Integración. La computadora no puede sustituir al maestro, ni al libro de texto. No puede remplazar ninguno de los recursos que se posee para llevar a cabo el proceso, ella se integra a esos recursos, aportando posibilidades nuevas.

Principio de la Racionalidad. La computadora debe usarse en aquellas áreas que hacen uso de las potencialidades que ella ofrece en la activación del proceso de aprendizaje (simulación de procesos, cálculo, interacción con el alumno, etc.).

Principio del Diseño Programático del Contenido. Usar la computadora para ilustrar ejemplos del currículum actual no es suficiente. Hay que analizar el currículum asumiendo la disponibilidad de las computadoras y sus potencialidades, realizando el diseño programático del contenido teniendo en cuenta estos elementos.
Principios del Doble Papel del Maestro. En el proceso docente al maestro le corresponde el papel de guiar y mediatizar los saberes socioculturales que debe aprender a interiorizar el alumno. Esto significa que debe enseñar en un contexto de interactividad propiciando que los alumnos reconstruyan el conocimiento.
Principio de la Interactividad del Alumno. El alumno interioriza el conocimiento, primero en el plano interindividual y posteriormente en el plano intraindividual. Por ello el uso de la computadora debe concebirse de forma tal que permita la interacción entre los alumnos y entre estos y el profesor.
Principio de la Caja Transparente. La computadora debe dar la posibilidad de evaluar y de autoevaluar a los alumnos en cada etapa del proceso con el fin de que los alumnos detecten sus preconcepciones erróneas y puedan modificarlas.
A estos aspectos de tipo estratégico, debe unirse la comprensión de cuáles deben ser las *Funciones de la Computadora en la Enseñanza*:
1. Provocar la contradicción dialéctica entre la predicción de lo que el alumno piensa que va a suceder y la realidad, acercándolo a la verdadera formación del concepto y no solo al cálculo.
2. Propiciar el proceso de construcción de los nuevos conceptos a partir de las acciones que los alumnos realizan.
3. Propiciar el paso de lo particular a lo general y de aquí a lo particular nuevamente. Se consolida el proceso de asimilación.
4. Propiciar el descubrimiento de nuevas relaciones y la formulación de nuevas leyes desconocidas para él, por las potencialidades de cálculo de la computadora.
5. Propiciar el reforzamiento de los procesos de inducción-deducción, abstracción- concreción.
Es necesario, a partir de estos elementos, determinar las: *Acciones en el Proceso*.

- A partir del conocimiento de las principales dificultades del tema, determinar los conceptos que se quieren afianzar, visualizar y desarrollar.
- Determinar el momento más apropiado del tema para desarrollar las actividades con la computadora. Fundamental en este sentido es el laboratorio y las demostraciones de clases.
- Determinar el conocimiento previo que es necesario dominen los alumnos con la computadora.
- Selección de las tareas.
- Determinar las preguntas más apropiadas para motivar y dirigir la observación de los estudiantes y el proceso de razonamiento, antes, durante y después del laboratorio u otras actividades que se organicen.
- Determinar las preguntas de seguimiento que pueden ser usadas para evaluar el desarrollo de la comprensión del nuevo concepto.

III. Algunas Propuestas de Actividades Docentes

A manera de ejemplo de cómo utilizar el Laboratorio de Computación en actividades prácticas preparatorias para la introducción de los conceptos, se muestra el tratamiento del Concepto de Límite. Previo a la introducción de éste se incluyen actividades para el:

- Estudio de gráficas de funciones, analizando su tendencia al aproximarse a un punto.
- Desarrollo de habilidades en el trabajo algebraico con funciones y cálculo de incrementos.

- Cálculo de valores funcionales en puntos próximos a un punto dado.

Para el tema se sugieren actividades de laboratorio donde el estudiante experimente y haga conjeturas relativas a su comportamiento, dado conjuntos de valores o su representación grafica, de modo que se contribuya al desarrollo intuitivo.

De manera análoga, previo a la introducción del concepto de Derivada, se incluyen clases donde se trabaja en:

- Cálculo de incrementos de funciones, cocientes de incrementos (razones de cambio).
- Determinación de razones de cambio medias en problemas concretos (Velocidad media, pendiente de rectas secantes a una curva, etc.).
- Cálculo de límites de razones de cambio medias, casos particulares de indeterminaciones del tipo (0 / 0).

Otro aspecto a tener en cuenta es que el estudiante, en la enseñanza precedente, desde la primaria, ha afianzado la preconcepción de que los resultados, para que sean correctos, deben ser exactos, ha desarrollado habilidades en la solución exacta de ecuaciones, sistemas de ecuaciones, etc.

Aunque este estudiante posteriormente recibirá elementos de Matemática Numérica, en el momento de estudiar un concepto determinado, debe hacerse el estudio multifacéticamente, es decir, tanto analítica, como gráfica y numéricamente. Aunque más adelante, se estudiarán los métodos numéricos, para lo cual se requerirá la obtención de determinados algoritmos de cálculo, la obtención de estos se fundamenta en la comprensión de dichos conceptos, por lo cual no debe desaprovecharse este momento, pues más adelante habrá un mayor distanciamiento de los conceptos, teoremas, etc., que permiten desarrollar dichos algoritmos, lo que puede incidir negativamente en la comprensión adecuada de los mismos. Es por ello que se sugiere desarrollar también Laboratorios de Computación para aplicar los métodos numéricos a la solución de problemas vinculados a la especialidad. Por ejemplo, Laboratorios para:

- Solución aproximada de ecuaciones. (Métodos de Bisección y Newton)
- Aproximación de Funciones. (Ajuste de Curvas e Interpolación)

Estas clases deben ser precedidas de actividades en la que se oriente la utilización del asistente en el tipo de problemas a resolver, y para que el alumno verifique las condiciones en que pueden aplicarse los algoritmos, las condiciones de convergencia, y para que pueda "correr" manualmente estos algoritmos, lo cual permite que, al utilizar posteriormente el asistente, no lo asuma como una "Caja negra" en la resolución de los problemas.

Por último, es necesario reafirmar en que en esta Disciplina el estudio de los conceptos matemáticos no son un fin en si mismos, sino un medio para la modelación y resolución de problemas de la práctica profesional, por lo que no constituye un objetivo el que se conviertan en "calculadores" de límites, derivadas, etc., "resolvedores" de Sistemas de Ecuaciones, de Ecuaciones Diferencialeas, etc. Es por ello que debe darse a la Computadora el papel que le corresponde en este sentido, y mostrar a los estudiantes cómo utilizar los asistentes Matemáticos (DERIVE, MATLAB, etc.) como Medio de cálculo, y permitir la utilización de Tablas, Calculadoras o Computadoras en cualquier tipo de trabajo o evaluación, para que pueda utilizar la Matemática de forma creativa.

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado cómo puede perfeccionarse el trabajo en la formación de los conceptos en la Enseñanza de la Matemática, aprovechando las ventajas del desarrollo científico – tecnológico, y teniendo en cuenta los principios al concebir la enseñanza con el uso de la computadora, las Funciones de la Computadora en la Enseñanza y las Acciones a desarrollar en el Proceso. En particular se presenta una experiencia desarrollada en la Disciplina Matemáica, en la Carrera Ingeniería en Informática, en la que se describe la utilización de una nueva concepción en la utilización del Laboratorio de Computación.

Asimismo, se ha expuesto cómo utilizar los asistentes matemáticos en varias formas:

- Para la formación de conceptos.
- Para el desarrollo de la visualización.
- Para el estudio de aspectos, propiedades, etc. relativos a un concepto.
- Como herramienta de cálculo.
- En los Métodos Numéricos.

Referencias bibliográficas

De Guzmán, Miguel. (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. *Actas de las Jornadas sobre enseñanza experimental de la matemática en la Universidad.* Universidad Politécnica de Madrid.

Collel, A.E. (1994). Educación Matemática.Vol. 6. No. 2.

Wenzelburger G, E. (1993). Didáctica. Cálculo Diferencial. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blanco Sánchez, R. (1998). Subsistema didáctico de la Disciplina Mátemática para Ciencias Técnicas, fundamentado en las leyes de la Asimilación y la Teoría del Conocimiento. Tesis de Doctorado no publicada.

Skemp, R. (1980). Psicología del Aprendizaje. Madrid: Editorial Morata.

Davidov, V.V. (1988). La Enseñanza Escolar y el Desarrollo Psíquico. Editorial Progreso.

Portuondo P., R. (1999). Teoría de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales. Una metodología de la Enseñanza para el Tercer Milenio. Antología de la Zona Educativa del estado de Yaracuy, Yaracuy, Venezuela.

Alvarez de Zayas, C. (1999). La Escuela en la Vida". La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

de Guzmán, Miguel. (1993). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. Organización de Estados Américanos para la Educacion y la Cultura. Disponible en: http://www.oei.es/edumat.htm

Jiménez Martínez, R. (1999). Utilización de las Cadenas Temáticas en la Enseñanza del Cálculo Diferencial. Tesis de Maestría no publicada.

Legañoa Ferrá, M. (2001). Las nuevas tecnologías de la información y la comunicación: un desafío para la educación. Ponencia presentada ante el Centro de Estudios de Ciencias de la Educación “Enrique José Varona” Universidad de Camagüey. Cuba.

Pérez G., O. (1999). *La evaluación del aprendizaje en la enseñanza de la Matemática para Ciencias Técnicas*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Camagüey, Cuba.

Vazquez Cedeño, R. (1998) “La Resolución de problemas y tareas docentes de matemáticas para Ciencias Tecnicas”. Tesis de Doctorado no publicada.

VISUALIZANDO CONCEPTOS DE LA GEOMETRÍA MODERNA CON EL APOYO DEL SOFTWARE CABRÍ[‡]

María del Pilar Rosado Ocaña
Universidad Autónoma de Yucatán. (México)
rocana@tunku.uady.mx

Campo de investigación: visualización. Nivel educativo: superior
Palabras clave: visualización, geometría moderna, CABRI, puntos de Menelao

Resumen
Se presenta un trabajo realizado a través de un Proyecto de Servicio Social en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY). El objetivo de este trabajo consistió en elaborar un material de apoyo para el curso de Geometría Moderna, utilizando el software Cabrí, con el fin de mejorar la comprensión y visualización de conceptos de dicha asignatura por parte de los estudiantes, y de esta manera contribuir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en el nivel superior. Para ello se elaboró un cuestionario diagnóstico que se aplicó a un grupo de 17 alumnos que ya habían cursado dicha asignatura y se trabajó en los conceptos que causan mayor dificultad de comprensión. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que los índices de reprobación disminuyeron con relación a cursos anteriores y el aprovechamiento mejoró notablemente.

Problemática

"Geometría Moderna" es una asignatura obligatoria que se imparte en el segundo semestre de las licenciaturas en Enseñanza de las Matemáticas y Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de la UADY. A lo largo de los años, se ha observado que la mayoría de los alumnos no logran comprender muchos de los conceptos que se abordan en esta asignatura, por lo que se ven limitados a "memorizarlos" y a reproducir procedimientos en la resolución de problemas que involucran a tales conceptos. Es por ello que nos interesamos en abordar esta problemática utilizando la herramienta del software Cabrí, ya que en los últimos años se han difundido ampliamente las ventajas de utilizar dicho software en las clases de Geometría en los diferentes niveles educativos; así como el contribuir con el uso de las tecnologías en la educación.

Objetivo

El objetivo de este trabajo consistió en elaborar un material de apoyo para el curso de Geometría Moderna con el uso del software Cabrí; que pueda ser utilizado por los profesores que impartan dicha asignatura, en beneficio de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas. Y de esta manera, contribuir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos de la Geometría Moderna en el nivel superior.

Metodología

La metodología seguida en este trabajo consistió en realizar primeramente una revisión bibliográfica para identificar los trabajos realizados alrededor de la problemática en cuestión y que contribuyeran a respaldar este proyecto. Posteriormente, el proyecto se desarrolló considerando las siguientes etapas:

[‡] Proyecto de Servicio Social realizado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán con la colaboración de la Br. Mildred Rocio Maldonado López.

1. Se realizó un diagnóstico de los temas de la asignatura Geometría Moderna, que causan más problemas de comprensión en los estudiantes.
2. Se elaboraron materiales de apoyo con el software Cabrí, sobre los temas identificados como de mayor dificultad de comprensión por parte de los estudiantes.
3. Se aplicó en las sesiones de clase de dichos temas, el material elaborado para tener elementos que puedan indicar la efectividad del material o en su caso, realizar las modificaciones convenientes.
4. Se realizó un análisis de los porcentajes de reprobación y aprovechamiento, con relación a cursos anteriores.
5. Finalmente, se elaboró un escrito que documenta el trabajo realizado, con la intención de presentarlo a profesores que impartan dicha asignatura y proponerlo como material de apoyo del curso.

Marco de referencia

En Rodríguez (2000) se obtiene un panorama del problema existente en la Geometría del nivel medio superior, suponiendo que dichas dificultades se deben a que los estudiantes no tienen la madurez matemática para ubicarse en el enfoque formal, axiomático, que este curso requiere, en el cual se espera que los estudiantes se capaciten en hacer demostraciones formales en geometría y con esto, adquieran un pensamiento deductivo formal.

Cantoral, R. et. al., (2000), reporta la percepción que tienen los investigadores de la matemática educativa, al plantear la necesidad de construir nociones nuevas que den cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio, e introducen la *visualización y percepción espacial*. Con esto, conducen a explorar la clase de habilidades visuales que se necesitan para aprender Geometría e incrementan el interés por estudiar la Geometría en ambientes computacionales. Generalmente se entiende por *visualización* la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual.

Desde el contexto de la Geometría Moderna, hemos notado carencia en la visualización de conceptos por parte de los alumnos, debido a que el curso en su mayoría es enfocado de modo analítico, pidiéndoles que desarrollen demostraciones en las que se les dificulta imaginar las representaciones de muchos de los teoremas planteados. Por lo tanto, se tiene conciencia de lo difícil que resulta a los estudiantes adquirir un aprendizaje significativo, bajo estas condiciones. Para lograrlo, se debe enfocar en atender el problema de la visualización, para lo cual hemos notado que ésta no es exclusiva de la matemática; el uso de la tecnología contribuye en la construcción de significados matemáticos a través del estudio de gráficos; los métodos visuales son efectivos para producir y sustentar generalizaciones, y que deben identificarse formas adecuadas de visualización para determinadas tareas matemáticas, por mencionar algunas (Molina, R. et. al., 2003).

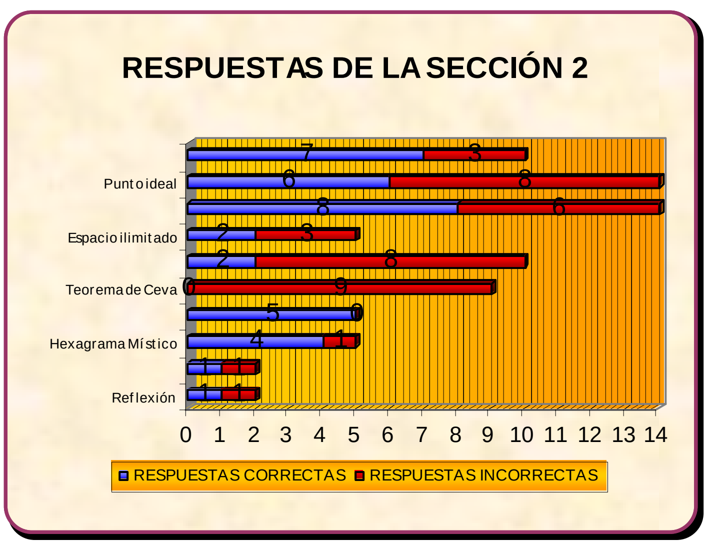
Se comparte la idea de que la disponibilidad de la tecnología no le resta importancia a comprender con claridad los conceptos que sustentan las imágenes que aparecen en la pantalla, si no que cuando se usan con propiedad, las calculadoras graficadoras y las computadoras, utilizando un software matemático suelen ser herramientas poderosas para descubrir y comprender esos conceptos (Monroy, G., et. al., 2005).

Los ambientes de geometría dinámica tales como Cabrí-Géomètre, que introducen el movimiento como metáfora de la variación de los objetos geométricos, provocan cambios profundos en los modos de representación habituales y los modos de pensamiento en Geometría. La máquina no hace simplemente las cosas de manera más rápida y precisa, esta deja ver los fenómenos nuevos. El

recurso de un ambiente de Geometría dinámica puede por lo tanto modificar la actividad geométrica y las prácticas de los alumnos y de los profesores de matemáticas (Laborde, C., 2005).
La docencia puede intentar llegar al siguiente objetivo: que los estudiantes aprendan a conectar los fenómenos visuales y sus hechos geométricos, para reconocer visualmente características geométricas, para interpretar dibujos en términos geométricos o para construirlos. Muchos aprendizajes permiten a los estudiantes usar dibujos o representaciones visuales de objetos geométricos como ayuda en sus razonamientos en el nivel de teoría y a través de su conocimiento, a controlar la información que toman para la representación visual. En este tipo de actividades, aprenden a reconocer los vínculos necesarios entre las propiedades visuales que se oponen a estas, las cuales son solamente circunstanciales. Éstas pueden estar basadas en la construcción de pruebas. (Laborde, C., 2001).

Desarrollo

Después de la revisión bibliográfica, se realizó un diagnóstico con el fin de obtener información acerca de los temas de la asignatura Geometría Moderna que causan mayor dificultad de comprensión en los estudiantes. Dicho diagnóstico fue realizado con 17 estudiantes de cuarto semestre de las licenciaturas en Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas. En la primera parte del diagnóstico, se pudo observar, que conforme va transcurriendo el curso, la materia va dificultándose, ya que los primeros temas fueron considerados como accesibles (ningún tema es considerado muy fácil), la mayoría de los temas fueron catalogados como regulares, pero fue aumentando la dificultad hasta llegar a calificar a los últimos temas como difíciles. En la segunda parte, se les indicó a los estudiantes describir cada uno de los conceptos que se consideraban de mayor dificultad de comprensión, obteniendo los resultados que se presentan en el siguiente gráfico.

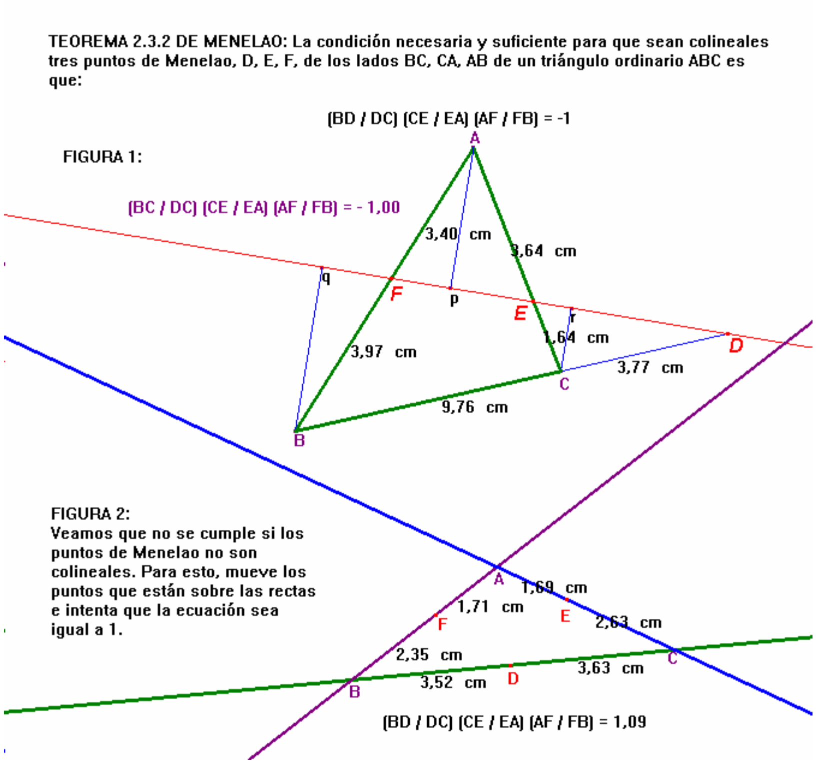


Se han colocando en el eje vertical los conceptos que fueron preguntados y en el eje horizontal la escala de puntuación que obtuvieron. La longitud de las barras representa el número de estudiantes que respondieron cada pregunta, así mismo en cada una de las barras el color azul indica el número de respuestas correctas y el color rojo indica el número de respuestas incorrectas. Recordando que fueron 17 los alumnos encuestados, se puede observar que no todos respondieron a todas las

preguntas, incluso algunos no respondieron ni una sola pregunta. Otro aspecto que podemos observar, es que aún cuando anteriormente habían calificado a la mayoría de los temas con grado de dificultad regular, realmente el porcentaje de alumnos que respondieron todas las preguntas es muy bajo y las que fueron respondidas tuvieron un alto índice de error, y tomando en cuenta que las preguntas fueron presentadas en el orden de aparición del programa de la materia, podemos notar que conforme avanzaban en las preguntas, los alumnos recordaron menos las respuestas, y a pesar de que las primeras preguntas fueron contestadas por la mayoría de los estudiantes, no fueron correctas todas las respuestas; lo cual nos confirma la falta de comprensión de dichos conceptos.
La tercera parte del diagnóstico estuvo relacionada con las opiniones y sugerencias de los alumnos con respecto al grado de dificultad de la asignatura, importancia, obstáculos para aprenderla y algunas sugerencias para mejorar el curso.
Se pudo reafirmar la sospecha que se tenía acerca de la dificultad de los temas y de comprensión de los conceptos, ya que los estudiantes opinaron que conforme avanzaba el curso, la dificultad aumentaba y reflejaron la dificultad de comprensión, al no recordar los conceptos, lo que hace notar que no hubo un aprendizaje significativo. Entre las sugerencias, los estudiantes mencionaron el uso de recursos didácticos como la computadora, para apoyo en la visualización de los teoremas.
Con base en estos resultados, se trabajó en la revisión del contenido temático del curso, identificando los conceptos, teoremas y corolarios que requirieran de la construcción de figuras para una mejor visualización. De esta manera, se construyeron aproximadamente 60 figuras pudiendo tener la representación de una gran parte de los conceptos, teoremas y corolarios, que conforman la unidad 2 del programa.

Visualización del teorema de Menelao

A continuación se describe la construcción de unas de las figuras realizadas en Cabrí; así como los movimientos que pueden realizarse en ellas.
Para visualizar el teorema de Menéalo se construyeron dos figuras: en la primera se muestran las condiciones del teorema y aunque se mueva algún punto, ya sea vértice o punto de Menelao, la construcción se adapta a las nuevas condiciones y nos permite visualizar triángulos que siempre ejemplifican el teorema; en la segunda figura, se pretende mostrar por medio de una herramienta en Cabrí (la calculadora) que es necesario y suficiente que los puntos de Menelao sean colineales para que se cumpla la relación entre los segmentos y por medio de la manipulación de los puntos se verifica el teorema. Para verificar el supuesto del teorema: $\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\right)\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right)\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right)=-1$, en la demostración se utilizan propiedades de los triángulos semejantes. Los cuales están determinados por las rectas perpendiculares a la recta de color rojo y que pasan por los vértices del triángulo. (Ver FIGURA 1).
<u>Construcción 1:</u> Se comienza con la construcción del triángulo BFD, se colocan rectas sobre los puntos B y F y se define el punto C sobre BD y el punto E sobre FD, se traza una recta que pase por los puntos C y E y se define al punto A por la intersección de las rectas BF y CE. De esta manera los puntos D, E y F son los puntos de Menelao colineales para el triángulo ABC. Se trazan rectas perpendiculares a la recta de color rojo desde los vértices de triángulo ABC, auxiliares en la demostración del teorema.



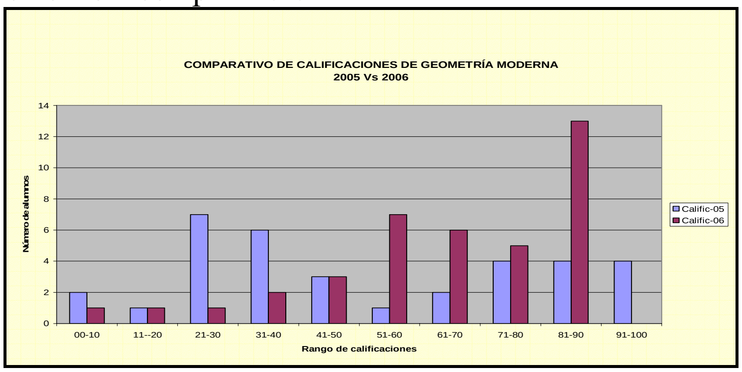
<u>Animación de la figura 1</u>: Por las propiedades de la figura que otorga el software Cabrí, nos permite mover los puntos B, C, D, E, F, y de esta manera poder visualizar una amplia gama de triángulos que cumplen con el teorema de Menelao ya que sin importar cómo se muevan los puntos, siempre se cumplirá la colinealidad y por tanto la relación. En esta figura, el único punto que no se puede manipular es A, ya que está definido como la intersección de dos rectas.

<u>Construcción 2:</u> Se comienza definiendo tres puntos cualesquiera, A, B, C y se trazan tres rectas que pasen por ellos, dos a dos y que por lo tanto formarán el triángulo ΔABC; se coloca un punto sobre cada una de las rectas, D, E y F (puntos de Menelao) respectivamente y se hallan las medidas de los segmentos, $\overline{BD}, \overline{DC}, \overline{CE}, \overline{EA}, \overline{AF}, \overline{FB}$, para poder sustituirlas en la relación que se menciona en el teorema, realizando la operación en la calculadora del programa, la cual nos arroja el resultado.

<u>Animación de la figura 2</u>: En esta figura se pueden mover los tres vértices del triángulo, pero el objetivo principal es manipular los puntos de Menelao, es decir, los puntos D, E y F, con la intención de corroborar los resultados del teorema. Al ir moviendo los puntos de Menelao, las medidas de los segmentos se van modificando y por tanto el resultado de la relación nos permite visualizar su cambio, mientras se mueven los puntos hasta que sean colineales y la relación sea igual a 1. Cabe aclarar que Cabrí siempre dará resultados con signo positivo, ya que manipula valores positivos por ser medidas de segmentos, es decir; no distingue segmentos dirigidos. Sin embargo, haciendo uso de las propiedades del software, podemos incluir el signo negativo en la escritura de la propiedad para el caso de las figuras construidas, de tal manera que se pueda observar lo que se quiere.

Resultados obtenidos

El material se desarrolló durante el semestre Febrero-Julio de 2006 y se aplicó durante el mismo semestre a un grupo de 39 estudiantes. Al término del curso, los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que en comparación con los resultados del curso anterior (34 estudiantes), el índice de reprobación disminuyó y el de aprovechamiento mejoró notablemente, como puede observarse en la siguiente tabla comparativa.



Se puede observar que en los rangos de calificaciones aprobatorias, el número de alumnos del curso 2006 supera al número de alumnos del curso 2005 y en los rangos de calificaciones reprobatorias ocurre lo contrario, excepto en los rangos 11-20 y 41-50 en que se mantiene equilibrado y en el rango 91-100 en el que no hubo alumnos del curso 2006. Por otra parte, en opinión de los estudiantes del curso 2006, el trabajar con las presentaciones de las figuras en Cabrí les ayudó a comprender mejor los conceptos y teoremas del curso, ya que la visualización de las mismas les permitió recordar los conceptos a la hora de las evaluaciones. Además, las clases fueron llamativas e interesantes, con la manipulación de las figuras, por lo que mantuvieron el interés en el curso. Cabe mencionar que en ocasiones, las líneas en las figuras eran muy tenues por los colores utilizados, por lo que se modificaron algunas figuras en cuanto a colores y grosor de líneas para que finalmente el material sea de mayor provecho.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., et. al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* ITESM, Universidad Virtual. México: Trillas.

Eves, H. (1997). E*studio de las Geometrías*. México: LIMUSA.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of Geometry tasks with Cabrí-Geometry. En I*nternational Journal of Computers for Mathematical Learning* 6: 283-317.

Laborde, C. (2005). Geometría Dinámica en la Enseñanza de las Matemáticas: ¿Qué cambia para los alumnos y para los profesores? *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* Montevideo, Uruguay.

Molina, R., et. al. (2003). El papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática. *Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional de investigación en Didáctica de las Matemáticas,* Guerrero, México.

Monroy, G., et. al. (2005). Visualización de las actividades realizadas en clase con Cabrí. *Resúmenes de la IX Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Chiapas, México.

Rodríguez, A. (2000). *La geometría y los niveles de aprendizaje*. En Desarrollo del Pensamiento Matemático, (pp. 151-155). ITESM, Universidad Virtual. México: Trillas.

LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA USANDO STATGRAPHICS

José Guadalupe Torres Morales, Rosario del Pilar Gibert Delgado
ESIME Unidad Culhuacan. Instituto Politécnico Nacional. (México)
jgtorresm@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad y estadística. Nivel educativo: superior
Palabras clave: herramientas de cómputo, internet, compresión estadística, toma de decisión

Resumen
Se presenta un proyecto del uso de programas de aplicación en matemáticas y con miras a que sea utilizado para la compresión de la Probabilidad y Estadística como una prioridad para las Escuelas desde los niveles Medio Superior y Superior para los ciclos escolares donde se imparten las enseñanzas de las Matemáticas. Al impulsar la implantación del uso de esas herramientas, el alumno pondrá en práctica los métodos y conocimientos adquiridos en el aula, visualizando los resultados e interpretando los mismos de una manera amigable. Pondrán en práctica sus conocimientos adquiridos en cursos de computación y el uso de paquetes como statgraphics, Excel, statistica, Minitab**,** MAPLE entre otros

Introducción

Se debe lograr que el estudiante interprete una gráfica y de ahí saque conclusiones correctas para la toma de decisiones. A diferencia de otras disciplinas en el área de las matemáticas, la Probabilidad y Estadística es una ciencia que exige cada día más que el estudiante posea la habilidad para adentrarse al uso de las computadoras, del Internet y las paqueterías especializadas en esta área, dado que favorecen su enseñanza de una forma única; sin embargo, no se debe olvidar que son los profesores quienes deben ayudar a los estudiantes a interpretar resultados. La idea básica es comprobar la efectividad en la enseñanza de los programas aplicados a esta disciplina, los cuales permiten la simulación de procesos y situaciones que en la vida real serían difíciles de resolver.
Los profesores deben lograr que en una gráfica el estudiante perciba de forma visual las cosas y que de ahí saque conclusiones correctas para la toma de decisiones. El uso del Internet asegura que es de mucha utilidad para esta disciplina, porque además de que existe mucha información concentrada en varios sitios en Internet, están disponibles distintos simuladores para ilustrar algunos conceptos y facilitar con ello el autoaprendizaje.
Existen en el mercado un sin número de paquetes estadístico y de probabilidad, el STATGRAPHICS, SPSS, STATISTICA, el Minitab, MAPLE, EXCEL entre otros y al que hacemos referencia es al STATGRAPHICS con la exposición de supuestos problemas. Es uno de los programas básicos y con un potencial de uso dentro de comunidades universitarias, ya que su plataforma es amigable, simple y responde a una lógica elemental para el estudio de las técnicas estadísticas y de probabilidad,
Hay que reconocer que la utilización de computadoras es la única novedad metodológica digna de mención que puede haberse producido desde hace 20 años. Apuntes de probabilidad o de inferencia que se usaban hace 40 años, se siguen usando hoy. Quizás casi todo el mundo empieza a compartir la idea de que hay que usar computadoras. Sin embargo, se está muy lejos de obtener una respuesta unánime sobre el modo de hacerlo.

La computadora en la enseñanza de la probabilidad y estadística

Esta sección presenta la evolución del uso de la computadora, algunas de sus aplicaciones típicas y los riesgos que ello implica.
El uso del software de probabilidad y estadística en la enseñanza y comprensión de estos tópicos en su inicio, hacían imposible presentar dichos software, debido a la masividad de alumnos en la

Universidad y el costo de las computadoras. Con poco el alumno adquiría destrezas de donde buscar los resultados con una calculadora portátil o realizarlos manualmente. Los profesores que aplican esta técnica creían que estaban logrando los resultados adecuados. Y sí lo alcanzan, ya que por medio de la calculadora portátil que contenía instrucciones directas, desde luego es más fácil que realizar los cálculos engorrosos. Pero fue un primer paso en un largo camino.
La simulación es un ejemplo de cómo utilizar el computador en la estadística aplicada. Existe software que simulan sistemas físicos, sociales o empresariales. Uno de los más sencillos y conocidos trata de simular la toma de decisiones en diversos escenarios y analizar sus resultados en un entorno competitivo.
En las áreas de análisis multivariado fueron las más beneficiadas por el uso de la computadora. Las técnicas a utilizar no se ven limitadas a pesar de que el número de variables sea considerable, ya que los problemas de cálculo se minimizan., al igual que los gráficos no resultan un impedimento. Sin embargo, no hay una enseñanza orientada a la resolución de problemas (porque no se ha planteado un problema) sino a la aplicación de técnicas estadística sin un claro objetivo.
Paradójicamente, el uso de la computadora ha generado nuevos problemas. Uno de ellos es que se corre el riesgo de desarrollar análisis que constituyen sólo un ejercicio de uso de software, sin dedicar el suficiente tiempo a analizar la coherencia y lógica detrás de los mismos.
Los Software estadísticos y de probabilidad en algunos casos, que facilitan una variedad de técnicas estadísticas descriptiva e inferencial, poco a poco, están cambiando la enseñanza de esta disciplina. Ya no es necesario concentrarse mucho en el manejo de fórmulas engorrosas. Esto puede conducir, a pretender el mismo objetivo que antes pero demorando menos o a usar la computadora para potenciar las posibilidades de la enseñanza de estadística.

Cambios sugeridos al incorporar la computadora

En esta sección se sugiere cambios que se consideran imprescindibles para una buena incorporación de la computadora en la enseñanza de la probabilidad y estadística. Ellos se refieren a la formación de los profesores, distribución de los tiempos, el uso de paquetes estadísticos versus calculadoras electrónicas y estudios de casos.
La incorporación de computadoras a la enseñanza de esta disciplina implica que los profesores tienen que saber como manejar dicha tecnología. Además, si el uso de la tecnología involucra la posibilidad de cambios curriculares implica mucho más que los simples conocimientos sobre como activar máquinas y usar software. Significa cambios en las actitudes, creencias y modos de actuar del profesor. Si creemos que debemos "enseñar como nos enseñaron nuestros profesores" es difícil imaginar que un profesor, que nunca ha aprendido probabilidad y estadística usando computadoras, va a poder enseñar o guiar el aprendizaje de sus alumnos, usando las mismas.
Tampoco hay que caer en el otro extremo, cualquier curso que utiliza computadoras no tiene porqué ser mejor que otro curso que no la utiliza. El rigor analítico no puede perderse porque se superen las dificultades de cálculo, de lo contrario caemos en usar una herramienta sin saber sus cómo y porqué.
El efecto de la computadora sobre la enseñanza de la estadística es metodológico y de contenido. En cuanto a contenido se necesitarán más tópicos de metodología de la investigación estadística y análisis exploratorio de datos para apoyar el área de la computación. Del punto de vista metodológico hay que tomar en cuenta paquetes interactivos y gráficos que permiten cambiar el enfoque didáctico y poner menos énfasis en manipulaciones mecánicas, y más en el desarrollo de conceptos que permiten descubrir y explorar con la ayuda de las computadoras.

Podemos pensar que un curso de Probabilidad y Estadística se divide en tres partes: teórico, resolución de ejercicios-práctico y aplicación utilizando a la computadora. Muchas veces las dos primeras áreas se interrelacionan pero el uso de la computadora no se inserta adecuadamente. La enseñanza del software se considera un fin en sí mismo. La relación de tiempos es aproximadamente: 6 de teórico - práctico y 0 de computación. La propuesta es que el uso de la computadora en la enseñanza de la probabilidad y estadística es modificar esta relación para aproximarla a una distribución que responda más adecuadamente al saber hacer (teórico-práctico 3 y computación 3).
Existen muchos software estadísticos y algunos con probabilidad como es el caso del STATGRAPHICS que sirve como apoyo del profesor para mostrar en forma precisa y rápida las gráficas e indicadores estadísticos y en el caso de probabilidad.
La enseñanza de la práctica de la probabilidad y estadística debería basarse en la resolución de estudios de casos. El software adecuado más que una simple calculadora, podría apoyar cursos basados en el estudio de casos, para presentar problemas prácticos que requieren:
la formulación de hipótesis, la recolección de datos, la comprobación de hipótesis y la comunicación de resultados e ideas.

Material y métodos

Bien en esta sesión se plantean las prácticas que se desarrollan durante el curso y de forma sencilla como se usa el programa STATGRAPHICS Plus. En principio se dan los nombres de las cincos prácticas que se realizan durante el curso y desde luego con el análisis de dichos resultados: procedimientos generales, descripción de una variable, descripción conjunta de dos variables, distribuciones de probabilidad, inferencia estadística.
Es importante establecer el uso de la plataforma o ventanas que se ejecutan una vez abierto el programa siendo los siguientes los de importancia:
La versión Windows del Statgraphics muestra una ventana (Statfolio) con una barra de opciones dentro de las cuales encontramos varios submenús agrupados en bloques temáticos:
La barra de menú siempre estará disponible al utilizar el programa, de forma que sea posible seleccionar el análisis deseado y tiene contenido lo siguiente:

-*File*: Permite la creación y manipulación de archivos, entre las opciones destaca: Open (Abre),
Close (Cierra) Statfolios, un archivo de datos o una Statgallery.
-*Edit*: Permite labores relacionadas con la edición de archivos.
-*Plot*: Permite acceder a los diferentes tipos de gráficos disponibles en el programa.
-*Describe*: Permite un análisis descriptivo de los datos.
-*Compare*: Permite acceder a tipos de análisis que generan y comparan estadísticos descriptivos.
-*Relate:* Permite acceder a análisis que modelizan la relación entre variables dependientes e independientes.
-*Special:* Módulos más especializados y relacionados con técnicas estadísticas avanzadas.
-*SnapStats!!:* Para generar en un único paso varias salidas asociadas a algunos análisis considerados como habituales.
-*View:* Visualización de opciones de trabajo.
-*Window:* Visualización de ventanas de trabajo.
-*Help:* Ayuda.

La barra de herramientas tiene como función asociar iconos (botones rápidos) con algunas de las opciones mas frecuentemente utilizadas de la barra de menú. Si se señala con el ratón cualquier botón de la barra, aparecerá una breve descripción de la función asociada.
La barra de tareas incluye iconos asociados que contendrán los datos que se analizan, comentarios personales sobre el análisis, resultados del análisis efectuado y comentarios e interpretaciones del programa de los resultados obtenidos. El conjunto de estos elementos forma el Statfolio siendo los siguientes:
Statadvisor: herramienta incorporada al programa, que interpreta de forma sencilla los resultados obtenidos.
Statgalery: permite almacenar los resultados (gráficos incluidos) del análisis realizado. El realizar cualquier análisis estadístico, el sistema genera una ventana de análisis, que estará dividida en paneles conteniendo las diferentes partes del análisis. Clickeando con el botón derecho del ratón sobre cada uno de estos paneles y seleccionando Copy to Galery podremos incluir el panel en el Statgalery al utilizar la opción de Copiar una vez posicionados con el ratón sobre el panel de destino. (La configuración de los paneles del Statgalery es seleccionable sin más que desplazar con el ratón las barras horizontales y verticales)
Untiled comments y Statreporter: opciones de Statgrafics que permiten introducir los comentarios de usuario para su posterior edición.
StatPublish: Nueva herramienta en la versión 5.0 que permite guardar el StatFolio en formato HTML para ser publicado en la Web. En la barra de tareas tendremos siempre cinco ventanas activas desde que comencemos la sesión. Tres se corresponden con el StatAdvisor, el StatGallery y el StatReporter y otras dos que en principio aparece con el nombre de <*Untitled*>, contendrá el fichero con los datos a analizar. La quinta *(Untitled Comments)* está ideada para contener comentarios personales del usuario, en la figura 1 se muestra la barra de menú, la barra de herramientas y la barra de tarea.

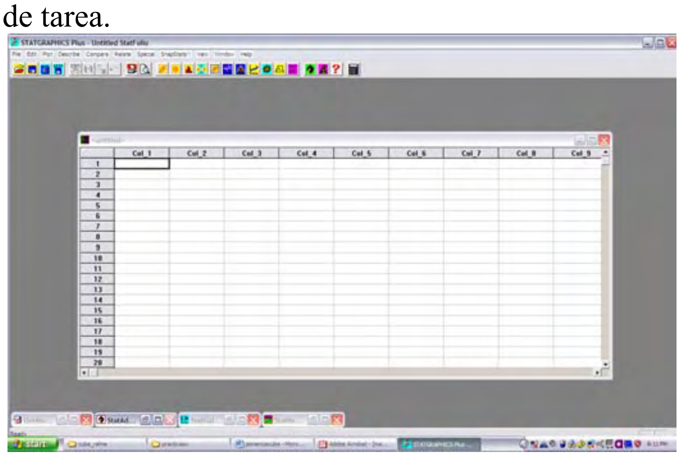
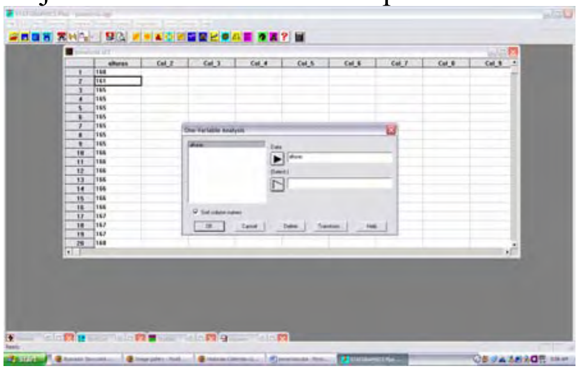


Figura 1.- Podemos ver la ventana principal de la aplicación.

Resultados

En estadística estudiamos cierto tipo de variables aleatorias las cuales pueden ser discretas o continuas y están agrupadas en un conjunto de datos que llamamos muestra. Los datos pueden ser Discretos, cuando dichas variables sólo pueden tener números Naturales o Continuas, cuando el conjunto de datos puede ser un subconjunto de los números reales.
El alumno se interesa a partir de iniciarlo con alguna aplicación de una sola variable y que puede ser para este caso la atención de 38 muestras de datos para el uso de este programa de estudio y con ello podrá introducirse desde algo simple hasta algo de mayor complicación, según sea el caso. Se

puede ejemplificar abriendo en la barra de menú *describe - numeric data – one_variable analysis* obteniendo en la ejecución la pantalla mostrada en la fig. 2.
Y si la ejecutamos con los datos capturados tendremos la pantalla mostrada en la fig. 3



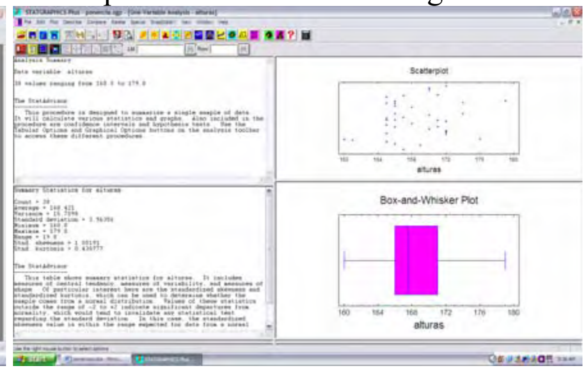


Figura 2.- Podemos ver la ventana principal y la ventana de análisis de datos. Figura 3.- Podemos ver la ventana de resultados.

En la cual se observa cuatro pantallas en la primera de lado superior izquierdo es el StatAdvisor explicando el número de muestra e intervalo de las mismas y de lado derecho un grafico de nubes expresando las muestras y en la parte inferior algunos datos son: Count = 38, Average = 168.421, Variance = 15.7098, Standard deviation = 3.96356, Minimum = 160.0, Maximum = 179.0, Range = 19.0, Stnd. skewness = 1.00191, Stnd. kurtosis = 0.438777 y del lado derecho la caja de dijotes, en esta misma pantalla con la ayuda de *la barra de tareas* podemos obtener algunos resultados mas, no se trata de dar un curso, mas bien interesar al profesor que imparte esta materia a nivel de ingeniería lo importante es interesar al alumno al análisis y lo importante de tomar decisiones.

Conclusiones

En esta sección se dan las conclusiones que se derivan de nuestro estudio, en relación a los contenidos teóricos del curso, la actividad del profesor y su relación con el alumno, y su efecto sobre los contenidos de las asignaturas.
Una consecuencia inmediata de la incorporación de la computadora en el curso de probabilidad y estadística es, en contra de lo que podría pensarse, el incremento que se produce en los contenidos teóricos. Eso tiene especial importancia dentro de lo que es la formación de la probabilidad y estadística, ya que, para muchas carreras, la probabilidad y la estadística será usada como una herramienta más de las que se cuenta en una oficina.
Se ha mencionado que la computadora puede conducirnos a cambiar nuestro punto de vista acerca de la probabilidad y estadística y desde luego la actividad del profesor. El aspecto experimental en estadística y la probabilidad es más prominente y los alumnos deben desarrollar habilidades como observar, explorar, formar nociones e intuiciones (generar hipótesis), predecir, probar hipótesis, conducir estas pruebas, controlar variables, simular, entre otras. Pero no hay que descuidar actividades de probabilidad y estadística tradicionales, como cálculo de probabilidades, teoría del muestreo, etc.
Las computadoras pueden cambiar la relación entre estudiantes y profesores, ya que éstas permiten al estudiante ser cognitivamente activo en estadística y probabilidad. La computadora puede ser un auxiliar didáctico del profesor como pizarrón electrónico, dentro del esquema tradicional cátedra-ejemplos-tarea-examen o bien el alumno interactúa con la computadora y se llega a una estructura proyecto-interacción entre alumno, máquina y profesor. Esto producirá una "revolución" en muchos salones de clase, ya que tendría que cambiar la metodología y las metas de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje.

Es importante notar que el uso razonable de computadoras requiere software con un buen estándar educativo, cuya integración al currículo debe coordinarse con programas de actualización de los profesores para lo cual se necesitan recursos financieros. Peligros de un uso indiscriminado de computadoras requieren más investigación ya que puede causar una uniformización del pensamiento estadístico de los alumnos y la falta de diálogo entre alumno y profesor.
Sin dejar de mencionar que el uso de la computadora en la enseñanza de la estadística está en juego, evidentemente, una cuestión de filosofía ¿Qué estadística tiene que saber un economista, un ingeniero, un sociólogo, un médico, etc.?
En realidad parece claro que ese futuro economista, ingeniero, sociólogo, médico debe conocer conceptos estadísticos, precisamente aquellos que le posibiliten abordar problemas de su trabajo. Es mucho más discutible que tenga que saber las destrezas de cálculo asociadas a esos conceptos. Entre otras cosas, porque esas destrezas ponen al descubierto su misma limitación.
Si las Universidades van a invertir dinero en hardware o software, es necesario intentar tener el mejor uso posible de dichos recursos. Algunas áreas de la estadística parecen ofrecer más posibilidades de un buen uso de las computadoras:

1. El estudiante debería adquirir la capacidad de juzgar si es razonable un resultado dado por una computadora.
2. La computadora podría ser útil para detectar errores de los alumnos y motivarlos para intensificar su actividad en estadística
3. El estudio de casos podría recibir más atención si una máquina está realizando cálculos engorrosos. También existen programas que permiten al alumno fijarse en estrategias específicas para el estudio de casos.
4. La representación gráfica se facilita con software que elabora gráficas rápidas y precisas, y permite el cambio de parámetros con facilidad.
5. Alumnos con dificultades para el cálculo matemático podrían adquirir destreza en la metodología de investigación estadística. En la metodología tradicional estas dificultades de cálculos prácticamente incapacitan al alumno, sin permitirle llevar a la etapa de interpretación de resultados y ubicación dentro de un contexto más amplio.

Debemos ser conscientes que la computadora por sí solo no mejora la enseñanza, tenemos que aprender a aprovecharla al máximo.

Referencias bibliográficas

Walpole, R. E., & Myers, R. H. (1997), *Probabilidad y Estadística*. México: McGraw Hill.

Spiegel, M. R. (1986), *Serie de Compendios Schaum: Teoría y Problemas de Probabilidad y Estadística*. México: McGraw Hill.

Pérez C. (2000) *Estadística Práctica con Statgraphics*. Prentice Hall.

Pérez López, C. (1998): *Métodos Estadísticos con Statgraphics para Windows.* Técnicas Básicas. Editorial RA-MA.

Ostle, B. (1979). *Estadística Aplicada*. Cuba: Científico – Técnica.

Montes de Oca, F. (2002), *Resolución Total de Probabilidad y Estadística*. México: Skorpio.

Sánchez O. (2004), *Probabilidad y Estadística*. México McGraw Hill.

Anderson T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons.

Durand A.I. y S. López Ipiña. (1994) *Introducción a la teoría de la probabilidad y la inferencia estadística*. Ed. Rueda.

Wartofsky, M.W. (1981) *Introducción a la Filosofía de la Ciencia*. Alianza

FUNCIONES CON DERIVE... A DISTANCIA: CATEGORIZACIÓN Y ANÁLISIS DE ERRORES MATEMÁTICOS

Mercedes Anido, Susana Marchisio, Patricia Có, Sandra Mansilla, Marisa Piraíno, Mónica del Sastre, Ana Sadagorsky, Graciela Paván, Erica Panella
Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Univ. Nacional de Rosario. (Argentina)
co@fceia.unr.edu.ar, delsas@fceia.unr.edu.ar, panella@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: formación de profesores, educación a distancia. Nivel educativo: superior
Palabras clave: categorización de errores, entorno educativo virtual, formación docente, DERIVE

Resumen
En el presente trabajo mostramos una categorización de los errores matemáticos que creemos más significativos, detectados en el curso de capacitación a distancia con instancias presenciales para docentes de EGB y Polimodal "La herramienta computacional DERIVE en el estudio de funciones y su aplicación en la resolución de problemas del Análisis Matemático".se desarrolló entre octubre de 2003 y abril de 2004. Su dictado integró el uso de software para la enseñanza de la Matemática y se desarrolló empleando el entorno educativo virtual de la Facultad. El diseño del dictado incluyó trabajo presencial en talleres y una planificación tutorial que permitió un seguimiento casi personalizado de los docentes – alumnos.
A partir de un análisis del mismo intentamos la formulación de una propuesta superadora de la situación diagnóstica

Introducción

En el marco de las actividades que tienen por objetivo mejorar la articulación entre la enseñanza media y la universidad, la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Universidad Nacional de Rosario, a través de la Escuela de Postgrado, implementó el curso a distancia para docentes de EGB y Polimodal "*La herramienta computacional DERIVE en el estudio de funciones y su aplicación en la resolución de problemas del Análisis Matemático*".
El mismo se desarrolló con el soporte tecnológico "c-virtual" de la Facultad. Su diseño incluyó la realización de instancias presenciales de trabajo en taller, el empleo de materiales estructurados en Módulos, accesibles en soportes papel, CD-ROM y archivo en plataforma, el uso de software DERIVE y una planificación tutorial que permitió un seguimiento casi personalizado.
Los destinatarios del curso fueron profesores en actividad que se desempeñan en el tercer ciclo de la EGB y el Polimodal en el área de Matemática, en su gran mayoría mujeres que cuentan con escasa disponibilidad de tiempo para la asistencia a cursos presenciales, debido a cuestiones laborales o familiares. Algunos de ellos residen en localidades alejadas de los habituales centros de formación, siendo la modalidad de educación a distancia una alternativa de cursado que favorece el acceso a la capacitación.
La duración del curso fue de seis meses y se diseñó con cinco instancias presenciales alternadas con períodos destinados a estudio autónomo, con apoyo tutorial permanente a cargo del equipo docente autor de los materiales a los que se sumó un equipo de profesores – tutores.
El plan de acción tutorial incluyó el uso del entorno virtual de tecnología "e-ducativa.com", con empleo del correo interno grupal e individual de la plataforma y espacios en foros, la posibilidad del chat para intercambios informales, el fax, el teléfono y, de resultar conveniente a los destinatarios, eventuales consultas cara a cara en la propia institución.
Los treinta profesores-alumnos del curso se integraron en grupos de dos, tres o cuatro integrantes. Cada grupo tenía asignado un tutor responsable del seguimiento del grupo como tal y de cada integrante en particular, de brindar el apoyo necesario, de corregir y devolver los trabajos.
Todos los tutores estaban coordinados a su vez por un equipo integrado por dos profesores, autores del curso, los que cumplieron roles de tutor general de contenidos y tutor - coordinador.

En el marco de la acción tutorial se propusieron nuevas actividades cuando la situación lo aconsejaba; se asesoró sobre bibliografía y la búsqueda de fuentes de información alternativas; se supervisaron y evaluaron los trabajos requeridos; se coordinaron encuentros con grupos de estudio.
La investigación que se presenta en este trabajo forma parte del conjunto de estrategias evaluativas para la mejora continua del curso en cuanto a diseño y desarrollo en sus distintas fases (Pérez Juste, 1992; Gento Palacios, 1994; Aguerrondo, 1993).

Problema de investigación y objetivos

Como parte de este conjunto de estrategias, en una primera etapa centramos nuestra investigación en el análisis de los errores y problemas detectados en base al procesamiento de las consultas y la ejercitación presentada por los docentes – alumnos a lo largo del curso.
En tal oportunidad encontramos que el mayor porcentaje de errores (37%) correspondía a la categoría de aquellos relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos, y no con cuestiones referidas al software o a la Plataforma como habíamos supuesto (Mansilla-Panella-Paván-Sadagorsky, 2005).
Nos proponemos ahora realizar el análisis de estos errores matemáticos para responder a la pregunta ¿qué tipo de errores conceptuales y procedimentales se detectan?

Encuadre Teórico de la Metodología

A lo largo de los estudios de investigación en educación matemática podemos encontrar gran variedad de métodos para el estudio de los errores en Matemática. Mulhern los agrupa en cuatro categorías:

- Conteo del número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas.
- Análisis de los tipos de errores cometidos.
- Análisis de patrones de error.
- Construcción de problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos

Para nuestro análisis elegimos encuadrarnos en la segunda de estas categorías, clasificando en distintos tipos los errores cometidos por los docentes-alumnos del curso y reflexionando sobre los factores que pueden haber conducido a los mismos.

La clasificación adoptada comprende seis categorías descriptivas y resulta de un proceso de análisis, puesta a prueba y adaptación de otras clasificaciones hechas por distintos autores como por ejemplo Movshovitz – Hadar, Invar y Zaslavsky, (1987).

A continuación exponemos dicha clasificación de errores, junto con un ejemplo textual extractado de los distintos registros de consultas, respuestas y correcciones relativas a las actividades que proponía el desarrollo del curso:

- *E1:* Errores debido a la realización incorrecta de una operación o un proceso de cálculo. Por ejemplo: *"Falta una solución de la ecuación* $e^{x} = x^{3}$. *Te sugiero que además grafiques* *ambas funciones y observes que hay dos puntos de intersección entre las curvas correspondientes."*

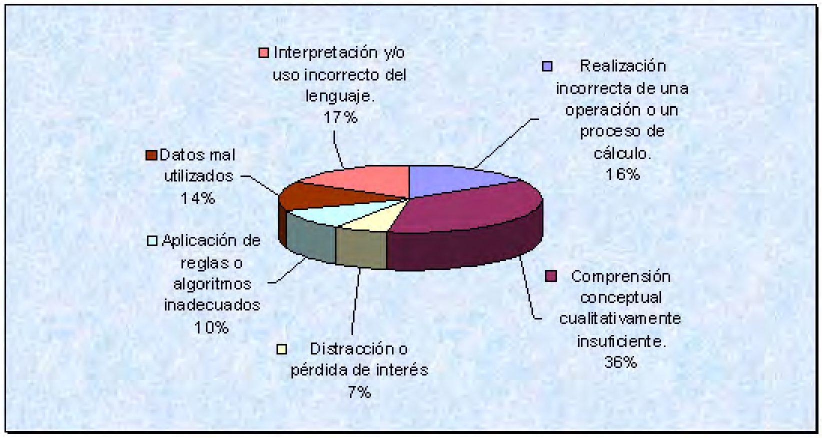
- *E2:* Errores por una comprensión conceptual cualitativamente insuficiente. Por ejemplo: *"Así como está definida g no es función, por lo tanto realizaste cálculos carentes de sentido sin efectuar previamente una restricción en el dominio ..."* o *"Decís que el dominio de la función son los reales menores o iguales que 1, por lo tanto no puede existir el límite cuando x → 1 y sí puede existir el límite por izquierda."*
- *E3:* Errores mecánicos por distracción o pérdida de interés. Por ejemplo: *" En las ecuaciones 7, 9 ...tenés errores de copia en los signos al ingresar las mismas."*
- *E4:* Errores debidos a la aplicación de reglas o algoritmos inadecuados. Este tipo de errores surge con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes. Por ejemplo: *"A través del planteo expresado no queda verificada la periodicidad pedida para cosec x"*
- *E5:* Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el docente – alumno. Por ejemplo: *"Las últimas dos soluciones que da el programa para esta ecuación son extrañas al problema y se puede salvar este error del programa eliminando primero los denominadores como se hace con lápiz y papel".*
- *E6:* Interpretación y/o uso incorrecto del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto, por ejemplo al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada o al interpretar incorrectamente símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa. Por ejemplo*: "La fórmula de la función no se corresponde con el enunciado y no representa la cantidad de cuadras caminadas."*

Desarrollo de la investigación

A raíz de un exhaustivo análisis de los errores relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos detectados al comienzo de nuestra investigación, realizamos el siguiente conteo:

Errores relacionados con los contenidos y procedimientos matemáticos:		
E1	Realización incorrecta de una operación o un proceso de cálculo.	37
E2	Comprensión conceptual cualitativamente insuficiente.	84
E3	Distracción o pérdida de interés	15
E4	Aplicación de reglas o algoritmos inadecuados	23
E5	Datos mal utilizados	32
E6	Interpretación y/o uso incorrecto del lenguaje.	38
	Total	**229**

Para una mejor visualización de estos resultados mostramos a continuación el gráfico de torta correspondiente:



El resultado obtenido es coherente con lo que sospechamos al concluir la primera fase, dado que no habiendo hecho en esa oportunidad una clasificación y recuento de los errores matemáticos en particular, ya habíamos detectado que muchos de ellos eran de tipo conceptual y correspondían en su mayoría a la comprensión de los conceptos de: dominio de una función, composición de funciones, límite y continuidad en un punto.

Reflexión y líneas futuras

Con miras a cumplir parte de los objetivos generales que nos fijamos al comienzo de nuestra investigación:

1) Realizar aportes a la articulación entre la enseñanza media y la universidad,
2) Modificar nuestras concepciones previas acerca del nivel de conocimientos matemáticos que posee un profesor de Matemática, ya que partir de un diagnóstico más preciso y real respecto a su formación, nos permitirá enfocarnos en la resolución de las deficiencias detectadas
3) Abocarnos al diseño y aplicación de estrategias conjuntas con los institutos de formación docente, que contribuyan a mejorar la calidad del profesional egresado,
4) Reeditar este curso de Formación Docente

Entre las propuestas superadoras referidas al re-diseño e implementación de este curso consideramos las siguientes:

- Incluir mayor cantidad de elementos de evaluación reguladores del proceso: como por ejemplo mayor cantidad de instancias presenciales, actividades integradoras y de diagnóstico al finalizar y comenzar cada módulo respectivamente.
- Desglosar el módulo que contiene los fundamentos teóricos e intercalarlo en cada uno de los módulos donde se trabajan los contenidos correspondientes con el software Derive.
- Reelaborar las actividades incluidas en cada módulo buscando incorporar más propuestas que se enfoquen en lo netamente conceptual. Por ejemplo incorporar más actividades que trabajen el concepto de límite y no tanto el cálculo del mismo.
- Ordenar las actividades de tal manera que primero se trabajen aquellas que requieren del dominio de los conceptos matemáticos por parte de los docentes – alumnos, y sólo una vez corregidas éstas, se planteen las que requieran mayor operatoria y cálculo.

- Ampliar los tiempos de entrega de las actividades (sobre todo del primer tipo) para favorecer el estudio, las consultas y la investigación por parte de los docentes – alumnos y poder realizar un mejor seguimiento de las mismas por parte de los tutores del curso.

Éstas son sólo algunas de las propuestas sobre las cuales trabajaremos a medida que continuamos avanzando en esta investigación, incorporando los elementos de análisis que se desprendan de las próximas fases.
Creemos además muy importante abrir y mantener un espacio de diálogo entre la Universidad y los Institutos de Formación Docente que garantice la retroalimentación de estos resultados y posibilite el planteo de necesidades desde ambas Instituciones, y propuestas que busquen su satisfacción.

Referencias bibliográficas

Aguerrondo, I. (1993). La calidad de la educación: ejes para su definición y evaluación. *Revista Interamericana de Desarrollo Educativo. Año XXXVII, , num 1166, III.* Washington: Organización de Estados Americanos.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique de les mathématiques Vol 4, num 2*: 165-198.

Gento Palacios, S. (1994). Participación en la gestión educativa. Buenos Aires: Edit Aula XXI. Santillana.

Kilpatrick, Jeremy. (1992). A History of Research in Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 3-38). New York: Macmillan.

LLinares, S. (1998). La investigación “sobre” el profesor de Matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesio
nal. *Aula Vol.10*, 153-179.

Mansilla, Panella, Paván, Sadagorsky. (2005). Funciones con Derive ... a distancia: categorización y análisis de errores. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa (ALME). Vol 19*: 886–891.

Movshovitz - Hadar, N.; Inbar, S.; Zaslavsky, O. (1987). Un modelo empírico de clasificación de errores en matemáticas de high schools. *Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 18, num 1:* 3-14.

Pérez Juste, Ramón; Martínez Aragón, Lucio. (1992). Evaluación de centros y calidad educativa. Madrid: Editorial Cincel.

Rico, L. (1995). Educación Matemática. *Errores en el aprendizaje de las matemáticas.* Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Radatz, H. (1980). Student’s errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics.*

UNA PROPUESTA GENERADORA DE APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Mabel Medina, Héctor Rubio Scola, H. Mercedes Anido
FCEIA, CIUNR, FCEE, Universidad Nacional de Rosario. (Argentina)
erubio@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: estudios socioculturales. Nivel educativo: superior
Palabras clave: materiales curriculares, scilab, aprendizaje autónomo

Resumen
En este trabajo se describen las motivaciones que llevaron al inicio de una experiencia de enseñanza en proceso de evaluación implementada en cursos de Análisis Matemático de las carreras Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) y de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Se proponen algunos temas para trabajos prácticos en computadora con el software libre Scilab que los alumnos logran realizar exitosamente a través del material didáctico generado por los docentes y de los conceptos teóricos desarrollados en clase. Para su ejecución se contó con las computadoras de los alumnos y su conexión a Internet. El material didáctico generado fue una guía "paso a paso" donde se transmite la filosofía del software lo que permite luego la exploración del mismo por el alumno. Lo más importante en esta experiencia es el inicio de una formación en el aprendizaje autónomo, desde una propuesta de trabajo que no necesita de la infraestructura de un laboratorio de la universidad con capacidad para cientos de alumnos.

Introducción

La tecnología computacional ha hecho que las matemáticas se conviertan en una ciencia más empírica y esa misma tecnología le ha permitido al estudiante trabajar más fácilmente con una gran cantidad de información relacionada con problemas que no habría podido resolver de otra manera (Kilpatrick, 1995). A pesar de los años transcurridos, esta afirmación de Kilpatrick aún no se ha hecho realidad en algunas asignaturas de la Matemática Básica del nivel universitario por distintas razones. En una encuesta realizada a más 100 docentes que han participado en cursos de formación en el tema, se revela entre otras causas que retrasan la incorporación de las nuevas tecnologías, el "temor" de los docentes a afrontar una nueva situación áulica. Este temor se genera por los imprevistos que pueden presentar los distintos programas computacionales y la inseguridad que sienten algunos docentes por carencias de formación en el tema en su carrera de grado profesional, no obstante sus esfuerzos de actualización. Pese a estas reticencias, existe ya tanta literatura en Educación Matemática con aportes positivos en cuanto al rol estimulador y facilitador de una utilización adecuada de las herramientas computacionales en el aprendizaje, que se impone la necesidad de nuevas estrategias que superen los obstáculos expuestos. Una de ellas sería la utilización de las herramientas computacionales en un esquema de enseñanza semipresencial, en el que la distancia actuaría como "mediador tranquilizante" de la ansiedad del docente, siendo lo realmente esencial que es contribuir a la formación en un aprendizaje autónomo e incluso colaborativo cuando se aceptan producciones grupales. En esta línea de trabajo se inscriben las experiencias realizadas en cursos de Análisis Matemático II de la carrera Ingeniería en Sistemas de la UTN y en la Facultad de Ingeniería de la UNR. En estos cursos se proponen trabajos prácticos en computadora con el software libre Scilab en un contexto de heurística, abierto a la exploración del software por el alumno, a la producción colaborativa y al aprendizaje autónomo.

El problema de investigación

En el Documento de Discusión sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario propuesto por: "The International Commission on Mathematical Instruction" (ICMI-

1998) (*) en relación al tema de este trabajo se recomienda: "considerar formas de mejorar la preparación de los docentes de matemáticas de nivel universitario" para lo que formula una serie de preguntas para investigación.
En este trabajo tratamos sólo de enfocar la siguiente cuestión planteada ¿Deberían darse los programas existentes de la misma forma que en el pasado, o puede la tecnología asistir en el desarrollo de habilidades superiores o más importantes?

Marco teórico y objetivos

A fines de la década del 80 comienzan a aparecer distintos programas computacionales que operan numérica, simbólica y gráficamente como formidables herramientas matemáticas del matemático. Esas herramientas actualmente de uso generalizado por los matemáticos o los que aplican la Matemática, tales como Mathematica, MatLab, Scilab, MAPLE, Derive, etc.; se pueden considerar como calculadoras numéricas, simbólicas y gráficas, no requieren conocimientos de programación y se la designa herramientas CAS (Computer Algebra System). Con relación a estos problemas y con una visión precursora, en la U N R, se trabaja desde 1992 en lo que ya se ha consolidado como una "investigación evaluativa" (Cook-Reichardt, 1995) de experiencias innovadoras, respecto a la clase expositiva tradicional. El común denominador de todas ellas ha sido la utilización de dichas herramientas CAS en la enseñanza de la Matemática. Estas investigaciones han surgido en cátedras autónomas por la comunidad de intereses de docentes, participantes de un proyecto que estudia la potencialidad de esa herramienta computacional para la enseñanza de la llamada Matemática Básica en el nivel universitario. Las unidades didácticas son concebidas como conjunto integrado, organizado y secuenciado de los elementos básicos que integran el proceso de enseñanza-aprendizaje, Los propios docentes toman parte directa en la producción de materiales.
Wittman (1995) propone "experimentos clínicos de enseñanza" en los que los materiales didácticos no sólo son instrumentos, sino objetivo de estudio. Llama "corazón" de la educación matemática a una variedad de componentes que incluyen en particular el desarrollo y evaluación de unidades de enseñanza. La Educación Matemática, según el mismo autor, es asignada a la larga clase de las llamadas ciencias de diseño. Históricamente y tradicionalmente ha sido tarea de las escuelas de ingeniería enseñar sobre cosas artificiales, como hacer artefactos que tengan propiedades deseadas y como enseñarlas. El diseño para la construcción, es el corazón de entrenamiento profesional y la principal marca que distingue las profesiones de las ciencias, así también las escuelas de arquitectura, negocio, educación, leyes y medicina, conciernen con procesos de diseño.
En la opinión de Wittmann, el marco de una ciencia de diseño abre a la educación matemática una prometedora perspectiva para el completo cumplimiento de sus objetivos. El marco que soporta la posición descripta para el corazón de la educación matemática se concentra en la construcción de "objetos artificiales" llamados unidades de enseñanza, conjunto de coherentes unidades de enseñanza y el curriculum, así como también la investigación de sus posibles defectos en diferentes "ecologías" educacionales. En la realidad la calidad de esas construcciones depende de la fantasía constructiva de base, del ingenio de los diseñadores y de la evaluación sistemática, ambos típicos de la ciencia de diseño. Los intentos de organizar la Educación Matemática usando disciplinas relacionadas como modelo (como ocurre en la enseñanza universitaria en los que mucha veces se

[*] El propósito de este Documento de Discusión es destacar importantes temas relacionados con el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de nivel universitario, y estimular la discusión e investigación de estos tópicos. Las publicaciones relacionadas con este estudio tendrán muy posiblemente una influencia positiva en la comprensión y práctica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario en estos primeros años del siglo XXI.

identifica el desarrollo de un tema de enseñanza con el desarrollo matemático del tema) pierde el objeto porque subvaloran la importancia del diseño creativo para innovaciones conceptuales y prácticas.
El conocimiento no es visto ya como el resultado de la transmisión de un docente a un estudiante pasivo, más bien es concebido como el logro productivo del estudiante que aprende en interacción social con otros estudiantes y el docente. No obstante los materiales desarrollados por educadores matemáticos deben ser construidos tanto como el conocimiento y permitir esta aproximación interactiva. En particular los materiales desarrollados deben proveer a docente y estudiantes, libertad para hacer elecciones por si mismos.
Siguiendo a Wittman (1995) coincidimos en que el desarrollo de la educación matemática como una ciencia de diseño implica como encontrar maneras de cómo diseñar, por un lado una investigación empírica y por otro lado como relacionarlas con otras. Wittman propone una aproximación específica a la investigación empírica y la llama “Investigación Empírica Centrada Alrededor de Unidades de Enseñanza”. Estas deben ser caracterizadas por las siguientes propiedades: representar objetivos centrales, contenidos y principios de la enseñanza de la matemática; proveer una rica fuente de actividades matemáticas; envolver aspectos matemáticos, psicológicos y pedagógicos de la enseñanza y el aprendizaje en una forma holística y, además, ofrecer un amplio potencial para la investigación empírica.
Así, una unidad de enseñanza es esencialmente abierta. Sólo los problemas clave son fijos. Durante cada episodio, el docente tiene que seguir la idea del estudiante en un intento de resolver los problemas. Este rol del profesor es completamente diferente del punto de vista tradicional. Enseñar una unidad sustancial es básicamente análoga a la conducción de una entrevista clínica durante la cual sólo las cuestiones claves están definidas y el trabajo del entrevistador es seguir el pensamiento del entrevistado.
Consideramos como supuesto básico del que parte nuestro trabajo la afirmación de Peltier (1993):”La secuencia de actividades y problemas que se proponen como material didáctico desde un contexto matemático, a partir de una situación didáctica fundamental, permitirán al investigador, seguir las ideas del estudiante en las situaciones donde el conocimiento interviene como instrumento explícito de resolución, o en su descontextualización y relación con conocimientos anteriores”.
De esta hipótesis se deriva naturalmente como objetivo: desarrollar materiales didácticos y experimentar su utilización, con un criterio específico, en función de un proyecto educativo y con un marco teórico que justifique las decisiones en el momento de analizar y evaluar dichos materiales.

Metodología

La estrategia pedagógica aplicada tanto en la relación áulica como semipresencial se sustenta en las ideas que diversos educadores introdujeron en las últimas décadas, a saber:

- la concepción del educando como sujeto activo de los procesos educativos.
- la concepción de la relación interactiva y dialógica entre el educador y el educando cuyo resultado es el cambio de actitudes, comportamiento y grado de conocimiento de ambos sujetos, sin que ello implique la pérdida de sus identidades y roles específicos.
- la valoración de la importancia de la motivación y la experiencia vivencial para obtener aprendizajes significativos y perdurables.

- la valoración de la relevancia de la interacción entre los aspectos cognitivos, psicomotrices y afectivos que intervienen en los procesos de aprendizaje.

En esa concepción educativa describimos la metodología de trabajo y las opiniones de los alumnos.
La metodología del trabajo áulico consiste en desarrollar la teoría, ya sea de integrales definidas o de varias variables, luego se brinda una explicación general del trabajo práctico y se entrega el material didáctico.
El material didáctico es una unidad teórico-practica donde se reiteran conceptos teóricos, se instruye cómo obtener el software, se brindan pautas sobre la utilización del mismo y se formulan algunas preguntas que faciliten la resolución de un problema. Se solicita al alumno la realización de otros problemas y la redacción de un informe. Se transmite la filosofía del software y se posibilita la exploración del mismo. Por ejemplo, las etapas en el caso particular de la graficación en varias variables son: a) Obtención del software (Scilab). b) Exploración de las capacidades gráficas. c) Cómo graficar una función de dos variables. d) Cómo graficar otras superficies. e) Realización de un informe.
En la realización del informe se les solicita a los alumnos una conclusión de tipo técnico, por un lado y por otro que manifestaran las ventajas y dificultades respecto de la metodología del trabajo.
Para la obtención del software tienen dos opciones: lo bajan de Internet (se les da las indicaciones para ello) o compran un CD con software libre provisto por el laboratorio de informática de la FCEIA UNR. Con estas dos opciones pueden trabajar en sus casas o en un ciber café. Una tercera opción es trabajar en el laboratorio de la Facultad para alumnos, en el cual disponen de horarios donde los alumnos pueden hacer los trabajos prácticos. Las tres modalidades son utilizadas por los grupos de alumnos.
En ninguna de estas modalidades tienen un docente cerca para consultar, sin embargo la gran mayoría puede realizar exitosamente el trabajo. Se les ofrece consulta una vez por semana frente a la computadora PC, la cual es raramente solicitada. Las consultas se resuelven normalmente en clase con papel y lápiz. Manifiestan en sus informes que esto fue posible debido a la claridad del material didáctico confeccionado. Es de destacar la independencia con la que actuaron los alumnos, no presentando ningún inconveniente en la obtención e implementación del software.

Análisis de contenido de los informes

Se han recogido y analizado las opiniones de los alumnos expresadas en sus informes en los que, entre otras preguntas, se solicitaba que expresasen las ventajas o desventajas de utilización del software en la resolución de problemas.
Manifiestan haber encontrado por propia exploración más funciones del software que las solicitadas, por ejemplo animaciones de soluciones de ecuaciones diferenciales (en el caso específico de movimiento de un péndulo) y otras funciones como las referidas a la parte de Estadística.
Transcribimos algunas de las expresiones enunciadas por los alumnos en sus informes muchos de los cuales tenían ya experiencia acumulada en el manejo software de otros tipos de software no matemático:
“El programa es sencillo y bastante completo, muestra en detalle las gráficas definidas”
“Tiene una gran variedad de funciones y aplicaciones que, con ayuda del paso a paso brindado por la profesora y el incorporado en el programa, se pueden aplicar sin problemas”.
“Para descargar el software no tuvimos ningún inconveniente. Tampoco para instalarlo”.

"Es un programa que ocupa poco espacio en disco y que no requiere demasiados recursos de máquina para su ejecución, puede considerarse como un atractivo software destinado a fines matemáticos".
"La posibilidad de hacer 'zoom' y rotaciones es muy rápida y sencilla, lo que hace del manejo de las gráficas algo realmente simple en comparación con otros softwares existentes. Se puede mover la figura, para visualizar todas las aristas y partes ocultas"
"La capacidad de exportar de manera fácil y rápida los gráficos en distintos formatos para su posterior manipulación es realmente uno de los puntos fuertes del programa a la hora de compararlo con otros existentes en el mercado".
"Debido a la forma de trabajo del software, es sencillo repetir sentencias previamente ingresadas y luego hacer los cambios pertinentes, pues de manera segura almacena todas las órdenes que fueron dadas y puede "navegarse" por ellas con solo presionar las flechas "abajo" y "arriba".
"Lo más importante, por ser gratuito, es que si uno conoce exactamente como está hecho, es decir puede obtener el código fuente, con lo que todas las desventajas mencionadas pueden corregirse en un breve tiempo teniendo los conocimientos adecuados".
"Con una cantidad mínima de comandos se pueden obtener interesantes resultados, sin embargo parece ser un requisito indispensable tener algún conocimiento mínimo de programación para la utilización del software".
"Las demostraciones que acompañan al programa son de utilidad, pero la realización del trabajo hubiera sido muy difícil sin la guía, ya que el programa se encuentra únicamente en inglés o francés, y se encuentra redactado en forma muy técnica. De todas formas estos inconvenientes no invalidan la eficiencia del programa, el cual logra con sus herramientas cumplir con nuestros requerimientos".

Limitaciones y concreciones de la experiencia

Del análisis documental de la producción de los estudiantes y de sus opiniones surge una aproximación positiva al supuesto inicial, en cuanto a seguir las ideas del estudiante en las que el software ha intervenido como un instrumento explícito de resolución y donde las opiniones también son favorables a la metodología empleada. No obstante creemos que deben ser consideradas las palabras de Artigues (1995) "Estos enfoques (computacionales) sin duda alguna, proveen al estudiante una familiaridad, un contacto enriquecedor con un cierto número de fenómenos o de objetos relevantes en el campo del cálculo. Sin embargo, nuestra experiencia didáctica debe incitarnos a desconfiar un poco de los discursos muy entusiastas que acompañan con frecuencia las reacciones ante la caída de un orden tradicional". Como limitación también debemos señalar una reflexión de Kilpatrick (1995): "el conocimiento matemático debe estar inmerso dentro de un contexto. No obstante, para que este conocimiento pueda ser utilizado, el contexto debe ser eliminado y el conocimiento debe hacerse general". Cuando los estudiantes trabajan en un problema matemático, el carácter y el significado del conocimiento que ellos construyen está cambiando. Uno de los trabajos más delicados del profesor es el guiar a los estudiantes, partiendo de sus errores y concepciones deficientes, hacia un conocimiento oficial que pueda ser validado matemáticamente".
Como aporte concreto detallamos las siguientes producciones:
* Material didáctico para los alumnos de la materia "Análisis Matemático I", correspondiente al ciclo de formación Básica de las carreras de Ingeniería de la FCEIA. Se está desarrollando una guía

didáctica en el tema estudio de funciones. Se explotan las posibilidades gráficas del sistema para estudiar corrimientos, contracciones, dilaciones, superposiciones.
* Material didáctico para los alumnos de la materia "Análisis Matemático II", correspondiente la carrera de Ingeniería en Sistemas de la UTN Facultad Regional Rosario. Se desarrollaron y utilizaron guías didácticas en los temas: Gráficas de funciones de dos variables, cálculo de integrales como suma de Riemann, integrales simples y dobles
En estos cursos se propone un trabajo práctico sobre análisis de funciones de varias variables, con mínimas indicaciones en cuanto a la utilización del software Scilab. Los alumnos logran realizarlo exitosamente a través de la exploración del mismo y de los conceptos teóricos desarrollados en clase. Manifiestan en sus informes que es un software mucho más amigable que otros softwares que conocían antes.
* Material didáctico para los alumnos de la materia "Análisis Matemático II", correspondiente al ciclo de formación Básica de las carreras de Ingeniería de la FCEIA. Curvas en coordenadas polares, graficación, Se propuso realizar una guía didáctica de funciones trigonométricas, estudiando sus ampliaciones y corrimientos con el objetivo final de visualizar una función representada por un polinomio formado con los primeros términos de la serie de Fourier.

Conclusiones

Se han producido materiales didácticos para una variedad de asignaturas, algunas del ciclo profesional, la mayoría del ciclo básico. La riqueza y proyección de los temas en estudio permiten ubicar al taller como generador de una producción que en el marco de distintas Ingenierías Didácticas deberá, posteriormente, ser evaluada en un ciclo de análisis previo, desarrollo y análisis a posteriori en relación a cada curso. Estas producciones han sido disparadoras a su vez de interesantes y creativas propuestas de problemas por los mismos alumnos y situaciones didácticas inesperadas para el propio docente, originadas en una exploración de las posibilidades del software.
Esta experiencia es el inicio de una formación en el aprendizaje autónomo, desde una propuesta de trabajo que no necesita de la infraestructura de un laboratorio de la universidad con capacidad para cientos de alumnos. También, los docentes, han logrado adquirir el conocimiento de un software libre, en un país donde una mayoría de alumnos de la Universidad y la misma institución no están en condiciones económicas para acceder a un software comercial actualizado.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *La Enseñanza de los Principios del Cálculo: Problemas Epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericano. pp 98-99; 128; 134-135.

Cook, T.D. y Reichard, Ch. S. (1995). *Métodos Cualitativos y Cuantitativos en Investigación Evaluativa*. Madrid, España: Ed. Morata. pp 27-79; 131-145.

Kilpatrick, K.; Gomez, P. Rico, J. (1995). *Educación matemática*. Bogotá, Colombia: Editorial Iberoamérica.

PELTIER, M.L. (1993). Una Visión General de la Didáctica de la Matemática en Francia. *Revista Educación Matemática*, 5(2). pp 4-9.

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE A TRAVÉS DEL TRABAJO CON LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO

Alejandro Olea Díaz
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. (México)
olea170@yahoo.com
Campo de investigación: pensamiento algebraico. Nivel educativo: básico
Palabras clave: variable, Emat, comprensión, modelo 3UV

Resumen
Dado el carácter multifacético del concepto de variable (como número general, como incógnita y en una relación funcional), resulta importante investigar la comprensión que de él se tiene cuando los alumnos de segundo grado de secundaria trabajan en ambientes computacionales. En esta investigación se analizará el uso de la hoja electrónica de cálculo como apoyo a dicha comprensión. Asimismo, se revisarán las manifestaciones posteriores que hay en el trabajo con lápiz y papel. Se emplean actividades del libro Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología: Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo (SEP, 2000) [Proyecto Mexicano]. Para el desarrollo de la investigación se emplearán como instrumentos el cuestionario, la observación y la entrevista, en tanto que para el análisis, se considera el modelo 3UV que sugieren Ursini y Trigueros (1998).

Introducción

El desarrollo del pensamiento algebraico requiere, a su vez, del desarrollo del concepto multifacético de variable. Esta investigación tiene la finalidad de revisar la influencia que el trabajo con la hoja de cálculo puede tener en la comprensión de dicho concepto.

Problema de investigación

Considerando la sugerencia implícita de que la instrucción convencional no brinda suficientes oportunidades para que los alumnos construyan la idea de número general y desarrollen un significado para el símbolo usado para representarlo; así como para los demás usos de la variable (SEP, 1994, p. 151), se pretende contestar las siguientes preguntas:

- ¿La comprensión de los distintos usos de la variable se ve favorecida con el trabajo con la hoja de cálculo?
- ¿Hay algún uso en particular de la variable que se privilegie al trabajar con la hoja electrónica de cálculo y particularmente con las actividades seleccionadas?
- ¿En qué medida las actividades con la hoja electrónica de cálculo favorecen el trabajo con lápiz y papel respecto al uso de la variable?

Marco teórico

El trabajo con álgebra y particularmente con la variable y sus distintos usos representa una gran dificultad para los estudiantes. Estudios como el de Wagner (1983) señalan la complejidad del concepto de variable y las dificultades que tienen los estudiantes que inician el estudio del álgebra, y particularmente en trabajar con la variable. Identifica algunos factores que hacen que los símbolos literales sean fáciles de usar, pero difíciles de comprender. Encontramos otros estudios (por ejemplo, Booth, 1984; Kieran, 1980, 1988; Mason, et al., 1985; Filloy y Rojano, 1985; Ursini, 1990a; Philipp, 1992) en los que se han investigado y catalogado las dificultades y errores más comunes que cometen los alumnos que se inician en el estudio del álgebra elemental. Señalan, por ejemplo, que los alumnos:

- Tienden a usar métodos aritméticos para resolver problemas de tipo algebraicos;
- Buscan resultados numéricos;
- Tienen dificultad para entender que mientras en aritmética las operaciones se ejecutan y se obtienen resultados numéricos, en álgebra las operaciones se indican y su ejecución efectiva queda suspendida;
- Tienden a interpretar el signo de igualdad solo como un signo de acción mientras que en álgebra, éste signo suele usarse para representar equivalencias;
- Tienen serias dificultades con la adquisición de conceptos nuevos, propios del álgebra, por ejemplo, con el concepto de variable.

Ursini (1996) señala que es factible ofrecer a los estudiantes experiencias que los lleven a acercarse a ideas algebraicas antes de emprender un estudio formal de esta disciplina. Asimismo, refiere que una explicación plausible para algunas de las dificultades que encuentran los alumnos que se inician en el estudio del álgebra, podría ser la falta de antecedentes en tratar numéricamente problemas matemáticos de distinta naturaleza, que los lleven hacia la necesidad y aceptación de ideas algebraicas. Señala, también, que un usuario competente del álgebra es capaz de, interpretar la variable de modos distintos dependiendo del problema en el cual aparece, simplificar una expresión algebraica, de trabajar con la idea de variación cuando las variables están involucradas en una relación funcional. En estudios más recientes (Ursini y Trigueros, 1998; Ursini, Trigueros y Lozano, 2000) encontraron que después de haber llevado varios cursos de álgebra los estudiantes que ingresan a las universidades siguen teniendo serias dificultades con la comprensión de los usos elementales de la variable. Estos resultados generan las siguientes preguntas: ¿Qué ocurre con la comprensión del concepto de variable a través de la enseñanza en la secundaria y en la preparatoria? ¿Hay algún uso de la variable que se fortalece más que otros? Los aspectos considerados como más relevantes para un manejo competente del álgebra elemental y que han sido destacados en otras investigaciones (Usiskin, 1988; Bell, 1996; Ursini, 1996) son: el uso de la variable como incógnita, como número general y en una relación funcional. Estos tres aspectos son considerados en esta investigación, para lo cual, se analiza la influencia que tiene el trabajo con la hoja de cálculo y las actividades que se proponen del libro *Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología* (Emat).

Para el análisis de los resultados de esta investigación, se utilizará el modelo que sugieren Ursini y Trigueros (1998) en donde manifiestan que una conceptualización adecuada de cada uno de los aspectos de la variable requiere de ciertas capacidades básicas, a saber:

Variable como número general

La conceptualización de la variable como número general implica:

G1	Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias numéricas y en familias de problemas.
G2	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G3	Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas
G4	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5	Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Variable como incógnita específica

La conceptualización de la variable como incógnita específica implica:

I1	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2	Interpretar las variables simbólicas que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
I3	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando las operaciones algebraicas y/o aritméticas.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Variable en relación funcional

La conceptualización de las variables en relación funcional implica:

F1	Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales o expresiones analíticas.
F2	Determinar los valores de la variable dependiente, dados lo valores de la independiente.
F3	Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F4	Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales o expresiones analíticas)
F5	Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6	Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

Señalan, también, que la posibilidad de darle significado al concepto de variable implica, además:

- Superar la simple realización de cálculos y operaciones con letras o con símbolos, para alcanzar una comprensión de las razones por las que funcionan estos procedimientos.
- Prever hacia donde conducen dichas operaciones.
- Establecer relaciones entre los distintos aspectos que asume la variable en el contexto del álgebra elemental.

Finalmente, Dettori, et al. (2001) realizan un estudio en el que trabajan con la hoja de cálculo en la resolución de problemas concernientes al razonamiento algebraico, incluyendo la comprensión de los diferentes usos de la variable. Señalan que la hoja de cálculo puede empezar el camino del aprendizaje del álgebra, pero no tiene las herramientas para completarlo. Siendo capaz para escribir partes de las relaciones entre los objetos considerados, pero no para sintetizar y manipular la relación completa. *Es como saber palabras y frases de un idioma, pero no ser capaz de ordenarlas para completar oraciones.* Concluyen que la hoja de cálculo puede ser útil para introducir el álgebra, con algunas limitaciones: las hojas de cálculo tratan sólo con números, o *direcciones* de celdas que contienen números y funciones. Variables, números desconocidos y relaciones no pueden ser directamente manejadas, ni formalmente manipuladas, sólo pueden indicarse. Sea como sea, al usar la hoja de cálculo, la cual por sí misma permitiría a los estudiantes resolver problemas mediante ensayo y error, bajo la dirección del profesor puede permitirles:

- Llegar a estar consciente de la activación de un nuevo proceso de modelación para resolver problemas.
- Entender lo que significa resolver una ecuación, aún antes de su manejo.
- Razonar acerca del dominio y limitación de un problema con la finalidad de reducir el número de intentos necesarios para alcanzar su solución.
- Introducir la generalización, abstracción y síntesis, las cuales son habilidades cognitivas fundamentales en matemáticas.

Método

El trabajo de investigación se llevó a cabo en una escuela secundaria de la Ciudad de México, con 14 alumnos de segundo grado de entre 13 y 14 años de edad. Primeramente se aplicó, de manera individual, un cuestionario que consta de 45 preguntas. El cuestionario fue tomado de Ursini y Trigueros (2003) y tiene la finalidad de revisar la comprensión del concepto de variable en sus distintos usos. Conforme a los resultados del cuestionario se eligieron 6 alumnos, a los cuales se les observó durante el trabajo que desarrollaron al resolver 9 actividades (3 actividades implican el uso de la variable como número general, 3 como incógnita y 3 en una relación funcional) del libro Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología: Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo (SEP, 2000). Al concluir la resolución de las actividades, se les hizo una entrevista que permitió analizar la comprensión que tienen del concepto de variable, conforme al modelo 3UV que sugieren Ursini y Trigueros (1998) en donde señalan el requerimiento de ciertas capacidades para lograr una conceptualización adecuada de cada uno de los aspectos de la variable. Finalmente, se les aplicó, nuevamente, el cuestionario ya referido.

Tanto el cuestionario como las actividades de Emat, se analizaron con la finalidad de ubicar cada uno de las preguntas dentro de cada aspecto particular de los distintos usos de la variable.

A partir del análisis de los resultados del cuestionario inicial, se hizo un perfil de los alumnos. Posteriormente, se revisó el cuestionario final con miras a contrastar éste, con los resultados del primer cuestionario y con el trabajo intermedio de las actividades de Emat; todo con base al modelo 3UV.

Resultados

A partir de la aplicación del cuestionario inicial se pudo observar que, en cuanto al uso de la variable como número general, la mayoría tiene dificultades para enfrentarse a cualquier aspecto; sin embargo, les beneficia trabajar a partir de la observación de una secuencia de figuras en donde se les pide reconocer el patrón o llegar a la simbolización; asimismo, logran enfrentarse a este uso de la variable cuando se involucra el área de figuras geométricas sencillas.

En cuanto a la variable como incógnita específica, pocos son capaces de reconocer que en una ecuación, la variable representa valores específicos. Logran obtener, sobre todo en ecuaciones en donde hay una sola ocurrencia de la incógnita, el valor de la variable, sin sustituirla. Casi nadie logra, sea a partir de enunciados o problemas, simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones.

En general, manifiestan problemas para trabajar con la variable en relación funcional; sin embargo logran, a partir de tablas, reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional. Además, logran determinar los valores de una de las variables, dados los de la otra, siempre y cuando, en una tabla, los datos de, al menos una de las variables, estén completos, aún cuando no estén ordenados. La mayoría tiene dificultades para trabajar cualquier aspecto de la variable en relación funcional a partir de expresiones analíticas o problemas.
En relación al trabajo con la hoja electrónica de cálculo, y al analizar las observaciones registradas de las actividades sobre la variable como número general se puede decir que los sujetos seleccionados logran enfrentarse exitosamente, aunque con algunas dificultades, a la mayoría de los aspectos involucrados en las actividades. En cuanto a las actividades trabajadas para revisar la variable como incógnita específica, se pudo concluir que los estudiantes presentan problemas, sobre todo, para encontrar el valor de la incógnita a través del trabajo con la hoja de cálculo, de hecho, prefieren enfrentarse a este aspecto, cuando hay un trabajo previo con lápiz y papel; esto es, primero resuelven la ecuación en papel y posteriormente comprueban la solución obtenida en la hoja de cálculo. Al enfrentarse primero al trabajo con la hoja de cálculo, manifiestan inseguridad para validar la solución obtenida. No se observan dificultades para enfrentarse al trabajo con los distintos aspectos que se involucran en las actividades con relación a la variable en una relación funcional.
Al contrastar los resultados del cuestionario inicial con los resultados del cuestionario final, se puede mencionar que hay diferencias que dejar ver una influencia positiva del trabajo con la hoja electrónica de cálculo; esto es, que favorece la comprensión de determinados aspectos de los distintos usos de la variable. Lo anterior no refleja que se favorezca el trabajo algorítmico en lápiz y papel pero sí, la comprensión para enfrentarse al trabajo con la variable.

Conclusiones

En general, se pudo observar que, independientemente del aspecto de la variable que estuvieran trabajando, los estudiantes manifiestan dificultades cuando tienen que, a partir de un problema, plantear una expresión algebraica. Es importante señalar que el uso de la computadora, en conjunto con las actividades que se resolvieron, permitió que salieran a la luz algunas concepciones erróneas de las estudiantes, mismas que lograron superar con el trabajo con la hoja de cálculo.

Referencias bibliográficas

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulative symbolic language. En N. Bednarz, C. Kieran y L.Lee (Eds.). *(1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 151-154). Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and errors*. NFER-NELSON, Windsor.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemus, E (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using spreadsheet. en R. Sutherland, et al. (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. and Rojano, T. (1985). Obstruction to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.154-158). Noordwijkerhout, The Netherlands.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163-169). Berkeley, California.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. En A.F Coxford and A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of Algebra K-12* (pp. 90-96).

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. and Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of Algebra*, The Open University Press, Great Britain.

Philipp R. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, Vol. 85 No. 7, 557-561

SEP (1994). Matemáticas. *Libro para el maestro*. Educación secundaria.

SEP (2000). Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología*. Educación secundaria.

Wagner S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher 76*, 474-479.

Ursini, S. (1990a). Generalization process in elementary algebra: Interpretation and Symbolization, *Proceedings of the fourteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 149-156). Oaxtepec, México.

Ursini S. (1996). Experiencias preálgebraicas. *Educación matemática*. Vol. 8 No. 2, 33-40.

Ursini S., y Trigueros M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* Grupo Editorial Iberoamérica.

Ursini S. Trigueros M. y Lozano D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática* Vol. 12 No. 2, 27-48.

Ursini S. y Trigueros M. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. *Mathematics Education* Vol. 12 (pp. 1-29).

Usiskin Z. (1988), Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.) *The ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

IMPACTO DEL USO DE CALCULADORAS AVANZADAS EN LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Enrique Hugues Galindo, Maricela Armenta Castro, Gerardo Gutiérrez Flores, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora. (México)
ehugues@gauss.mat.uson.mx

Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad y estadística, tecnología avanzada. Nivel educativo: superior
Palabras clave: actividades didácticas, calculadora avanzada, hojas de trabajo, recursos tecnológicos

Resumen
El apoyo en las modernas tecnologías de la información y la comunicación constituye hoy en día una de las tendencias de la educación en Probabilidad y Estadística y, en esta dirección, las calculadoras avanzadas son vistas como una alternativa potencial pero su incorporación requiere exploraciones planeadas aunadas a la valoración de su impacto.
Aquí se presentan resultados de la primera etapa de un proyecto de investigación que pone a prueba el impacto que tiene, en la formación estadística en estudiantes de carreras de ingeniería, el uso sistemático de diferentes recursos computacionales que provee una calculadora avanzada. Se exponen consideraciones que sustentan el estudio, se ejemplifican las propuestas didácticas diseñadas y se reportan resultados encontrados sobre cómo el estudiante percibe la incorporación de este tipo de tecnología.

Introducción

Compartimos la opinión de que la educación estadística debe dejar atrás el énfasis que tradicionalmente ha prevalecido en el manejo operativo de la disciplina y apuntar hacia la comprensión de sus ideas básicas. Sin embargo, tanto el profesor como el estudiante requieren desarrollar laboriosas tareas como: recolección de datos, cálculos, tabulaciones, representaciones gráficas, experimentos, simulaciones, etc; con las cuales apuntalar ideas pero la fuerte atención que demandan los aspectos operativos involucrados, además de requerir una considerable inversión de tiempo, de algún modo hace perder de vista los objetivos fundamentales de la educación estadística.
Apoyarse en dispositivos proporcionados por las tecnologías de la información y la comunicación desde una perspectiva tanto en técnica como didáctica puede modificar en gran medida esta situación y dar entrada a un mayor énfasis en los razonamientos estadísticos que subyacen a dichas tareas.
De entre los dispositivos tecnológicos disponibles en nuestro entorno hemos decidido apoyar nuestro trabajo centralmente con el uso sistemático de calculadoras avanzadas ya que resultan accesibles y cuentan con una gran variedad de recursos computacionales potencialmente útiles para nuestros propósitos. Estos se enmarcan en un proyecto de investigación[§] en proceso que se propone poner a prueba el impacto que tiene, en la formación estadística de estudiantes de carreras de ingeniería, el uso sistemático de diferentes recursos que provee una calculadora avanzada.
En las siguientes secciones se expone brevemente el escenario del estudio, algunos de sus antecedentes y la problemática de investigación, las consideraciones que sustentan el estudio, sus elementos y su estructuración, se describe en lo general los diseños realizados y se ejemplifican las actividades didácticas utilizadas, se dan indicaciones de las reacciones iniciales de los estudiantes, y, se muestra las cuestiones indagadas entre los estudiantes y los resultados arrojados para finalmente marcar algunas conclusiones.

[§] "Impacto del Uso de Calculadoras Avanzadas en la Enseñanza de Ideas Básicas en Probabilidad y Estadística", Universidad de Sonora, México (proyecto financiado internamente: PI 05/DCEN16).

La problemática de investigación

El estudio se desarrolla entre estudiantes de las carreras de Ingeniería Industrial y de Sistemas e Ingeniería en Sistemas de Información[**], dentro de un curso de Probabilidad y Estadística. El programa de dicho curso contempla que este se apoye en "Uso de software (estadístico)" pero no da mayores indicaciones y en la práctica algunos profesores optan por omitir este aspecto pero otros recurren a los recursos tecnológicos que le ofrecen un laboratorio de computadoras y un laboratorio de calculadoras avanzadas.
Una particularidad del curso es que su desarrollo conlleva una fuerte carga operativa tanto para el estudiante como para el profesor aunque se espera que los estudiantes adquieran una base estadística conceptual requerida para otros cursos propios de su formación profesional como ingeniero en estas especialidades. Sin embargo, la atención de lo operativo acarrea el gran inconveniente de desvirtuar lo sustancial en aras de lo inmediato y da lugar a la problemática didáctica de cómo estructurar el tratamiento de contenidos previstos en el curso sin perder de vista ni lo necesario ni lo fundamental.
Por otra parte, para las computadoras no se cuenta con licencias de software especializado por lo que el profesor se apoya en hojas electrónicas, en software libre y/o en versiones estudiantiles de algunos programas. Las calculadoras avanzadas en cuestión, *Voyage 200 de Texas Instrument*, disponibles tanto en laboratorio como en biblioteca de ingeniería, cuentan con varios recursos computaciones (una hoja electrónica, editores de ecuaciones y diagramas, editores de gráficas, un editor estadístico de listas, etc.) y con la posibilidad de que el profesor desarrolle sus propios guiones de texto ejecutables y programas.
Ante la problemática señalada y onsideraciones como las vertidas, conjeturamos potencialidad en el uso de calculadoras avanzadas para apoyar el proceso de instrucción en Probabilidad y Estadística en aras de solventar la problemática señalada. De hecho, dicha potencialidad, que se sustenta en algo más que consideraciones meramente técnicas, de disponibilidad o en tendencias, constituye el objeto de estudio de nuestro proyecto. Ese potencial percibido en las calculadoras proviene de su consideración como herramientas técnicas pero también como herramientas didácticas (Hugues, 2005). En cuanto a esto último creemos que aterrizar la potencialidad didáctica de este y otros medios en gran medida descansa en la planificación del profesor y, en ello, el uso sistemático del recurso, de lo cual presentamos aquí algunos avances de nuestro trabajo.

Perspectivas del estudio

Para los fines del proyecto, se entiende por uso sistemático aquel que, además de intervenir a lo largo de un curso, cuenta con una metodología especifica para la inserción de la tecnología elegida y actividades didácticas diseñadas ex profeso.
Las actividades didácticas diseñadas arrancan con una situación problemática en cuyo abordaje se van incorporando tanto las herramientas técnicas como conceptuales que, en este caso, necesariamente incluyen como elementos de apoyo hojas de trabajo y archivos de calculadora, tanto guiones de secuencias de instrucciones como algunos programas.
Las hojas de trabajo están diseñadas tanto para guiar a los estudiantes en sus exploraciones como para permitir el registro de su proceso de aprendizaje e incluso su evolución en el desarrollo de ideas básicas, observación que es complementada por otros registros como son el reporte de tareas encargadas a los estudiantes y cuestionarios aplicados.

[**] Dos carreras ofrecidas en el Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Sonora, México.

En lo anterior varias consideraciones son puestas en juego, entre las que destacamos:

- Las concepciones estadísticas del estudiante suelen ser deficientes;
- Los objetos estadísticos además de inaccesibles directamente incorporan comportamientos a la larga;
- Se entra en contacto con algún(os) sentido(s) del significado de los objetos estadísticos a través de representaciones y movilizaciones de estas;
- Es necesario proporcionar al estudiante la oportunidad de experimentar situaciones estadísticas;
- La experiencia a brindar a los estudiantes debe no sólo ser cognitivamente rica sino además estructurada didácticamente.
- Esta ha de incluir actividades de identificar y elaborar representaciones estadísticas, de tratarlas, de convertirlas y de coordinarlas.

En este contexto enriquecer y estructurar la experiencia del estudiante implica la consideración de situaciones problemáticas en cuya solución se requiere emprender acciones en diferentes registros de representación, discursivos y no discursivos, y poner en juego ideas, conceptos, resultados y argumentos como su respaldo. De este modo, el uso educativo de productos de la tecnología como herramienta didáctica, apoyando lo anterior, no sólo permite acceder a resultados de acciones matemáticas sino que, en una orientación esencialmente formativa, permite construir un ambiente propicio para la reflexión conceptual.

Estructuralmente dicho ambiente se concreta mediante una organización metodológica de configuraciones didácticas, que varían al combinar elementos de diversos tipos. Esquemáticamente, algunos de los tipos y elementos que consideramos son:

Estatus de la calculadora: Todas las calculadoras apagadas, sólo la del profesor encendida y en proyección de pantalla, las de los estudiantes encendidas y/o la de algún estudiante encendida y en proyección de pantalla, todas encendidas.

Uso de la calculadora: Manejo de datos en pantalla principal, almacenamiento de datos en listas y su tratamiento numérico, uso del catálogo de funciones, hoja electrónica, editores de ecuaciones, de tablas y de gráficas, uso de guiones de texto ejecutable o uso de programas diseñados ex profeso.

Modalidad de la actividad: Exposición del profesor, trabajo individual, trabajo en pares, trabajo en equipos o socialización de ideas y su discusión colectiva.

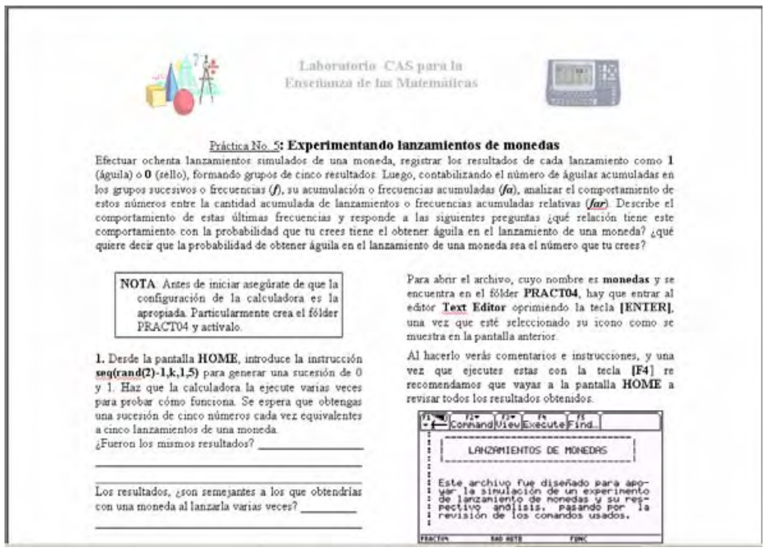
Organización de la actividad: Abordaje libre de situaciones, ejercicios y problemas, uso de hojas de trabajo o uso de otros materiales.

Ejemplificación de propuestas didácticas

Las actividades didácticas propuestas tienen en común partir de una situación, la incorporación de la calculadora y el estar acompañada por una hoja de trabajo, habiendo otros elementos que estructuralmente las distingue y ejemplifican en detalle las diferentes configuraciones que pueden tener lugar. Por cuestiones de espacio, aquí sólo nos referiremos a un ejemplo, una actividad denominada “Simulación lanzamiento de monedas”.

La situación problemática de dicha actividad se plantea vía las siguientes interrogantes:

¿Cuál es la probabilidad de obtener águila al lanzar una moneda[††]? ¿por qué? y ¿qué significa que la probabilidad solicitada sea la que tu dices o crees?;
que naturalmente, en su abordaje, involucra toda una gama de conceptos e ideas tanto probabilistas como estadísticas.
El desarrollo de la actividad contempla diferentes momentos como son: la reflexión preliminar y establecimiento de creencias; abordamiento físico de la situación a través del lanzamiento de una moneda real y análisis individual, sustitución de dispositivos físicos por virtuales mediante la simulación de lanzamientos de monedas en calculadora y análisis individual, para concluir con la comparación colectiva tanto de resultados como de análisis realizados.


Laboratorio CAS para la Enseñanza de las Matemáticas

Práctica No. 5: **Experimentando lanzamientos de monedas**

Efectuar ochenta lanzamientos simulados de una moneda, registrar los resultados de cada lanzamiento como **1** (águila) o **0** (sello), formando grupos de cinco resultados. Luego, contabilizando el número de águilas acumuladas en los grupos sucesivos o frecuencias (***f***), su acumulación o frecuencias acumuladas (***fa***), analizar el comportamiento de estos números entre la cantidad acumulada de lanzamientos o frecuencias acumuladas relativas (***far***). Describe el comportamiento de estas últimas frecuencias y responde a las siguientes preguntas ¿qué relación tiene este comportamiento con la probabilidad que tu crees tiene el obtener águila en el lanzamiento de una moneda? ¿qué quiere decir que la probabilidad de obtener águila en el lanzamiento de una moneda sea el número que tu crees?

NOTA: Antes de iniciar asegúrate de que la configuración de la calculadora es la apropiada. Particularmente crea el fólder PRACT04 y actívalo.

1. Desde la pantalla **HOME**, introduce la instrucción **seq(rand(2)-1,k,1,5)** para generar una sucesión de 0 y 1. Haz que la calculadora la ejecute varias veces para probar cómo funciona. Se espera que obtengas una sucesión de cinco números cada vez equivalentes a cinco lanzamientos de una moneda.
¿Fueron los mismos resultados? ____________
____
Los resultados, ¿son semejantes a los que obtendrías con una moneda al lanzarla varias veces? ________
____

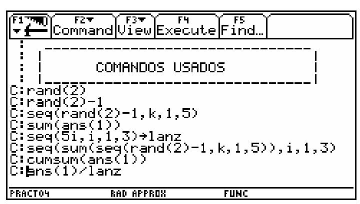
Para abrir el archivo, cuyo nombre es **monedas** y se encuentra en el fólder **PRACT04**, hay que entrar al editor **Text Editor** oprimiendo la tecla **[ENTER]**, una vez que esté seleccionado su icono como se muestra en la pantalla anterior.

Al hacerlo verás comentarios e instrucciones, y una vez que ejecutes estas con la tecla **[F4]** te recomendamos que vayas a la pantalla **HOME** a revisar todos los resultados obtenidos.

Vista parcial hoja de trabajo de la actividad "Simulación del lanzamiento de monedas.

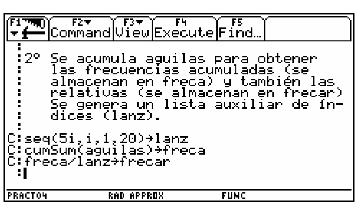
Técnicamente, la actividad se apoya en el guión de textos que parcialmente aparece abajo y su operación se indica desde la hoja de trabajo, tanto para una exploración a nivel de comandos usados como para ejecutar la simulación completa ya preparada.

Pantalla 1

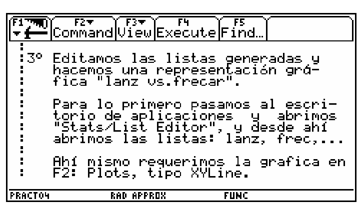


Pantalla 2

Pantalla 3



Pantalla 4

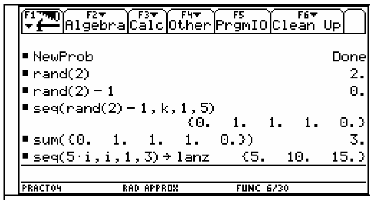
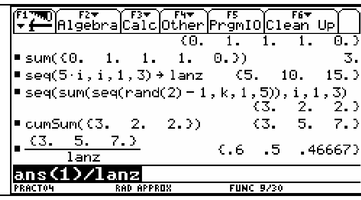
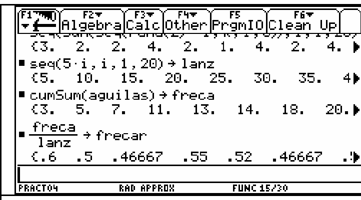
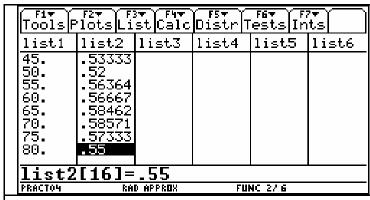
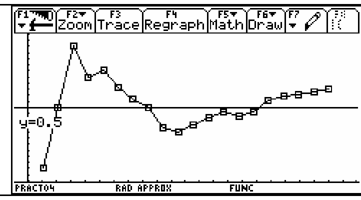
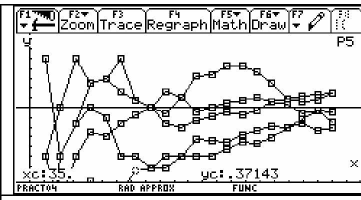


Pantalla 5

Pantalla 6

[††] En el juego de lanzamiento de monedas en México, un resultado posible es llamado "águila" en referencia a una cara de la moneda con el grabado del símbolo nacional que contiene la figura de una águila y el otro resultado posible es llamado "sello" en referencia a la otra cara cuyo grabado contiene el valor de la moneda.

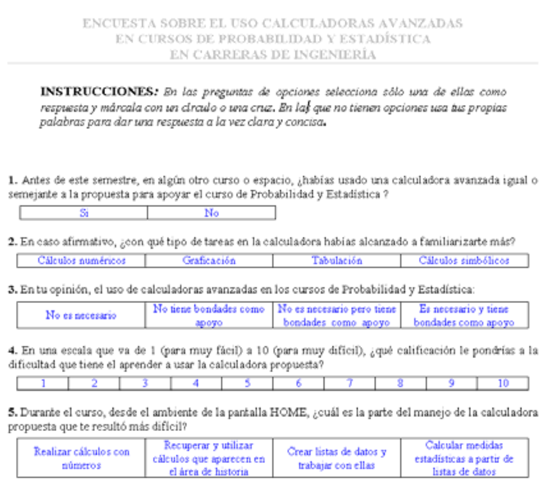
Su ejecución en calculadora genera datos y representaciones de estos, como se muestra en las pantallas siguientes:

		
Pantalla 7	Pantalla 8	Pantalla 9
		
Pantalla 10	Pantalla 11	Pantalla 12

Llegado a este punto, los análisis individuales se socializan en el grupo y se intenta llegar a una respuesta institucional a las preguntas planteadas, lo que se reporta más adelante.
Al respecto cabe adelantar que en un principio los estudiantes no tenían expectativas de la intervención de una calculadora avanzada, recelando por las dificultades técnicas de su uso pero llegan a apreciar su valor como herramienta para cuestiones estadísticas.

Resultados y conclusiones

De la experiencia tenida nos permitimos afirmar que la dinámica de trabajo propuesta ha llegado a ser aceptada por los estudiantes y ha empezado a despertar su entusiasmo e interés en esta manera de enseñar y aprender. Observaciones eventuales recogidas por el profesor-investigador, llevan a opinar que los estudiantes pasan de una visión ingenua, desinformada y/o desinteresada a una intermedia en que valoran al dispositivo como herramienta que les ayuda a resolver problemas y posteriormente, con regular frecuencia, llegan a apreciar su potencial de experimentación de ideas estadísticas básicas.



ENCUESTA SOBRE EL USO CALCULADORAS AVANZADAS
EN CURSOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
EN CARRERAS DE INGENIERÍA

INSTRUCCIONES: *En las preguntas de opciones selecciona sólo una de ellas como respuesta y márcala con un círculo o una cruz. En las que no tienen opciones usa tus propias palabras para dar una respuesta a la vez clara y concisa.*

1. Antes de este semestre, en algún otro curso o espacio, ¿habías usado una calculadora avanzada igual o semejante a la propuesta para apoyar el curso de Probabilidad y Estadística ?

Sí	No

2. En caso afirmativo, ¿con qué tipo de tareas en la calculadora habías alcanzado a familiarizarte más?

Cálculos numéricos	Graficación	Tabulación	Cálculos simbólicos

3. En tu opinión, el uso de calculadoras avanzadas en los cursos de Probabilidad y Estadística:

No es necesario	No tiene bondades como apoyo	No es necesario pero tiene bondades como apoyo	Es necesario y tiene bondades como apoyo

4. En una escala que va de 1 (para muy fácil) a 10 (para muy difícil), ¿qué calificación le pondrías a la dificultad que tiene el aprender a usar la calculadora propuesta?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5. Durante el curso, desde el ambiente de la pantalla HOME, ¿cuál es la parte del manejo de la calculadora propuesta que te resultó más difícil?

Realizar cálculos con números	Recuperar y utilizar cálculos que aparecen en el área de historia	Crear listas de datos y trabajar con ellas	Calcular medidas estadísticas a partir de listas de datos

Vista parcial cuestionario aplicado a estudiantes del curso de Probabilidad y Estadística

De resultados de cuestionario aplicado[‡‡] como acercamiento a la percepción del papel potencial que los estudiantes atribuyen a la tecnología en su formación y cómo esta evoluciona a partir de las experiencias en un curso de Probabilidad y Estadística que incorpora el uso sistemático de una calculadora avanzada, sobresale que si bien sólo el 25% de los estudiantes había usado este tipo de calculadora (TI V200) el 100% considera que tiene bondades como apoyo y el 87.5% que algo de este tipo es necesario para el curso. En la opinión en cuanto a las dificultades que les presenta el manejo de la calculadora tiende hacia abajo, con una calificación promedio de 4.4 puntos de 10, y la opinión sobre la utilidad que tiene el uso de la calculadora para ayudar a comprender ideas, procedimientos y/o métodos fundamentales de la Probabilidad y la Estadística estudiados en el curso tiende hacia arriba, con una calificación promedio de 8.8 puntos de 10.

Nuestros datos hasta el momento y las principales conclusiones que de ellos se desprenden, nos llevan a una valoración hasta cierto punto favorable del uso sistemático en educación estadística de las calculadoras avanzadas en el ámbito de nuestro estudio, según se puede desprender de algunos indicadores como el alto grado de participación de los estudiantes en clase y el desempeño académico que estos han tenido, y cabe agregar su contribución al trabajo en equipo y al trabajo colaborativo. Sin duda los elementos puestos en juego requieren ser afinados para permitir un mejor acercamiento a la problemática abordada.

Finalmente, creemos que una implementación didáctica exitosa de ideas como las aquí mostradas, dependerá, en buena medida, del acceso que el profesor y los estudiantes puedan tener a herramientas como la calculadora misma, de contar con materiales complementarios sobre el tópico que abordan, de contar con dispositivos de proyección como un View Screen o un interfaz de video TI Presenter para un televisor o una pantalla multimedia.

Referencias bibliográficas

Duval R. (2003). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Université du Littoral, France.

Godino, J. D.; Batanero, C; Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada, España.

Gélis, J.M.; Lenne, D. (1999). Integration of Learning Capabilities into a CAS: The Suites Enviroment as Example. *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Osnabrueck. Germany.

Hugues G., E. (2005). Uso de Hojas Electrónicas en la Enseñanza de la Distribución Normal. En J. Lezama, M. Sánchez y J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Educación Matemática* (volumen 18, pp. 757-763). México.

Rossman, A. J.(1996). Workshop Statistics: Using Technology to Promote Learning by Self-Discovery. Presentation: *IASE Roundtable Conference on Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics*, Granada, Spain.

Trouche, L. (2003). Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Enviroment (CBLE): Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestations. *The Third Computer Algebra in Mathematics Education Symposium*. Reims, France.

[‡‡] El cual incluye tanto preguntas de opción múltiple como de tipo abierto.

INTERPOLACIÓN Y MODELADO DE CURVAS

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica)
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Campo de investigación: modelación matemática. Nivel educativo: superior
Palabras clave: interpolación polinomial, métodos numéricos, modelado de curvas, tecnologías digitales

Resumen

Desarrollamos distintas estrategias para interpolar o aproximar una serie de datos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ en el plano mediante polinomios: interpolación de Lagrange, de Newton en diferencias divididas, splines, interpolación segmentaria de Hermite, de Bessel y curvas paramétricas polinomiales, entre ellas las curvas Bézier y B-splines que son muy populares para modelar y hacer animación por computadora, para definir formas espaciales o trayectorias de un objeto en el plano o en el espacio tridimensional. Programas como el Autocad, ilustrador de Adobe, Corel Draw y Freehand utilizan estos tipos de curvas para modelar.
Los contenidos anteriores forman parte de un curso de análisis numéricos para estudiantes de ingeniería civil que impartimos en la Universidad de Costa Rica, utilizamos el software Mathematica para definir, calcular y graficar los polinomios mencionados, y el software de geometría dinámica Cabri para graficar curvas Bézier.

Introducción

El curso de introducción al análisis numérico para estudiantes de ingeniería civil de la Universidad de Costa Rica contiene, en sus contenidos, algunos algoritmos que permiten interpolar una serie de datos en el plano. La interpolación es fundamental en la modelación matemática, particularmente en el tratamiento de la búsqueda de curvas de mejor ajuste en dos y tres dimensiones.

En el segundo semestre del año 2005 y el primer del 2006 decidimos incorporar en los dos grupos del curso las curvas de Bézier, B-splines y Nurbs por la importancia que tienen en algunos programas CAD de diseño asistido por computadora (Computer Aided Design) que son muy utilizados por los ingenieros civiles, como por ejemplo el Autocad.

La metodología utilizada consistió en distribuir las cinco horas semanales del curso en tres horas de laboratorio con 20 computadoras para los estudiantes y un servidor con proyector para el profesor y 2 horas de lecciones expositivas. Parte de la evaluación consistió en pruebas cortas en el laboratorio y algunos proyectos, sobretodo de programación en el ambiente de Mathematica.

Interpolación versus aproximación

Dado un conjunto de puntos en el plano, queremos modelar una curva suave que pasa por ellos o bien que los aproxima. Las funciones más utilizadas para la modelación son los polinomios, las funciones racionales, trigonométricas o exponenciales.

Si la curva deseada es polinomial y pasa por los puntos dados, la denominamos curva de interpolación polinomial.

Polinomio interpolante de Lagrange

Dado un conjunto de puntos

$$\left(x_0, y_0\right), \left(x_1, y_1\right), \cdots, \left(x_n, y_n\right) \text{ con } x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j$$

en el plano, existe un único polinomio P(x) de grado menor o igual a n tal que

$$P(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

Para dos puntos $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$, Lagrange utilizó la siguiente notación para la recta correspondiente:

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

Este polinomio cumple las condiciones $P_1(x_0) = y_0,\ P_1(x_1) = y_1$.

Para tres puntos $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

satisface $P_2(x_0) = y_0, P_2(x_1) = y_1, P_2(x_2) = y_2$.

En general, para n + 1 puntos, $\left(x_0, y_0\right), \left(x_1, y_1\right), \cdots, \left(x_n, y_n\right)$

$$P_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)} y_0 + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})} y_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k\left(x\right)$$

El comando *InterpolatingPolynomial[*$\left\{x_0, y_0\right\}, \left\{x_1, y_1\right\}, \cdots, \left\{x_n, y_n\right\}$**]** de Mathematica genera el Polinomio Interpolante de Lagrange que pasa por

$$\left(x_0, y_0\right), \left(x_1, y_1\right), \cdots, \left(x_n, y_n\right)$$

Con el comando *Plot* podemos graficar el polinomio anterior en el intervalo que contenga los puntos dados.

Si existen puntos dados con una misma abscisa y ordenadas distintas entonces podemos obtener una interpolación paramétrica para los puntos, introduciendo un nuevo parámetro t, y construyendo dos polinomios interpolantes de Lagrange:

$$\text{X(t)} = \text{InterpolatingPolynomial}[\left\{t_0, x_0\right\}\ , \left\{t_1, x_1\right\}\ , \cdots\ , \left\{t_n, x_n\right\}]$$

$$\text{Y(t)} = \text{InterpolatingPolynomial}[\left\{t_0, y_0\right\}\ , \left\{t_1, y_1\right\}\ , \cdots\ , \left\{t_n, y_n\right\}]$$

Graficamos la pareja de funciones anteriores con el comando *ParametricPlot.*

Otro método común para construir el polinomio de interpolación es el de interpolación de Newton en diferencias divididas (Burden y Faires, 2002, Davis, 1975, Powell, 1981) que hemos tratado en el curso de introducción al análisis numérico pero, por razones de espacio, no lo trataremos aquí. Los splines cúbicos también son muy importantes pues permiten un mayor control de los datos (De Boor, 1978, Schumaker, 1981).

Curvas de Bézier

Suponga que queremos aproximar una curva polinomial entre dos pontos P_0 y P_1 dados. La solución natural es un segmento de recta que pasa por P_0 y P_1,

$$P(t) = (1 - t)\,\mathrm{P}_0 + t\,P_1,\ 0 \le t \le 1$$

Una media ponderada entre P_0 y P_1.

Para generalizar para tres puntos P_0, P_1 y P_2 consideremos primeramente los segmentos de recta P_0P_1 y P_1P_2:

$$P_{01}(t) = (1 - t)\,\mathrm{P}_0 + t\,\mathrm{P}_1$$
$$P_{11}(t) = (1 - t)\,\mathrm{P}_1 + t\,\mathrm{P}_2$$

Posteriormente interpolamos entre $P_{01}(t)$ y $P_{11}(t)$:

$$P_{02}(t) = (1 - t)\,P_{01}(t) + t\,P_{11}(t) = (1 - t)^2\,P_0 + 2\,t\,(1 - t)\,P_1 + t^2\,P_2$$

La curva obtenida contiene como pesos en P_0, P_1 y P_2 tres funciones cuadráticas:

$$b_{02}(t) = (1 - t)^2,\ b_{12}(t) = 2\,t\,(1 - t),\ b_{22}(t) = t^2$$

Aplicando la misma idea, podemos definir una cúbica por 4 puntos P_0, P_1, P_2 y P_3:

$$P_{02}(t) = (1-t)^2\,P_0 + 2\,t\,(1-t)P_1 + t^2 P_2$$
$$P_{12}(t) = (1-\mathrm{t})^2\,P_1 + 2\,t\,(1-t)\,P_2 + t^2 P_3$$

$$P_{03}(t) = (1-t)\,P_{02}(t) + t\,P_{12}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3\,t\,(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$$

La curva obtenida contiene como pesos en P_0, P_1, P_2 y P_3:

$$b_{03}(t) \;=\; (1-t)^3,\; b_{13}(t) \;=\; 3t(1-t)^2$$
$$b_{23}(t) \;=\; 3t^2(1-t),\; b_{33}(t) \;=\; t^3$$

Por lo general, una curva de grado n puede ser construida de esta forma y se expresa como $P_{0n}(t) = \sum_{j=0}^{n} b_{j\,n}(t)\; P_j$, para ciertos polinomios de grado n.

Las curvas construidas anteriormente son conocidas como *curvas de Bézier* y las funciones de peso se denominan *base Bézier* o *polinomios de Bernstein*. Los polinomios de Bernstein de grado *n* son de la forma general $b_{kn}(t) \;=\; c_k t^k (1-t)^{n-k}$.

Los coeficientes c_k son dados por $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Los puntos P_0 y P_n son respectivamente el punto inicial y el final. Los puntos $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ son los puntos de control. La curva de Bézier pasa por P_0 y P_1, y es tangente a los segmentos $\overline{P_0P_1}$ y $\overline{P_{n-1}P_n}$.

Graficando curvas cúbicas de Bézier con Cabri

Seleccione mostrar ejes. Construya el segmento OA en el intervalo [0,1] en el eje x. Construya un punto T arbitrario en el intervalo OA y despliegue las coordenadas de T. Supongamos que las coordenadas de T son (a, 0).

Ahora construya 4 puntos distintos en el plano: P_0, P_1, P_2 y P_3. Exhiba las coordenadas de cada uno de los 4 puntos. Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ las coordenadas de P_0, P_1, P_2 y P_3 respectivamente.

Utilice la herramienta *calculadora* y efectúe las siguientes operaciones

$$(1-a)^3\, x_0 + 3(1-a)^2\, a\, x_1 + 3(1-a)\, a^2\, x_2 + a^3\, x_3$$
$$(1-a)^3\, y_0 + 3(1-a)^2\, a\, y_1 + 3(1-a)\, a^2\, y_2 + a^3\, y_3$$

Guarde el primer resultado en x(t) y el segundo en y(t).

Utilice la herramienta *transferencia de medidas* y transfiera el valor de x(t) en el eje x. Sea X el punto generado.

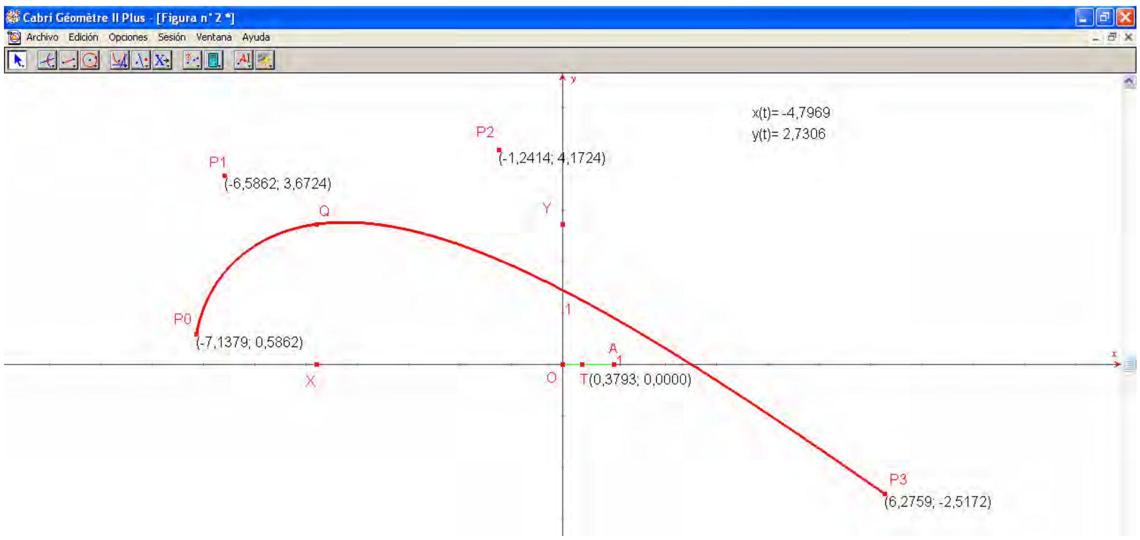
Igualmente transfiera el valor de y(t) en el eje y. Sea Y el punto generado.

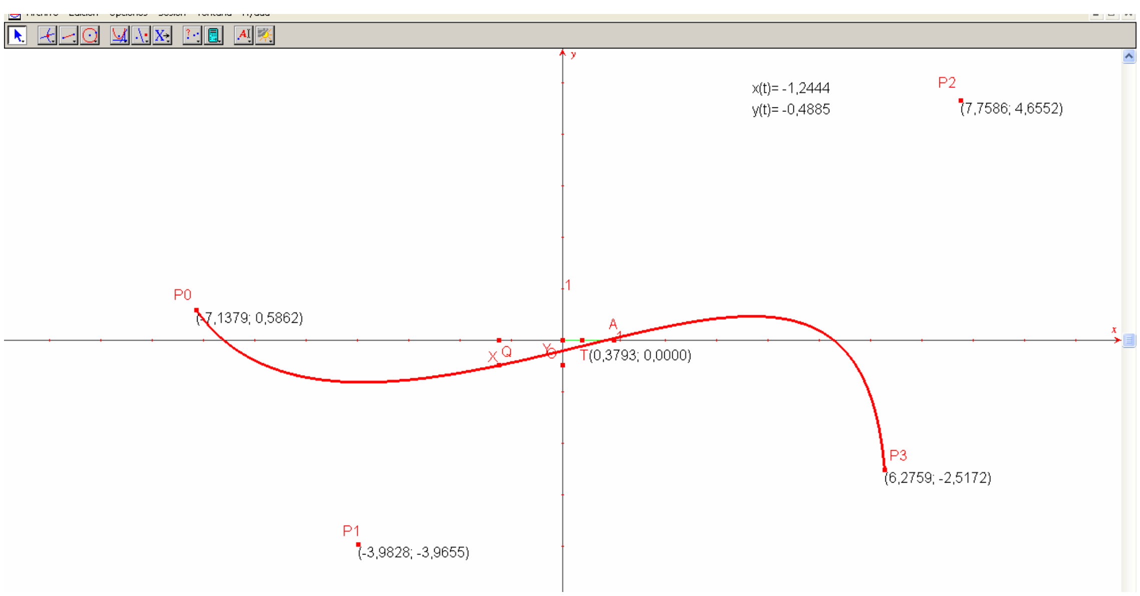
Construya una recta que pasa por X, perpendicular al eje x, y otra recta que pasa por Y, perpendicular al eje y. Sean Q el punto de intersección de las dos rectas.

Oculte las dos últimas rectas y utilice la herramienta *lugar* para determinar el lugar geométrico del punto Q cuando el punto T (correspondiente al valor del parámetro) recorre el intervalo OA.

La curva obtenida es la curva cúbica de Bézier para los 4 puntos dados. Observe que ella pasa por el punto inicial y el final.

Cambie la posición de los puntos de control P_1, P_2 para obtener nuevas curvas. Haga lo mismo con los puntos terminales P_0, P_3.





Las curvas Bézier son bastante útiles en el diseño gráfico por computadora pero presenta problemas para puntos muy alejados unos de los otros. Una mejor opción, que tratamos en el curso, son las denominadas curvas B-splines, que utiliza funciones base B-splines en lugar de los polinomios de Bernstein.

Conclusiones

La introducción de las curvas Bézier, B-Splines y Nurbs en el curso ha servido de motivación para los estudiantes quiénes asocian estos contenidos con el trabajo que realizan en los cursos de diseño asistido por computadora, graficación por computadora y con otras aplicaciones en ingeniería civil.

El uso del programa de geometría Cabri fue útil por razones didácticas y potenció la conexión de la geometría con el análisis numérico, mientras que la programación en Mathematica posibilitó la visualización de las superficies Bézier y B-Splines en el espacio tridimensional.

Referencias bibliográficas

Burden, R. L, & Faires, J. D. (2002). *Análisis numérico*. México: Thomson Learning.
Davis, P. J. (1975). *Interpolation and approximation*. Dover, New York.
De Boor, C. (1978). *A practical guide to splines*. New York: Springer-Verlag.
Powell, M. J. D. (1981). *Approximation theory and methods*. Cambridge: Cambridge University Press.
Schumaker, L. L. (1981). *Spline functions: basic theory*. New York: Wiley-Interscience.

DOS ENFOQUES PARA MEDIR LA RELACIÓN ENTRE ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS Y APROVECHAMIENTO MATEMÁTICO: LA EXPERIENCIA MEXICANA CON EMAT [§§]

José Gabriel Sánchez, Sonia Ursini
FES-Zaragoza UNAM. CINVESTAV-IPN. (México)
josegsr@servidor.unam.mx soniaul2002@yahoo.com.mx
Campo de investigación: factores afectivos. Nivel Educativo: básico
Palabras clave: actitudes, EMAT, tecnología, correlación

Resumen
El propósito de este trabajo es mostrar los resultados al contrastar dos perspectivas para analizar datos sobre actitudes hacia las matemáticas. Se encontraron diferencias entre lo que arrojan los dos procedimientos para 'calificar' las actitudes.

El rechazo hacia las matemáticas es una situación documentada por varios autores, quienes coinciden en que se constituye en un problema por el impacto que provoca dentro del ámbito escolar: en síntesis, un mayor índice de reprobación, incluso considerablemente más alto que en las demás asignaturas. En México, basta mencionar las estadísticas que reporta la Dirección General de Evaluación de la SEP, acerca de los resultados en pruebas de rendimiento de alumnos de escuelas de nivel básico y nivel medio de toda la República Mexicana: en una escala de 0 a 10, la calificación media para niños oscilaba de 4.9 a 5.1 y para niñas de 4.8 a 5.0. Es de resaltar que el impacto mencionado se extiende a la esfera familiar del estudiante; pero, también, con un referente emocional (e.g., angustia) a la personal, y al ámbito social provocando que los estudiantes, en especial las mujeres, elijan en menor proporción estudiar profesiones con una carga importante en contenidos matemáticos.

La conducta de rechazo a las matemáticas forma parte de un concepto más general e inclusivo, el de las actitudes. Estas han sido objeto de estudio en un número considerable de investigaciones tanto hacia las matemáticas, en general, hacia contenidos matemáticos particulares (e.g., aritmética, geometría, álgebra, estadística) (Navarro y Pérez, 1997) y en relación con la ciencia y la tecnología (Morales, 1998). La razón por la cual los estudiantes muestran tal rechazo por las matemáticas se finca en las actitudes que adquieren y que dirigen su conducta en una dirección de acercamiento o alejamiento a las matemáticas. De hecho esta dirección o disposición en favor o en contra del objeto actitudinal, por ejemplo, las matemáticas, es lo más característico y significativo de las actitudes.

Las actitudes se definen como una organización relativamente estable de factores cognitivos, afectivos y conductuales, es decir, de opiniones y pensamientos, sentimientos y emociones y conductas de una persona. Aunque las actitudes encuentran una connotación coloquial relativa a un estado de ánimo, gustos, intereses, entre otros referentes, desde el punto de vista científico, en particular bajo el modelo denominado tripartita, la actitud en matemáticas reúne tres componentes.

- El cognitivo, definido como un conjunto organizado y duradero de conocimientos, información y creencias acerca de las matemáticas. Por este componente el individuo reconoce la utilidad, la importancia, la facilidad y la comprensión de las matemáticas, así como sus opuestos.
- El afectivo, constituido por un elemento evaluativo, emocional y de sentimientos hacia las matemáticas y que está vinculado al gusto, agrado y evaluación de lo 'aburrido o divertido' de las matemáticas.

[§§] Este trabajo se llevo a cabo con el apoyo otorgado por el Fondo Sectorial de Investigación para la Educación al proyecto con la clave: SEPSEByN-2003-CO1-22

- Y el conductual, consistente en la inclinación de la actuación de la persona respecto a un objeto, esto es a la búsqueda o rechazo de las matemáticas.

En la conceptualización clásica de Allport (1968, en Navarro y Pérez, 1996) sobre la actitud, aparte de considerarla como un estado mental y neurológico, se enfatiza la influencia que ejerce sobre la respuesta del individuo hacia los objetos y situaciones actitudinales. Las actitudes no siempre se traducen en acción, son esencialmente tendencias, respuestas anticipatorios o disposiciones a responder de un modo dado (Mann, 2001). En palabras de Young y cols (1967, cit. en Auzmendi, 1992) son "...el comienzo de una acción que no se completa necesariamente" (p. 17). Es interesante destacar que no obstante de que las actitudes son tendencias o predisposiciones conductuales, hay evidencia de su propiedad predictiva no sólo de la conducta sino, incluso, de un estilo conductual, en ello radica gran parte de su importancia. En el terreno educativo, la relevancia de las actitudes se localiza en el influjo bidireccional que guarda con el proceso enseñanza-aprendizaje: se aprende más lo que es congruente con nuestras actitudes y, en contraparte, un adecuado proceso educativo puede mejorar las actitudes (Auzmendi, 1992 y Tobías, 1993).

Aunque en México, en general, es pequeña la cantidad de estudios sobre las actitudes hacia las matemáticas, y todavía menor el número de investigaciones sobre actitudes hacia las matemáticas apoyadas con tecnología (Navarro y Pérez, 1997; Eudave, 1994; entre otros), con rigor, no se puede afirmar que en otros puntos geográficos sea un tema poco explorado. Incluso, varios autores han externado su preocupación respecto a la repercusión o impacto en distintos aspectos del uso de la tecnología para apoyar la enseñanza de las matemáticas (cf. Fey, 1989 y Kaput y Thompson, 1992), por ejemplo, en las actitudes que esto genera en los estudiantes.

La investigación sobre actitudes en educación matemática está matizada predominantemente por el modelo tripartita, el cual prevalece también tácitamente, o no, en los instrumentos para evaluar las actitudes. Varios autores han enfatizado que es más fácil medir las actitudes que definirlas (cf. DiMartino y Zan, 2003). Independientemente de la sofisticación del instrumento empleado -por ejemplo, uno que pretenda hacer más consciente las reacciones afectivas de la persona- típicamente la actitud, positiva o negativa, es el resultado de promediar los tres componentes.

Sobre el procedimiento para 'calificar' las actitudes hay dos posturas: la que considera una contradicción en esta reducción, dado lo complejo del modelo tripartita, y la que observa "la correlación entre las mediciones de los tres componentes…" (Di Martino y Zan, 2003, p. 452). Al emplear la dicotomía actitud positiva-negativa, surgen de la primera postura varios cuestionamientos, *v.g.,* ¿una actitud positiva o negativa toma realmente en cuenta una interacción profunda entre los componentes? Al parecer el significado de positivo o negativo variará dependiendo del componente referido.

En México, la necesidad de evaluar la influencia actitudinal del uso de tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, específicamente dentro del proyecto Enseñanza de las Matemáticas Apoyadas con Tecnología (EMAT), nos condujo a elaborar y utilizar la escala denominada Actitudes hacia las Matemáticas y las Matemáticas Enseñadas con Computadora (AMMEC), estructurada en tres partes que siguen el modelo ABC (cf., Ursini et al., 2004). Resultados recientes de investigaciones que en este tema hemos realizado revelan que casi el 60% de nuestra muestra de estudiantes tiene una actitud neutral o de indecisión hacia las matemáticas, lo cual coincide con otros estudios mexicanos, mientras que el 40% restante exhibe una actitud ligeramente negativa. Además, se aprecian diferencias actitudinales según el sexo de los estudiantes, siendo significativamente más negativa en el sexo femenino que en el masculino. Si bien, hemos examinado la correlación entre cada componente de AMMEC con el rendimiento matemático prevalece el procedimiento de identificar la actitud con base en un promedio de las respuestas dadas a toda la escala. El propósito de este trabajo es mostrar posibles contrastes en los resultados al analizar los datos que hemos recopilado siguiendo una perspectiva diferente a la que hemos usado hasta ahora. La ventaja de proceder de tal manera estaría en la posibilidad de identificar con considerable exactitud los aspectos actitudinales que correlacionan positiva o negativamente con un mayor rendimiento matemático.

Método

Sujetos (Ss): Los datos reportados en este trabajo forman parte de una investigación planeada para desarrollarse en tres años. La muestra estudiada está constituida por 1056 alumnos de escuelas secundarias públicas donde está vigente el proyecto EMAT, es decir que usan tecnología, software (Hoja electrónica de cálculo y Cabri géomètre) y material diseñado ex profeso como apoyo en sus clases de matemáticas. De los Ss el 50.7 % son femeninos y el 49.3 % masculinos, su edad media fue de 12.7 años (d.s.= .55). Al momento de recopilar los datos, cuyo análisis se presenta aquí, los alumnos concluían el primer grado de secundaria.
Instrumentos: Los instrumentos usados fueron: a) la escala AMMEC diseñada en un formato tipo Likert de 5 puntos, compuesta por 29 reactivos que miden las actitudes hacia las matemáticas, las matemáticas enseñadas con el apoyo de la computadora y la auto-confianza para trabajar las matemáticas. Sus propiedades psicométricas de confiabilidad interna y validez de contenido y concurrente fueron adecuadamente establecidas (Ursini et al., 2004). Los 29 reactivos se organizan de la siguiente manera, en sus tres subescalas: Subescala 1: actitud hacia las matemáticas (11 items); Subescala 2: actitud hacia las matemáticas enseñada con computadora (11 items); y Subescala 3: autoconfianza en matemáticas (7 items).
b) Para evaluar el rendimiento matemático de los Ss se les examinó en las nociones elementales de matemáticas que deberían haber aprendido, para ello se empleó un cuestionario de opción múltiple de 14 reactivos, previamente validado y ampliamente usado para las evaluaciones escolares oficiales en población mexicana. Los contenidos evaluados fueron: divisibilidad, máximo común divisor, variación proporcional, cálculo de porcentajes, suma y resta de fracciones, cálculo del área de un rectángulo, cálculo de volumen por visualización, cálculo sencillo de probabilidad, razón, pre-algebra y tratamiento de la información.

Resultados

El contraste entre las dos perspectivas de análisis de las actitudes y su relación con el aprovechamiento, básicamente, se realizó comparando las pruebas estadísticas de correlación no paramétricas (la prueba de Spearman) aplicadas a los datos obtenidos, complementándolo con un análisis de distribución de frecuencias.
Primeramente, en la Tabla 1 se presentan las correlaciones existentes entre las subescalas que constituyen la escala AMMEC, en general se observa que los coeficientes o índices de correlación son estadísticamente significativos y oscilan entre la categoría de débiles y moderados, lo cual significa que las tres subescalas contribuyen equitativamente al tipo de actitud global o general que exhiben los sujetos estudiados.

Tabla 1. Intercorrelaciones de las tres subescalas de AMMEC[1.] Las correlaciones subrayadas son estadísticamente significativas (con $p < .01$).

SUBESCALA	1	2	3
1	---	**<u>.22</u>**	**<u>.13</u>**
2	---	---	**<u>.17</u>**
3	---	---	---

[1]En las subescalas: 1= Actitudes hacia las matemáticas; 2= Actitudes hacia las matemáticas con computadora; 3= Auto-confianza matemática

Se realizó un análisis de la distribución porcentual de la actitud negativa, neutral y positiva encontrada en la muestra estudiada, en las dos perspectivas de calificar las actitudes: globalmente y en cada uno de los componentes de las actitudes, en este caso en los tres rubros que evalúa la escala AMMEC, concordantes con el modelo tripartita. Se observó que aunque se mantiene la predominancia hacia la actitud neutral, es evidente la diferencia en la frecuencia relativa correspondiente a esta en cada componente actitudinal respecto a la calificación global de la actitud. Incluso, es interesante que en el tercer componente de AMMEC se vislumbre cierto porcentaje de actitud positiva. Sin embargo, es más sugestivo que la correlación entre actitud y aprovechamiento es diferente en cada caso: en la calificación global de la actitud es de -.04 ($p > .05$); con el primer componente de -.084 ($p < .01$); con el segundo es de -.60, correspondiente a una relación entre moderada y fuerte ($p < .05$) y en el tercer componente es una correlación positiva de +.10 ($p < .01$). No sobra decir que en el análisis por componente todas las correlaciones son estadísticamente significativas.

Siguiendo la lógica del segundo procedimiento para calificar las actitudes, pretendimos ahondar en el comportamiento actitudinal que ocurre dentro de cada uno de los componentes de la actitud, para lo cual seleccionamos algunos de los reactivos de cada subescala de AMMEC, específicamente algunos de los que mostraron en el proceso de validación y confiabilización de la escala una carga factorial alta. En la Tabla 2 aparece la lista de las preguntas escogidas de la subescala actitudes hacia las matemáticas, su carga factorial y su correlación con aprovechamiento, subrayadas las correlaciones significativas. En la distribución porcentual de la actitud negativa, neutral y positiva encontrada en los reactivos escogidos del primer componente actitudinal se observa la aparición de actitudes negativas y positivas, estas últimas con fluctuaciones en su valor porcentual dependiendo de la pregunta en cuestión, y la disminución de la frecuencia de actitud neutral.

Tabla 2.- Preguntas de AMMEC (Subescala 1) seleccionadas para examinar su influjo en las actitudes

No. de Reactivo	**PREGUNTA**	**CARGA FACTORIAL**	**Correlación con aprovechamiento**
1	Me gusta la clase de matemáticas	.78	r_s= .03
2	La clase de matemáticas es aburrida	.68	r_s= -.001
3	Matemáticas es la materia que me gusta más	.61	r_s=.004
4	Me gustan las matemáticas	.75	r_s= <u>.05</u>

La Tabla 3 muestra las preguntas elegidas de la segunda subescala, con su carga factorial y el valor correlacional con el aprovechamiento, nótese que la carga factorial de los reactivos no es baja.

Tabla 3.- Preguntas de AMMEC (Subescala 2) seleccionada para examinar su influjo en las actitudes

No. de Reactivo	PREGUNTA	CARGA FACTORIAL	Correlación con aprovechamiento
5	Me gusta aprender matemáticas con computadora	.43	r_s= -.08
6	Me gustaría ir mas seguido al laboratorio EMAT	.57	r_s=-.02
7	Aprendería más matemáticas si pudiera usar más tiempo la computadora	.57	r_s=-.032

Las frecuencias obtenidas muestran que la actitud positiva predomina sobre la negativa y neutral, en contraste con la subescala 1. Finalmente, la Tabla 4 muestra las preguntas elegidas de la tercera subescala de AMMEC, autoconfianza matemática, en esta predominó la actitud positiva respecto a la neutral que destacaba, evidentemente, de acuerdo al procedimiento de calificación mencionado en primer lugar.

Tabla 4.- Preguntas seleccionadas de AMMEC (Subescala 3).

No. de Reactivo	PREGUNTA	CARGA FACTORIAL	Correlación con aprovechamiento
8	Me gusta proponer la solución a problemas antes que los demás	.44	r_s=.04
9	En el equipo defiendo mis ideas	.61	r_s=.07

Conclusiones

En síntesis, los resultados de este trabajo hacen evidente diferencias en el tipo o dirección (positiva o favorable y negativa o desfavorable) de las actitudes según el procedimiento empleado para "calificarlas". Consideramos de sumo interés el cambio que ocurre en la predominancia de la dirección al transitar entre las distintas alternativas para calificar las actitudes, aparte del que se observa en su correlación con el rendimiento matemático; por ello, el tipo de evaluación de las actitudes necesariamente debe obedecer a un modelo *normativo*, en el sentido de especificar reglas universales entre los investigadores para su calificación. De otra manera, parafraseando a DiMartino y Zan (2003), cuando se dice que una actitud es positiva ¿realmente que significa positiva? Al calificar una actitud como positiva o negativa quizás se están ocultando situaciones extremadamente diferentes, que en una situación de *reeducación actitudinal* podrían requerir intervenciones muy diferentes. Si bien estamos de acuerdo en lo que diversos autores han remarcado, en cuanto a que resulta más fácil medir las actitudes que atender su connotación teórica, consideramos que al consensuar en un procedimiento para calificar las actitudes, especialmente bajo la segunda alternativa (consistente en considerar los componentes actitudinales), se estaría avanzando al respecto, pues se podría identificar la influencia específica de cada uno de los componentes sobre el constructo actitud. Una ventaja adicional de proceder con esta técnica radica en la posibilidad de ubicar con considerable exactitud los aspectos actitudinales que correlacionan positiva o negativamente con un mayor rendimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Auzmendi, E. E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitarias. Características y medición.* Bilbao: Mensajero.

Di Martino, P., y Zan, R. (2003). What does 'positive' attitude really mean? En Pateman, N. A., Dougherty, B. J., Zilliox, J. (Eds.) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 4. Utrecht (Netherlands). Hawaii Univ., Honolulu.

Eudave, M. D. (1994, Abril). Las actitudes hacia las matemáticas de los maestros y alumnos de Bachillerato. *Educación Matemática*. 6 (1), 46-58.

Fey, J. T. (1989) Technology and mathematics education: a survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics.* 20, 237-272.

Kaput, J. J., and Thompson, P. W. (1992). Technology and mathematics education. In Grows, D. AS. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Mc Millan. 515-556.

Morales, C. (1998, Junio-diciembre). Actitudes de los escolares hacia la computadora y los medios para el aprendizaje. *Tecnología y Comunicación Educativa.* 28, 55-65.

Navarro, N. L. y Pérez, S. E. (1997). Actitudes hacia la aritmética, geometría y álgebra. *Antología del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa.* Mérida, Yucatán-México. UAY-SEP. 91-96.

Tobias, S. (1993). *Overcoming math anxiety.* New York: W. W. Norton & Company

Ursini, S., Sánchez, J. G. y Orendain, M. (2004, Diciembre). Validación y confiabilidad de una Escala de Actitudes hacia las Matemáticas Enseñadas con Computadora. *Educación Matemática*. México: Santillana, 16, 3, 59-78.

PENSAMIENTO ALGORÍTMICO, TECNOLOGÍA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA

Eugenio Carlos Rodríguez
Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría (Cujae). (Cuba)
ecarlos@ind.cujae.edu.cu, ecarlos48@yahoo.com
Campo de investigación: pensamiento lógico, tecnología avanzada. Nivel educativo: superior
Palabras clave: matemática numérica, pensamiento algorítmico, tecnología

Resumen
La Matemática Numérica tiene un carácter especial, por ser la rama de la Matemática que se dedica al estudio de métodos eficientes de cálculo para resolver problemas con un grado de precisión “aceptable” (Álvarez, Guerra y Lau, 2004). Estos métodos utilizan algoritmos que describen los procedimientos de cálculo, mientras más eficientes son los algoritmos utilizados, más rápido se producirá la convergencia del método en cuestión hacia la solución exacta del problema. Muchos obstáculos se pueden encontrar en el aprendizaje de estos temas (Carlos y Ansola, 2003), entre ellos, dos de los más importantes son la falta de un desarrollo adecuado del pensamiento algorítmico en los estudiantes y el conocimiento poco preciso del concepto de convergencia. En este trabajo se muestra cómo el uso de la tecnología puede contribuir a salvar estos obstáculos.

La matemática numérica. Reseña histórica

La Matemática Numérica es la teoría y la práctica del cálculo eficiente y la estimación del error de la solución aproximada de muchos problemas de aplicación de la Matemática, sus métodos utilizan algoritmos que describen los procedimientos de cálculo, mientras más eficientes son los algoritmos utilizados, más rápido se producirá la convergencia del método en cuestión hacia la solución exacta del problema.

Sus orígenes datan de miles de años atrás, desde que los babilonios, 2000 años a.n.e, construyeran tablas matemáticas y elaboraron efemérides astronómicas. Arquímedes, en el año 200 a.n.e., usó los polígonos regulares como aproximaciones del círculo. En 1614 Neper publicó la primera tabla de logaritmos, y en 1620 los logaritmos de las funciones seno y tangente fueron tabulados con siete cifras decimales. A fines del siglo XVII comenzó a desarrollarse el cálculo con series, siendo fundamentales las contribuciones de Newton (1642-1727), llegando a su punto culminante con los trabajos de Euler, sus algoritmos infinitos aparecen con frecuencia en la forma de desarrollos en series. A principios del siglo XVIII, James Stirling (1692-1770) y Brook Taylor (1685-1731) sentaron los fundamentos del cálculo de diferencias finitas. Posteriormente están los importantes aportes de Gauss (1777-1855): solución de sistemas de ecuaciones lineales, cuadratura numérica, aproximación de funciones. También Lagrange aportó un método para la aproximación de funciones. En el siglo XIX se destacan los trabajos de Jacobi (1804-1851): método para la determinación de valores propios; Seidel (1821-1851): método para la solución de sistemas de ecuaciones lineales; Lobachevski (1793-1856): aproximación de todas las raíces de una ecuación polinomial; Runge (1895): solución de ecuaciones diferenciales, y otros. En el siglo XX, gracias al impetuoso desarrollo de las computadoras, las Matemáticas Numéricas alcanzaron tal desarrollo, que resulta interminable la enumeración de los Matemáticos que se dedicaron y que actualmente en el siglo XXI se dedican a ella. No obstante sus profundas raíces históricas, la Matemática Numérica, como disciplina independiente, surgió, según algunos autores, entre los años 1945 y 1950. El desarrollo sin precedentes de las computadoras imprimió su ritmo al desarrollo de la Matemática Numérica moderna, baste con señalar que en sólo treinta años la velocidad de cálculo aumentó de una operación por segundo, utilizando la regla de cálculo, hasta 3 000 000 de operaciones por segundo, o sea $3x10^6$ veces (Álvarez, Guerra y Lau, 2004).

Enseñanza y aprendizaje de la matemática numérica en carreras de ingeniería

Muchos obstáculos se pueden encontrar en el aprendizaje de la Matemática Numérica, entre ellos, dos de los más importantes son la falta de un desarrollo adecuado del pensamiento algorítmico en los estudiantes y el conocimiento poco preciso del concepto de convergencia. El uso de la tecnología como soporte didáctico puede contribuir a salvar estos obstáculos. La enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos han pasado, en los últimos años, desde el uso de las calculadoras electrónicas más elementales hasta el uso de modernas computadoras y potentes softwares profesionales (Carlos y Pérez, 2003).

Pensamiento algorítmico

La Matemática está llena de algoritmos: el de la multiplicación, el de la división, el algoritmo de Euclides o el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones, son ejemplos, entre otros (Fernández, 2005). Si tuviéramos que crear un algoritmo para conseguir un determinado objetivo en la vida real, deberíamos hacer un buen uso de la observación y del sentido común, anotando los pasos que, mediante la experimentación, nos permitieran obtener la secuencia de operaciones a realizar. A nivel científico, el proceso de creación de un algoritmo es más o menos parecido, sin separarse mucho de la idea anterior, también necesita de la observación, la experimentación y la lógica. Sin razonamiento lógico sería imposible crear algoritmo alguno, es vital, pero también lo es un gran dominio de la materia y un pensamiento creativo

La Matemática es una actividad mental y el pensamiento matemático se desarrolla cuando se hace Matemática. Hacer Matemática implica ante todo establecer relaciones. El rigor va unido a la Matemática desde las primeras experiencias que el niño tiene para conseguir conocimiento. Pero rigor no es abuso de formalización y simbología sin significado, rigor es, ante todo, claridad mental. El desarrollo del pensamiento, en particular el pensamiento algorítmico, no se consigue sólo cuando trabajamos actividades de un contenido específico, sino en el momento en el que una acción o un conjunto de acciones se esfuerzan por conquistar la construcción de una idea. La Matemática Numérica es una de las ramas de la Matemática que más contribuye al desarrollo del pensamiento algorítmico. El uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática Numérica contribuye notablemente al aprendizaje de los algoritmos numéricos de cada método, pero es imprescindible un diseño adecuado del proceso para utilizar la tecnología como un medio didáctico, que contribuya al mejor aprendizaje de los estudiantes.

El concepto de convergencia

Cualquier concepto matemático tiene muchos caminos para llegar a él, uno de estos caminos, el más usual, para llegar al concepto de convergencia es a través del estudio de los conceptos de: sucesiones y límite de sucesiones, series numéricas y suma de una serie, y series de funciones y función suma. El concepto de límite es la base para la comprensión del de convergencia, pero el límite es uno de los conceptos más abstractos y difíciles para los estudiantes, y el énfasis fundamental se hace en calcular límites y no en comprender e interpretar el concepto.

El concepto de límite, fundamentalmente el límite de una sucesión, y en particular el concepto de suma de una serie, contribuyen notablemente a conceptualizar el concepto de convergencia (Lehmann, 1995). Sin embargo, el énfasis fundamental se hace en la convergencia y las pruebas de convergencia, se dedica mucho tiempo a determinar si una Serie converge o no, pero muy poco, o ninguno, a determinar hacia qué valor converge la Serie, vuelve a quedar oculto el concepto en la aplicación de procedimientos de cálculo. El concepto de convergencia se retoma en el estudio de las integrales impropias y su convergencia, "si el límite existe y es finito". Por último, aparece con mucha fuerza en la Matemática Numérica, con mayor complejidad en los métodos iterativos de Jacobi y Seidel para resolver sistemas de ecuaciones lineales, por tratarse de la convergencia de una sucesión de vectores.

La calculadora y el "esquema de cálculo"

Con cualquier herramienta de cálculo, la enseñanza de la Matemática Numérica ha partido del análisis del conjunto completo de procedimientos que conducen a la solución del problema matemático que es objeto de estudio, o sea el algoritmo, pasando por la prueba de la convergencia del método o, al menos, mostrando la convergencia en los ejemplos y ejercicios resueltos. Uno de los recursos que se utilizó para el estudio de los algoritmos fue el esquema de cálculo, con el cual se podía mostrar al estudiante, mediante la realización de varios pasos, el desarrollo del algoritmo y la convergencia de un método.

Un ejemplo típico se muestra con la solución de una ecuación por el método de Newton-Raphson.
Dada la ecuación $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ se puede calcular la raíz en el intervalo [2,4 ; 2,5] mediante la fórmula de Newton-Raphson, después de probar que para $x_0 = 2{,}5$ esta fórmula converge a dicha raíz. Se utiliza entonces el siguiente esquema de cálculo, el cual, además de organizar los cálculos manuales, ayuda al profesor a mostrar el proceso de convergencia del método:

n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	x_{n+1}
0	2,375	28,75	0,0826089	2.4173931
1	0,0843686	27,3043304	0,0031035	2,4142878
2	0,0019769	26,6292347	0,000742	2,4142136
3	0,000010	26,6274179	0.000000	2,4142136

Se observa como $f(x_n)$ converge a cero, lo que implica que el término corrector se haga también prácticamente cero. Las formas más rápidas de cálculo se lograron con la introducción de las calculadoras electrónicas, desde las más elementales hasta las calculadoras científicas más modernas.

Las computadoras y los paquetes profesionales

El surgimiento de las computadoras ha revolucionado el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (Castro, 2001), introduciendo nuevos paradigmas que han transformado al docente, al estudiante y a las instituciones. Una de las ramas de las Matemáticas que primero recibió este impacto fue la Matemática Numérica. El surgimiento de los llamados Asistentes Matemáticos ha sido la solución para la mayoría de los que enseñan Matemática Numérica. Los Asistentes Matemáticos, como DERIVE, MATLAB, etc, no son paquetes didácticos, ni están hechos para enseñar Matemática, luego, su uso debe estar acompañado de un diseño metodológico que garantice su uso racional y el aprendizaje de los estudiantes. Algunos Asistentes Matemáticos, como el MATLAB, traen cajas de herramientas con los algoritmos numéricos ya programados para distintos métodos y además dan facilidades de programación al usuario.

Un software didáctico

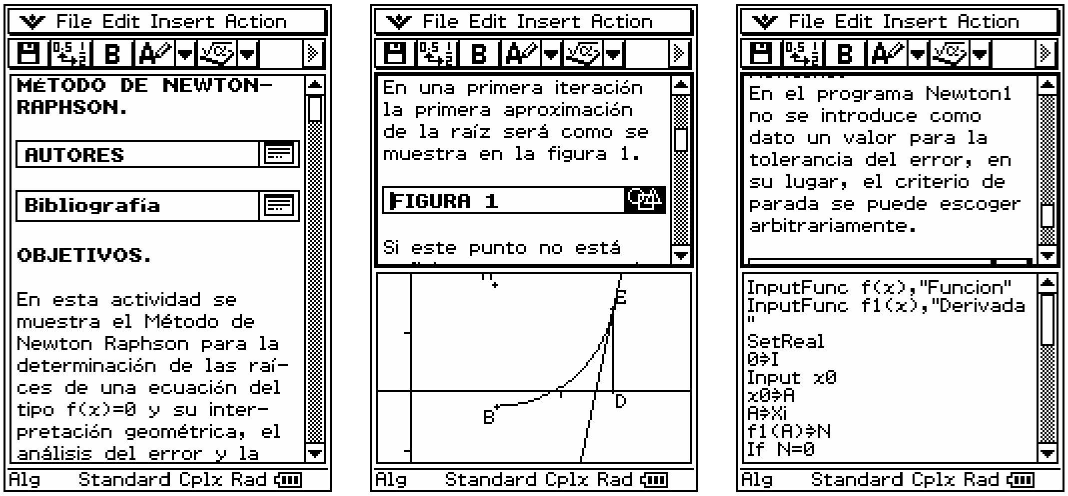
Un grupo de docentes del Departamento de Matemática General, en la Facultad de Ingeniería Industrial de la Cujae, desarrollaron un software especialmente dirigido a su uso para la enseñanza de la Matemática Numérica, que en su última versión lleva el nombre de MN-2000 (Álvarez, 1998). En este software la ejecución de todos los procesos iterativos se realiza paso a paso, de modo que puede apreciarse la forma en que se produce la convergencia, e incluso se puede trabajar en problemas en que no hay convergencia, contribuyendo así, notablemente, al aprendizaje de la Matemática Numérica.

La calculadora graficadora

Durante mucho tiempo se ha utilizado la computadora como una herramienta muy útil en la enseñanza de estos temas, generalmente se asocia “el uso de la tecnología” al empleo de la computadora. El desarrollo más reciente de calculadoras graficadoras con importantes prestaciones gráficas, de programación y de edición de textos, permiten su uso como una herramienta potente para los mismos propósitos (Preiss, 2002), veamos un ejemplo.

Se puede utilizar la calculadora *CASIO ALGEBRA FX 2.0* para resolver una ecuación del tipo f(x)=0, en un intervalo [a, b] dado **(**Ansola y Carlos, 2005) mediante el método de Bisección. Las posibilidades de programación de la calculadora permiten desarrollar programas, que en el aprendizaje de algoritmos numéricos resultan ser una herramienta de un valor incalculable, puesto que contribuyen al desarrollo del pensamiento algorítmico del estudiante, al mismo tiempo que facilitan el aprendizaje del algoritmo numérico.

Otra calculadora utilizada con estos fines es la *ClassPad 300*. Una de las herramientas novedosas en esta calculadora es la creación de e-activities, las cuales consisten en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, construcciones geométricas, tablas, etc., en forma ordenada, para presentar cierta información que nos permita solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado. Por esto es de esperar que puedan ser muy útiles como herramientas en la organización y distribución del material didáctico de una clase. (Moya et al, 2005). Esta calculadora también posee posibilidades de programación, que se utilizan en una e-activitie para mostrar programas y para orientar tareas de programación de métodos. A continuación se muestran algunas pantallas del ClassPad Manager referidas a la e-activity del Método de Newton-Raphson (Ansola y Carlos, 2006; Carlos, 2006).



En ambos casos la calculadora se utiliza como herramienta para mostrar paso a paso el desarrollo de los algoritmos, contribuyendo así al aprendizaje de los mismos y al aprendizaje del proceso de convergencia, en esto radica su principal potencialidad tecnológica.

Conclusiones

La necesidad de estudiar métodos eficientes de cálculo, preferiblemente métodos aproximados, para resolver complejos problemas de ingeniería, así como de estimar o acotar el error cometido en esta aproximación, hizo que la Matemática Numérica fuera una de las primeras ramas de la Matemática en recibir el impacto de las nuevas tecnologías

Dos de los obstáculos más importantes que se pueden encontrar en el aprendizaje de la Matemática Numérica son la falta de un desarrollo adecuado del pensamiento algorítmico en los estudiantes y el conocimiento poco preciso del concepto de convergencia. El uso de computadoras y calculadoras con prestaciones gráficas, de programación y de edición de textos posibilitan la ejecución de los procesos iterativos paso a paso, de modo que pueda apreciarse la forma en que se produce la convergencia, e incluso se puede trabajar en problemas en que no hay convergencia. Posibilitando un mejor aprendizaje de los algoritmos y del proceso de convergencia, lo que permite afirmar que el uso de la tecnología como soporte didáctico en la enseñanza de la Matemática Numérica contribuye notablemente a salvar estos obstáculos.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M, Guerra, A. y Lau, R. (2004). *Matemática Numérica*. La Habana. Cuba: Editorial Félix Varela.

Álvarez, M. (1998). Paquete didáctico de Métodos Numéricos sobre Borland Delphi. En *Memorias del Tercer Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. (Tomo II, pp. 102-105*). La Habana, noviembre de 1998.

Ansola, E. y Carlos, E. (2005). Determinación de raíces de ecuaciones utilizando la calculadora gráfica como medio de enseñanza y aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 18*, pp.717-721.

Ansola, E. y Carlos, E. (2006). Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 19*, pp. 953-961.

Carlos, E. (2006). Enseñanza semipresencial de la Matemática utilizando como soporte tecnológico una calculadora graficadora. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 19*, pp. 948-952.

Carlos, E. y Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica. Experiencias didácticas. *Ponencia invitada. Resúmenes de la Séptima Escuela y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp.147). Chilpancingo, México.

Carlos, E. y Pérez, O. (2003). Retos de la comunidad matemática educativa ante el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones. *Ponencia invitada. Resúmenes de la Séptima Escuela y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 146). Chilpancingo, México.

Castro, A. (2001). Incorporación de tecnología en la enseñanza de la Matemática. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 14, pp. 277-280. Grupo Editorial Iberoamérica.

Fernández, J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en Matemáticas. Unión 4, pp. 31-46.

Lehmann, J. P. (1995). Converging Concepts of Series: Learning from History. *LEARN FROM THE MASTERS! The mathematical Association of America,* pp. 161-180. USA 1995.

Moya L. M. y Novoa J. F. Ejemplos de ayudas pedagógicas con calculadoras programables para el mejoramiento de la enseñanza en Matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana*. Volumen 10. Bogotá , Colombia.

Preiss, R. (2002). Modelos del Cálculo Diferencial. Programación y Proyectos con Calculadora CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS. Colección Textos de Docencia Universitaria. Universidad Diego Portales. Santiago de Chile.

DISEÑO DE SOFTWARE PARA LA ENSEÑANZA DEL CONTEO EN EDUCACIÓN PREESCOLAR

Patricia Martínez, Marina Kriscautzky
Cómputo para Niños. Dirección General de Servicios de Cómputo Académico. Universidad Nacional Autónoma de México. (México)
mfalcon@servidor.unam.mx, mkriscau@servidor.unam.mx
Campo de investigación: uso de tecnología en educación básica. Nivel educativo: básico
Palabras clave: preescolar, conteo, software

Resumen
En este trabajo se presentan los resultados de la utilización de dos interactivos sobre distintos aspectos de la noción de número: correspondencia término a término, conteo, serie numérica e interpretación de los números del 1 al 20. La experiencia se realizó utilizando una computadora dentro del salón de clase con dos grupos de tercero de preescolar (5-6 años) de un jardín de niños público de la Ciudad de México.
El propósito del trabajo es el de mostrar de qué manera el uso de la tecnología puede ser beneficioso para la educación infantil. En este caso particular, los dos juegos ofrecen situaciones de reflexión sobre el sistema de numeración, plantean retos a resolver con diversos procedimientos y devuelven una retroalimentación visual de las acciones que permite a los niños aprender de sus errores.

Introducción

En este trabajo presentamos un enfoque didáctico de uso de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas. En este caso específico, para la enseñanza de nociones de conteo y sistema de numeración en el nivel preescolar. La premisa básica de este enfoque es que la computadora constituye una herramienta de trabajo que hace posible la reflexión, en este caso matemática, desde un punto de vista que otras herramientas no pueden hacerlo.
En el programa de preescolar de México, dentro del campo formativo del pensamiento matemático, se propone: “Para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático, el trabajo en este campo se sustenta en la resolución de problemas, bajo las consideraciones siguientes:

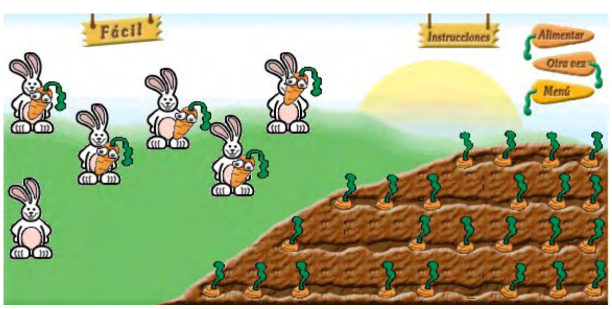
- Un problema es una situación para la que el destinatario no tiene una solución construida de antemano. La resolución de problemas es una fuente de elaboración de conocimientos matemáticos.
- Los problemas deben dar oportunidad a la aparición de distintas formas espontáneas y personales de representaciones que den muestra del razonamiento que elaboran los niños.” (p: 73-74).

Los interactivos que presentamos fueron diseñados considerando estas premisas. Además, aportan un elemento de fundamental importancia: la retroalimentación visual de las acciones de los alumnos. Esto es lo que la tecnología ofrece de manera específica a la enseñanza. Los problemas de conteo pueden presentarse a los niños con todo tipo de materiales. Sin embargo, acompañar esas situaciones con el uso de interactivos en la computadora ofrece la posibilidad de que la retroalimentación de las acciones de los alumnos no provenga del maestro o de los pares sino del resultado visual que devuelve la máquina.
Por otra parte, los interactivos fueron diseñados tomando en cuenta los principios que investigadores en didáctica de las matemáticas reconocen en relación con el concepto de número y de las nociones que los niños preescolares tienen del conteo:
Correspondencia uno a uno. Se logra cuando el niño considera cada elemento de una colección una sola vez, mientras asigna un nombre a cada elemento.

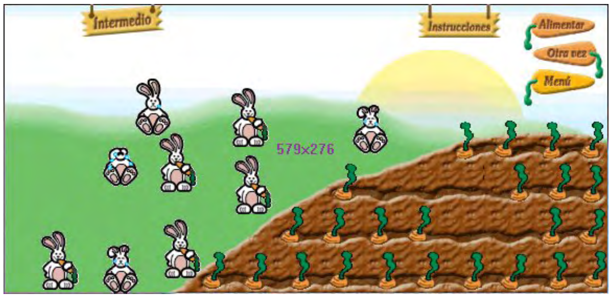
Orden estable. Es la posibilidad de nombrar siempre en el mismo orden a los objetos que se cuantifican. Esto implica saber la serie numérica en el orden correcto.
Cardinalidad. Esto significa saber que el último nombre (número) que se dice al cuantificar una colección representa la cantidad de objetos en la misma.
Abstracción. Significa saber que cada objeto de una colección es considerado como una unidad sin importar sus características físicas.
Orden irrelevante. Significa que no importa por qué elemento de la colección se empiece a contar, pues los nombres (números) son independientes de los objetos en sí mismos. (Programa de Educación Preescolar, 2004: 71).

Descripción de los dos interactivos: qué aprenden los niños y por qué

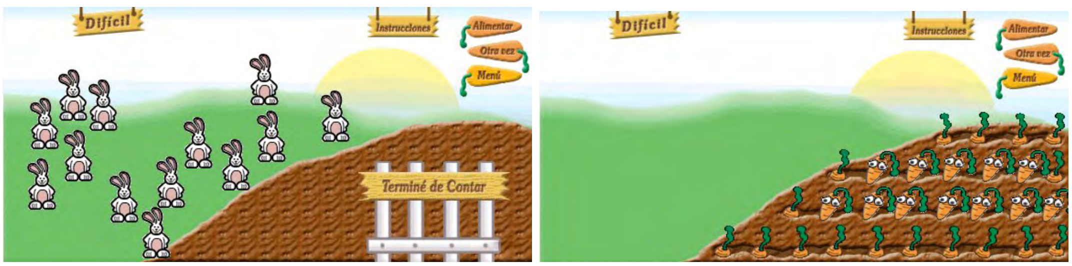
Los juegos que a continuación se presentan tienen el propósito de trabajar situaciones de conteo. Ambos juegos están disponibles en la dirección URL http://www.puemac.matem.unam.mx. La página corresponde al Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, que se desarrolla en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. La sección “Matechavos” se desarrolla por el área de Cómputo para Niños, de la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico de la UNAM.
Los dos juegos que se presentan (Los conejos hambrientos y el Caminito del Zoológico) se encuentran en la subsección “Échale coco”.
En Los conejos hambrientos se propicia que los niños cuenten los elementos de una colección y construyan una colección con igual cantidad de elementos. El juego es una adaptación de una actividad comentada por Guy Brousseau en un artículo (Brousseau,.1993). En el Caminito del zoológico se propicia el conteo sobre la serie numérica, la identificación del orden de la serie y de la notación que corresponde a cada número.
Los conejos hambrientos
El juego consiste en alimentar conejos, dándole una zanahoria a cada uno. Hay 3 niveles de dificultad en los que se consideran dos variables:
La cantidad de conejos. En el nivel fácil aparecen aleatoriamente de 3 a 6 conejos; en el nivel intermedio de 7 a 12 conejos y en el nivel difícil de 10 a 20 conejos.
La manera de alimentar los conejos. En el nivel fácil, las zanahorias se pueden arrastrar, una a una, hacia los conejos. En este caso se trata de favorecer la relación término a término entre los elementos.



En el nivel intermedio es necesario sacar del plantío todas las zanahorias que se requieren para los conejos que aparecen. En este caso se propone favorecer el conteo de todos los conejos para calcular la cantidad de zanahorias. Sin embargo, los niños pueden verificar las veces que consideren necesarias la cantidad de conejos.



En el nivel difícil primero aparecen sólo los conejos y cuando se terminan de contar, desaparecen y aparecen sólo las zanahorias. En este caso se propicia que el niño cuente los conejos y que cuando esté seguro de la cantidad, cuente la cantidad de zanahorias. Hasta el momento de verificar el resultado se pueden ver los conejos y las zanahorias juntos y se puede saber si el conteo fue correcto.



En los tres niveles de dificultad, al oprimir el botón *alimentar*, la computadora hace una verificación del resultado y si todos los conejos tienen una zanahoria y no sobran ni faltan, estos brincan de gusto. Si faltan zanahorias, los conejos que se quedan sin comer, lloran y si sobran zanahorias éstas se quedan en el plantío. En ambas situaciones, los niños se pueden dar cuenta si contaron de menos o contaron de más a través de la retroalimentación visual que proporciona la computadora.

El caminito del zoológico

El juego consiste en un caminito que tiene dibujos de animales en las casillas y un juego de tarjetas con esos animales. Hay que voltear una tarjeta e identificar, sobre una serie numérica, cuánto hay que avanzar en el caminito para llegar a la casilla que corresponde a ese animal. Se tienen 4 niveles de dificultad. En el nivel 1 aparece un caminito de 10 elementos. Los niños tienen que identificar el número que corresponde a un dibujo dentro del caminito. En el nivel 2 se eleva el número de elementos a 20.

Nivel 2

En el nivel 3 cambia la situación: las tarjetas tienen números y se debe identificar a qué animal del caminito se llega con dicho número. En el nivel 4 aparece la serie numérica de todo el caminito y desaparecen dos o tres números que los niños deben escribir con el teclado.

Nivel 3

Nivel 4

Procedimientos de resolución de niños de tercero de preescolar

Se pusieron a prueba los interactivos en dos grupos de tercero de preescolar de un jardín de niños público en la Ciudad de México. En dicha institución los niños cuentan con una computadora dentro del salón de clases, lo que permite a la educadora realizar actividades que incluyen el uso de la computadora para diversos fines. En general se utiliza de manera simultánea con otros materiales, de manera que los niños realizan actividades diferentes al mismo tiempo.

Durante la experimentación se pudieron identificar diversos procedimientos de resolución de los niños frente a los problemas planteados en cada uno de los niveles de los interactivos. Veamos algunos ejemplos de *Los conejos hambrientos*.

a) Sin conteo. Un procedimiento posible observado consistió en sacar todas las zanahorias sin contar los conejos para asegurarse de que todos tuvieran una.

b) Conteo asistemático. Los niños recurren al conteo, pero, dado que los conejos aparecen desordenados, fallan a la hora de contar porque repiten algún elemento o no cuentan otro.

c) Conteo sistemático. Una vez que los niños recurren al conteo y lo hacen sin repetir un elemento y sin saltarse conejos, pueden presentar otro tipo de dificultades. Por ejemplo, cuando la cantidad es mayor que 10 requieren verificar más de una vez el total de conejos contados. Esto los lleva a contar los conejos para saber cuántas zanahorias necesitan y volver a contarlos cada vez que necesitan controlar la cantidad de zanahorias que han sacado.

   Con cantidades grandes (más de 15 conejos) el control del conteo es un poco más difícil. La mayor parte de los niños no retiene el número de conejos contados y presenta dificultades para resolver el nivel difícil del juego. Esto representa un reto para pensar en una forma de hacer un registro escrito de la cantidad de conejos.

Veamos ahora algunos ejemplos de procedimientos con El caminito del zoológico:

a) Conteo de todos los números. La mayor parte de los niños entrevistados requirieron contar desde el inicio de la serie numérica para ubicar el número buscado. Esto sucedía tanto la primera vez que contaban como en todas las ocasiones en que verificaban el mismo número.

b) Conteo a partir de un número. Pocos niños lograron tomar una casilla como referencia para volver a hacer el conteo. Por ejemplo, una pareja de niños cuentan las 20 casillas, pero se pierden en el conteo de los números. Una de las niñas propone reiniciar el conteo a partir del 10.

c) Reconocimiento de los números escritos. Cuando en el juego tienen que identificar el número en una tarjeta y encontrar la casilla que corresponde a él, los niños presentan dificultades para identificar los números mayores que 10.

d) Escritura de números**.** En el último nivel del juego los niños tuvieron dificultades para escribir los números mayores que 10, a pesar de que podían identificar de manera oral cuál era el número faltante.

Conclusión

Los procedimientos mostrados por los niños confirman que los interactivos plantearon situaciones para "hacer matemáticas", ya que pudieron participar con los conocimientos que tenían y construir nuevos a medida que descubrían nuevas maneras de resolver los problemas. El trabajo en parejas les permitió aprender del otro, mejorar la estrategia de resolución y buscar mejores y más eficientes maneras de contar y controlar sus respuestas. Podemos afirmar que el uso de interactivos diseñados con este enfoque favorece el desarrollo de las competencias matemáticas que se plantean en el campo formativo del pensamiento matemático.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. En: E. Sánchez y G. Zubieta (Ed.), *Didáctica de las matemáticas. Escuela francesa* México, DME. (pp.1-67).

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En: C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador. pp.65-94.

González, G, Martínez, P. (2004). Los conejos hambrientos: una actividad interactiva para trabajar conteo con niños preescolares. En *Memorias del XX Simposio Internacional de Computación en la Educación* Puebla, Puebla, (16 al 20 de octubre de 2004).

Ramírez, L. (2003). La enseñanza de los primeros números en preescolar. En *La enseñanza de los primeros números en preescolar. Exploración de una alternativa didáctica.* Tesis de maestría no publicada. Departamento de Investigaciones Educativas CINVESTAV-IPN pp. 1-33.

SEP (2004). *Programa de educación preescolar 2004.* México, SEP

SEP (1994). *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas Primer Grado.* México, SEP.

LAS PRÁCTICAS DE MODELACIÓN VIRTUAL

César López Godoy, Marisol Juárez Calderón, Jaime L. Arrieta Vera
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
cesar@lavcibas.com
Campo de investigación: socioepistemología, tecnología avanzada. Nivel educativo: medio
Palabras clave: modelación virtual, simulación, experimentación, prácticas de modelación

Resumen
A lo largo de tres años de trabajar con modelación, hemos constituido un grupo de investigación cuyos productos son el desarrollo de software, la elaboración de diseños de aprendizaje basados en la modelación, así como tesis de licenciatura y de maestría. Planteamos que a través del uso de software de simulación para modelar un fenómeno, la misma práctica de modelación se modifica, para demostrar lo anterior, nos encontramos realizando investigaciones para caracterizar a las *prácticas de modelación virtual* y encontrar las diferencias que existen con las prácticas de modelación presencial. La perspectiva teórica que adoptamos es la Socioepistemología y la nuestra línea de investigación es la que discurre acerca de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento matemático.

Introducción

La perspectiva teórica, desde donde atendemos las diferentes problemáticas que plantean los sistemas escolares, considera a los fenómenos educativos como un todo complejo, donde intervienen múltiples dimensiones, a saber, la relativa a los conocimientos, referida a cuáles son las prácticas que le dan origen a su vivencia en las diferentes comunidades y su perspectiva en ellas, la dimensión epistemológica, tocante a cómo surge el conocimiento; la cognitiva, que se refiere a las interacciones de los actores en el proceso de construcción de los conocimientos; la didáctica, referente a cuáles son las formas de intervención en los contextos escolares para propiciar la construcción del conocimiento; confluyendo en un lugar y en un tiempo, en un contexto social. Esta perspectiva es la que llamamos "socioepistemología". Planteamos una distinción con las investigaciones donde la ciencia es única e independiente de los "sujetos"; donde se reportan diferentes resultados o construcciones sin atender las interacciones que dieron lugar a ellas; donde se omiten los contextos sociales. Planteamos atender los fenómenos de construcción del conocimiento matemático en los sistemas escolares, considerando a éstos en su íntima relación con su entorno. Sostenemos que las actividades de construcción del conocimiento son situacionales. Los conocimientos cobran vida y tienen sentido en los contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores, escolares o no escolares, y es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad. La línea de investigación que sostenemos tiene como planteamiento central que al ejercer las prácticas sociales los actores construyen, como herramientas para intervenir en contextos sociales, sus conocimientos. Una parte importante de nuestras investigaciones se centra en la recuperación para las escuelas de prácticas que son ejercidas en diferentes comunidades, en recuperar el papel de la experimentación en la generación del conocimiento y del laboratorio como un escenario donde se produce el aprendizaje. Las prácticas sociales que se han elegido son las que se desarrollan en interacción con fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.), conjeturando y realizando predicciones utilizando modelos. A este tipo de prácticas es a lo que hemos llamado las prácticas de modelación. No compartimos la visión acerca de que los modelos matemáticos son ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales o algebraicas, nuestra idea de modelo es más amplia, es todo aquello que es utilizado para entender, predecir o intervenir en el comportamiento de un fenómeno, incluyendo los modelos numéricos, gráficos, físicos, icónicos u otros. Desde nuestra perspectiva, la modelación es entendida como una práctica que ejercen diversas comunidades, y que adquiere particular significado en el laboratorio. Estas prácticas de modelación parten de la manipulación de un fenómeno y construyen constructos llamados modelos, los cuales son necesarios para su predicción y entendimiento. En este proceso, los estudiantes construyen sus conocimientos matemáticos como herramienta para realizar su actividad, de la misma forma construyen versiones del fenómeno que se constituye como su conocimiento científico. En este sentido hemos desarrollado diseños de aprendizaje basados en la modelación de fenómenos, los cuales han sido puestos en escena en condiciones experimentales. Uno de los objetivos, por lo tanto, de esta investigación, es el aportar elementos acerca de los procedimientos, herramientas, argumentos y significados que construyen los estudiantes durante la puesta en escena de dichos diseños en condiciones escolares, que serán base fundamental para la viabilidad de la implementación de los resultados de nuestras investigaciones en los sistemas escolares. Asimismo, ante las dificultades de contar en las escuelas, con un laboratorio con los materiales adecuados y suficientes, hemos desarrollado aplicaciones de software que simulan fenómenos se física y química. La incorporación de estos medios genera prácticas de modelación con ciertas características, éstas son las que hemos llamado "prácticas de modelación virtual".

Los principales trabajos del grupo de investigación que sirven como antecedentes a esta propuesta son el de Álvarez, Galeana y Mendoza (2002), que versa sobre el tratamiento de datos experimentales como base para diseños de aprendizaje en el aula, proponen un método de ajuste de datos, el método gráfico. Aquí se dan evidencias de las habilidades cognitivas que desarrollan los estudiantes de los primeros semestres de ingeniería del Instituto Tecnológico de Acapulco, a saber, la visualización, la relación entre los parámetros algebraicos y geométricos de los diferentes modelos y la predicción, así como también se habla sobre el ruido en los datos como una condición de incertidumbre y cómo la domesticación del azar puede servir como base de diseños de situaciones de aprendizaje. Arrieta (2003), plantea, en términos generales, que la construcción de los conocimientos se da en el ejercicio de prácticas sociales, en particular las prácticas de modelación; en este sentido, menciona que la modelación en el aula es un proceso de matematización que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en un salón de clases, usando matemáticas para interpretar y transformar fenómenos de la naturaleza. En López (2005), encontramos plasmadas las ideas de modelación en un software llamado Laboratorio Didáctico de Matemáticas (antecedente del Laboratorio Virtual de Ciencias), creado para su utilización en PC's, destacando dos características: permite la interactividad de los alumnos y aborda el ajuste de datos experimentales a partir de una propuesta novedosa como lo es el ajuste gráfico de datos. Juárez (2006), estudia las prácticas de modelación virtual como auxiliar en la enseñanza de las ciencias, construyendo un simulador de elasticidad de resortes (SER), para la calculadora Classpad 300 de Casio® y presenta el Laboratorio Virtual para Calculadoras.

Asimismo, un antecedente importante de este proyecto, en cuanto a la formación de recursos humanos, lo constituye la experiencia de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, cuya Maestría en Matemática Educativa, acaba de ingresar al Padrón Nacional de Posgrados en agosto pasado. Además, los convenios de colaboración entre esta Universidad y Casio Académico para el desarrollo del proyecto “Laboratorio Virtual para la calculadora Classpad 300 de Casio”.

Resumiendo, en los últimos años se han realizado esfuerzos para constituir un grupo de investigación en modelación, así como de un cuerpo teórico y metodológico para la elaboración de diseños de aprendizaje basados en la modelación como práctica social. El grupo ha presentado distintos trabajos en foros nacionales e internacionales, donde se comparten experiencias con profesores de otros estados del país, así como extranjeros, acerca de la importancia del ejercicio de prácticas para la construcción social del conocimiento. Nuestro acercamiento a la modelación de fenómenos en el aula, hoy es posible, entre otras cosas, gracias a dos cuestiones importantes, al desarrollo de los medios tecnológicos y al desarrollo teórico metodológico en el campo de la matemática educativa sobre la modelación de fenómenos, la socioepistemología.

La problemática

A lo largo de la historia de la humanidad se ha mostrado cómo el conocimiento científico se ha constituido en interacción con diversos fenómenos. Ejemplos de estos hechos son los desarrollos del siglo XVII, como se muestra en los trabajos de Galileo o los de Isaac Newton. La experimentación se ha mostrado como una práctica que conlleva a la generación de conocimiento científico. Sin embargo, es sorprendente cómo, en nuestros días, en los contextos escolares, la experimentación es una práctica poco usual. Por ejemplo, es común observar cómo es que se pretende el aprendizaje de la Física, sin experimentación, sin laboratorios, resolviendo problemas artificiales, donde su respuesta se obtiene manipulando fórmulas, despejando variables y operando con entes algebraicos y numéricos. Esta forma de tratar a la Física trae como consecuencia que los estudiantes conciban a ésta, como un conjunto de fórmulas muy complicadas y con reglas difíciles de aplicar. En este sentido, nos proponemos rescatar la experimentación como práctica que propicia la construcción de conocimiento científico por los actores de los sistemas educativos y el laboratorio como contexto de dicha práctica. Este planteamiento es acorde a la tesis central de nuestras investigaciones. Planteamos que es en el ejercicio de prácticas sociales donde los actores construyen sus conocimientos como herramientas para su actuar. La práctica propuesta para su ejercicio es la experimentación y la modelación de fenómenos en el laboratorio de ciencias. El laboratorio lo entendemos, no sólo como el espacio físico, el laboratorio lo concebimos como el contexto del ejercicio de prácticas. De esta manera, el laboratorio incluye tanto los elementos físicos, como los elementos que conllevan el desarrollo de las interacciones de los actores. El laboratorio así, es un contexto experimental donde los actores construyen su conocimiento.

Se ha impulsado, en muchos casos por falta de recursos y en otros por desidia o intencionalmente, el aprendizaje de las ciencias en un aula aislada, sin laboratorios, sin interacción con las problemáticas de diferentes comunidades; se ha marcado una separación artificial entre las diferentes partes de las ciencias, la Física, la Química y las Matemáticas y éstas de las Ciencias Sociales; se ha desarrollado un aprendizaje individualista, donde el estudiante se enfrenta aislado a problemas ideales, donde el cooperar es hacer trampa o es ser deshonesto; y se ha mantenido el aula de ciencias, en particular la de matemáticas, lejos de los medios tecnológicos. A esta problemática, agregamos la falta de investigación en el área y de la incorporación de sus resultados a los sistemas educativos, las carencias de infraestructura y de capacitación de los profesores, así como de la incorporación de medios tecnológicos al discurso escolar. Se ha minimizado y desdeñado el problema de la enseñanza de las ciencias, reduciéndolo a voluntad de los actores. Así, se piensa que basta con que el profesor "sepa muy bien" su materia y el alumno estudie "mucho" para que el aprendizaje se dé. Desde nuestro punto de vista, el asunto es más complejo, tiene que ver con la interacción de los actores, con la interacción con los fenómenos situados en un contexto, con el uso adecuado de los medios tecnológicos, con la investigación alrededor de los fenómenos del aprendizaje de las ciencias. A este respecto, la Facultad de Matemáticas de la Universidad

Autónoma de Guerrero, ha venido desarrollado investigación relacionada con el aprendizaje de las ciencias en el ejercicio de las prácticas de modelación. En este sentido ha desarrollado diseños de aprendizaje donde los actores que intervienen en ellos construyen conocimiento en el ejercicio de la modelación de diversos fenómenos.

Metodología

La metodología que se utilizará para la realización del proyecto es la adecuada a la perspectiva teórica que lo sustenta y acorde a la problemática que se atiende. Hemos acudido a la construcción de diseños de aprendizaje siguiendo la metodología de Ingeniería Didáctica, adecuada a nuestra perspectiva. Destacamos brevemente algunos aspectos que consideramos relevantes de esta metodología. Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una ingeniería didáctica, a saber:

- Análisis preliminar.
- Construcción del diseño de aprendizaje y su análisis a priori.
- Experimentación, puesta en escena.
- Análisis a posteriori y validación del diseño de aprendizaje.

En el análisis preliminar, luego de establecer los objetivos específicos de la investigación, se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico, así como de las relaciones entre los mismos. Desde nuestra perspectiva, agregamos la componente socio-cultural, que contempla la construcción del conocimiento como una serie de prácticas sociales de referencia, compartidas por un grupo social. En la fase del análisis a priori y construcción del diseño de aprendizaje, se eligen las posibles variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. Asimismo, se establecen las hipótesis de trabajo, es decir, qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados; en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador. Es, en consecuencia, una fase tanto prescriptiva como predictiva. Una vez determinadas las variables didácticas, y establecido el objetivo del diseño de aprendizaje, se pasa a la construcción del diseño de aprendizaje. En la etapa de experimentación, puesta en escena, se procede a la "puesta en escena" del diseño de aprendizaje, es decir, se realiza la implementación en condiciones controladas estrictamente por el investigador y se buscan los medios adecuados para perpetuar los sucesos que se desarrollen durante la ejecución del diseño, para su posterior análisis. Es muy importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa. El análisis a posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena del diseño de aprendizaje; es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba. De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación del diseño de aprendizaje. En esta validación, a diferencia de otros acercamientos tales como los de carácter cuantitativo para los cuales el éxito se mide en tanto el grupo experimental logra mejores resultados que el grupo de control, es decir, entre los resultados externos a la situación planteada en sí misma, en la metodología planteada, la validación es interna, pues se confrontan dos fases de la misma metodología, lo esperado y lo que se obtuvo en realidad, entre las conjeturas y expectativas que fueron explicitadas en el análisis a priori y los resultados analizados y categorizados en el análisis a posteriori. Las adecuaciones planteadas a la ingeniería didáctica, se derivan de considerar a las prácticas sociales como base en lugar de elementos de la obra matemática.

Avances

Actualmente se han desarrollado varios simuladores para PC's y calculadoras, entre los cuales están:

- Elasticidad de Resortes
- Enfriamiento de Líquidos
- Caída Libre
- Movimiento Armónico Simple
- Movimiento Rectilíneo Uniforme
- Movimiento Pendular

Estos simuladores cuentan con sus respectivos diseños de aprendizaje y pueden ser utilizados de manera local en una computadora o calculadora de manera aislada, es decir, cada participante tiene su propio simulador y ve en la pantalla de su monitor o calculadora solamente lo que él hace.

Sin embargo, los simuladores de Elasticidad de Resortes, Enfriamiento de Líquidos, Movimiento rectilíneo uniforme y Movimiento Pendular, han sido desarrollados para su uso en un ambiente colaborativo, es decir, los participantes pueden formar salas virtuales de experimentación a través de una red de área local (LAN) e incluso a través de la red Internet. De esta manera, se extiende su uso fuera del salón de clases.

Conclusiones

Debido a que esta es una investigación aun en proceso, nos encontramos llevando a cabo diversos estudios. Actualmente contamos con un proyecto piloto para implantar el Laboratorio Virtual en condiciones escolares en cinco escuelas secundarias del Estado de Guerrero, así como también planteamos caracterizar a las *Prácticas de Modelación Virtual* desde la *interculturalidad*, interactuando conjuntamente y en tiempo real a través de una plataforma de Internet, estudiantes de las Universidades Autónoma de Guerrero, Autónoma de Chiapas, Autónoma de Nayarit, Autónoma de Yucatán y el Instituto Tecnológico de Acapulco.

Planteamos que de estas investigaciones obtendremos evidencias para caracterizar a las prácticas de modelación virtual y observar sus coincidencias y discrepancias con las prácticas de modelación presencial. Así como también, podremos aportar elementos para incorporar el uso de laboratorios en las clases de ciencias y promover una cultura del uso de medios electrónicos en el aula de matemáticas que conlleve a fomentar el razonamiento científico y analítico de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Álvarez, S., Galeana, A. y Mendoza, J. (2002). *La incertidumbre como base epistemológica de diseño de situaciones de aprendizaje en el aula*. Tesis de Maestría no publicada, CIIDET, Querétaro, México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada, DME, Cinvestav, México.

Juárez, M. (2006). *Las prácticas de modelación virtual como auxiliar en la enseñanza de las Ciencias, un caso de estudio: La construcción del Simulador de Elasticidad de Resortes (SER) para la calculadora ClassPad 300 de Casio®.* Tesis de Ingeniería no publicada, Instituto Tecnológico de Acapulco, México.

López, C. (2005). *El Laboratorio Didáctico de Matemáticas (LDM): Un software elaborado para la construcción de conocimiento matemático en el aula.* Tesis de Ingeniería no publicada, Instituto Tecnológico de Acapulco, México.

EL USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA EN LA PREPARACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD

Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Pablo Gómez Fuentes, Nelson Hernández Reyes
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae). (Cuba)
e_hazday@yahoo.com

Campo de investigación: tecnología avanzada. Nivel educativo: medio
Palabras clave: preparación para el ingreso, calculadora graficadora

Resumen

Hoy no se puede pensar en un país moderno con un sistema universitario excluyente, por más que éste brinde una preparación “de excelencia” (Zito, 2006).

En muchas universidades donde se enseñan carreras vinculadas a las ciencias, como las ingenierías, se desarrollan cursos de ingreso para los jóvenes, que tienen la función de repasar los contenidos dados en el nivel anterior. El Departamento de Matemática General de la Cujae, ha desarrollado desde hace alrededor de diez años un curso de este tipo (Fernández, 2003). En este trabajo se presenta el desarrollo de un curso de auto preparación en Matemática para el ingreso a la Universidad, en el que se utiliza como soporte tecnológico una calculadora graficadora, aprovechando las posibilidades que ofrece la calculadora CASIO ClassPad 300.

Introducción

La masificación de la enseñanza universitaria constituye un fenómeno mundial y responde a profundos cambios sociales que dieron como resultado una multiplicación de las tareas asociadas a los estudios superiores. Hoy no se puede pensar en un país moderno con un sistema universitario excluyente, por más que éste brinde una preparación “de excelencia” (Zito, 2006).

En muchas universidades donde se enseñan carreras vinculadas a las ciencias, como las ingenierías, se desarrollan cursos de preparación para el ingreso, que tienen la función de repasar los contenidos dados en el nivel anterior, aunque en la práctica muchos alumnos manifiestan desconocer temas básicos que deberían haber adquirido en el nivel medio.

El presente trabajo se presentó en la Relme 20 como un Taller, en el cual se mostraron las experiencias con el uso de la calculadora CASIO ClassPad 300 en un curso de auto preparación en Matemática para el ingreso a la Universidad.

Una experiencia en este tipo de curso

El Departamento de Matemática General de la Facultad de Ingeniería Industrial de la Cujae, en La Habana, ha desarrollado desde hace alrededor de diez años un curso de preparación para el ingreso a la Educación Superior, con el propósito de realizar un entrenamiento en Matemáticas sobre los contenidos que se examinan en las Pruebas de Ingreso (Fernández, 2003). Los objetivos de este curso son:

- Consolidar los contenidos de Matemática impartidos en Secundaria Básica y Preuniversitario.
- Desarrollar en los estudiantes habilidades de cálculo y para la solución de problemas.
- Propiciar un clima de estudio en el que se puedan desarrollar valores tales como la responsabilidad individual y colectiva, la voluntad, la honestidad y la solidaridad.

La experiencia de largos años de trabajo con alumnos de nuevo ingreso en la universidad y la evaluación de sus dificultades e insuficiencias fundamentales en el aprendizaje de la Matemática, aconsejaron que este curso se diseñara con los siguientes contenidos:

- Calculo Numérico
- Elementos de Lógica
- Trabajo con variables
- Funciones
- Solución de problemas
- Geometría y Trigonometría

Usando la tecnología

Tomando como base esta experiencia, se ha trabajado en el desarrollo de un curso de auto preparación en Matemática para el ingreso a la Universidad, en el que se utiliza como soporte tecnológico una calculadora graficadora, aprovechando las posibilidades que ofrece la calculadora CASIO ClassPad 300 para desarrollar documentos electrónicos que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes, las llamadas e-activities.

Una e-activity consiste en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, construcciones geométricas, tablas, etc., en forma ordenada para presentar cierta información que nos permita solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado. Por esto es de esperar que puedan ser muy útiles como herramientas en la organización y distribución del material didáctico de una clase. (Ansola y Carlos 2006; Moya et al, 2005).

Para este curso se han desarrollado, hasta el momento, cinco e-activities para los siguientes temas:

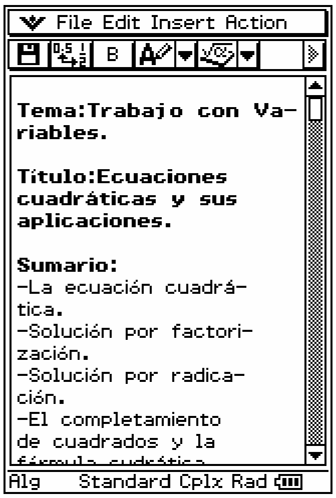
- Cálculo Numérico
- Sistemas Lineales de dos ecuaciones
- Sistemas Lineales de tres ecuaciones
- Trabajo con Variables
- Solución de Problemas

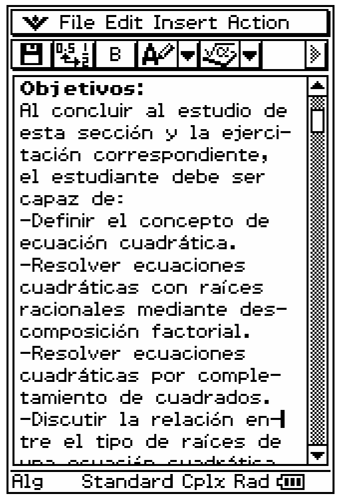
Tomemos por ejemplo el tema de Trabajo con Variables y dentro de este el subtema correspondiente a Ecuaciones Cuadráticas y sus aplicaciones.
Para el tratamiento de este tema, el curso de desarrolla en el siguiente orden, que se adapta al desarrollo en la forma clásica para este tema (Baldor, 1947; Campistrous, 1989). El orden es el siguiente:

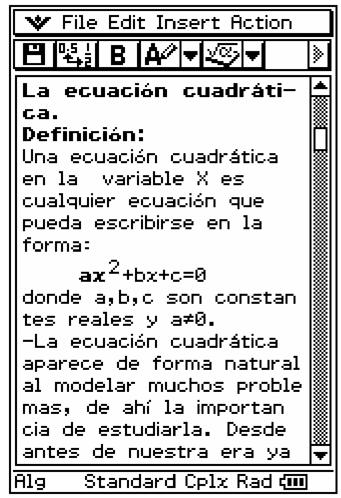
- Definición de ecuación cuadrática.
- Solución por factorización. Ejemplos.
- Solución por radicación. Ejemplos.
- El completamiento de cuadrados y la fórmula cuadrática. Ejemplos.
- Estrategia al resolver ecuaciones cuadráticas.
- El discriminante y los tipos de raíces.
- Ejercicios.
- Estudio independiente.

Las e-activities desarrolladas para el curso tienen la siguiente estructura: Título, Sumario, Objetivos, Introducción, Desarrollo, Ejercicios propuestos y Bibliografía. Además se han incorporado notas con aclaraciones importantes que el estudiante debe tener presente.
A continuación se muestran algunas pantallas de la calculadora CASIO Classpad 300, en las que se puede apreciar el desarrollo del curso.

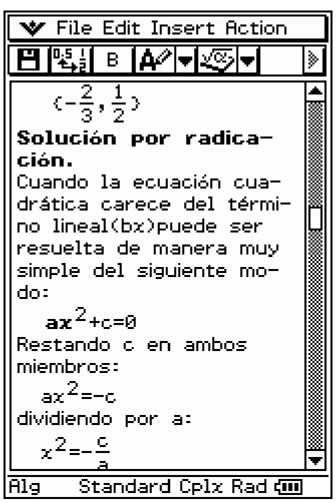
En las tres primeras se muestra la presentación del tema con título, sumario y objetivos, así como el comienzo del desarrollo, se observa que el propósito es lograr que el estudiante pueda desarrollar el estudio independiente, o sea la auto preparación.

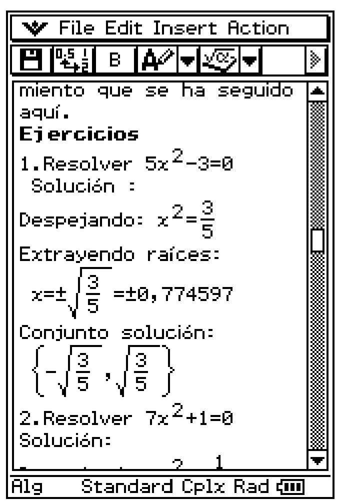


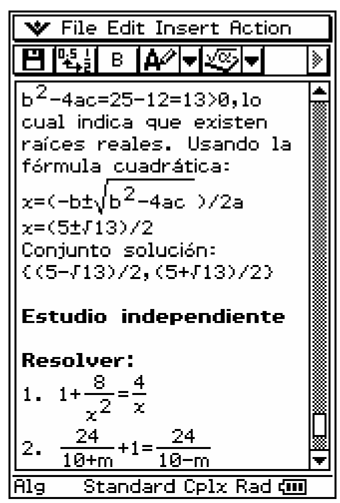




Las siguientes pantallas muestran otras partes del desarrollo. Todo el curso esta diseñado sobre la calculadora, utilizando sus potencialidades, para facilitar el auto aprendizaje. De la misma manera se desarrolló el curso para los distintos temas.







Los resultados de experiencias anteriores con el uso de esta tecnología muestran que los estudiantes consideran que la calculadora es una herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente y les permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa (Ansola y Carlos 2006).

Conclusiones

En este trabajo se presentó una experiencia en el desarrollo de un curso de auto preparación en Matemática para el ingreso a la Universidad, en el que se utilizó como soporte tecnológico una calculadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma para facilitar el auto aprendizaje de los estudiantes, mediante las llamadas e-activities. La calculadora se muestra como una herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente y que permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa.

La calculadora se utiliza en este caso como un recurso didáctico, como medio de enseñanza-aprendizaje, no como una simple herramienta de cálculo.

Referencias bibliográficas

Ansola, E. y Carlos, E. (2006). Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 19.

Baldor, A. (1947). Aritmética: Teoría-Práctica. Cultural, S. A, La Habana.

Campistrous, L. y otros (1989). Matemática 10mo grado. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Fernández, M. y Burguet, I. (2003). Experiencias en cursos propedéuticos de Matemática en la preparación para los exámenes de ingreso a la Educación Superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Volumen16, Año 2003. Tomo 2. Grupo Editorial Iberoamérica.

Moya L. M. y Novoa J. F. Ejemplos de ayudas pedagógicas con calculadoras programables para el mejoramiento de la enseñanza en Matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana.* Volumen 10. Bogotá, Colombia.

Zito, S. (2006) El Aprendizaje de la Matemática y el Acceso a Estudios Superiores. Portal Educativo de las Américas. http://www.educoas.org/portal/es/ tema/editorial /nov04.

SISTEMA DE ENSEÑANZA/APRENDIZAJE INTELIGENTE PARA GRAFOS

Natalia Martínez Sánchez, Gheisa Ferreira Lorenzo, Zoila Zenaida García Valdivia,
Maikel León Espinosa
{natalia,gheisa, zgarcia, mle}@uclv.edu.cu
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. (Cuba)
Campo de investigación: modelos matemáticos. Nivel educativo: superior
Palabras clave: grafo, interfaz, inteligente

Resumen
La teoría de grafos es un tema de estudio de la Matemática Discreta que por su importancia está presente en asignaturas de la carrera Ciencia de la Computación. Dificultades presentadas con respecto a su aprendizaje, han conducido al diseño e implementación de un Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente (SEAI) que aborde esta temática. Los SEAI se caracterizan por aplicar técnicas de Inteligencia Artificial (IA) al desarrollo de sistemas de enseñanza asistida por computadoras, donde el término "inteligente" se asocia a la capacidad del sistema de adaptarse dinámicamente al desarrollo del aprendizaje del estudiante. El sistema para Grafos ha sido implementado en la Herramienta computacional para Elaborar Sistemas de Enseñanza/Aprendizaje Inteligentes (HESEI), la cual además de utilizar técnicas de IA emplea Mapas Conceptuales. Con la combinación de ambos recursos se logra la adaptación del SEAI con mayor precisión según las características del alumno. Como resultado de este trabajo se obtuvo un Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente para la enseñanza de Grafos, específicamente en lo que se refiere a la terminología básica y ejemplos. El sistema obtenido se ha probado con estudiantes de segundo año de la carrera de Ciencias de la Computación en la Facultad de Matemática, Física y Computación de la Universidad Central de Las Villas.

Introducción

La teoría de grafos es un tema de estudio de la Matemática Discreta que por su importancia está presente en otras asignaturas de la carrera Ciencia de la Computación (Johnsonbaugh, 1999). Dificultades presentadas con respecto a su aprendizaje, han conducido al diseño e implementación de un Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente que, a la vez que da tratamiento a esta materia, la vincula con asignaturas como: Estructuras de Datos, Modelos de Optimización y Compiladores, mediante la ejemplificación.
El desarrollo de esta aplicación de software educativo obliga a conjugar el trabajo de equipos multidisciplinarios con el fin de mejorar el aprendizaje de un dominio del conocimiento a través del uso de la tecnología. Para esto, se busca generar un entorno de aprendizaje lo más similar posible a lo que sería una buena instrucción en un entorno real.
En el campo de los Sistemas de Enseñanza/Aprendizaje Inteligentes, este tipo de aplicaciones se caracterizan por aplicar las técnicas de Inteligencia Artificial (IA) al desarrollo de sistemas de enseñanza asistida por computadoras, donde el término "inteligente" se asocia a la capacidad del sistema de adaptarse dinámicamente al desarrollo del aprendizaje del estudiante (Bello, 2002).

Desarrollo

En los últimos años la enseñanza de las Matemáticas, así como la forma de "hacer Matemáticas" está cambiando. La presencia de computadoras en los hogares, en las escuelas, junto a la existencia de una gran cantidad de buenos programas diseñados específicamente para "hacer Matemáticas", está lentamente produciendo cambios metodológicos importantes y positivos en la enseñanza de esta disciplina (García L, 2001).

Las computadoras constituyen un estupendo laboratorio matemático que permite experimentar, suplir carencias en el bagaje matemático del alumno, desarrollar la intuición, conjeturar, comprobar, demostrar, y en definitiva "ver las situaciones matemáticas" de una forma práctica. Por esta razón se han convertido en un valioso instrumento didáctico.
El software educativo, o más específicamente, el software para la educación en matemáticas involucra a tres grandes ciencias:

- La psicología, mediante un conocimiento no elemental de las ciencias cognitivas.
- La matemática, mediante la creación de un adecuado dominio de conocimiento para cualquier tipo de sistema o programa y con la creación de algoritmos eficientes.
- La computación, que hace factible instanciar la reunión de los dos mundos anteriores.

Según Shute (1993), en evaluaciones de software educativo se ha encontrado que la mayoría del software en el mercado tiene en general uno o dos de los atributos mencionados, pero relegan de manera importante a otro de ellos. Puede encontrarse, por ejemplo, software con gran capacidad de manejo de imágenes y que en realidad constituye todo un portento de programación pero de una pobreza enorme en su capacidad de enseñar matemáticas. O bien software con intenciones didácticas pero de una pobreza en los algoritmos empleados que conlleva a errores conceptuales matemáticos.Es necesario entonces, que para la producción de software educativo las personas tengan presentes estos tres elementos y que la carencia de alguno de ellos debilita la intención de este tipo de software que es ayudar, o ser un instrumento de ayuda, en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.
En el Centro de Estudios de Informática (CEI) de la Facultad de Matemática Física y Computación en la Universidad Central "Martha Abreu" de Las Villas (UCLV) radica el grupo de investigación "Informática Educativa", en el cual se desarrollan proyectos de investigación que utilizan las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones para lograr mejores resultados en la enseñanza/aprendizaje. En uno de estos proyectos se implementa una herramienta computacional para elaborar Sistemas de Enseñanza/Aprendizaje Inteligentes, denominada HESEI, la cual utiliza técnicas de IA y Mapas Conceptuales con el objetivo de adaptar con mayor precisión el Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente a las características del alumno. Esta herramienta facilita el diseño e implementación de software educativos destinados a cualquier nivel de enseñanza. Sus fundamentos teóricos se apoyan en la Ingeniería del Conocimiento, las técnicas de IA, así como la Ciencia Pedagógica. Por medio de entrevistas y sesiones realizadas con los profesores más experimentados se recopilan conocimientos valiosos que se pueden formalizar y codificar (García Z, 2000).
La figura 1 muestra la arquitectura de HESEI, que incluye Razonamiento Basado en Casos (RBC) y un algoritmo de Reconocimiento de Patrones (RP) para lograr la implementación del Modelo del Estudiante con una previa selección de rasgos.

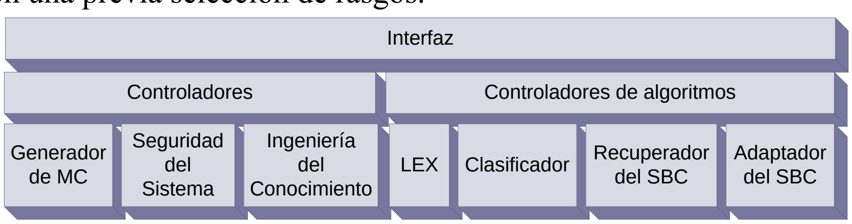


Figura 1. Arquitectura de HESEI

Una breve descripción de algunas componentes que conforman la arquitectura del sistema se presenta a continuación:

- *Interfaz*: Tiene un editor que le permite al profesor introducir toda la información necesaria para preparar los Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente y editar las preguntas.

Además, a través de esta componente el estudiante podrá interactuar con el Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente elaborado en forma de Mapa Conceptual adaptado según sus características.

- *Seguridad del sistema*: Componente encargada de identificar el tipo de usuario que interactúa con la herramienta.
- *Ingeniería del Conocimiento*: Esta componente capta todo el conocimiento que el profesor desea tener en cuenta en su Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente.
- *LEX*: Está estrechamente relacionada con la componente Ingeniería del Conocimiento. Se utiliza un algoritmo (LEX) de RP para reducir el espacio de representación inicial (rasgos que conforman el Modelo del Estudiante).
- *Clasificador*: Es una estructura de datos utilizada para asignarle a cada estudiante el entrenador adecuado en cada tópico y así ir conformando su Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente.
- *Recuperador y adaptador del SBC*: En esta componente se implementó un Sistema Basado en Casos compuesto por la Base de Casos y los algoritmos de recuperación y adaptación de casos según resultados obtenidos en (Gutiérrez, 2003).

Gran parte del éxito de cualquier Sistema Basado en el Conocimiento es que se realice una buena ingeniería del conocimiento teniendo en cuenta que el usuario no es experto en informática (Bello, 2002). La herramienta utiliza técnicas de RP para ayudar al profesor en esta tarea. La estructura de todo Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente elaborado con HESEI como el que se expone en este trabajo se muestra en la figura 2, dándole la posibilidad al profesor de estructurar su sistema desde el tema general a tratar, hasta las preguntas que realizará en cada tópico:

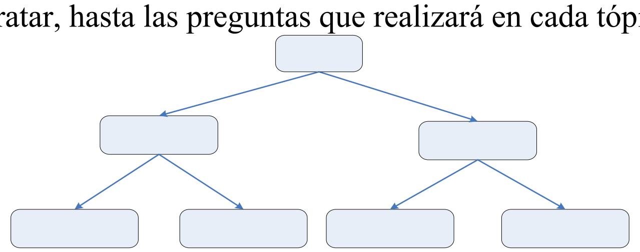


Figura 2. Estructura de un Sistema de Enseñanza/Aprendizaje elaborado con HESEI

Un diagrama general de casos de uso de HESEI se muestra en la figura 3. En el mismo se presenta los dos actores fundamentales del sistema: Estudiante y Profesor. El Sistema de Enseñanza/aprendizaje Inteligente de Grafos, al ser una aplicación concreta de HESEI permite también estos actores a través de los cuales se maneja todo el proceso:

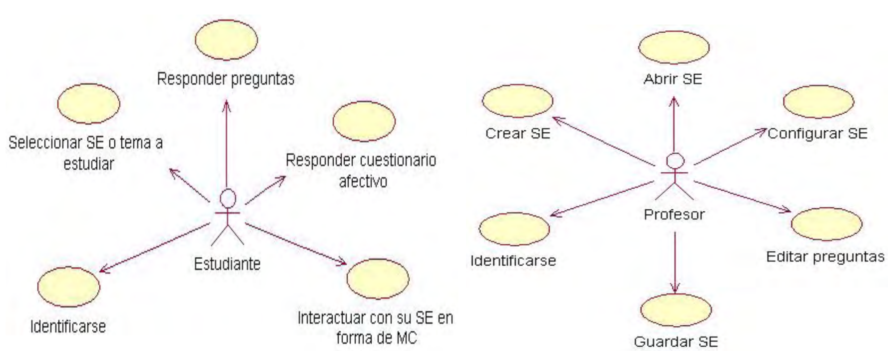


Figura 3: Diagramas de Casos de Usos de los actores en HESEI

En las figuras 4 y 5 se aprecia un ejemplo del Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente implementado con HESEI para aprender la teoría de grafos, específicamente la figura 4 representa un esquema de la estructuración de los contenidos del tema de grafos en la Matemática Discreta.

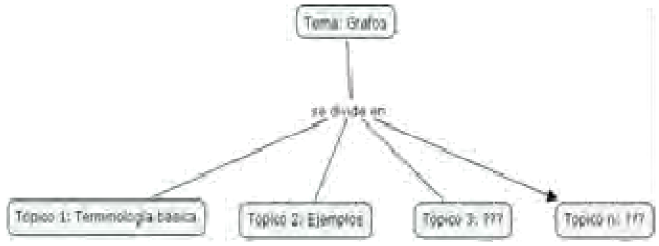


Figura 4: Esquema de la estructuración de los contenidos del tema de grafos en la Matemática Discreta

Se ha querido presentar mediante un Mapa Conceptual el Tópico 1 relativo a la Terminología básica, según se muestra en la figura 5.

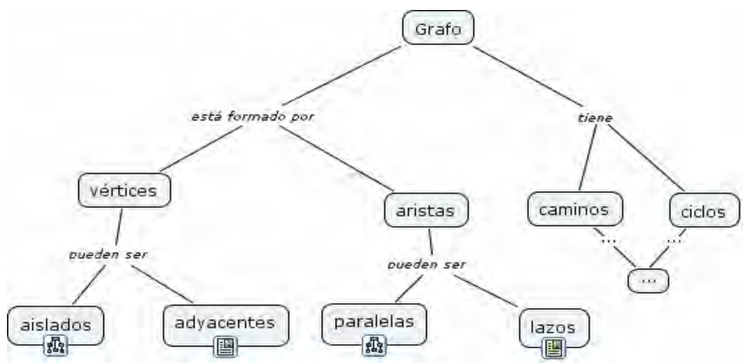


Figura 5: Mapa Conceptual relativo a la Terminología básica de grafos

Se cuenta con un editor de preguntas, herramienta de fácil manejo, que facilita la confección de preguntas de forma dinámica, además permite editarlas después de creadas y resueltas.

El profesor puede elaborar preguntas pertenecientes a un tópico determinado. Antes de editar se conocerá la cantidad de tópicos y la cantidad de preguntas de cada tópico.

Posteriormente se elige el tipo de pregunta. Toda esa información debe ser almacenada ya que el estudiante deberá responder las preguntas que el profesor editó al visualizar el tema seleccionado.

Luego que el profesor edite las preguntas y éstas queden almacenadas, se guardará la respuesta para cuando el estudiante responda. Primeramente el profesor debe introducir las respuestas para que luego el sistema pueda verificar si coinciden con las del estudiante y el profesor pueda llegar a determinadas conclusiones.

Ejemplo de Cuestionario relacionado con el Tópico 1:

Pregunta 1. Marque la respuesta correcta:

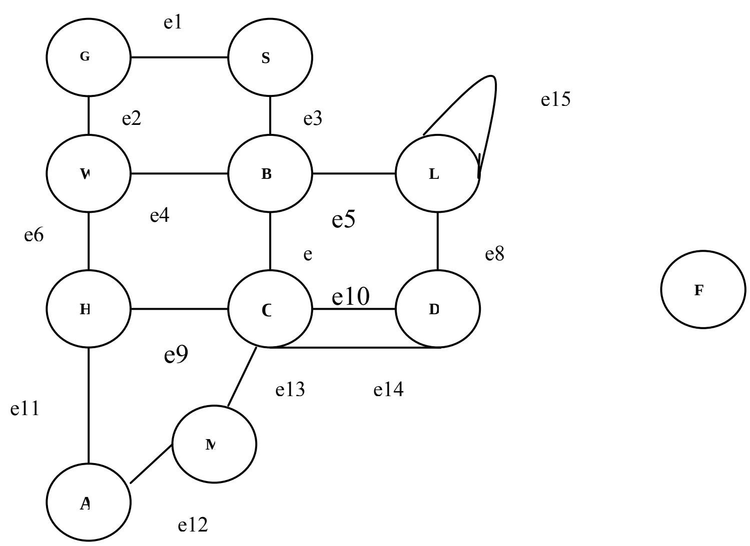
___a) Un grafo (o grafo no dirigido) consta de un conjunto de V vértices y un conjunto E de aristas tales que cada arista $e \in E$ queda asociada a un par de vértices.

___b) Un grafo (o grafo no dirigido) consta de un conjunto de V vértices y un conjunto E de aristas tales que cada arista $e \in E$ queda asociado a un par ordenado de vértices.

_X_c) Un grafo (o grafo no dirigido) consta de un conjunto de V vértices y un conjunto E de aristas tales que cada arista $e \in E$ queda asociado a un par no ordenado de vértices.

Pregunta 2. Enlace las columnas A y B según el siguiente grafo que aparece posteriormente:

Columna A	*Columna B*
a). G, L, D	_e_ son aristas paralelas
b). e1	_g_ vértices aislados
c). e1, e7, e8	_a_ son vértices
d). M y C	_f_ lazo
e). e10, e14	_b_ aristas incidentes en G y S
f). ce15	_c_ son aristas.
g). F	_d_ son vértices adyacentes
	h). e2, e3



Conclusiones metodológicas del docente:

- Si las respuestas de las Preguntas 1 y 2 son incorrectas entonces el estudiante tiene serias dificultades en la terminología básica del tema de grafos (debe estudiar la definición de grafo e incluso de digrafo).
- Si la respuesta de la Pregunta 1 es correcta y de la Pregunta 2 es incorrecta entonces se debe enfatizar en la definición y plantear la terminología básica de la rama izquierda.
- Si las respuestas de las Preguntas 1 y 2 son correctas entonces se debe pasar a la rama derecha del árbol.

Por su parte, HESEI muestra el Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente en forma de Mapa Conceptual como se aprecia en la siguiente figura.

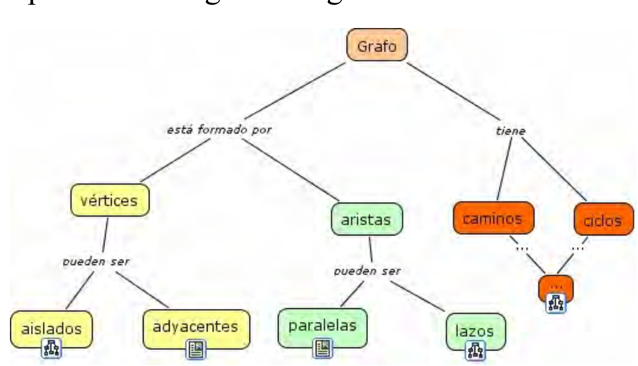


Figura 6: Mapa Conceptual relativo a la terminología básica después de la inferencia

- Conceptos que no domina aún, y además no puede acceder a estudiarlos hasta que no domine los anteriores
- Conceptos que ya domina y se tiene acceso a la información que estos nodos contienen
- Conceptos que debe aprender el estudiante y por ende, tiene acceso a la información que estos brindan

Conclusiones

Como resultado de este trabajo se obtuvo un Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente para la enseñanza de grafos, específicamente en lo que se refiere a la terminología básica y ejemplos.
La utilización de la herramienta HESEI facilitó el trabajo, pues sin profundizar en aspectos decisivos en la implementación de un Sistema de Enseñanza/Aprendizaje Inteligente, como son las técnicas de Inteligencia Artificial, se logró un sistema que se adapta a las características cognitivas y afectivas del estudiante para la enseñanza de esta temática. Esta herramienta consta de un módulo Metodológico y un módulo Afectivo que ayudan al profesor a reflexionar y realizar un profundo trabajo metodológico para estructurar el sistema y confeccionar los cuestionarios y entrenadores con los cuales el estudiante va a estudiar, sin descuidar el estilo de aprendizaje (teórico, pragmático, práctico y reflexivo). También trabaja con un módulo de ayuda a la difícil tarea de Ingeniería del Conocimiento que es decisiva en la elaboración de estos sistemas. Estando estas características expuestas en el Sistema para Grafos estas ventajas ayudan al aprendizaje de esta temática.
El sistema obtenido se ha probado con un grupo reducido de estudiantes, para ir perfeccionándolo y ponerse en uso en el próximo curso escolar a estudiantes de segundo año de la carrera de Ciencias de la Computación en la Facultad de Matemática, Física y Computación de la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.

Referencias Bibliográficas

Bello, R. (2002). *Aplicaciones de la Inteligencia Artificial.* Guadalajara, Jalisco, México: Ediciones de la Noche.

García, L. (2001). *Introducción a la Matemática Discreta*. La Habana. Cuba: Pueblo y Educación.

García, Z. et al. (2000). *Introducción a la Inteligencia Artificial*. Guadalajara, Jalisco, México: Ediciones de la Noche.

Gavrilov, G. (1980). *Problemas de Matemática Discreta*. Moscú. URSS: MIR.

Guardati, S. (1994). Razonamiento Basado en Casos. *Soluciones Avanzadas,* 13, 31-43.

Gutiérrez, I. (2003). *Modelo para la Toma de Decisiones usando Razonamiento Basado en Casos en condiciones de Incertidumbre*. Disertación doctoral no publicada, UCLV, Santa Clara, Cuba.

Johnsonbaugh, R. (1999). *Matemáticas Discretas* (4ta. Ed.) México: Prentice Hall.

Shute, V. (1993). Principles for evaluating Intelligent Tutoring Systems. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, 4(3), 245-271.

UNA DIDÁCTICA PARA EL TRATAMIENTO DE LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA CON UN ENFOQUE DINÁMICO EN LA ESCUELA

Celia Rizo Cabrera, Luis Campistrous Pérez
luis.campistrous@infomed.sld.cu
Investigadores. SEAC. Academia de Ciencias de Cuba.
Metodólogos. Vicerrectoría Académica del ISCF Manuel Fajardo. (Cuba)
Campo de investigación: pensamiento geométrico. Nivel educativo: básico, medio
Palabras clave: situaciones de aprendizaje, geometría dinámica, estrategias heurísticas

Resumen
En el artículo se pretende promover una reflexión acerca de la polémica entre las formas clásicas y las modernas de dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela, y se presentan algunos puntos de vista sobre los posibles cambios. En particular, se ejemplifican las relaciones entre geometría dinámica y tecnología y el papel que puede jugar la heurística en esta nueva concepción. Lo anterior se sustenta y ejemplifica mediante una concepción didáctica para el tratamiento de la geometría, mediante situaciones de aprendizaje. Las referidas situaciones de aprendizaje favorecen en los alumnos las actividades de exploración y búsqueda de nuevas propiedades de las figuras dadas, convirtiéndose su proceso de aprendizaje en una actividad rica en experiencias personales, dándole un carácter muy activo y significativo a dicho aprendizaje, que debe ser socializado en el grupo.

Introducción

Uno de los campos más notorios para la aplicación de la tecnología en la escuela, aunque no el único, es la geometría. En la actualidad, un enfoque de la geometría susceptible de ser trabajado con recursos tecnológicos lo es la denominada *geometría dinámica***,** concebida esta como un enfoque de la Geometría, es decir, no es una Geometría en el sentido de propiedades invariantes a un grupo de transformaciones.

En el anterior enfoque, los objetos geométricos elementales se desplazan respecto a otros objetos con lo que la integridad de las figuras, así como su forma y otras propiedades puede afectarse. Un medio adecuado para trabajar en la escuela con este enfoque es el diseño de *situaciones de aprendizaje* con ese fin.

Las *situaciones de aprendizaje*, tal como se conciben en este trabajo, son actividades de exploración para el alumno, que en el caso de la geometría se concretan en un sistema de tareas sobre figuras geométricas, que representan una situación lo suficientemente abierta para no inhibir la búsqueda por parte del mismo, y en la que es posible realizar transformaciones con el fin de explorar cómo cambian dichas figuras y sus propiedades y que les permite analizar el nuevo objeto de aprendizaje.

Por ejemplo una situación de aprendizaje puede ser:

Situación Número 1. Relaciones de posición de dos rectas en un plano.

1. Analiza las diferentes posiciones que se pueden presentar si se tienen dos rectas cualesquiera en un plano, y analiza en cada caso si se forman nuevos objetos geométricos y decir cuáles son.
2. Investiga, en el caso del surgimiento de nuevos objetos geométricos, si éstos tienen alguna o algunas propiedades especiales. Formula hipótesis sobre ello.
3. Analiza las diferentes posiciones que se pueden presentar si se tienen dos rectas cualesquiera en un plano, y analiza en cada caso si se forman nuevos objetos geométricos y decir cuáles son.
4. Investiga, en el caso del surgimiento de nuevos objetos geométricos, si éstos tienen alguna o algunas propiedades especiales. Formula hipótesis sobre ello.

Dichas situaciones favorecen en los alumnos las actividades de exploración y búsqueda de nuevas propiedades de las figuras dadas, convirtiéndose su proceso de aprendizaje en una actividad rica en experiencias personales, que deben ser socializadas en el grupo. En este proceso la participación del alumno es activa y protagónica, elabora lo nuevo por sí mismo y en la actividad y la comunicación con los restantes pero, a la vez, la dirección del maestro es muy importante pues debe propiciar un aprendizaje significativo dentro de una actividad rica en experiencias personales y sociales.
En este trabajo se darán algunos elementos de la didáctica del tratamiento de estas situaciones de aprendizaje en la escuela, a partir del modelo de la geometría dinámica y del empleo de la heurística como vía idónea para la concepción que se propone, en un soporte teórico apropiado para ello, en el orden psicopedagógico. Se enmarca desde el punto de vista teórico dentro del paradigma histórico cultural en lo relativo al papel de la actividad y la comunicación en el proceso de aprendizaje, con un enfoque desarrollador (Silvestre, 1997).

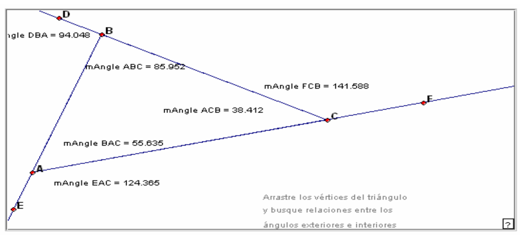
1. Geometría Dinámica y Heurística

Una condición previa para el trabajo con estas situaciones de aprendizaje dentro de un enfoque dinámico de la geometría es el desarrollo en los alumnos de la capacidad de emplear procedimientos de búsqueda, de exploración, para lo cual son muy útiles los denominados *procedimientos heurísticos (o estrategias)* **(**Müller, 1986). Entre ellos el mover en una figura (variar las condiciones de la misma), mover figuras sobre otras, considerar casos particulares o especiales y casos límite, medir y comparar, buscar relaciones y dependencias, hacer conjeturas, realizar analogías y reducir el problema nuevo a un problema conocido.
Esta concepción permite hacer la introducción de la tecnología, en este caso el empleo de calculadoras, supercalculadoras (calculadoras programables que admiten software de geometría dinámica entre otros) y computadoras, en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, pues con un software adecuado existe la posibilidad de mover las figuras, es decir, variarlas de modo que adquieren *dinamismo***.** Esto marca diferencias esenciales pues durante siglos, la enseñanza de la Geometría consistió en la repetición de cadenas deductivas que “demostraban” teoremas sin que supiesen por qué lo demostraban ni cuál era el origen de esa afirmación que supuestamente habían demostrado.

2. Las situaciones de aprendizaje y los medios de enseñanza en un enfoque dinámico de la geometría

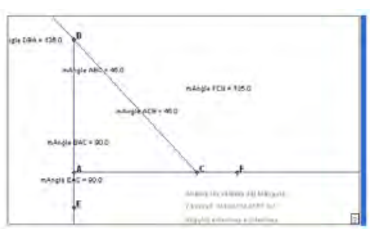
En esta propuesta se van a utilizar como medios *importantes el papel cuadriculado, los geoplanos con ligas, los geoplanos electrónicos y los applets* (Campistrous & Rizo, 1999, 2001, 2003; López & Campistrous, 2001). Las etapas de trabajo se comienzan a realizar desde los primeros grados de la escuela primaria, y paulatinamente se van elevando las exigencias en cuanto al desarrollo de habilidades según las posibilidades de los alumnos y la existencia de medios. La estructuración del empleo de medios para el desarrollo de habilidades parte de que hay que lograr el desarrollo de las habilidades manuales propias de los dos primeros grados (rasgar, recortar, trazar, medir y comparar con transportadores de papel o con reglas) que se complementan con la de trazar figuras mediante la determinación primaria de puntos característicos en papel cuadriculado *(primer nivel* en el desarrollo de la habilidad de trazar y variar figuras) , y dar paso al uso del *geoplano concreto* como entrenador, el de madera o plástico y ligas, (*segundo nivel* en las habilidades para el desarrollo de la habilidad de trazar y variar figuras) reproduciendo en él lo hecho en papel cuadriculado y viceversa.
Lo expresado anteriormente ilustra el modo que se puede ir produciendo, en una *primera etapa del trabajo* en la dirección de lograr este desarrollo, el desarrollo de la habilidad de “mover” en una figura, a la vez que superponen, miden y comparan, y se inicia el trabajo con el geoplano como entrenador. Un *tercer nivel* en el desarrollo de las de las habilidades que son básicas para un trabajo

posterior con las supercalculadoras y computadoras, que marca un s*egundo estadio o etapa en el trabajo* es la incorporación del *geoplano electrónico* que lo pueden encontrar en el sitio de la NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemática) en la sección de los ejemplos electrónicos de los estándares norteamericanos.
Una *tercera etapa* en el trabajo para el desarrollo de las habilidades que son básicas para el uso de softwares de geometría dinámica es la de la utilización de los *applets***,** que puede ser a partir del cuarto o quinto grado de la primaria. Le hemos denominado *applets* en esta concepción, a determinados recursos que tienen los software de geometría dinámica que permiten construir “a conveniencia” actividades que sirven de base a las situaciones de aprendizaje, y que pueden ser transportadas fácilmente en cualquier soporte magnético (diskette, memorias flash, discos compactos, etc.) y ser utilizados por los docentes y los alumnos en las clases. Estos applets tienen la ventaja que conservan la posibilidad de mover a conveniencia, o sea son dinámicos. Por ejemplo, en el caso de los ángulos en un triángulo, se puede llegar a conjeturar a partir de un applet especialmente construido por el docente o modelado en la supercalculadora por el alumno de grados superiores, mediante la construcción de tres rectas que se corten dos a dos, y “medir” los ángulos que se forman en los puntos de intersección, o sea en los vértices como se ilustra en la figura siguiente.



AnguloExterior

Como se puede apreciar, una ventaja de la geometría dinámica es que permite aprovechar plenamente las *estrategias heurísticas*, en especial una de estas estrategias en la solución de problemas geométricos como lo es de “*mover la figura*”.
De esta manera el alumno puede mover la figura y conservar ciertas propiedades, y puede formarse una imagen de qué cosa es lo que ocurre al hacer las variaciones y así tener ideas de cómo resolver el problema. Lo mismo ocurre con la estrategia heurística de “*considerar casos particulares*”, “*considerar casos límites*”, y “*medir y comparar*”.
Para conducir el proceso de exploración es conveniente mover el pensamiento de los alumnos, a través de impulsos, a analizar el caso particular de que las rectas formen un triángulo rectángulo isósceles, como se ilustra en la figura.



En el análisis de este caso límite, y en general para desarrollar los procesos de exploración, es conveniente organizar a los alumnos por dúos o tríos de modo que se puedan producir las relaciones interpersonales iniciales en el proceso de aprendizaje. En este caso los alumnos van a descubrir una serie de relaciones que involucran a los ángulos del triángulo, tanto interiores como exteriores, que las convertirán en conjeturas iniciales y de las cuales algunas serán verdaderas y otras falsas.

3. Conceptualización en el campo psicopedagógico y didáctico

En esta propuesta se parte de la consideración de que los cambios que hay que producir, tienen que estar dirigidos a una nueva manera de trabajar estos contenidos donde se pueda explotar más y mejor los recursos tecnológicos actuales y poner a los alumnos en situación activa de aprendizaje y donde se enfrenten a procesos de búsqueda, planteo de conjeturas, comprobación experimental de ellas, entre otras formas de actuación.

En el trabajo de los docentes, se debe tener en cuenta que su misión es *dirigir el proceso de modo que pueda garantizar la actividad protagónica de sus alumnos*, de manera individual inicialmente, y *en pequeños grupos de discusión* que les permita socializar sus primeras ideas y arribar en colectivo a mejores conjeturas después de un proceso intenso de análisis y discusión. De igual modo los procesos de autocontrol y control colectivo de lo realizado deben ser garantizados por el maestro, sin influir explícitamente en los alumnos. En este contexto, se asume que la didáctica a emplear debe tener un carácter *desarrollador***,** en la cual el aprendizaje debe producirse de una manera muy activa y significativa, es decir, debe propiciar el desarrollo integral de la personalidad del alumno.Un aspecto importante en esta dirección, es considerar que *el alumno que aprende tiene que poner en relación los nuevos conocimientos con los que ya posee*, es decir, con los conocimientos precedentes que ya aprendió, esto permitirá la reestructuración y el surgimiento de un nuevo nivel, para lo cual de especial importancia resulta *el significado que tenga para él el nuevo conocimiento***,** las relaciones que pueda establecer entre los conocimientos que aprende y sus motivaciones, sus vivencias afectivas, las relaciones con la vida y los contextos sociales que le rodean.

En el plano didáctico surge la necesidad de *organizar a los alumnos durante las actividades de que se programen de modo que puedan producirse las necesarias interacciones entre ellos*, aunque sin descuidar las necesarias reflexiones previas que debe producirse de manera personal por cada uno de ellos, de modo que puedan ubicarse en la tarea a la que se enfrentan, y de igual modo en las reflexiones al finalizar las mismas, de modo que interioricen que han comprendido lo hecho en acciones colectivas.

4. Elementos didácticos para la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje

En el trabajo con situaciones de aprendizaje hay tres momentos esenciales, o también pudieran considerarse acciones desde el punto de vista didáctico, en lo que respecta a la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje. Estos momentos son: la exploración, la conjeturación y la validación.

La *exploración* es una etapa inicial, muy importante, en la cual el alumno de manera individual o en colaboración con otros y a partir de los impulsos que el maestro le da si fuera necesario, comienza un proceso de búsqueda de relaciones en una actividad en la cual experimenta de manera variada. La misma debe hacerse siguiendo un proceder sistemático de búsqueda de nuevas relaciones, o de relaciones ya conocidas de situaciones anteriores y que pudieran ser transferidas a la nueva situación. Estas posibles relaciones se van "anotando", socializando con el resto de los alumnos, hasta llegar a una lista de relaciones posibles que se convierten en conjeturas. Esta es la *etapa de la conjeturación.* Las conjeturas hechas se van procesando, en primer lugar para determinar si alguna puede ser rechazada de inmediato mediante un contraejemplo. Ya estamos entrando en la *etapa de validación* y las que sucumben con un contraejemplo se desechan de inmediato. Las que no pueden ser rechazadas fácilmente con un contraejemplo, en dependencia del grado en que el alumno esté, deben ser argumentadas con otras afirmaciones ya aceptadas y conocidas por el alumno, o demostradas siguiendo un proceso deductivo que lo permita. De no ser posible, esa conjetura **"***se* *guarda*" para momentos más oportunos en los cuales el sistema de conocimientos del alumno se amplíe y pueda llegar a demostrarla o a rechazarla.

No obstante, estos tres momentos o etapas tienen algunas exigencias didácticas que no deben desconocerse, pues el alumno no las puede ejecutar si no está debidamente preparado para ello. Una de ellas es la necesaria *creación de condiciones previas* en cuanto al desarrollo en los alumnos de la capacidad de emplear procedimientos de búsqueda, de exploración, para lo cual son muy útiles los denominados procedimientos heurísticos.

Otra de estas exigencias es la *formación de acciones de orientación, búsqueda sistemática de lo nuevo, valoración y control***.** Para ello es necesario que se tenga en cuenta las etapas por la que toda actividad humana transcurre según el enfoque histórico cultural y que son las de *orientación, ejecución y control***.** En estas tareas enmarcadas en situaciones de aprendizaje, no es tan obvia la separación de la actividad del alumno en estas tres etapas, pues la ejecución se da desde el inicio, en la medida en que el alumno se orienta y comienza la exploración. Esta exploración se debe hacer, siempre que sea posible, de manera organizada y con cierta búsqueda sistemática de lo nuevo, pero a la vez se ve enmarcada en un proceso de exploración sin una planificación preconcebida, pues no siempre es posible planificar en este tipo de actividad de búsqueda. No obstante esta imposibilidad de aislar cada etapa en su desarrollo daremos algunas ideas del tratamiento de dichas etapas por separado, solo para facilitar la comprensión. En la *etapa de orientación***,** el docente tiene que poner en contacto al alumno con la nueva situación de aprendizaje, de modo que se produzca en él deseos de aprender y comprenda en qué dirección debe encaminarse para lograrlo. *Comprende la motivación y la orientación propiamente dicha*. La *orientación* es una de las etapas fundamentales, y se pone de manifiesto cuando mediante la dirección del maestro se logra que el alumno interiorice qué es lo nuevo que se va a aprender y en qué se diferencia de lo que ya han aprendido y el alumno puede establecer nexos entre lo conocido y lo nuevo que va a aprender de una forma muy clara para él.

En el caso de las *situaciones de aprendizaje*, en la que la actividad del alumno es determinante, es muy importante establecer una *situación inicial* clara que permita al alumno comprender la tarea que se le está planteando, que son actividades de exploración que le permite analizar el nuevo objeto de aprendizaje y realizar transformaciones que le facilite identificar los diferentes casos que se pueden presentar ante una misma orden, así como formular hipótesis sobre el comportamiento de los elementos nuevos que pueden aparecer, en los casos que se están presentando, así como la presencia de nuevas relaciones entre dichos elementos. Esta tarea debe estar claramente formulada, y estar acompañada de las indicaciones necesarias para lograr la comprensión inicial por parte del alumno, pero la dificultad estriba en que en *estas tareas deben ser lo suficientemente abiertas para que creen la necesidad de la búsqueda, la exploración*, por lo que *hay algunas intenciones que están implícitas***,** de modo que los alumnos deben explorar con lo que se obtiene inicialmente y en el trabajo en grupo formular posiciones personales y de grupo, y plantear las conjeturas que le surjan de la exploración. Si es necesario, en este proceso de búsqueda el maestro le dará a los alumnos *impulsos* que en forma de sugerencias, lo suficientemente generales para que no se conviertan en barreras para la actividad independiente del alumno, favorezcan sus acciones de búsqueda. Estos impulsos, *pueden ser considerados como una especie de ayuda,* que opera como un estímulo directo para buscar dichos recursos, pero indirecto en cuanto a la solución de la situación dada. En estas situaciones de aprendizaje también se pone de manifiesto la orientación cuando el maestro propicia la creación de un *ambiente de exploración* adecuado para que el alumno se sumerja en él y pueda utilizar procedimientos heurísticos de búsqueda que le permitan ***"ver"*** esas nuevas relaciones y formular conjeturas consecuentemente.

Es conveniente precisar que en la medida que el alumno va desarrollando métodos propios de exploración, necesita cada vez de menos impulsos por parte del maestro, pues los que le ha ido dando inicialmente se van convirtiendo en un proceder generalizado de actuación para la búsqueda y obtención de conclusiones.

En esta etapa es importante que el maestro tenga en cuenta que, en este ambiente de exploración en el que se sumerge al alumno, pueden aparecer nuevos conceptos o relaciones no previstas para un grado dado, y que *no pueden ser ignorados***.** La *valoración y el control*, son acciones que están íntimamente ligadas a la actividad grupal, *cuando se intercambian posiciones y se reflexiona sobre lo obtenido,* y el **c***ontrol específicamente en este caso está asociado a las acciones de prueba sistemática de las conjeturas que se formulan.*

Esta nueva forma o tratamiento de la geometría, incluye el tratamiento de los ejercicios y problemas geométricos pues se convierten en *problemas abiertos*. Por ejemplo, los ejercicios típicos de geometría son como los siguientes:

Demuestra que las tres alturas de un triángulo cualquiera se corten en un punto (de igual modo para bisectrices, medianas y mediatrices)

Con esta nueva concepción didáctica el ejercicio podría plantearse de manera diferente, que puede ser utilizada como una situación de aprendizaje:

Traza las tres alturas de un triángulo cualquiera. Observa qué sucede. Explora con otros triángulos si sucede lo mismo que con el triángulo inicial y formula una hipótesis sobre ello. Explora si una propiedad similar a la anterior se cumple cuando se trazan las tres bisectrices (las tres medianas, las tres mediatrices).

En dependencia del grado puede pedirse también la demostración de la conjetura hecha.

A modo de conclusión queremos destacar que estamos ante una situación didáctica nueva, que cambia completamente la forma en que se enseña y aprende la geometría. Esta situación es muy importante por lo que puede significar en la búsqueda de nuevos caminos, que pueden ser trascendentes en cuanto a las variaciones que se van a producir necesariamente en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, y que debemos atender con especial interés profesional.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Publicaciones del *Congreso Pedagogía 99*. Ciudad de la Habana.

López, J. M. y Campistrous, L. (2001). La calculadora como herramienta heurística. Revista *Uno*. (28)

Müller, H. (1986). *Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática.* Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. No. 6. La Habana.

Rizo Cabrera, C. y Campistrous, L. (2001). Tecnología, Resolución de Problemas y Didáctica de la Matemática. *Ponencia Congreso Pedagogía 2001*. Ciudad de la Habana.

Rizo Cabrera, C. y Campistrous, L. (2003). Aprendizaje y Geometría Dinámica. Ponencia *Congreso Pedagogía 2003.* Ciudad de la Habana.

Rizo Cabrera, C. y Campistrous, L. (2003). Geometría dinámica en la escuela, ¿mito o realidad? Ponencia *Primer Congreso de aplicaciones tecnológicas en la Didáctica de las Ciencias y la Matemática*. Instituto Nacional Tecnológico de Santo Domingo.

Silvestre M. (1997). Concepción de una Enseñanza desarrolladora. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS APLICADOS A LAS ASIGNATURAS MODELACIÓN MECÁNICA Y FÍSICA

Alexia Nardín Anarela, Nereida Pupo Cintras, Máximo Montes de Oca Paredes
Universidad de Camagüey. (Cuba)
alexia.nardin@reduc.edu.cu
Campo de investigación: modelación matemática
Palabras clave: laboratorio matemático, modelación, sistematización, TICs

Resumen
En el presente artículo se explica la necesidad de vincular los contenidos de la matemática con los de otras disciplinas en las especialidades de ingeniería, apoyando el aprendizaje significativo en el uso de asistentes matemáticos y el trabajo cooperativo de profesores que se interesan por ofrecer propuestas integradoras en el quehacer didáctico. Entre las habilidades que permiten el acercamiento a independizar al estudiante en este sentido están las habilidades lógicas meta cognitivas, las cuales son explicadas desde el punto de vista de los autores y sus experiencias docentes. En los ejemplos se muestra la posibilidad de sistematizar contenidos en diversos temas de la asignatura ¨Algebra lineal y ecuaciones diferenciales ordinarias¨, de múltiples usos ingenieriles, entre otros en el estudio de las oscilaciones.

Introducción

La sistematización de los contenidos es una alternativa didáctica que requiere poner en práctica numerosos procedimientos y recursos por parte de los que enseñan y también de los que aprenden Matemática. No basta con saber las relaciones que existen en el objeto de estudio o con pretender que el estudiante llegue a establecer las mismas, sino que se necesita la aplicación continua y consciente por parte del estudiante de todos los conocimientos y habilidades que paulatinamente va adquiriendo en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura.
Los autores realizan un estudio de algunos problemas, para la solución de los cuales proponen la materialización de algunas ideas que relacionan las indicaciones metodológicas para sistematizar los contenidos de Matemática con el uso de las TICs (Técnicas de Información Científica) durante la aplicación de las matemáticas a la modelación mecánica en segundo año de Ingeniería Civil. En este curso académico se centró el trabajo en temas de Álgebra Lineal no abordados anteriormente en los trabajos de vinculación con la especialidad, con algunos precedentes en el tema de sistemas de ecuaciones lineales, mayormente sistematizado en años anteriores. También se explica el uso del laboratorio de computación para los vínculos con la asignatura de Física.

Desarrollo

Desde la antigüedad el hombre priorizó la realización de tareas que le permitieran la resolución simultánea de múltiples problemas, profundizó en conocimientos que le permitieran descubrir la verdad sobre asuntos de importancia práctica y logró reconocer que la vinculación de los resultados que iba obteniendo en su actividad cognoscitiva le posibilitaba ahorrar tiempo, energía, nervios y materiales. La idea de incorporar a un sistema que engranara todos los conocimientos y habilidades, los resultados individuales obtenidos en la resolución de problemas data pues de tiempos muy remotos y es posiblemente tan entrada en años como la propia enseñanza de la Matemática.

J. A. Comenius (1592- 1670) en"Indicaciones metodológicas sobre la educación escrita" cita: "La naturaleza no avanza a saltos sino por etapas, pues bien, si una cosa va seguida de la otra, se deben enlazar entre sí. El maestro debe enseñar una materia por partes sucesivas y enlazar estas partes, así se adquiere el conocimiento del todo y se le puede comprender".

Así propugna el principio de sistematización en la enseñanza, que establece:

- Todo lo siguiente se basa en el fundamento anterior.
- Lo posterior se basa en lo anterior.
- Todo lo que está relacionado se debe relacionar constantemente.

Klingerg, 1986, define por "enseñanza sistemática a la articulación didáctica de todos los eslabones del proceso incluyendo la representación, ejercitación, aplicación y sistematización".

Carlos Álvarez de Sayas planteó: "*No siempre el grado de vinculación de los contenidos de una asignatura permite agruparlos en un solo sistema, que se puede inferir de un solo núcleo, esto obliga a que el profesor, al finalizar el tema establezca los aspectos similares y diferentes, haga resaltar las vinculaciones entre los distintos contenidos, todo lo cual tiende a la sistematización de los distintos temas en un objeto mayor."*

La pregunta es cómo lograr resaltar las vinculaciones.
Eso depende en primer lugar de la propuesta didáctica del profesor, los objetivos planteados, la participación que conceda a los estudiantes en la elaboración de la misma y los recursos que profesor y alumnos utilicen.
Aunque solamente en última instancia dependemos de los recursos, no es menos importante que los usemos a favor de sistematizar los contenidos.
Opinamos que la sistematización es un momento necesario en el trabajo del alumno, con el cual integrando conocimientos, enlazándolos y estableciendo nexos entre aquellos que pudieran parecer aislados, los reafirma y los fija más sólidamente en sus estructuras cognitivas.
Los autores del presente trabajo parten de la más estrecha vinculación entre objetivos, contenidos, métodos, formas de enseñanza, evaluación y control, medios, etc. para contribuir a que el estudiante sistematice.

Por otra parte, la enseñanza actual cubana adopta numerosas y diversas opciones de universalización, las que son el reflejo de una sociedad donde interesa a muchos trasmitir el conocimiento a grandes masas de la población, algo que fue un sueño de los filósofos desde la antigüedad y que se manifiesta en realidades que confirman los postulados leninistas de la obra "Materialismo y empirocriticismo". El principio de universalización de la enseñanza, por primera vez es defendido por el dr. Fidel Castro en 1969 y recientemente, en su discurso en el IV Congreso de Educación Superior, en febrero del 2004 retoma esta idea, con la posibilidad de poner varios ejemplos: "Y el principio de universalización de la enseñanza universitaria tendrá que irse convirtiendo en una realidad, por imperio también de la necesidad, porque no habría universidades capaces de absorber esa enorme masa. Y las universidades estarán junto a las fábricas, en los planes, en los centros de investigación. Las universidades dirigirán ese enorme movimiento y realizarán además los cursos de posgraduados, porque algún día también algunos de ustedes seguramente irán a realizar cursos de posgraduados en las universidades."
Desde el marco sicológico estas nuevas ideas nos acercan a la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel y la enseñanza problémica de Majmutov.

¿Cómo y por qué el uso de las TIC fue dirigido a la sistematización de los contenidos de Matemática?

Algunos entendidos del tema de la utilización de TICs, entre ellos Pere Marques (1) y (9) afirman que ellas actúan sobre el objeto social y también sobre el sujeto, pueden ser en consecuencia una manera adecuada retransmitir la información por partede los docentes a los estudiantes.

En el marco de la universalización de le da una gran importancia al uso adecuado del televisor, los videos, la computación y otras TICs.

Las TIC. presentan un cúmulo de posibilidades en cuanto a recursos se refiere que permiten materializar las ideas del docente en su afán por brindar un sistema adecuado al estudiante. Todo lo que hagamos para lograr la independencia cognoscitiva del estudiante es poco, teniendo en cuenta la gran acumulación de información a la que el estudiante actual se enfrenta, por lo que las posibilidades de sintetizar y simplificar la adquisición de conocimientos que brindan estas opciones promueven la búsqueda individual y los objetos de aprendizaje dejan de ser impuestos por los docentes, para convertirse en la principal motivación. Lo significativo del aprendizaje entonces se manifiesta en varios factores:

1) Los progresos que paulatinamente hace el estudiante en un tema dado y que el propio estudiante pueda observarlos le hacen sentirse seguro.
2) Las preguntas de vinculación de la asignatura con otras de la especialidad pueden ser formuladas en las prácticas y sesiones de manera que incentive a una búsqueda de mayor profundidad.
3) Las relaciones de conceptos y teoremas dentro de la propia Matemática adquieren un significado en el proceso de enseñanza- aprendizaje.
4) Las relaciones alumno- profesor- grupo tienen una vía más para materializarse.

Sistematizar la información, transferir la misma a otros problemas, relacionándola con los conocimientos y experiencias anteriores, es pues una indicación imprescindible al orientar a los estudiantes.

Las heurísticas**,** unidas orgánicamente con los métodos del conocimiento científico y las habilidades lógicas, conforman el conjunto de procedimientos generales de resolución de problemas. Las heurísticas elevan la efectividad del proceso de resolución de problemas no rutinarios (no garantizando, naturalmente, la obtención de resultados).

Con poca frecuencia orientamos a los estudiantes hacia la independencia desde el punto de vista del autocontrol que el conocimiento de las propias ciencias y sus relaciones interdisciplinarias propicia, lo cual es objetivo del presente reporte. Hemos asociado a estas habilidades, no solamente la posibilidad de utilizar el concepto de solución para verificar el resultado al resolver un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo, sino también los momentos de reciclaje en la modelación que permiten al estudiante apropiarse de conocimientos matemáticos con plena conciencia de que están siendo aplicados a la resolución de problemas físicos, por lo que cualquier contradicción podría suscitar la necesidad de revisar lo ejecutado desde la modelación hasta la comprobación efectuada al interpretar la solución. A partir de esta idea agrupamos otro conjunto de habilidades, llamadas metacognitivas.

Habilidades metacognitivas

1) Autocontrolar el trabajo a partir de usar diferentes métodos, o bien diferentes vías, incluyendo la de usar la computación para resolver el PMC.
2) Monitorear las acciones con el control de los resultados con éxito de una secuencia de problemas del mismo tema, hasta comprobar que se han vencido las dificultades en un determinado contexto.
3) Comprobar que un PMC es resuelto dentro de un problema físico, o mejor aún, un problema de la especialidad sin que se contradigan con los resultados del problema más general los resultados de la resolución del PMC, según el criterio de todos los profesores del año, aunque para esto sea necesario repetir el ciclo hasta llegar a mejores resultados; teniendo en cuenta que en la modelación es transformado el problema real mediante abstracciones, simplificaciones y aproximaciones.
4) Autocontrolar la adquisición de nuevos conocimientos, habilidades y destrezas a partir de la comparación de los resultados individuales y los del grupo, en particular mediante la coevaluación (evaluación mutua entre estudiantes por pares o pequeños grupos).

Ilustremos estas heurísticas, habilidades cognitivas y habilidades metacognitivas.

Ejemplo

En la modelación de una estructura se necesita multiplicar la matriz de rotación por una matriz bidimensional cuyos términos se refieren a magnitudes físicas tales como inercias y productos de inercias.

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

La matriz rotación es necesario utilizarla para determinadas magnitudes referidas a un sistema de ejes cartesianos y que se quieren expresar en cualquier otro sistema de ejes girados un determinado ángulo α .

Aquí es necesario conocer que esa matriz de rotación está representando una aplicación lineal (endomorfismo) que según sea el ángulo α puede o no ser diagonalizable y además puede requerirse el uso del asistente Dfw para obtener distintos resultados al evaluar la variable.

Ejemplo 2

Ilustremos la estrategia más usada en este curso:
Comprobar que un Problema Matemático de Cálculo (PMC) es resuelto dentro de un problema físico, o mejor aún, un problema de la especialidad sin que se contradigan con los resultados del problema más general los resultados de la resolución del PMC, según el criterio de todos los profesores del año, aunque para esto sea necesario repetir el ciclo hasta llegar a mejores resultados; teniendo en cuenta que en la modelación es transformado el problema real mediante abstracciones, simplificaciones y aproximaciones.

Como ejemplo, en este caso recurrimos al laboratorio de ecuaciones diferenciales, que realizamos con la siguiente guía:

Objetivo: Comprobar la veracidad de la resolución de problemas modelados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias con ayuda del **DFW** y consolidar con el uso de gráficos su interpretación física.

I Encendido de los equipos.
II Iniciar el trabajo con **Dfw** para:

a) Comprobar que las raíces de la ecuación característica de las siguientes ecuaciones son las obtenidas en el estudio independiente:
   y''+64y=0 con las condiciones iniciales y(0)=1; y'(0)=2
   y''+4y=sen2x con las condiciones iniciales y(0)=1; y'(0)=2
   y''+4y'+5y=2senx con las condiciones iniciales y(0)=1; y'(0)=2
b) Ajustar en la solución general hallada las condiciones iniciales que ofrecemos para cada una y representar gráficamente la curva solución en cada caso. ¿Qué tipo de movimiento oscilatorio se modela en c/u?
c) Para trazar los gráficos use los botones de la barra de herramientas correspondientes a plot2D (funciones que pueden representarse en el plano) y desde la hoja de trabajo de clic en el botón que tiene una sinusoide, luego vuelva a dar clic, de ser necesario de clic en los botones con flechas hasta obtener la visión deseada según las características de la amplitud, por ejemplo para el caso de resonancia aumenta a medida que la variable independiente tiende a $+\infty$. Para dejar solamente los valores positivos opte por **set** y precise que en el **rango (range)** el valor inicial de la variable independiente es 0.
e) De clic en el botón **abrir** (el segundo de izquierda a derecha) y marque **ODE2**.

Con ayuda del **ODE2** del Dfw puede obtener soluciones generales en el número 9 y la particular en el 17. En cada caso debe marcar el miembro de la derecha de la ecuación y allí realizar las sustituciones que necesite.
Puede notar que el ejercicio II contribuye a sistematizar la solución de ecuaciones algebraicas con ayuda del Dfw.
En Matlab este tema se trabaja con el ODE4.
Para concluir, haremos un resumen de las principales sugerencias que se generan del presente trabajo.

Sugerencias al profesor:

1) No pretenda que el estudiante ya tenga la habilidad adquirida, emplee todo el tiempo y recursos según sus características individuales.
2) Establezca un sistema de tareas que obligue al uso de estas estrategias.
3) Apóyese en las TICs.
a) Elabore su pagina web y plataforma interactiva en forma sistémica.
b) Utilice la computación para la resolución de algunos problemas aplicados con el objetivo de computar rápidamente los datos, realizar representaciones geométricas que permitan visualizar desde distintas perspectivas los modelos y permita interpretar físicamente los resultados. Se recomiendan los asistentes Derive for Windows y Matlab para la docencia.

Sugerencias al estudiante:

1) Trate de independizarse de los profesores y formule preguntas concretas.
2) Verifique la correspondencia de la interpretación de resultados a la del enunciado del problema,
3) No vea el laboratorio de Matemática como clase de la asignatura sino como la actividad que ofrece la oportunidad de desarrollar estrategias de aprendizaje y vincular los contenidos.
4) Comunique sus inquietudes y colabore para que la enseñanza universitaria sea para todos.

Referencias bibliográficas

Marquès P. (2000). *Software educativo y concepciones sobre el aprendizaje* <http://dewey.uab.es/pmarques> UAB - 10/2000

González E. (2000). *¿Aprendizaje o desarrollo?* (Revista "Laboratorio en línea de enseñanza de computación")

Alvarez C. (1992). *La escuela en la vida.* La Habana: Selección educación y desarrollo. Editorial Félix Varela, pág. 67,1992.

Castro R. F. (1989). *Discurso pronunciado en el acto de inicio del curso escolar 89-90* Granma, 6/9/89)

De Guzmán O.M (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática.*España. Ficha bibliográfica. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. ISBN 84- 7884- 092- 3, 1993.

Legañoa F. M. (1997). *Sistema de materiales computarizados para la enseñanza del Electromagnetismo en la carrera de Ingeniería Eléctrica.* Tesis de maestría en Educación Superior no publicada.

Montes de Oca M. (1999). *Perfeccionamiento en la integración entre asignaturas de 2*^{do}*año de ingeniería civil*. CD- Rom #1 del CGI Universidad de Camagüey, 1999.

Pérez Cerezalez, E. (1997). *El desarrollo de la habilidad "modelar" en la carrera de Ingeniería Civil*. Tesis de maestría no publicada. Camagüey, 1997.

Marques P. (2007). *Las TICs y sus aportaciones a la sociedad. Disponible en:* http://dewey.uab.es/pmarques/tic.htm