Clame
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Vol.21
Año:2008

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 21

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 21

Editora:
Patricia Lestón
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Editores Asociados:
Cecilia Crespo Crespo, Carlos Oropeza Legorreta y Hugo Parra

Diseño de portada y CD:
Liliana Álvarez Díaz
Dirección de Educación Continua del Instituto Politécnico Nacional
Janet Ramírez Sandoval
CICATA-IPN, Legaria

Diseño de interiores:
José Francisco Canché Gómez
CICATA-IPN, Legaria

Digitalización:
Juan Gabriel Molina Zavaleta
Christian Pérez Bohorquez
CICATA-IPN, Legaria

Edición:

CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México
www.cmmedu.com
ISBN: 978-970-9971-15-6

> Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Consejo Directivo

Gustavo Martínez Sierra
Presidente
presidencia@clame.org.mx

Germán Beitía
Secretario
secretario@clame.org.mx

Joaquín Padovani
Tesorero
tesorero@clame.org.mx

Juan Raúl Delgado Rubí
Vocal Caribe
vocal_caribe@clame.org.mx

Edison de Faria
Vocal Centroamérica
vocal_centroamerica@clame.org.mx

Gisela Montiel Espinosa
Vocal Norteamérica
vocal_norteamerica@clame.org.mx

Cecilia Crespo Crespo
Vocal Sudamérica
vocal_sudamerica@clame.org.mx

2004 - 2008

Consejo Consultivo

Egbert Agard

Ricardo Cantoral

Fernando Cajas

Guadalupe de Castillo

Evarista Matías

Rosa María Farfán

Teresita Peralta

Comisión de Admisión

Sandra Castillo

Eugenio Carlos

Liliana Homilka

Comisión de Promoción Académica

Javier Lezama

Edison de Faria

Yolanda Serres

Leonora Díaz Moreno

Mayra Castillo

Uldarico Malaspina

Comité Internacional de Relme

Leonora Díaz Moreno

Miguel Solís

Gustavo Bermúdez

Olga Pérez

Comité
Científico de Evaluación

Alanís, Juan Antonio
Aparicio, Eddie
Arcos, Ismael
Ardila, Analida
Arrieche Alvarado, Mario
Ávila Godoy, Ramiro
Bermúdez, Gustavo
Blanco, Haydeé
Blanco, Ramón
Buendía Abalos, Gabriela
Cabañas Sánchez, María Guadalupe
Cadoche, Lilian
Camacho, Alberto
Campistrous, Luis
Cantoral, Ricardo
Carlos Rodríguez, Eugenio
Carrasco, Eduardo
Carrillo, Hugo
Castañeda, Apolo
Castillo, Sandra
Cordero Osorio, Francisco
Cortés Zabala, Carlos
Crespo Crespo, Cecilia
Dalcín, Mario
De Faria, Edison
Delgado, Raúl
Delgado, César
Díaz Moreno, Leonora
Dolores, Crisólogo
Engler, Adriana
Espinoza, Lorena
Espinoza, Pedro
Farfán, Rosa María
Gaita Ipaguirre, Rosa Cecilia
García Zatti, Mónica
Grijalva, Agustín
Gutiérrez Alvarez, Milagros
Homilka, Liliana
Ibarra Olmos, Silvia
Lara Galo, Claudia
Lanza, Pierina
Lestón, Patricia
Lezama, Javier
Mántica, Ana María
Marcolini Bernardi, Josefina Marta
Mariscal, Elizabeth
Martínez Sierra, Gustavo
Mingüer Allec, Luz María
Miranda Montoya, Eduardo
Molfino, Verónica
Molina, Juan Gabriel
Montiel Espinsa, Gisela
Muñoz, Germán
Ochoviet, Teresa Cristina
Ojeda Salazar, Ana María
Olave, Mónica
Oropeza Legorreta, Carlos
Ortega del Rincón, Tomás
Osorio Abrego, Héctor
Parra, Hugo
Pérez González, Olga Lidia
Pérez, María del Carmen
Piceno Rivera, Juan Carlos
Ponteville, Christiane
Reséndiz, Evelia
Rey, José Luis
Rizo Cabrera, Celia
Rosas Mendoza, Alejandro
Ruiz, Blanca
Salat, Ramón
Sánchez Aguilar, Mario
Sardella, Oscar
Scaglia, Sara
Serna, Luis Arturo
Serres, Yolanda
Sierra, Modesto
Tejada de Castillo, Guadalupe
Testa Rodríguez, Yacir
Valdivé, Carmen
Valero, Socorro
Velázquez Bustamante, Santiago
Zúñiga, Leopoldo

Tabla de Contenidos

CATEGORÍA 1: Análisis del currículum y propuestas para la enseñanza de las matemáticas

CATEGORÍA 2: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

CATEGORÍA 3: Consideración de aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

CATEGORÍA 4: Uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Presentación

El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Alme) presenta una nueva edición. Y mantiene como lo hiciera desde su origen su espíritu de difusión e intercambio de producciones de profesores e investigadores en Matemática Educativa de toda Latinoamérica.

Los trabajos que integran esta edición fueron presentados durante *Relme 21*, Vigésimo Primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, llevada a cabo en la ciudad de Maracaibo, Venezuela. Una vez finalizada la reunión, los ponentes sometieron sus trabajos a una nueva evaluación para incluirlos en esta Acta, con la intención de hacer llegar sus propuestas e investigaciones a un cada vez mayor número de colegas interesados y comprometidos con el crecimiento de nuestra disciplina.

Se busca con esta publicación un fortalecimiento de la profesionalización de la tarea docente y de la investigación en matemática educativa, observando las características locales compartidas por los colegas de Latinoamérica y distinguiendo en esta tarea la necesidad de generar un campo de conocimiento científico, reconocido dentro y fuera de nuestra comunidad. Año tras año, la difusión mediante una publicación de nivel académico, del estado del arte en materia de docencia e investigación en el campo de la matemática educativa en Latinoamérica es otro de los objetivos que el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa cumple con esta publicación periódica.

Los trabajos han sido organizados según cuatro categorías:

- Categoría 1: Análisis del Currículum y Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas.
- Categoría 2: El Pensamiento del Profesor, sus Prácticas y Elementos para su Formación.
- Categoría 3: Consideración de Aspectos Socioepistemológicos en el Análisis y Rediseño del Discurso Matemático Escolar.
- Categoría 4: Uso de la Tecnología en el Proceso de Aprendizaje de las Matemáticas.

Los integrantes del Comité Editor y Comisión Académica del ALME 21, agradecen a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos. Todo el trabajo que se requirió para llegar a este documento fue realizado con atención y dedicación, y especialmente, orgullo de poder haber colaborado con esta tarea.

Se agradece especialmente a los árbitros por su contribución solidaria y profesional, como asimismo y de manera especial a todos los colegas que de manera generosa y entusiasta nos regalaron su tiempo, inteligencia y creatividad para la realización de este proyecto.

Comisión Académica del

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 2008

Mayo 2008

Categoría 1

Análisis del currículum y propuestas para la enseñanza de las matemáticas

TRANSFORMACIÓN LINEAL EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

Juan Gabriel Molina Zavaleta
Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN México
jmolinaz@ipn.mx
Campo de investigación: Modelos mentales Nivel: Superior

Resumen. *En este documento se discuten algunas ideas producto de la investigación de Molina (2004) que se trabajaron en un taller de la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. El tema a discusión, los modelos mentales intuitivos (en el sentido de Fischbein, 1987, 1989) que un grupo de estudiantes manifestó acerca de la Transformación Lineal (TL) en un contexto geométrico.*

Palabras clave: intuición, modelos mentales, transformación lineal

Introducción y objetivo

Este taller tuvo dos propósitos, en principio hacer concientes a los participantes acerca de los modelos intuitivos que pudiesen tener acerca de la Transformación Lineal en contexto geométrico, y por otra parte compartir los resultados de la investigación realizada por Molina (o.p.) acerca de las concepciones de un grupo de estudiantes sobre la TL. Lo que entendemos por intuición y por modelos intuitivos está en términos de la teoría de Fischbein (o.p.) sobre el tema y que abordaremos en el siguiente apartado.

La mecánica del taller fue la siguiente, plantear a los asistentes como tarea seis actividades tomadas del intrumento diseñado en la investigación citada y posteriormente discutirlas, señalando el origen y propósito de éstas en terminos de el acercamiento teórico del trabajo. La primera actividad estuvo compuesta por cuatro preguntas abiertas acerca de la TL. Las siguientes cinco tareas fueron preguntas acerca de la existencia de la TL, presentadas en formato geométrico.

La intuición

Según Fischbein, las personas tenemos la necesidad de entrar en un estado de convencimiento acerca de los conceptos matemáticos con los que nos encontramos, es decir, tener certeza de ellos. Lograr ese estado de convencimiento es mediado por la intuición, a través de modelos intuitivos. Con respecto a la intuición señala que este término no tiene definición única y lo que debemos entender por ella, se refiere a aquellas ideas que son aceptadas como ciertas por ser evidentes por sí mismas, es decir, no requieren argumentación para ser aceptadas.

> *La intuición no es la principal fuente de conocimientos evidentes y verdaderos, pero parece serlo, porque su papel es exactamente: crear aparición de certeza, conferir a distintas interpretaciones o representaciones un carácter de certeza intrínseca e incuestionable (Fischbein, 1987, p. 12, nuestra traducción)*

Fischbein (1987) hace una delineación detallada acerca de la intuición, discutiendo los rasgos característicos que pueden tener las nociones intuitivas.

Los modelos intuitivos

La delineación que es fundamental para dar sentido a este trabajo es la referente a qué se entiende por *modelo intuitivo* y cómo el *modelo intuitivo* influye en la cognición.

Para Fischbein, los modelos intuitivos son nociones intuitivamente aceptables que se desempeñan como un sustituto de otras nociones:

> *Los modelos representan una herramienta esencial para moldear o para darle forma a las cogniciones intuitivamente inaceptables. Cada vez que una persona se tiene que enfrentar con una noción que es intuitivamente inaceptable, tiende a producir (algunas veces deliberadamente, otras veces inconscientemente) substitutos de esa noción que son intuitivamente más accesibles. Tales sustitutos son comúnmente llamados modelos intuitivos (Fischbein, 1987, p.121, nuestra traducción y énfasis).*

Con respecto a los modelos, Fischbein entiende un modelo en el sentido de Gentner (1983):

> *Generalmente hablando, un sistema B representa un modelo de un sistema A si, en la base de un cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede ser reflejada consistentemente en términos de B y viceversa (Gentner, 1983, citado en Fischbein, 1987, p.121).*

En su trabajo, Fischbein realiza una categorización amplia acerca de los modelos, sin embargo, para nuestros fines, solamente retomaremos la siguiente:

Modelos explícitos y modelos implícitos (o tácitos)

En esta clasificación distingue entre los modelos explícitos y los implícitos. Los modelos explícitos se construyen o se escogen en forma consciente para facilitar a conseguir una solución. Por ejemplo, si consideramos alguna función que da información del volumen de un recipiente en términos de alguno de sus lados; esta función nos facilitaría encontrar las dimensiones que debería tener tal lado para que el recipiente contenga el mayor volumen posible.

Un modelo es implícito o tácito cuando el sujeto no está consciente de su influencia o del alcance de éste. Esta distinción juega un papel importante en la investigación.

Los modelos intuitivos y la cognición, según Fischbein

El papel de los modelos intuitivos en nuestro pensamiento, es el siguiente:

> *…Los modelos tácitos o intuitivos (ambos, paradigmáticos y analógicos), juegan un rol fundamental en cualquier proceso de razonamiento productivo. No puede existir una actividad de razonamiento productivo sin eventos productivos que consisten en globalización, concretización, extrapolación, etc. Los modelos intuitivos son genuinamente benéficos con respecto a todos estos aspectos. Un modelo ofrece a quien resuelve, un sustituto del original, que por medio de sus cualidades es mejor adaptado a la naturaleza del pensamiento humano que el original. Nosotros pensamos mejor con lo perceptible, con lo prácticamente manipulable, con lo familiar, con lo que se le puede controlar su comportamiento, con la validez implícita, que con lo abstracto, lo que no se puede representar, lo incierto, lo infinito (Fischbein, 1987, p.122, nuestra traducción y énfasis)*

Linchevski y Vinner (1988, citados en Fischbein, 1989, p. 10) comentan que existen varias concepciones erróneas en estudiantes respecto al concepto de conjunto, como por ejemplo considerar que los elementos de un conjunto deben poseer una cierta propiedad explícita común y pensar que un conjunto debe estar compuesto por más de un elemento. Si el modelo intuitivo que sustituye el concepto de conjunto es el de la colección de objetos, estas concepciones erróneas son previsibles:

> *El modelo intuitivo manipula de tras de escena el significado, el uso, las propiedades del concepto formalmente establecido. El modelo intuitivo parece ser más fuerte que el concepto formal. El estudiante tiende a olvidar las propiedades formales y tiende a mantener en mente aquéllas impuestas por un modelo. La explicación parece ser muy simple: las propiedades impuestas por el modelo concreto constituyen una estructura coherente, mientras las propiedades formales, aparecen, al menos a primera vista, más bien como una colección arbitraria (Fischbein, 1989).*

Para los fines de la investigación es importante identificar qué modelos intuitivos tienen los estudiantes sobre la TL porque estos son fundamentales en sus razonamientos productivos. Los modelos que los estudiantes tengan sobre la TL determinarán las concepciones que de tal concepto se formen: “lo que un individuo puede aprender, y cómo lo aprende, depende de los modelos con que cuenta” (Papert, 1981, p.13).

En Fischbein (1989) se explica, entre otras cosas, que los modelos tácitos en los estudiantes no son inalterables, que con la intervención apropiada se pueden modificar, con el objeto de afectar benéficamente el entendimiento de los conceptos matemáticos en los estudiantes. Dentro de sus conclusiones, a manera de sugerencia, indica que un primer paso para definir la estrategia para conseguir tal modificación consiste lógicamente en identificar los modelos tácitos en los estudiantes con respecto al concepto matemático de interés.

Mediante la discusión de las respuestas a las actividades y del acercamiento teórico discutido anteriormente se pretende alcanzar el primer objetivo de este taller. El segundo propósito se procurará comentando los resultados de la investigación que nos ocupa.

Las actividades y sus aportes

A continuación se discuten las actividades y los aportes de éstas al trabajo de Molina (2004). Es importante señalar que muchos de los detalles no se retoman, pero se pueden consultar en la fuente en cuestión.

Actividad 1

Contestar las siguientes preguntas:

- **a)** ¿Qué entiendes por transformación lineal?
- **b)** Propón un ejemplo de una transformación lineal y argumenta por qué es lineal.
- **c)** Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal.
- **d)** ¿Qué significa *lineal* en la transformación lineal?

Con respecto a estas preguntas se reporta lo siguiente:

Inciso a. La mayoría de los estudiantes entienden la TL como una especie de función, que a un conjunto de vectores los convierte en otro, pero no hicieron referencia a las dos propiedades que debe cumplir para ser lineal. Solamente dos estudiantes de los cinco entrevistados afirmaron que se trataba de una función y que cumplía dos propiedades.

Inciso b. La mayoría pudo plantear un ejemplo (algunos con errores en la sintaxis), sin embargo solo dos estudiantes pudieron demostrar algebraicamente que sus ejemplos correspondían con una TL. Cabe mencionar que los estudiantes del estudio tenían largo tiempo de haber tomado algún curso de álgebra lineal. Esta situación no afectó el estudio porque según la teoría de referencia los modelos o nociones intuitivas que los estudiantes se forman entorno a los conceptos matemáticos predominan con el tiempo.

Inciso c. Esta cuestión en general casó dificultad, solo dos personas pudieron dar un ejemplo, ambos ejemplos incluían un término x^2.

Inciso d. Esta pregunta fue contestada por todos, aquí salieron a la luz nociones intuitivas asociadas a ese término. Un estudiante lo relacionaban con segmentos de recta, "lineal viene de línea"; otro estudiante con un orden en el cuál se hacen operaciones; otro pupilo con ecuaciones de primer grado. Sin embargo ninguno hacía referencia a que éste es un adjetivo que se le da a un operador cuando satisface las dos condiciones para cualquier escalar k y cualesquiera vectores $u, v \in \Re^2, T(ku) = kT(u)$ y $T(u+v) = T(u) + T(v)$. En palabras de Fischbein podemos decir "el modelo intuitivo parece ser más fuerte que el concepto formal. El estudiante tiende a olvidar las propiedades formales y tiende a mantener en mente aquéllas impuestas por un modelo".

Actividades trabajadas

Las actividades presentan la siguiente pregunta:

Diga si es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2. Argumente por qué.

Actividad, inciso a

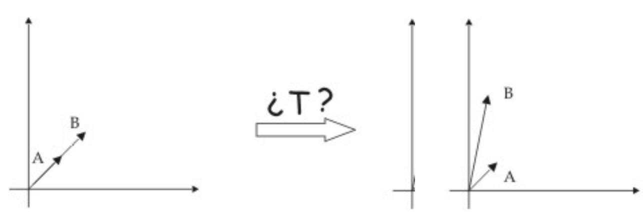


Figura 1 Figura 2

Por motivos de espacio no incluimos las restantes actividades, estas se pueden consultar en el siguiente hipervínculo:

http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33500204&iCveNum=6262

El resultado principal que reporta es que los modelos intuitivos detectados en todos los estudiantes sobre la TL son una serie de casos particulares de transformaciones lineales. Éstas son transformaciones lineales que se conocen en el ambiente escolar como expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones de éstos. Los estudiantes, con el conjunto anterior de transformaciones lineales en $\Re^2$ como universo, cuando las preguntas involucran sólo estas transformaciones, en la mayoría de los casos determinan si la transformación involucrada en la cuestión es lineal; en caso de que tal transformación no forme parte de su universo, ésta es excluida de la clase TL. Para justificar lo antes dicho retomamos un caso en que se refleja esta situación.

El caso de Hermes: En el transcurso de la entrevista este alumno contestó con desenvoltura y correctamente cada uno de los casos que se le plantearon, mostrando facilidad para transitar entre las representaciones gráficas y las algebraicas. Sin embargo cuando llegó a la actividad *I* tuvo dificultades.

Ante esta situación, de entrada Hermes contesta negando la existencia de la TL; con seguridad dice:

> *H159: No, ésta no, porque está dejando fijo a B y este, está transformando a, A (señala la figura 2), y pues no.*

Resulta importante lo repentina y contundente de la reacción de Hermes al negar la posible existencia de la TL, porque dos rasgos de la intuición son su *evidencia* y *certeza*; son nociones que quien las experimenta no siente necesidad de argumentos para aceptar como ciertas y Hermes parece estar seguro de su respuesta. Ante la reacción de Hermes intervenimos pidiendo que agregara detalles a su explicación. Como respuesta Hermes intentó dar una justificación algebraica que respaldara su afirmación, no la consiguió, sin embargo mantuvo su postura. A continuación al pasar a la siguiente pregunta (actividad *m*):

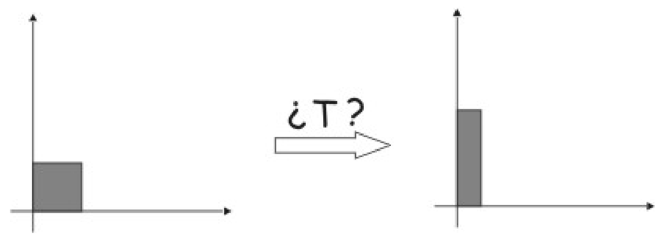


Figura 1 Figura 2

Hermes estaba en profundas meditaciones, repentinamente tomó la hoja en la que estaba plasmado el caso anterior, la actividad *l* y a continuación desarrolló un elaborado argumento a favor de la existencia de la TL, recurriendo a ideas relativas a los vectores base de una transformación; aquí nos interesa resaltar que con mucha seguridad cambió de postura, y mostró que en el caso de la actividad *l* sí podría existir una transformación lineal y comentó que lo mismo ocurriría con la actividad *m*. Cuando Hermes descubrió que sí podría existir la TL, nos explicó los rasgos que él consideraba de la transformación lineal y qué fue con los que se apoyaba para argumentar:

H181(Fragmento):…Pues tendría que cambiar de opinión en varias de esas, pero […]

E182: Mjm, ¿en cuáles tendrías que cambiar de opinión?

H183: Pues en un montón, sí porque estaba yo pensando, considerando transformaciones solamente rotación y por escalar, y no o sea, no necesariamente, de hecho ésta va a ser una transformación, transformación lineal, además.

Posiblemente lo que condujo inicialmente a Hermes a concluir la no existencia de la TL es que él pensaba en la transformación lineal como una función que tiene el mismo simple efecto geométrico en todos los vectores del plano (expande todos, contrae todos, rota todos, etc); cuando observa que el vector B se mantiene constante, interpreta que la transformación no afectó a un vector, entonces concluye que no es una TL. En otras palabras, Hermes tiene en mente ciertos modelos intuitivos acerca de cómo se comportan las transformaciones lineales, de tal forma que cuando se enfrenta a una situación que no encaja dentro de su universo de modelos, rechaza la existencia de la transformación lineal, como en la actividad *l*.

Hermes pensaba la transformación lineal en términos de movimientos geométricos simples, la expansión, compresión, la rotación y combinaciones de ellos. Cuando abordó la actividad *m*, él percibió una transformación lineal que tenía un comportamiento que consideraba imposible en ellas, que un vector se contraiga y otro se expanda, teniendo como resultado el cambió de postura, esta observación la respaldan con el diálogo H109 y en H183; aunque en este caso su argumento está basado en el no cumplimiento de la propiedad de la multiplicación por un escalar.

> H109: Porque como están alineados, deberían de cumplir este, esto deberían de cumplir (señala $A = \lambda B,\ T(A) = \lambda T(B)$), a esto, si se cumple esto, eso se debe cumplir y veo que, que no pues, un vector se estira y el otro se encoge, eso es lo que veo que no se puede.

Como discutimos en los párrafos anteriores, inicialmente Hermes se mostró reacio en aceptar la existencia de la TL. Su reacción, firmeza en no aceptar la existencia, no poder argumentar, podría ser la manifestación de su intuición ejerciendo influencia en él. Por otra parte, su cambio de postura después de observar el caso siguiente es un ejemplo de cómo una noción intuitiva puede ser modificada, cuando otro modelo intuitivo entra en juego. Al reflexionar sobre la pregunta, lo que era *implícito* volvió explícito [ver 183 arriba] y esto permitió el cambio en su postura. La pregunta planteada en la actividad *m* tiene un formato diferente a las anteriores, esto también podría tener el efecto de evocar modelos mentales de otra naturaleza en Hermes (uno con figuras que para él sí es una TL, porque tal vez lo asocia con la fórmula $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{bmatrix}$ que sí cumple las propiedades), él logra percibir en la actividad *m* que si los lados que determinan la figura 1 representan vectores, ocurría algo semejante a lo planteado en la actividad *m*: una TL que afecta en forma diferente a los vectores, por consiguiente deduce que en tal caso sí podría existir.

Conclusiones

El álgebra lineal es una materia muy importante en el currículo escolar en México, por ello es importante mostrar explícitamente a profesores y estudiantes cómo los modelos intuitivos influyen implícitamente en nuestro razonamiento, esto brinda una comprensión profunda del concepto TL, pues permite que nuestro conocimiento sobre el tema se aproxime mejor al que la matemática le asigna.

Referencias bibliográficas

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holland: Reidel.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For Learning of Mathematics*, *9*, 9-14.

Molina, J. G. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.

Molina, J. G. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Papert, S. (1981). *Desafío a la mente*. Argentina: Ediciones Galápago.

UNA REFLEXIÓN SOBRE EL PROPIO APRENDIZAJE. SU ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE.

Mercedes Anido, Ana María Craveri, María del Carmen Spengler
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario — Argentina
anidom@fceia.unr.edu.ar, craveri@arnet.com.ar, mariaspengler@gmail.com
Campo de investigación: Didáctica de la Matemática — Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se analiza una encuesta de opinión de los alumnos sobre una modalidad de aprendizaje que incorpora la herramienta computacional y su vinculación con la Teoría de los Estilos de Aprendizaje en la concepción de Alonso, Gallego y Honey (1999), a modo de evaluación de una experiencia de aprendizaje de temas introductorios al Álgebra Lineal, en un Laboratorio de Informática de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario (FCE y E de la UNR). Se trata de contar con una autoevaluación, que en un proceso de metacognición, aporte elementos para evaluar la comprensión, el interés, el esfuerzo personal en el desarrollo de los temas propuestos, para orientar la programación de actividades y elaboración de material didáctico que potencien los procesos de indagación, reflexión, abstracción y aplicación.*

Palabras clave: estilos de aprendizaje, encuesta de opinión, metacognición

Introducción

Se trata de relacionar las siguientes indagaciones realizadas con alumnos de primer año de la carrera de Contador que cursan Matemática I. en la FCE y E de la UNR.:

a) los Estilos de Aprendizaje de la población de análisis mediante la aplicación del Cuestionario Honey – Alonso de Estilos de Aprendizaje (CHAEA).

b) la opinión de los alumnos a través de una encuesta sobre la motivación, facilitación y utilidad del trabajo interactivo con el computador en temas de Álgebra Lineal Surge así, como objetivo de este trabajo: contar con una autoevaluación que constituya a su vez una estrategia de metacognición de un proceso de aprendizaje y a partir de ella mejorar el diseño de las actividades de enseñanza con herramientas CAS (*Computer Algebraic System*)

Problema de investigación

¿Qué relación existe entre las repuestas del alumno a la encuesta y su estilo de aprendizaje predominante?

¿Se insinúan tendencias entre las formas en que los alumnos reflexionan sobre su trabajo y su estilo personal de aprender?

La determinación de los estilos de aprendizaje

¿Qué entendemos por Estilos de Aprendizaje?

Las Teorías de los Estilos de Aprendizaje han venido a confirmar la diversidad y relatividad del aprendizaje y demostrado que las personas piensan de manera distinta, captan la información, la procesan, la almacenan y la recuperan de forma diferente. Proponen un camino para mejorar el aprendizaje por medio de la conciencia personal del docente y del alumno, de las peculiaridades diferenciales, es decir, de los Estilos Personales de Aprendizaje (Alonso et al. 1999)

Existen distintas teorías de Estilos de Aprendizaje y cada una de ellas aporta su correspondiente instrumento de diagnóstico. En este tema nuestros referentes han sido los Dres. Catalina Alonso y Domingo Gallego Gil y el instrumento de diagnóstico el CHAE. La definición de estilo que se adopta es la que propone Keefe (1982), quien considera los Estilos de Aprendizaje como los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los alumnos perciben, interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje.

Para Honey y Mumford (1986), los Estilos de Aprendizaje se corresponden con el recorrido cíclico de cuatro etapas de Kolb (1984): experimentación concreta, observación reflexiva, conceptualización abstracta, experimentación activa y son cuatro respectivamente:

Activo: Se entusiasman frente a tareas nuevas. Pasan rápidamente de una actividad a otra. Se aburren con tareas de largo plazo. Tienden a centrar a su alrededor todas las actividades.

Reflexivo: Les gusta considerar y observar las experiencias desde diferentes perspectivas. Recogen datos y los analizan detenidamente antes de llegar a alguna conclusión. Son prudentes. Observan y escuchan a los demás. Intervienen sólo cuando se han adueñado de la situación.

Teórico: Adaptan e integran las observaciones dentro de teorías lógicas. Tienden a ser perfeccionistas. Analizan y sintetizan Buscan la racionalidad y la objetividad. Huyen de lo subjetivo y ambiguo.

Pragmático: Su punto fuerte es la aplicación práctica de las ideas. Actúan rápidamente y con seguridad con aquellas ideas y proyectos que los atraen. Se impacientan ante personas que teorizan. Su filosofía es: siempre se puede hacer mejor, si funciona es bueno.

El CHAEA consta de 80 ítems breves y se estructura en cuatro grupos o secciones de 20 ítems correspondientes a los cuatro Estilos de Aprendizaje: Activo-Reflexivo-Teórico-Pragmático.

Todos los ítems están distribuidos aleatoriamente formando un solo conjunto. Cada ítem es una afirmación que el alumno marcará con un signo + sólo si se siente identificado con ella. La última hoja del cuestionario contiene cuatro columnas (una por cada Estilo) donde figuran impresos todos los 80 números predistribuidos por estilo por los autores del Cuestionario y donde según corresponda el alumno marcará con un círculo los números de los ítems a los que señaló con signo +. La puntuación absoluta que el sujeto obtenga en cada grupo de 20 ítems, es el número de marcas que cuenta en cada una de las cuatro columna, será el nivel que alcance en cada uno de los cuatro Estilos de Aprendizaje.

La fiabilidad y validez del CHAEA ha sido demostrada a través de las investigaciones llevadas a cabo por Catalina Alonso en 1371 estudiantes de las Facultades y Escuelas Universitarias, pertenecientes a las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid. La elección del CHAEA estuvo basada además en la factibilidad de su aplicación en grupos numerosos de alumnos.

Los estilos de aprendizaje en nuestra experiencia

La interpretación del puntaje es relativa a la población donde se toma el cuestionario, por lo que para interpretar las puntuaciones del mismo, se construye un baremo de interpretación. a partir de una muestra de 381 alumnos

La siguiente tabla contiene los límites de los intervalos que resultan del análisis de las estructuras de percentiles de las distribuciones de los puntajes para cada estilo. Esto permite clasificar a los alumnos en la categoría de preferencia que le corresponde de acuerdo al puntaje declarado en cada una de las columnas del cuestionario CHAEA.

Baremo General. Preferencias en Estilos de Aprendizaje. FCEyE UNR

	Muy baja	Baja	Moderada	Alta	Muy alta
Activo	0 - 6	7 - 8	9 – 13	14 - 15	16 – 20
Reflexivo	0 - 9	10 - 12	13 – 16	17 - 18	19 – 20
Teórico	0 - 8	9 - 11	12 – 14	15 - 16	17 – 20
Pragmático	0 - 7	8 - 10	11 – 14	15	16 – 20

¿Cómo interpretar el puntaje del CHAEA, con nuestro baremo?

Un alumno que ingresa al primer año de la FCEyE de la UNR que obtuvo, por ejemplo 9 puntos en cada Estilo de Aprendizaje, tiene:

Preferencia moderada en Estilo Activo

Preferencia muy baja en Estilo Reflexivo

Preferencia baja en Estilo Teórico

Preferencia baja en Estilo Pragmático

La encuesta de opinión como estrategia de metacognicion

¿Por qué consideramos que la encuesta, además de su carácter como instrumento evaluativo de un proceso de aprendizaje, constituye una estrategia de metacognición?

Cuando hablamos de metacognición hablamos de la conciencia y el control que los individuos tienen sobre sus procesos cognitivos. (Terán y Anido, 2007)

El término metacognición de acuerdo a la mayoría de los autores alude a dos componentes básicos, el saber acerca de la cognición y la regulación de la cognición. El primer componente se refiere a la capacidad de reflexionar sobre nuestros propios procesos cognitivos, y la regulación metacognitiva implica el uso de estrategias que nos permiten controlar esfuerzos cognitivos. El propósito fundamental al enseñar a los estudiantes los mecanismos de la metacognición es hacer posible que ellos asuman la responsabilidad de sus propias actividades de aprendizaje y de comprensión. Los psicólogos basándose en los planteos de Vygotsky (1978) consideran que la mejor forma de lograr este objetivo es transferir gradualmente a los jóvenes la responsabilidad de la regulación.

Hawkins y Pea (1987) se basan explícitamente en la obra de Vygotsky al abogar por un enfoque del aprendizaje que promueva la transición de la heterorregulación (ser regulado por los otros) a la autorregulación. Johnson (1985) comenta también la importancia de que los estudiantes asuman el control de su propio aprendizaje de la ciencia y sostiene que cuando los estudiantes aprenden que tienen cierto control sobre la información a la que acceden, pueden verse a sí mismos como directores responsables de su propio aprendizaje y no como receptáculos inertes de información que otros les vuelcan.

En este caso se pide a los alumnos una reflexión sobre la comprensión de temas de un área específica, en relación a su capacidad de aplicación y la interpretación de su propia experiencia en un trabajo de Laboratorio, en cuanto al interés despertado y el esfuerzo demandado. Se trata de que los estudiantes tomen conciencia del conocimiento adquirido y de las experiencias realizadas. A ese fin la encuesta de opinión constituye una estrategia para esa toma de conciencia.

Metodología

Se indagó la opinión del alumno con relación a las siguientes variables técnicas:

- Realización de cursos previos de computación
- Acceso a una computadora
- Comprensión de los temas
- Interpretación y abstracción de situaciones problemáticas
- Necesidad de recurrir al docente
- Esfuerzo demandado por la tarea
- Preferencia
- Valoración de los problemas presentados

El Diseño integra tres análisis:

a) El análisis descriptivo de cada una de las variables que intervienen en la encuesta.

b) El análisis de la asociación entre algunas variables de la encuesta consideradas relevantes. En este punto se indaga sobre la posibilidad de que los alumnos que no han realizado cursos previos de computación son impactados de manera diferente por la modalidad de trabajo en el Laboratorio que aquellos que podrían tener mayores facilidades a la hora de manejar una computadora.

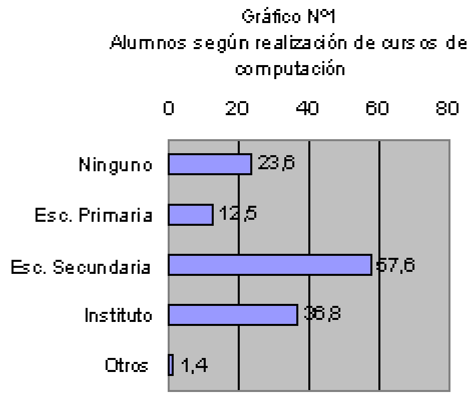
Se analiza la significación de la asociación entre "realización de cursos previos de computación" y/o "tener acceso a una computadora" y la adaptación a la modalidad de trabajo propuesta. Para esto se cruzan las respuestas a cada variable del cuestionario con la variable "realización de cursos previos de computación" y a continuación con la variable "acceso a una computadora".

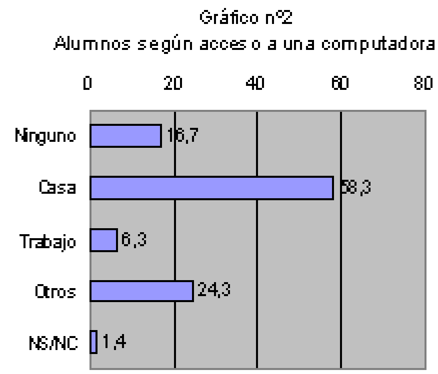
c) La vinculación entre las respuestas del alumno y su "estilo de aprendizaje" predominante. En este punto se indaga sobre la relación entre las respuestas a la encuesta de opinión y el Estilo de Aprendizaje predominante en el alumno. Por ejemplo, al respecto se preestablece que en un alumno predomina el estilo Activo, si en este estilo ha obtenido el puntaje más alto respecto de los demás estilos.

Este último análisis, da respuesta al segmento de la investigación que se enfoca en esta presentación.

Algunos resultados

La mayoría de los alumnos posee conocimientos sobre computación (74,6%), en general adquiridos durante la escuela secundaria. Además, sólo un 16,7% declara no tener acceso a una computadora (Gráficos Nº1 y Nº2)



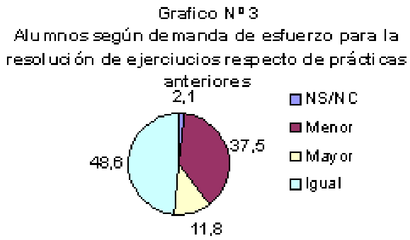


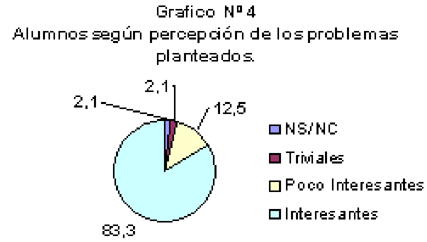
El 79,8% de los alumnos opinan que han comprendido satisfactoria o muy satisfactoriamente los temas trabajados con esta modalidad, el 16,7 % medianamente y reconocen que ha sido poco satisfactoria el 3,5%.

El 73,6% de los alumnos encuestados declaran que la modalidad de trabajo lo ha ayudado mucho en la interpretación y abstracción de situaciones problemáticas, el 26,4% considera que la ayuda ha sido escasa o nula.

El 70,8% de los alumnos dicen preferir esta metodología por sobre la tradicional, el 23,6 % se manifiesta por la no preferencia y el 5,6% no contesta.

La opinión de los alumnos respecto de la demanda de esfuerzo para la resolución de los ejercicios planteados en el Laboratorio comparativamente con el esfuerzo realizado para resolver los ejercicios de las prácticas anteriores es dispar. El 48,6% opina que el esfuerzo fue igual, un 37,8% entiende que realizó un menor esfuerzo y a un 11,8% le demandó un esfuerzo mayor (Gráfico Nº 3). Los ejercicios planteados durante el curso le parecieron interesantes a la mayoría de los alumnos encuestados (83,3%). El 2,1% de los alumnos los consideraron triviales (Gráfico Nº 4).





Todos los alumnos requirieron al menos ocasionalmente la orientación o apoyo del docente para resolver las aplicaciones planteadas durante el curso. El 6,3% manifiesta que "siempre" necesitó de la orientación del docente para resolver los problemas planteados. Esto podría indicar que la asistencia de la herramienta computacional no implica el reemplazo del docente, sino que funcionaría como un efectivo complemento

b) El análisis de la asociación entre algunas variables de la encuesta consideradas relevantes.

La variable "Realización de cursos previos de computación" es independiente de:

- "Comprensión de los temas"(p=0.813)
- "Esfuerzo empleado en la resolución de los ejercicios" (p=0.998)
- "Percepción sobre los problemas presentados en la práctica" (p=0.556)

La variable "Acceso a una computadora", sólo se detectó asociada a la variable "Esfuerzo empleado en la resolución de los ejercicios" (p=0.018 de que sean independientes)

c) La vinculación entre las respuestas del alumno y su "estilo de aprendizaje" predominante.

Con respecto a la "Comprensión de los temas de Álgebra Lineal", el único estilo que presenta diferencia en la distribución de las respuestas es el estilo Activo (p=0.029). Una mayor proporción de alumnos se han pronunciado por las categorías extremas (superior o inferior) de esta variable comparativamente con los restantes estilos que se pronunciaron mayormente por la categoría central. Con respecto a la "Preferencia por esta modalidad" la diferencia en las respuestas se detecta también en los alumnos predominantemente activos (p=0.038), quienes se manifiestan por la no preferencia por esta modalidad diferenciándose así de los restante Estilos.

Conclusiones

El alto porcentaje de alumnos que manifiestan tener conocimientos de computación y disponer de una computadora fuera de la Facultad, lleva a suponer condiciones adecuadas para acceder en forma casi inmediata a la utilización de programas CAS en las clases prácticas, la nivelación de los pocos 'no preparados' es factible. En relación al esfuerzo que significó para el alumno trabajar con esta modalidad, comparativamente al realizado con la metodología tradicional (clase expositiva), poco más del 10% percibe un esfuerzo mayor, al cruzar esta información con la referida a la posibilidad de acceder a una computadora fuera del Laboratorio, como era de esperar, menos del 10% de los alumnos que pueden acceder a una computadora percibieron haber realizado un mayor esfuerzo, mientras que este porcentaje se eleva a casi el 30% en los alumnos que no tienen disponible un computador fuera de las horas asignadas al Laboratorio. Por otra parte, la mayoría prefiere esta modalidad a la metodología tradicional y considera que esta propuesta de trabajo contribuye satisfactoriamente a la comprensión e interpretación de los problemas de Álgebra Lineal. Sobre la posible existencia de una relación entre las respuestas del alumno y su estilo personal de aprendizaje, independientemente del 'estilo predominante', la mayoría ha recibido bien esta modalidad. No obstante llaman la atención algunos resultados observados en los alumnos predominantemente activos en lo que se refiere a preferir esta modalidad (Laboratorio de Computación) por sobre la metodología tradicional (Clase Expositiva). El 40% de los alumnos predominantemente activos manifiestan no preferir la modalidad de trabajo en el Laboratorio, es en el único 'estilo' donde se observa tan alta proporción por la no preferencia. Este es un resultado inesperado si se tiene en cuenta la 'interactividad' (respuesta rápida, manejo de comandos, posibilidad de verificaciones inmediatas, etc.) que ofrece el trabajo frente a un computador.

Referencias bibliográficas

Alonso, C. M, Gallego, D. J., Honey, P. (1999). *Los Estilos de Aprendizaje*. *Procedimientos de diagnóstico y mejora*. Bilbao: Ediciones Mensajero

Baker, L. (1994). Metacognición, lectura y educación científica. En Minnick Santa, C. y Alvermann D. (Compiladoras). *Una didáctica de las ciencias. Procesos y aplicaciones*. Buenos Aires: Aique.

Carin, A. A., Sand, R. B. (1985). *Teaching modern science* (4ª ed.). Columbus, OH: Merril.

Carter, G. S. y Simpson, R. D. (1978). Science and reading: A basic duo. *The Science Teacher,* 45 (3), pp. 20.

Esler, W. K. y Esler, M. K. (1985). *Teaching elementary science* (4ª ed.). Beltmont, CA: Wadsworth.

Fischer, K. M., Lipson, J.K. (1986). Twenty questions about student errors. *Journal of Research in Science Teaching,* 23, pp. 783-803.

Garner, R. (1987). *Metacognition and reading comprehension*. Norwood, NJ: Ablex.

Hawkins, J., Pea, R. D. (1987). Tools for bridging the cultures of everyday and scientific thinking. *Journal of Research in Science Teaching,* 24, pp. 291-307.

Honey, P y Mumford, A (1986) Using our Learning Styles. P. Honey. Berkshire, U.K.

Johnson, V. R. (1985). Concentrating on the brain. *Science Teacher,* 52(3), pp. 33-36.

Keefe, J.W (1982). Assesing Student Learning Styles. An Overview. ERIC ED 227566. Michigan.

Kolb, D (1984) Experiential Learning. Experience as the source of Learning and Development. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall.

Maehr, M. L. (1983). On doing well in science. Why Johnny no longer excels; why Sara never did. En Paris, S., Olson, G. y Stevenson (Eds.). *Learning and motivation in the classroom*, pp. 179-210. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Osborne, R. J. y Wittrock, M. C. (1983). Learning science: A generative process. *Sciencie Education*, 67, pp. 489-508.

Peterson, R., Bowyer, J., Butts, D., Bybee, R. (1985). *Science and society: A source book for elementary and junior high school teacher.* Columbus, OH: Merril.

Terán, T., Anido, M. (2007). Metacognition as a didactic strategy in statistics. En Actas 56 th Session of the ISI International Statistical Institute. Lisboa.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society.* Cambridge, MA: Harvard University Prees.

Watson, F. (1983). On the drawing board: A 21st century curriculum. *The Science Teacher,* 50(3), pp. 62-63.

LA VISUALIZACIÓN, COMO ESTRATEGIA DE ESTUDIO EN EL CONCEPTO DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón
FESC - UNAM, CICATA - IPN México
carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo nos apoyamos de experiencias en clase con estudiantes del curso de Álgebra Lineal, en las que se les proponen actividades que los conducen a elaborar representaciones de carácter geométrico de los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal. Estas experiencias ponen su atención en representaciones geométricas, que nos brindarán elementos para problematizar la adquisición de los conceptos de dependencia e independencia lineal, reconociendo en ellos una especial complejidad debido al nivel de abstracción que presentan. Es en los escenarios geométricos que podremos, a partir de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, encontrar los indicios de comprensión o no de dichos conceptos y estructurar preguntas precisas sobre la adquisición de los conceptos en Álgebra Lineal por parte de los estudiantes.*

Palabras clave: visualización, combinación lineal, dependencia e independencia lineal

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en las escuelas de ingeniería representa un conjunto de dificultades diferentes a las que se presenta, por ejemplo en el cálculo. En esta materia, es frecuente motivar la enseñanza de los conceptos a partir de otros conocimientos físicos o geométricos presentados previamente, pero en el álgebra lineal la mayor parte de conceptos son presentados por los libros de texto recomendados para su estudio, como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. En el ámbito escolar, el carácter abstracto de esta materia ha obligado a la comunidad matemática de esta especialidad ha reflexionar con relación a la búsqueda de representaciones diferentes del tema. Con el fin de clarificar las dificultades que enfrentan los alumnos al estudiar el concepto matemático de dependencia e independencia lineal en polinomios de segundo grado que se aborda en la asignatura de álgebra lineal, en esta investigación se pretende hacer uso de las representaciones visuales para que los alumnos puedan incorporarlas en la búsqueda de significados en el concepto antes referido. Tradicionalmente los problemas asociados se resuelven usando la definición dada junto con argumentos derivados de la lógica. Esto hace que muchos estudiantes sientan que la materia es demasiado abstracta (se ha observado que en curso convencional los estudiantes son capaces de determinar si un conjunto de vectores forman o no un espacio vectorial, es decir pueden aplicar los axiomas con la dificultad inherente correspondiente, pero cuando se les cuestiona respecto a su significado, ellos no pueden articular una respuesta, entendemos este hecho como una manipulación algebraica carente de significado) y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en la realidad. Entre los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal, están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. Por ejemplo en un momento dado se puede presentar al conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo como un subespacio vectorial y en otro momento ese mismo conjunto se puede presentar como el núcleo de una transformación lineal o bien es frecuente ayudarse de la geometría en R^2 o R^3 para visualizar la suma de vectores, pero es difícil usar la geometría para visualizar las sumas en espacios vectoriales como polinomios o matrices. El alumno se encuentra, entonces, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales.

En busca de un Marco Teórico

Es mi interés encontrar un punto de vista que me permita reflexionar estrategias de la visualización, dentro de las perspectivas generales, los investigadores han desarrollado múltiples marcos teóricos locales y metodologías que caracterizan de formas distintas el modo en que las preguntas de investigación se eligen y expresan y el modo en que son abordadas (afectando, por tanto, el tipo de resultados que se puede obtener y el modo en que son descritos). Artigue (2003). El desarrollo de las teorías que fortalecen la importancia de la visualización matemática, considerada como la habilidad para interpretar y representar de manera diferente la información percibida y la reflexión extraída de información visual, impone a los autores de textos considerar estas ideas para presentar nuevas propuestas de enseñanza. (Hitt, 2002). Arcavi (1999), admite haber combinado las definiciones de Zimmermann y Hershkowitz, declarando que la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo de reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento.

Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*" (Cantoral & Montiel, 2002, p.24). En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura. La visualización de un problema matemático juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.

Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, también lo es el análisis de las tareas de conversión entre representaciones que debemos proponer a nuestros estudiantes. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático.

Un par de exploraciones

El reporte que se presenta parte de experiencias escolares, hasta el momento se ha podido identificar algunos rasgos que muestran las dificultades en la interpretación del concepto de dependencia e independencia lineal, se ha observado por ejemplo, que los estudiantes pueden hacer uso de la visualización cuando al partir de un par de vectores como dato localizan cualquier punto en el plano, construyen una recta y con un conjunto de rectas forman la totalidad del plano. Al final de la actividad que se describe, algunos estudiantes llegan a la definición de combinación lineal como un resultado que refleja un cierto grado de generalización, pero cuando pasan al desarrollo de la segunda parte del diseño y los cuestionamientos son relacionados con aspectos visuales dentro del tema de los polinomios de segundo grado, los participantes no puedan llegar a categorizar si un conjunto de este tipo es linealmente dependiente o independiente (tal como se puede apreciar en el par de exploraciones propuestas en este documento).

Dentro de nuestra investigación, otro de los elementos que pretendemos estudiar son las dificultades que se puedan presentar en el uso y manejo por parte de los estudiantes del concepto denominado isomorfismo entre los polinomios de segundo orden y el espacio R^3, así como estudiar la propuesta que tiene que ver con el hecho de que los alumnos logren transitar en el sentido inverso, es decir, partir de un vector de posición en R^3 y llegar a la representación de un polinomio de segundo grado de alguna manera. Además de utilizar el transito entre estas dos representaciones como una extensión de los antecedentes y características de los vectores libres con los que cuenta el estudiante y con ello replantear una propuesta alternativa que nos proporcione evidencias en cuanto a la disminución o no de las dificultades en el manejo de dicho concepto.

Del grupo de estudiantes de ingeniería que participaron en la puesta en escena, se muestran dos de las respuestas que ellos dieron. La comunidad estudiantil participante resolvió todas y cada una de las actividades que se han diseñado hasta este momento para tal efecto. La razón por la cual decidimos mostrar este extracto de su trabajo, es porque en el se pueden distinguir algunos de los rasgos que hemos encontrado en forma regular:

- Dan evidencia de que cuando hacen uso de la visualización como estrategia de estudio en el espacio de los vectores libres, ésta les puede ayudar en la reflexión y análisis de sus propuestas de solución y les permite replantear en cierto grado (cuando es necesario) las posibles correcciones de sus respuestas. Podemos considerar entonces que en dicho espacio vectorial, la visualización puede contribuir en el estudio de los conceptos de combinación lineal y de dependencia lineal.
- El reconocimiento de que la visualización se puede convertir en un obstáculo para caracterizar si un conjunto de polinomios de segundo grado es linealmente dependiente o independiente cuando se realiza la gráfica de las parábolas respectivas en el plano cartesiano.
- Manifiestan la necesidad de utilizar otras estrategias alternativas para lograr su objetivo, sin desprenderse de la propuesta emergida de la visualización, debido al rol de esta, en su vida cotidiana.

De esta reflexión, se abren nuevas interrogantes ¿es el contexto de los objetos matemáticos lo que no permite ver con claridad los resultados? , ¿Qué hace que los estudiantes no puedan entender el concepto de combinación lineal con polinomios de segundo grado? ¿Por qué no entienden con la misma claridad el asunto se sumar o restar un vector (polinomios)?

¿Por qué en los polinomios el estudiante no puede decir en forma directa si el conjunto que se le presenta es o no linealmente dependiente?

En el material de la figura 1 que se muestra a continuación, se aprecian las respuestas planteadas por un grupo de estudiantes, se observa que los estudiantes pensaron intuitivamente y proponen en sus respuestas que "*la dependencia o independencia lineal se relacionaba con la existencia o no de un punto de intersección*".

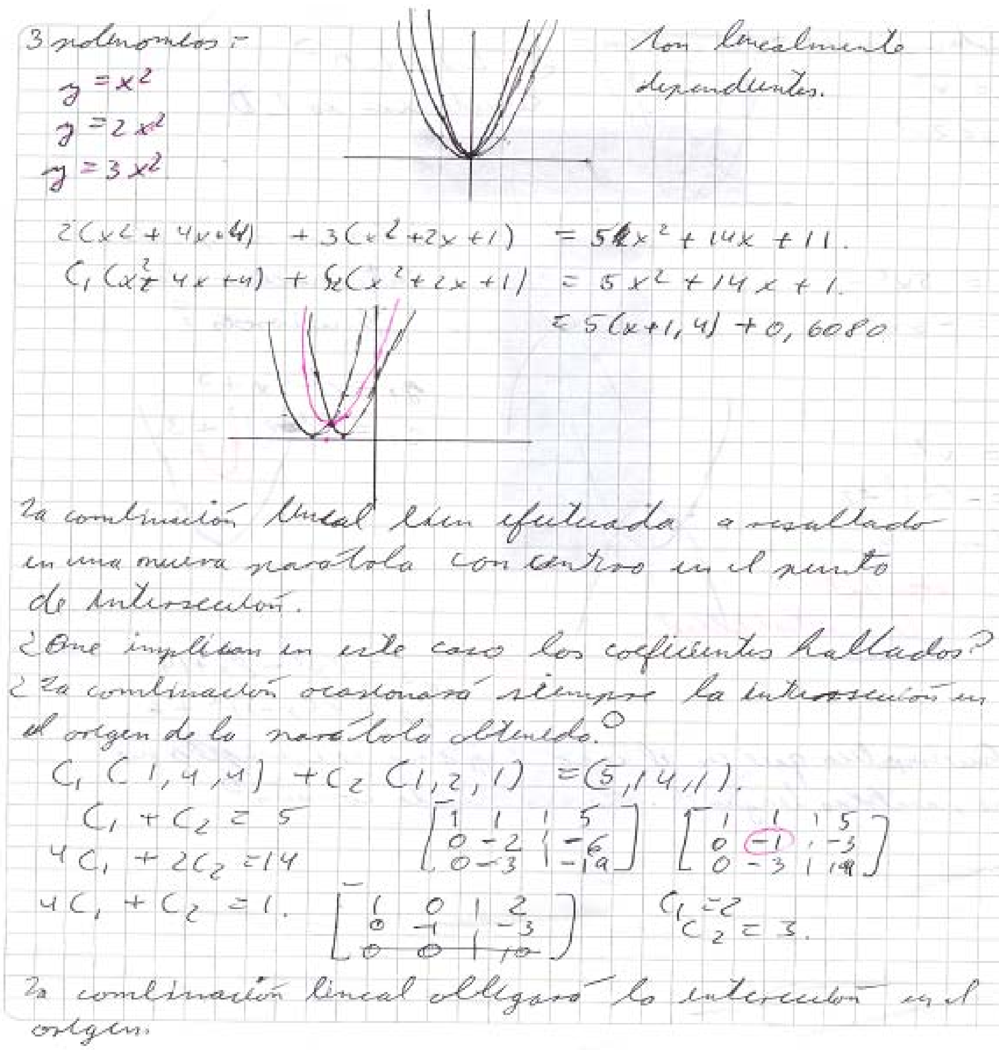


Figura 1

En la primera parte de esta figura se puede observar que la dependencia e independencia lineal en el espacio de los polinomios de segundo grado es determinada por el punto de intersección entre las parábolas correspondientes. En la segunda parte, se puede identificar la intención de generalizar su idea inicial, se aprecia que hacen uso de la definición de combinación lineal como un elemento que determina la producción de parábolas que se intersecan en un punto común, podemos considerar que su propuesta centrada en el análisis algebraico de casos particulares no les proporciona elementos suficientes para estructurar un planteamiento general.

Nótese en la figura 2, que la exploración realizada por este grupo de estudiantes se relaciona con la idea de multiplicidad entre dos polinomios de segundo orden y la intentan relacionar con los puntos que contienen en común las gráficas de estas parábolas.

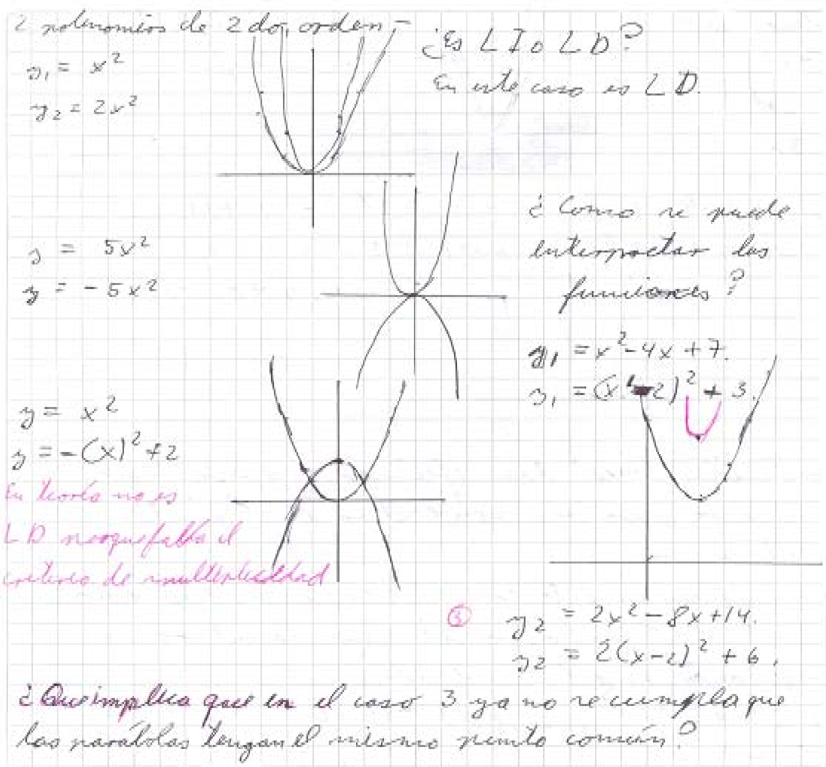


Figura 2

En la pregunta 3 que se les propone en esta actividad , los estudiantes ya no logran encontrar la regularidad que habían focalizado, pues en el ejercicio se incluyen dos polinomios que son múltiplos pero que no se intersecan y esto rompe con la estrategia que ellos habían utilizado, situación que puede ser observada con claridad al dar lectura a la pregunta que al final de su trabajo los estudiantes plantean ¿*qué implica que en el caso 3 ya no se cumpla que las parábolas tengan el mismo punto común*?

¿Qué aprendimos de las exploraciones realizadas?

Las reflexiones que nos ha proporcionado la puesta en escena de las actividades mostradas son las siguientes:

- La dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas con los mismos.
- La dependencia e independencia lineal de polinomios de segundo grado no se relaciona con la multiplicidad entre dos vectores.
- Los estudiantes buscan dar respuestas aquello que no logran entender con elementos conocidos y privilegian el aspecto algebraico para la su solución de las actividades propuestas.
- Hacer uso del isomorfismo entre los polinomios de segundo grado y los vectores en el espacio R^3, podría proporcionarnos información para replantear cuestionamientos relacionados con las dificultades al usar la visualización como estrategia de estudio del concepto de la dependencia e independencia lineal.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp.55-80). Morelos, México

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X (2), 117-134.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2002). *Una presentación visual del polinomio de Lagrange*. Enseñanza de la Matemática. Asociación Venezolana de Educación Matemática, Vol. 11 (1), 24-38.

Sierpinska, A**.** (1996) *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra, Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, Central Michigan University.

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica   Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr
Campo de investigación: Resolución de problemas   Nivel: Medio, superior

Resumen. *El propósito de este curso es el de compartir algunas reflexiones relacionadas con la estrategia metodológica de resolución de problemas matemáticos, revisar las ideas de Polya (1990), Schoenfeld (1985), del informe PISA, de la NCTM y especialmente el enfoque "Open-Ended" (Becker y Shimada, 2005) utilizado por los japoneses en el aula.*

También se describen aspectos históricos de la utilización de tecnologías digitales en el proceso de resolución de problemas, principalmente las estrategias utilizadas por investigadores en inteligencia artificial.

Palabras clave: resolución de problemas

Introducción

A partir de la década de los 60 la resolución de problemas ha recibido un enorme impulso, especialmente en la educación matemática. En el documento Agenda para la acción (1980) del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM), la resolución de problemas fue colocada como el foco de la educación matemática para la década de los 80. En los documentos elaborados por la NCTM en 1989 y en el 2000, la resolución de problemas recibió un destaque especial. En los estándares para la matemática escolar, la resolución de problemas es considerada como parte integral del aprendizaje de la matemática y se considera que los estudiantes de todos los niveles del sistema educativo deberían ser preparados para construir nuevos conocimientos matemáticos mediante la resolución de problemas; resolver problemas que aparecen en matemáticas y en otros contextos; aplicar y adaptar varias estrategias para resolver problemas; monitorear y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.

Un importante concepto en resolución de problemas es el de heurística. Heurística son métodos exploratorios para resolver problemas y, utilizada como sustantivo, significa el arte o la ciencia del descubrimiento. Como adjetivo se refiere a cosas más concretas como estrategias heurísticas, reglas heurísticas, silogismos heurísticos. Son estrategias que guían el descubrimiento.

La noción de heurística se le atribuye a Pappus (300 D. C.). Él propuso una rama de estudios denominada "analyomenos" o "el tesoro del análisis" o "el arte de resolver problemas". En ciencias computacionales (ANSI/IEEE Estándar 100, 1984), heurística son métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final (búsqueda heurística). Como adjetivo caracteriza técnicas por las cuales mejora en promedio el resultado de una tarea resolutiva de problemas. Se dice que hay búsqueda ciega, búsqueda heurística (basada en la experiencia) y búsqueda racional (usando inteligencia). La psicología ha propuesto que una heurística es una regla sencilla y eficiente para explicar cómo toman decisiones las personas, como llegan a un juicio o solucionan un problema. Puede considerarse como un atajo a los procesos mentales activos, ahorrando o conservando recursos mentales pero que puede conducir a errores en la toma de decisiones. Para Polya, vale la pena utilizar tales recursos aún considerando los riesgos mencionados. Su argumento es que si tomamos una conclusión heurística como una certeza entonces podemos equivocarnos y sentirnos engañados, pero si rechazamos completamente las conclusiones heurísticas entonces no lograremos hacer ningún progreso en el proceso de resolución del problema.

Lamentablemente, cuando un resultado matemático es publicado en revistas científicas, se oculta el razonamiento heurístico llevado a cabo por el matemático antes de obtenerlo. Pero, desde el punto de vista del aprendizaje, este razonamiento heurístico es bastante importante.

Polya presenta su teoría heurística a través de una serie de preguntas e instrucciones seguidas de varios ejemplos de problemas y propone el método de cuatro pasos para resolver problemas: comprender el problema; crear un plan; ejecutar el plan y finalmente examinar lo hecho (Polya, 1990). Posteriormente él publicó su obra “Matemáticas y Razonamiento Plausible” en dos tomos: en el primer tomo él presenta varios ejemplos de problemas resueltos mediante inducción o analogía mientras que el propósito del segundo tomo era el de determinar si existe o no una lógica de la inducción o un cálculo de credibilidad para las hipótesis y propone el siguiente silogismo heurístico: A implica B y B es verdadera entonces A es más digna de crédito, factible o plausible (Polya, 1966). Así, si $A \Rightarrow B$ y si logramos probar que B es verdadera, entonces, después de esa demostración, la conjetura A es más creíble que antes de la demostración de B, aunque no podemos garantizar que A sea verdadera. A este patrón Polya lo llama patrón fundamental inductivo.

Otra excelente obra de Polya con Szego consiste en los dos tomos de problemas y teoremas en análisis (Problems and theorems in análisis, 1976) con problemas que constituyen un verdadero reto para los lectores.

Con el desarrollo de la ciencia de la computación aumenta el interés en el proceso de resolución de problemas con la ayuda de las computadoras. Entre los primeros investigadores que intentaron construir programas inteligentes para resolver problemas se encuentran Newell y Simon (1959, 1972). Su primer programa conocido, el “Logic Theorist”, intentaba demostrar afirmaciones utilizando reglas de la lógica de predicados. El éxito del programa fue enorme pues, en el caso de teoremas, lograba producir una demostración generalmente más directa, más corta que las encontradas en libros de lógica. En 1957 Simon y Newell crearon un programa computacional conocido por sus siglas como GPS (General Problem Solver), una máquina universal para resolver problemas. La idea es que cualquier problema que pudiera ser escrito en forma simbólica pudiera ser resuelto por la GPS: demostraciones de teoremas, problemas geométricos y juegos de ajedrez entre otros. Un problema se define como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere (Newell y Simon, 1972). El entusiasmo inicial debido al éxito de la estrategia se fue apagando, y no debido a la falta de capacidad computacional sino debido a la profundidad de los problemas teóricos. La dificultad fundamental es que estrategias para resolver problemas generales son limitadas. El ser humano utiliza conocimiento de dominio específico para resolver problemas en diferentes contextos mientras que el GPS tenía estrategias bastante generales pero débiles. Para fortalecerlo habría que agregar conocimientos de dominio específico para resolver problemas, posiblemente, de todas las áreas, lo que es una tarea imposible. En 1967, 10 años después de haber empezado, Newell anunció que el programa GPS había terminado. Debido a la dificultad de crear máquinas inteligentes de propósito general, una alternativa consiste en intentar desarrollar máquinas que imiten el desempeño humano en dominios restringidos del conocimiento. El primer intento serio de aplicar este enfoque alternativo se conoce como Micromundos. La teoría detrás de Micromundos fue el primer paso en el campo de la inteligencia artificial para producir inteligencia en un ambiente restringido. Otra línea de investigación fructífera en inteligencia artificial es la que trata de sistemas expertos que juegan algún tipo de juego, como por ejemplo el ajedrez. El caso más famoso fue el de Deep Blue, una computadora IBM que venció al campeón mundial Gary Kasparov. Este programa puede procesar 200.000.000 de movimientos antes de decidir la jugada que hará.

En la década de los ochenta del siglo pasado, Schoenfeld (1985) escribió una obra importante en el campo de resolución de problemas matemáticos. Él realizó experiencias con estudiantes y profesores en las que les proponía problemas a resolver. Los estudiantes tenían los conocimientos previos necesarios para afrontar su solución y los profesores tenían la formación previa para hacerlo. Schoenfeld observaba cómo actuaban los estudiantes y los profesores durante la resolución de problemas, los filmaba, grababa y anotaba sus observaciones. Un hallazgo de estos experimentos fue que las heurísticas planteadas por Polya no eran suficientes para tener éxito al resolver problemas y propuso cuatro estrategias necesarias para un resolutor de problemas de matemática: los recursos (conocimientos previos); las heurísticas; control (distribución de los recursos durante el proceso, la forma de utilizar la información para resolver el problema que incluye el monitoreo del proceso y la toma de decisiones. Un monitoreo no efectivo puede llevar al fracaso mientras que el proceso opuesto mejora la posibilidad de éxito) y el sistema de creencias (del profesor, de los estudiantes y las creencias sociales). Schoenfeld argumenta que las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza, el aprendizaje, derivados de las experiencias en el aula o fuera de ella, influyen durante la resolución de problemas.

Algunas iniciativas actuales

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA/ OCDE) cuyo objetivo primordial es el de desarrollar indicadores que expresen el modo en que los sistemas educativos de los países participantes han preparado a sus estudiantes de 15 años para desempeñar un papel activo como ciudadanos en la sociedad, contiene un dominio denominado Alfabetización Matemática (Mathematical Literacy) relacionado con la formulación y resolución de problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (http://www.pisa.oecd.org/). Para ellos la resolución de problemas es una parte central del currículo explicitan las características de un problema matemático en este ámbito:

- Una situación contextualizada, ubicada en la realidad, que podría ocurrir en la vida del estudiante o bien una situación que el estudiante pueda identificar como importante para la sociedad. Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la Alfabetización Matemática.
- Una situación que no puede ser resuelta mediante aplicaciones de procedimientos rutinarios que el estudiante haya estudiado o bien practicado en el aula y que

invite al estudiante a moverse entre distintas representaciones y a exhibir cierto grado de flexibilidad en la forma en que accede, administra y evalúa la información. Además es importante resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

- Requiere conexiones entre contenidos de diversas áreas.

En la evaluación utilizada en PISA 2003 se requirió que los estudiantes demostraran habilidad para comprender el problema, identificar las variables involucradas en el problema y sus interrelaciones; representar el problema mediante distintos registros de representación (tabular, gráfico, simbólico, verbal); resolver el problema, lo que requería tomar decisiones o diseñar un sistema pertinente o bien hacer diagnóstico y proponer una solución; proporcionar sentido a la solución matemática, en términos de la situación real inicial y, finalmente, comunicar la solución del problema, seleccionando para ello los medios y las representaciones apropiadas.

En la década de 1970 se impulsó en el Japón la investigación sobre resolución de problemas. Por lo general, los problemas tradicionales utilizados en matemática son de respuesta correcta única y son conocidos como "completos" o "cerrados". Los problemas que permiten varias respuestas correctas o los que permiten el uso de varios métodos para obtener la única respuesta correcta se denominan "abiertos". El enfoque "Open-Ended" utilizado en las escuelas japonesas consiste en (Becker y Shimada, 2005):

- Presentar un problema "abierto" a los estudiantes.
- Dar el tiempo apropiado para que ellos trabajen individualmente o en grupos en la búsqueda de las respuestas correctas al problema. La meta es que ellos logren encontrar algo nuevo en el proceso.
- Comparar las soluciones obtenidas, argumentar, buscar justificativas para las soluciones encontradas, discutir, formular preguntas.

Por lo general las lecciones en las instituciones educativas japonesas son desarrolladas alrededor de una única idea central que es cuidadosamente desarrollada y extendida.

El profesor, quién sirve de guía y soporte para los estudiantes en las etapas anteriores, busca nuevas ideas y cierra la lección con los aspectos teóricos, tomando en cuenta todos los aportes dados por los estudiantes. Las ventajas de este enfoque son: los estudiantes participan más activamente en las lecciones y expresan sus propias ideas; tienen más oportunidades para utilizar su conocimiento y habilidades matemáticas; se estimula la creatividad en el aula y el trabajo colaborativo entre los estudiantes; cada lección puede proporcionar ricas experiencias cognoscitivas a los estudiantes y sube el autoestima cuando un estudiante recibe la aprobación de sus colegas. La principal desventaja del enfoque consiste en la dificultad en diseñar problemas abiertos que sean interesantes y factibles de ser desarrollados en una lección.

Las principales características en una lección de matemática en escuelas japonesas son: relación explícita entre los temas tratados en la lección o en otras lecciones (mayor coherencia e integración cognoscitivas); más tiempo dedicado a temas matemáticos importantes; mayor tiempo de trabajo en actividades no rutinarias, nuevas soluciones, aplicaciones; más conceptos desarrollados que aquellos solo establecidos.

Conclusiones

En el curso tratamos con aspectos teóricos e históricos acerca de la resolución de problemas y planteamos varios tipos de problemas matemáticos, algunos de ellos son problemas que aparecieron en distintas olimpiadas matemáticas regionales o internacionales. También ejemplificamos tipos de problemas que siguen el enfoque "Open-Ended" utilizado en las escuelas japonesas.

Referencias bibliográficas

Becker, J., Shimada, S. (2005). *The Open-Ended Approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Directions for school mathematics for the 1980s*. Reston, VA.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston, VA.

Newell, A., Shaw, J. C., Simon, H. A. (1959). Report on a general problem-solving program. *Proceedings of the International Conference on Information Processing.* Pp. 256-264.

Newell, A., Simon, H.A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, N.J.:

Prentice-Hall.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. (Segunda edición). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. y Szego, G. (1976). *Problems and theorems in análisis*. New York: Springer.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, USA: Academic Press.

LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DEL PROFESIONAL DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Margarita del Valle Veliz, Blanca E. Lezana, María Angélica Pérez
Facultad de Ciencias Económicas. Univ. Nacional de Tucumán Argentina
mveliz@herrera.unt.edu.ar, mperez200@hotmail.com
Campo de investigación: Medición Nivel: Superior

Resumen. *El concepto de competencia en educación hace referencia a una formación integral del ciudadano. Implica el aprendizaje significativo que propicia Ausubel (1983), en distintas áreas: cognoscitiva (saber), psicomotora (saber hacer, aptitudes), afectiva (saber ser, actitudes y valores). En este trabajo mostramos el análisis de los diferentes niveles de competencias logrado por los estudiantes durante el dictado de una de las asignaturas del ciclo matemático (Cálculo Diferencial), donde se trabajó para favorecer la adquisición de competencias matemáticas por parte de ellos. Utilizamos el análisis multivariado (Cluster) para determinar los grupos de alumnos en los diferentes niveles alcanzados, y finalmente, la evolución de dichos alumnos. Esta información es valiosa para la toma de decisiones acerca de cómo realizar la mejor propuesta curricular para los alumnos de los diferentes grupos.*

Palabras clave: competencias matemáticas, análisis de conglomerados

Introducción

Las competencias

El concepto de competencia es variado, pero en las distintas definiciones se pueden observar elementos comunes: saberes y aptitudes expresadas en habilidades, que acompañados de motivaciones y capacidades propias del individuo, le dan poder para discernir y resolver problemas o situaciones dadas; capacidad para desempeñarse con eficiencia en tareas propuestas por el medio, como así también actitudes, valores y comportamientos que se ponen de manifiesto en un saber ser y un saber convivir.

En síntesis, una "*integración de aptitudes, conocimientos, destrezas y actitudes para la producción de un acto resolutivo, eficiente, lógico y éticamente aceptable en el marco de un determinado rol o función*" (Wattíez, R. L. y cols. 2005, p. 31).

Pinto, L. (1999, p.10) define competencia en términos de "*capacidad para actuar con eficiencia, eficacia y satisfacción sobre algún aspecto de la realidad social, natural o simbólica*".

Podemos decir entonces que las competencias son un conjunto de capacidades construidas a partir de la integración de saberes, donde se movilizan los conocimientos para enfrentar situaciones problemáticas.

El concepto de competencia está ligado principalmente a un *saber hacer específico*, o más precisamente, a un *saber hacer en un contexto,* para lo cual se requiere de un conjunto de saberes (conocimientos, procedimientos, valores y actitudes). Fundamentalmente las competencias integran tres tipos de contenidos: *conceptuales* (conocer), *procedimentales* (saber hacer: capacidad del sujeto para desenvolverse con eficiencia en diversas situaciones) y *actitudinales* (saber ser: capacidad para actuar con autonomía, juicio y responsabilidad personal).

Badilla, L. (2005, p. 16) presenta un ordenamiento de las competencias en niveles, basado en que el desarrollo de competencias implica un aprendizaje a través de procesos de apropiación y profundización de diversos conceptos con crecientes grados de complejidad.

Niveles de competencias

Nivel cero (aprender a saber): Conocimientos aislados sobre un tema o área, sin conexión con la estructura cognitiva del sujeto y retenidos en la memoria temporal.

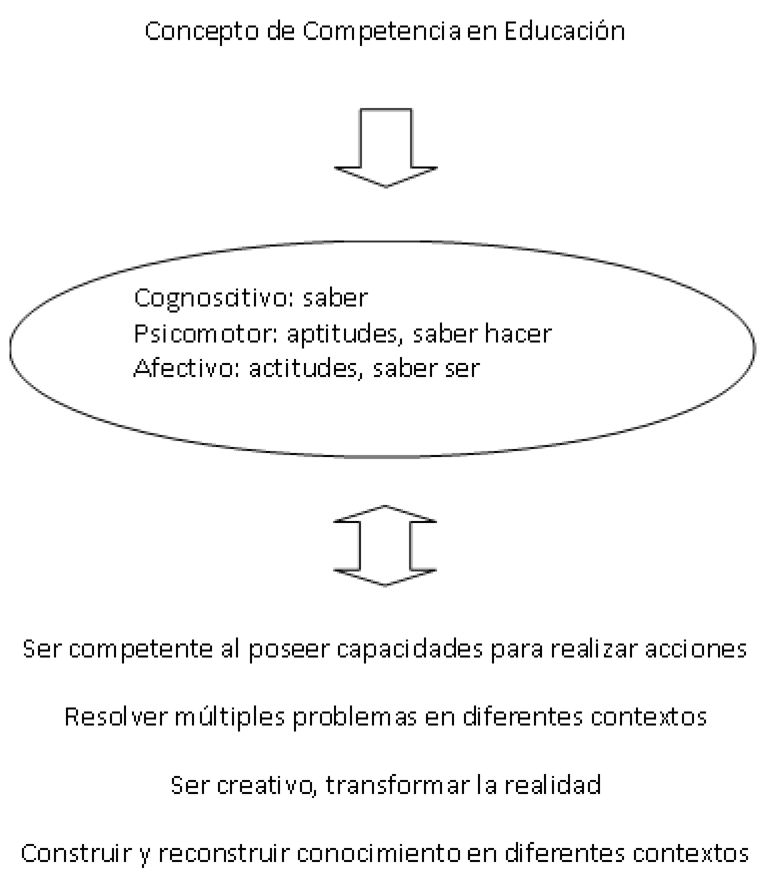
Primer nivel (aprender a conocer): En esta etapa el alumno empieza a reconocer y distinguir elementos o códigos propios de cada área, debe darse el cambio de un aprendizaje memorístico o por repetición a un aprendizaje *significativo* (Ausubel, 1983).

Segundo nivel (aprender a hacer): Una vez internalizados los conocimientos, el alumno debe comunicarlos y aplicarlos en la resolución de problemas reales o figurados, adquirir habilidades para realizar procesos mentales y procedimentales.

Tercer nivel (Aprender a emprender): El alumno debe comenzar a crear alternativas distintas, argumentar, dar respuestas en diferentes situaciones o contextos.

Cuarto nivel (aprender a ser): Esta competencia se desarrolla y se aprende durante el transcurso de toda la vida. Es el pilar fundamental de la formación del futuro profesional, que le posibilitará un desempeño ético y ecuánime en la sociedad.

Pinilla, A. (2004, p. 25) sintetiza estos conceptos en la siguiente red conceptual, en coincidencia con la Teoría de Ausubel:



Las competencias matemáticas: En el documento de OCDE/PISA (2003) se define

> "*La competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo"* (p. 2)

De esta definición surge que la competencia matemática es fundamentalmente la capacidad de plantear, formular, resolver, e interpretar problemas utilizando la matemática en diversos contextos, que pueden ser puramente matemáticos o bien requerir que sea el sujeto el que introduzca la estructura matemática adecuada.

Desde esta perspectiva, no sólo es importante que el conocimiento matemático sea claro desde el punto de vista conceptual, sino también que los conceptos y teoremas sean verbalizados, simbolizados y diagramados, pues de esta manera se facilita la transferencia a cualquier dominio de experiencia.

OCDE/PISA (2003) señala que

> *"El que una persona sea competente en un lenguaje, implica que la persona conoce muchos de los elementos fundamentales del lenguaje y es capaz de utilizar esos elementos en pro de diversas funciones o propósitos sociales. De la misma manera, el considerar las matemáticas como un lenguaje, implica que los estudiantes deben aprender los elementos fundamentales del discurso matemático (los términos, signos, símbolos, procedimientos, habilidades, etc.) y saber aplicarlos para resolver problemas en una variedad de situaciones entendidas en términos de su función social". (p. 2)*

La caracterización de competencia como *un saber hacer específico,* que en el caso de la matemática podemos definir como la *capacidad para realizar adecuadamente una tarea matemática específica,* puede asimilarse a la "comprensión instrumental", esto es, aplicar una regla sin las razones correspondientes, lo cual puede fallar si la tarea pedida no se ajuste exactamente al patrón estándar. De ahí que esta idea de competencia matemática debe complementarse con la comprensión matemática de los procedimientos o técnicas necesarios para realizar la tarea, y de las relaciones entre los contenidos y procesos matemáticos involucrados.

Metodología utilizada

Muestra: Se consideró una muestra de 200 alumnos elegida mediante un muestreo aleatorio simple, sobre un total de 642 alumnos de la asignatura Cálculo Diferencial en el año 2006, habiéndose trabajado en el sentido de favorecer la adquisición de competencias matemáticas en este 1º curso de Cálculo en la universidad. El objetivo es determinar cómo son adquiridas esas competencias a fin de proponer estrategias metodológicas que ayuden a los alumnos en el logro de las mismas, para cada grupo.

Instrumentos: tres pruebas parciales del año 2006.

Análisis de datos: El procesamiento de la información se realizó en las siguientes etapas:

1) Con el objeto de buscar grupos similares respecto del logro o adquisición de las competencias se realizó un *Análisis Cluster o Análisis de Conglomerados*.

2) Se clasificó los grupos de acuerdo al grado de indicadores alcanzados para las competencias, tomándose como referente los porcentajes logrados en cada una de ellas, para ordenarlos en clusters 1, 2 y 3, siendo el 1 el que agrupó a los alumnos con menor número de competencias logradas. Hay competencias específicas de las unidades didácticas que se incluyen en cada una de las pruebas parciales. Por ello, estas sólo se evalúan en la prueba correspondiente.

3) Se efectuó un seguimiento según el cluster al cual pertenecían en cada parcial, a fin de tomar decisiones para una propuesta de cambio según los grupos.

Resultados

Cuadro Nº 1: Agrupamiento de los alumnos según los niveles de competencias evaluadas en los exámenes parciales de Cálculo Diferencial, según los temas de cada parcial. Año 2006.

		1º PARCIAL(%)[1]			**2º PARCIAL(%)**[1]			**3º PARCIAL(%)**[1]		
Niveles	**Competencia evaluada**	**Cluster 1 (57 Alum)**	**Cluster 2 (71 Alum)**	**Cluster 3 (50 Alum)**	**Clu ter 1 (53 Alum)**	**Cluster 2 (87 Alum)**	**Cluster 3 (60 Alum)**	**Cluster 1 (29 Alum)**	**Cluster 2 (70 Alum)**	**Cluster 3 (101 Alum)**
I	Reconoce los elementos de las funciones en distintos contextos	73	77	82	47	52	71	17	71	96
	Identifica las distintas funciones	66	86	84	38	46	68	38	39	70
	Reconoce las gráficas de las distintas funciones	54	72	98	25	44	58			
	Identifica las distintas operaciones con funciones	49	66	82	66	53	33			
	Identifica funciones continuas				**2**	52	97			
	Reconoce la existencia de límites de funciones							31	39	53
	Reconoce y distingue valores extremos							100	63	90
II	Aplica correcto procedimiento para la obtención del dominio y rango	**12**	62	92						
	Aplica correcto procedimiento para el trazado de gráficas de funciones	63	76	98	35	80	98			
	Aplica correcto procedimiento para el cálculo de límites				13	**9**	38	66	**6**	83
	Aplica correcto procedimiento para el cálculo de derivadas				47	28	73	62	84	98
	Aplica correcto procedimiento para el trazado de gráficas de funciones							100	22	77
	Interpreta información gráfica	88	76	82				22	51	100
	Resuelve situaciones problemáticas utilizando propiedades y conceptos matemáticos estudiados	**5**	65	100	64	27	87	**3**	79	56
	Interpreta y define funciones que modelen situaciones problemáticas	89	15	100	75	30	95	**10**	16	58
	Aplica correctamente los conceptos en situaciones prácticas	87	**1**	100	55	25	93	31	79	97
III	Elabora correctamente ejemplos y contraejemplos	51	58	66	**4**	47	65	52	29	60
	Obtiene resultados razonables en situaciones problemáticas	86	54	96	87	60	100	41	87	53
	Expresa conceptos en distintos leguajes (gráfico, coloquial, etc.)	39	62	64	17	15	52	31	43	62
	Elabora correctamente gráficas dadas determinadas condiciones				25	68	77	27	39	66

[1]Los porcentajes se obtuvieron sobre el total de alumnos que integran cada cluster

Las competencias donde los alumnos manifestaron mayor dificultad son:

"Identifica las distintas funciones", los diferentes porcentajes que se presentan en cada uno de los agrupamientos, tiene sentido por la diversidad de funciones que se estudian en este curso de cálculo, teniendo en cuenta que las del 1º parcial son funciones sencillas.

"*Resuelve situaciones problemáticas utilizando propiedades y conceptos matemáticos estudiados" e "Interpreta y define funciones que modelen situaciones problemáticas"*, nuestros alumnos, en su mayoría, no tienen incorporada la habilidad para resolver problemas desde el nivel medio.

"*Elabora correctamente ejemplos y contraejemplos"* en esta competencia a través de los tres parciales, no se modifican los porcentajes, es una de las que mayor dificultad tienen para adquirirla.

"*Expresa conceptos en distintos lenguajes (gráfico, coloquial, etc.)"*; esta competencia se refiere a dificultades de expresión en el lenguaje matemático, que es común preocupación con los docentes de otras disciplinas específicas de las carreras que se dictan en la Facultad.

"*Aplica correcto procedimiento para el cálculo de límites*", sólo se evalúa en 2º y 3º parcial.

Se muestra también los resultados del seguimiento de los alumnos según el cluster al cual pertenecían en cada parcial, iniciándolo con los alumnos que integraron los diferentes clusters en el 1º parcial.

Cuadro Nº 2: Distribución conjunta de los alumnos entre los clusters correspondientes a 2º y 3º parcial, de los alumnos que en el 1º parcial pertenecieron al Cluster 1. Cálculo Diferencial. 2006.

Cluster 3º parcial	Clusters 2º parcial (%)			Total
	1	2	3	
1	12	7	0	19
2	**9**	**16**	2	27
3	**4**	**24**	**26**	54
Total	25	47	28	100(57)

Se puede observar que los porcentajes por debajo de la diagonal principal muestran avances de nivel, es decir adquisición de nuevas competencias (37%). Los de la diagonal principal muestran un 41% de alumnos con avances y un 12% de alumnos que permanecen en el cluster 1. El resto son retrocesos.

Cuadro Nº 3: Distribución conjunta de los alumnos entre los clusters correspondientes a 2º y 3º parcial, de los alumnos que en el 1º parcial pertenecieron al Cluster 2. Cálculo Diferencial. 2006.

Cluster 3º parcial	Clusters 2º parcial			Total
	1	2	3	
1	11	8	1	20
2	7	**17**	10	34
3	11	**21**	**14**	46
Total	29	46	25	100(71)

Los % resaltados en el cuadro muestran que un 17% de alumnos permanecen en el cluster 2, habiéndolo superado un 35% de ellos, donde se considera que el alumno ha adquirido los 3 niveles de competencia evaluados.

Cuadro Nº 4: Distribución conjunta de los alumnos entre los clusters correspondientes a 2º y 3º parcial, de los alumnos que en el 1º parcial pertenecieron al Cluster 3. Cálculo Diferencial. 2006.

Cluster 3º parcial	Clusters 2º parcial			Total
	1	2	3	
1	2	2	0	4
2	14	18	10	42
3	5	18	**30**	54
Total	22	38	40	$100_{(50)}$

Hay en 30% de alumnos que desde un comienzo adquirieron todas las competencias evaluadas, ya que permanecieron en el cluster 3.

Conclusiones

- La educación superior debe encaminar el aprendizaje del futuro profesional hacia el desarrollo de las competencias que integren todas las gamas del conocimiento, proporcionando al alumno la oportunidad de realizar prácticas que ligan los conceptos teóricos con la práctica profesional en el contexto que los rodea.
- Es necesario tomar conciencia de la importancia de la evaluación, que genera una reflexión enriquecedora sobre la realidad evaluativa para llegar a comprender lo que significa educar para el desarrollo de las competencias, cómo se debería evaluar por competencias, cómo se podría mejorar la evaluación, etc.
- Es notorio el avance de un gran número de alumnos en la adquisición de competencias a través de los conocimientos adquiridos durante el cursado de la asignatura, como así también los que se mantuvieron en el Cluster 3 (grupo de mayor cantidad de competencias adquiridas).
- Las mayores dificultades de los alumnos de los Cluster 1 están en la expresión de conceptos en distintos lenguajes, la resolución de situaciones problemáticas utilizando propiedades y conceptos ya estudiados, y en la aplicación de algunos conceptos y procedimientos. También en la interpretación de información gráfica cuando ésta es

relevante. Es notoria la diferencia de porcentajes en estos aspectos con respecto a los alumnos de nivel alto.

- Esto nos lleva a reflexionar sobre el énfasis necesario en situaciones particulares que se presentaron a fin de buscar soluciones (relación entre competencias y rendimiento académico).

Referencias bibliográficas

Ausubel, D.; Novak, J. y Hanesian. (1983). *Psicología Educativa*. *Un punto de vista cognoscitivo*. (2º ed.), México: Editorial Trillas.

Badilla, L. (2005). Nociones sobre el concepto de competencias. Recuperado el 18 de agosto de 2006 de http://www.cumex.org.mx/archivos/ACERVO/Tuning.pdf.

OCDE / PISA (2003). Competencias en Matemáticas. Recuperado el 05 de julio de 2005 de www.eduteka.org./Pisa2003Math.php.

Pinilla Roa, A. E. (2004). Las competencias en la educación superior. Recuperado el 18 de agosto de 2006 de http://www.cumex.org.mx/archivos/ACERVO/Tuning.pdf.

Pinto Cueto, L. (1999). Currículo por competencias: necesidad de una nueva escuela. *Revista Tarea, Nº 43,* pp. 10-17. Lima: Editorial Tarea.

Posada Álvarez, R. (2005). Formación Superior basada en Competencias. Interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante. Recuperado el 12 de abril de 2006 de http://www.ricoci.org/deloslectores/648Posada.PDF.

Salas Zapata, W. A. (2003). Formación por Competencias en Educación superior. Una aproximación conceptual a propósito del caso colombiano. Recuperado el 29 de marzo de 2006 de http://www.rieoei.org/deloslectores/10365Salas.PDF.

Wattíez Franco, R. L., Quiñones de Bernal, C. y Gamarra de Sánchez, M. (2005). Competencias. Recuperado el 18 de agosto de 2006 de http://www.cumex.org.mx/archivos/ACERVO/Tuning.pdf.

DIFERENTES MARCOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

Nora Ferreira, Estela Rechimont, Carlos Parodi
Universidad Nacional de La Pampa Argentina
francis@cpenet.com.ar, rechimont@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas. Pensamiento lógico Nivel: Superior

Resumen. *La demostración es uno de los ejes de la actividad matemática y muchos estudios se refieren al tipo de problemas que pudieron dar origen a la evolución de este concepto. Para abordar la investigación en torno a la utilización de procesos de demostración por parte de los estudiantes, se trabajó con un grupo de segundo año de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Se presentaron a los alumnos, dos problemas que requerían, aunque no explícitamente, plantear una conjetura y demostrarla. Uno de los problemas se refiere a sucesiones y el otro plantea una situación geométrica. Tal como podía preverse, a raíz del análisis histórico, el problema asociado a una formulación geométrica desencadenó procesos de demostración que no surgieron en el trabajo con el problema algebraico.*

Palabras clave: demostración, problemas, experiencia áulica

Introducción

La demostración es uno de los ejes de la actividad matemática y, en los últimos años, la enseñanza de la Demostración ha ocupado un lugar muy importante en las investigaciones de los especialistas en didáctica de la matemática. Por otro lado, también se ha puesto énfasis en la Resolución de Problemas como motor de la enseñanza, no sólo de la matemática, ya que éstos han estimulado la investigación y el progreso en muchas y variadas disciplinas.

Sin embargo, consideramos que llevar a cabo una tarea que refleje la actividad del científico y que involucre actividades de argumentación, prueba o demostración implica un trabajo a largo plazo, centrado en el planteo de problemas abiertos a través de los cuales el estudiante pueda no sólo adquirir conocimientos sino específicamente entrenarse en una actitud reflexiva y dispuesta a formular conjeturas y discutir su validez.

Los términos Prueba, Demostración, Justificación, generalmente se utilizan como sinónimos, sin embargo, en el marco de distintas investigaciones, se detectan diferencias entre ellos que, de alguna manera, ordenan la evolución del rigor involucrado en tales procesos.

La demostración, como contenido matemático, está presente en las propuestas curriculares del Ministerio de Educación de la Provincia de La Pampa, Argentina, tal como consta en varios parágrafos de tales documentos, sin embargo, su consideración como objeto de estudio presenta algunas dificultades. Para aportar a resolver el problema de su enseñanza, creemos necesario analizar la génesis de la demostración dentro de la misma matemática y pensar en la posibilidad de recrear en clase alguna de las condiciones que dieron origen a ese desarrollo de la ciencia.

Arsac (1987) atribuye el origen de la demostración, o más aún la transformación de las matemáticas en ciencia hipotético-deductiva, a la sociedad griega. Asocia estos procesos a la resolución del problema de la irracionalidad de la diagonal del cuadrado, sin embargo no descarta la existencia de un trabajo previo en lo que Balacheff (2000) clasifica como "pruebas", en las matemáticas de Egipto o la India.

> *Como ya dijimos, es muy inverosímil que solo la percepción del problema haya conducido inmediatamente a su solución. La elaboración de la solución definitiva debió ser precedida de muchos tanteos, hacia el siglo V a.C. En la medida en que esos tanteos representan etapas en el camino del rigor, nos interesan también. (Arsac 1987, p. 292)*

La construcción histórica de la demostración y el análisis didáctico de dos experiencias a partir de las cuales se desencadenan procesos de demostración nos permitirá proponer actividades interesantes para trabajar en el aula tales procedimientos.

Perspectiva Histórica

En general, matemáticos e historiadores coinciden en ubicar el origen de la demostración en Grecia, en el siglo V antes de Cristo como consecuencia directa de la argumentación, ampliamente practicada en los debates públicos y en la vida política de la antigua Grecia.

Seguramente no fue por azar que la razón surgió en Grecia como una consecuencia de esta forma tan original de instituciones políticas que llamamos la ciudad. Con la ciudad, y por primera vez en la historia del hombre, el grupo humano considera que sus asuntos comunes no pueden decidirse sin un debate público y contradictorio, abierto a todos y donde los discursos argumentados se oponen unos a otros. Si el pensamiento racional apareció en las ciudades griegas de Asia menor como Mileto, es porque las reglas de juego políticas en el marco de la ciudad -debate público, argumentado, libremente contradictorio- se habían convertido en las reglas del juego intelectual (Vernant 1979, en Arsac 1987, p. 270)

La gran diferencia entre la matemática pre-helénica y la nueva matemática es una visión totalizadora, en esta última dejan de reconocerse las validaciones no sistematizadas, a partir de figuras u otro tipo de reconocimiento implícito y comienzan a exhibirse claramente las hipótesis y las reglas de deducción y a generalizarse los resultados.

En la geometría, en particular, dice Arsac: *.en la historia como en la enseñanza, el problema es el paso de un estadio en el que la figura sirve de herramienta de prueba a aquel en el que la geometría se convierte en el arte de "razonamientos exactos sobre figuras inexactas"* (Arsac 1987, p. 278)

Desde el punto de vista didáctico, se plantea la construcción y asimilación de un concepto a partir de la necesidad de utilización del mismo como herramienta para solucionar un problema. Ahora bien, qué tipo de problema pudo dar origen a la evolución de una técnica como la demostración, ha sido motivo de variados estudios, principalmente en el área de la epistemología. La discusión se ha centrado en los problemas de irracionalidad e inconmensurabilidad, básicamente sobre las diagonales del cuadrado y del pentágono regular, ya que se los considera problemas que pueden plantearse en términos de las matemáticas pitagóricas y cuya solución necesita de la existencia de un nuevo tipo de números. *En el marco de una geometría que sin duda todavía utiliza ampliamente la referencia a la figura, el fenómeno de la irracionalidad puede ser descubierto empleando una técnica relativamente simple; se manifiesta entonces, no como un descubrimiento sorprendente, sino más bien como un nudo de contradicciones, ya que el procedimiento matemático lleva a "probar" la no existencia de ciertas relaciones entre segmentos, contrariamente a las ideas recibidas y a la doctrina pitagórica, y que este método de "prueba" se apoya a su vez en la hipótesis de la existencia universal de relaciones racionales que lleva a negar.* (Arsac 1987, p. 288)

Como para reforzar las ideas acerca de los orígenes de las demostraciones formales, cabe señalar que el primer indicio de razonamientos por absurdo se da precisamente en el trabajo sobre la diagonal del cuadrado y, a partir de allí, es utilizado de manera incesante en matemática, y muy especialmente por Euclides en sus Elementos.

Prueba y Demostración

En algunos textos de matemática, y en muchas expresiones de la vida cotidiana, los verbos explicar, probar y demostrar, se consideran sinónimos. Sin embargo, cada uno de ellos apunta a un nivel de actividad diferente por parte de los alumnos.

Para clarificar el uso del vocabulario y enmarcar nuestras reflexiones en torno a la evolución histórica y el tratamiento didáctico de estos procesos consideramos la clasificación propuesta por Balacheff (2000).

La explicación se ubica al nivel del locutor y se expresa en un discurso generalmente oral, donde éste expone lo que, en su racionalidad, garantiza la validez de una proposición dada. En este discurso, el locutor pretende esclarecer los motivos que dan origen a su descubrimiento y convencer a los espectadores de la legitimidad de la proposición que, personalmente, ya ha adquirido.

En el momento en que una explicación ha sido socialmente reconocida y aceptada, en la clasificación de referencia, se denomina prueba. En este caso, se considera la explicación despersonalizada y descontextualizada. *El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un* ***proceso social*** *por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptado por una comunidad. Esta posición no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya. Por otro lado, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra.* (Balacheff 2000, p. 12)

Finalmente, se caracteriza el tipo particular de prueba utilizada habitualmente en matemática, es decir al conjunto de enunciados lógicamente encadenados de acuerdo a reglas bien definidas que llamamos *demostración*. *Lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso es su forma estrictamente codificada*. *Ciertas etapas de la demostración pueden no estar explícitas; el descubrirlas depende del lector.*

Por otro lado, se distingue también el término *razonamiento* ubicándolo en un plano personal, como una actividad intelectual no completamente explícita del individuo que manipula la información dada o adquirida, para producir una nueva información.

La Experiencia

Para abordar la investigación en torno a la utilización de procesos de demostración por parte de los estudiantes, se trabajó con un grupo de alumnos del Profesorado en Matemática que cursan el segundo año de la carrera en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estos alumnos han aprobado asignaturas básicas en las cuales se desarrollan distinto tipo de demostraciones, por ejemplo razonamientos por el absurdo, demostraciones por inducción, deducciones utilizando axiomas o resultados previos, etc.

Se presentaron a los alumnos, en distintos momentos, dos problemas que requerían, aunque no explícitamente, hallar y presentar una demostración. En un primer momento, se expresaron respuestas y opiniones, se formularon conjeturas pero no se intentó una validación de las mismas. A partir de las intervenciones docentes, apareció la necesidad de hallar algún tipo de justificación.

Primer Problema:

Se presentó la sucesión de Fibonacci a través de algunas situaciones concretas y a continuación se solicitó:

a) Escriba por lo menos los treinta primeros términos de la sucesión de Fibonacci
b) ¿Cuáles son pares?,
c) ¿Cuáles son múltiplos de 3?, ¿Qué lugar ocupan en la sucesión?
d) Analice la sucesión de Fibonacci, busque e indique regularidades y propiedades de sus términos.

En la resolución de este problema se detectaron aspectos diferentes, por un lado, los estudiantes pudieron conjeturar acerca de algunas propiedades de la sucesión, sin embargo no se involucraron en procesos de validación de tales conjeturas. Por otro lado, los estudiantes revelaron dificultades a la hora de expresar una conjetura en un lenguaje simbólico que les resultara familiar a la hora de intentar una demostración.

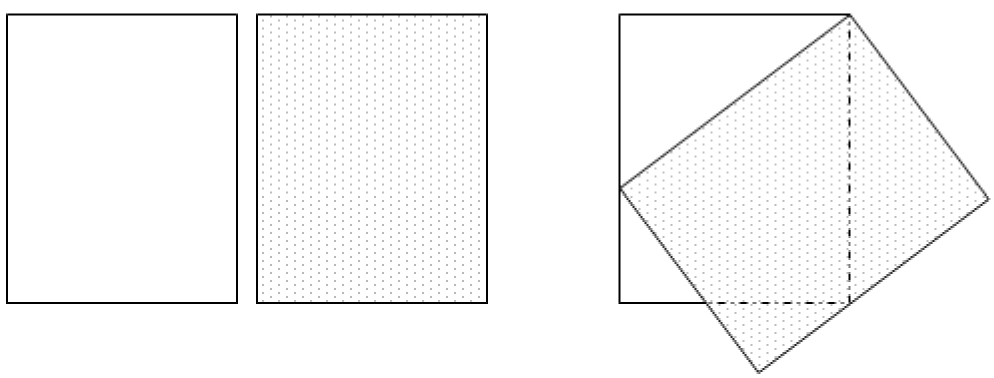
Este inconveniente se manifestó claramente al trabajar conjuntamente con el docente, puesto que, empujados por los requerimientos de éste, comenzaron a proponerse y mejorarse expresiones algebraicas para los enunciados coloquiales. Así, la proposición "*los términos de la sucesión de Fibonacci cuyo orden es múltiplo de tres son pares*", se pudo expresar como: $a_{3n} = 2 \cdot k$ con $n,k \in N$, y su demostración se pudo realizar por inducción sobre *n*.

Se suponía que la situación propuesta se convertiría en el motor de desarrollo de procesos de validación implícitos en la resolución del problema. Sin embargo, los estudiantes no asumieron la necesidad de justificar sus conjeturas sino hasta que se algebrizó, en trabajo conjunto con el docente, una de ellas y se notó la semejanza con algunos enunciados demostrados por inducción en un curso previo de álgebra elemental.

Puestos en alerta los estudiantes acerca de la necesidad de justificar todas las conjeturas que surgen en una resolución, los restantes items se transformaron inmediatamente en ejercicios del tipo "demostrar que", con lo cual se condicionaron las respuestas producidas.

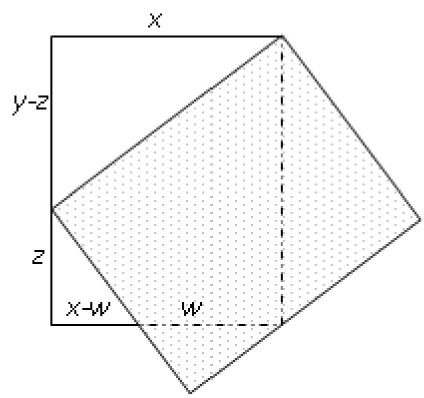
Segundo problema:

Consideremos dos hojas de papel del mismo tamaño. Deslicemos una sobre otra como muestra la figura 1. La parte oculta de la hoja de abajo, ¿es más grande o más chica que la parte que se ve?



Resoluciones de los estudiantes

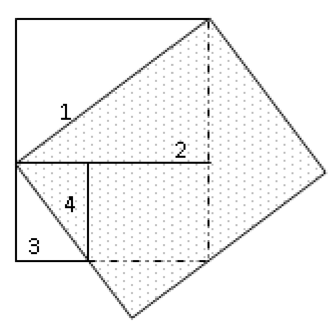
1)



Determinan el área oculta calculando la diferencia entre el área del rectángulo y el área de los dos triángulos visibles. $A = xy - \frac{x(y-z)}{2} - \frac{z(x-w)}{2}$.

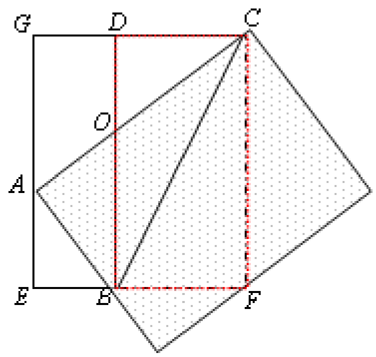
Desarrollando: $A = xy - \frac{xy}{2} + \frac{xz}{2} - \frac{zx}{2} + \frac{zw}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{zw}{2}$, obtienen que "*la parte oculta es la mitad del rectángulo más algo positivo*". Ese conclusión los lleva a afirmar que es mayor la porción oculta que la que está a la vista.

2)



A partir del análisis de la figura y considerando la invariancia de áreas por simetría, afirmaron que: "*Como el triángulo* 1 *es congruente al* 2 *y el triángulo* 3 *lo es al* 4*, resulta evidente que el área de la región oculta es mayor que el área de la parte visible*".

4)



En este caso el alumno realizó el siguiente razonamiento: los triángulos *ABC* y *BCD* son congruentes puesto que ambos son rectángulos y tienen un cateto y la hipotenusa congruentes. Los triángulos *ABO* y *CDO* también lo son pues tienen todos los ángulos y un lado congruentes. Puesto que el segmento *AB* es mayor que el *EB* podemos afirmar que el área del rectángulo *BFCD* es mayor que el área del rectángulo *EBDG*.

Como el área del rectángulo *BFCD* coincide con el área de la región oculta queda probado que el área oculta es mayor que el área visible.

Consideraciones Finales

Luego del análisis de los procesos de prueba y demostración, desde la historia, se eligieron los dos problemas pues nos parecieron adecuados para promover, en los estudiantes, validaciones desde diferentes marcos y utilizando las herramientas convenientes en cada caso.

A priori el equipo de investigación anticipaba que la resolución del primer problema planteado generaría el desarrollo de procesos de validación en un marco algebraico-numérico. Sin embargo, los alumnos no logran bosquejar el comienzo de una prueba y la producción obtenida luego de las intervenciones docentes, parece indicar que las demostraciones surgen, principalmente, como requerimiento del enunciado.

Resultó evidente que los estudiantes producen fundamentalmente validaciones en un registro geométrico y que la utilización de herramientas algebraicas no surge espontáneamente, aún cuando dichas herramientas hayan sido consideradas explícitamente en asignaturas anteriores.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (1995). *Viaje al país de los Rectángulos*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématique.8* (3), 267-312.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Bogotá, Colombia: Una Empresa docente, Universidad de los Andes.

Boyer, C. (1968). *Historia de la Matemática*. Nueva York, EEUU: Jhon Wiley and Sons. New York.

Ribnicov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú, Rusia: Mir.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

LA UBICACIÓN DEL PROBLEMA EN LA PLANIFICACIÓN DE CLASE

Mercedes Anido, Patricia Có, Martha Guzmán
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. U.N.R. Argentina
anidom@fceia.unr.edu.ar, co@fceia.unr.edu.ar, guzman@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Considerando el concepto de aprendizaje sistémico, en el que se vinculan en relación dinámica: el docente, el alumno y el conocimiento, interesa conocer la relación entre las concepciones y las competencias de los docentes de matemática de enseñanza media en relación con el tema "el rol del problema en la formación matemática de los alumnos de la Escuela Media". Para ello se analizan las respuestas de profesores a cuestiones agrupadas en cuatro categorías de preguntas referidas a sus concepciones sobre la naturaleza del problema y a la ubicación del problema en la planificación de la clase.*

Palabras clave: problemas, concepciones, competencias, docentes

Introducción y objetivo

En al trabajo que se presenta, se complementan indagaciones teóricas y experienciales sobre le rol que los docentes atribuyen al problema en la formación matemática de los alumnos de la Escuela Media, formación con la que acceden a la Universidad.

El contexto investigativo está limitado a los docentes en ejercicio que cursan un Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística en cuyo desarrollo se incluye un "Taller de problemas".

Marco Teórico

Saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, sino en ocuparse de problemas en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena reproducción de la actividad matemática, por parte del alumno exige que este intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados, pruebe proposiciones, construya modelos y conceptos y los ponga a prueba (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

En una concepción "sistémica del aprendizaje" (Peltier, 1993) en el que se vinculan, en relación dinámica: el docente, el alumno y el conocimiento, interesa conocer la relación entre las "teorías implícitas" y las competencias de los docentes de matemática de enseñanza media en relación al tema, al que nos hemos referido.

Adhiriéndonos a la posición de García, Azcárate y Moreno (2006) consideramos que las "concepciones del profesor" hacen a la estructura que cada profesor de Matemáticas tiene de sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes. Estas concepciones además de formar parte del conocimiento son producto del entendimiento y actúan como filtro en la toma de decisiones, influyendo en los proceso de razonamiento. De ahí su importancia al momento de abordar la enseñanza. No considerarlas dentro de un proyecto pedagógico quizá sea uno de los factores responsables de la fractura entre las "teorías" que se les imparten en formación de grado y las "prácticas" que posteriormente llevan las escuelas.

El punto de partida consiste en que los sujetos puedan verbalizar los propios supuestos, experiencias y puntos de vistas que posteriormente serán sometidas a análisis.

Metodología

La metodología empleada para el análisis se fundamenta en la observación crítica de los documentos presentados por los docentes como respuestas a las siguientes cuestiones:

I) ¿Qué es un problema?

II) ¿Por qué resolver problemas?

III) ¿Cuál es su importancia?

IV) ¿Cómo se ubica el problema en la planificación de la enseñanza?

y la relación entre estas respuestas y las propuestas áulicas descriptas en el trabajo final.

Para Sierra Bravo (1996), la observación documental se basa en el establecimiento previo de las categorías sobre las que necesitamos recoger información. Las categorías de análisis, en nuestro caso están dadas por las cuestiones I, II, III, IV.

Las respuestas a las preguntas abiertas han sido ricas en contenidos tantos manifiestos como latentes (Fraenkel, J.; Wallen, N. ,1996). Para estos autores los “contenidos manifiestos” en una comunicación se refieren a lo obvio contenido en la superficie (palabras, frases, párrafos con referencias directas a las acciones que implica la variable que se investiga). Por “contenido latente” se refieren al significado que subyace a lo que se dice y va más allá de la aparición de un párrafo, frase o palabra.

En nuestro caso los contenidos latentes se encuentran en los problemas matemáticos presentados en los distintos documentos, ya que en Matemática la elección de un problema adecuado es esencial para crear una situación didáctica fundamental. Sobre todo cuando el problema representa una innovación sobre las clásicas listas de ejercicios repetitivos para un “adiestramiento” mecánico y memorístico.

Aceptamos que el análisis de contenido es una técnica de recopilación de información. En su libro *“How to desing and evaluate research in education*” Fraenkel y Wallen, definen el análisis de contenido como una técnica que permite estudiar la conducta humana, en una forma indirecta, a través del análisis de sus comunicaciones y que este método tiene extensas aplicaciones entre otras, permite obtener una percepción de la forma en que los docentes reflexionan sobre su tarea por el examen de lo que ellos han escrito sobre la misma.

En la tabla que sigue se sintetizan las respuestas correspondientes a cada categoría

Categoría	**Respuestas**
¿Qué es un problema?	Grupo 1: Situaciones con obstáculos que obliga a plantear estrategias. G2: Igual que grupo 1. G3: Igual que grupo 1. G4: Situación original que involucra la manipulación de operaciones del sistema cognitivo. G5: Es un proceso de descubrimiento que permite pasar de una situación a otra. G6: Igual que grupo 5. G7: Igual que grupo 5 G8: Igual que grupo 5 G9: Situación que plantea un objetivo y que requiere de parte del alumno una búsqueda compleja que implica encuentros, avances y retrocesos, fórmula, conjeturas y validaciones
¿Por qué resolver problemas?	G1: Porque permite establecer relaciones entre conceptos. G2: Desarrolla el pensamiento lógico. Es una herramienta útil para resolver problemas de la vida cotidiana. G3: Es un medio para construir conocimientos. Resignifica contenidos. Estimula el espíritu crítico. Mejora el proceso de pensamiento lógico. G4: Desarrolla actitudes de perseverancia., a apreciar progresos. Mejora la concentración. G5: Coloca al alumno como protagonista de sus acciones. G6: Permite al alumno divertirse con la actividad. G7: Propicia el intercambio entre docentes y alumnos. El alumno desarrolla confianza en sí mismo. G8: Relacionar contenidos. Aplicar contenidos. Relacionar contenidos diferentes. G9: Cada problema genera nuevos problemas, nuevas inquietudes, opiniones diferentes. Construye conceptos. Pone en juego análisis, control y discusión. El alumno logra libertad de pensamiento para organizar diferentes formas de recrear un modelo matemático de acción. G 10: Igual que grupo 9.
¿Cuál es su importancia?	G1: Desarrolla la capacidad de interpretación, creatividad e ingenio. G2: Agiliza la creatividad. Permite la transferencia de conocimientos a diferentes situaciones. Mejora las relaciones entre pares. G3: Desarrolla capacidades y habilidades para dinamizar la construcción del conocimiento. G4: Permite involucrarse en conocimientos previos, someterlos a revisión, modificarlos, completarlos o rechazarlos. Hace del alumno un sujeto activo, creativo y autónomo. G5: Transforma el rol pasivo. Desarrolla capacidad de análisis, de discusión de comunicación y de reafirmación de conocimientos. G6: Igual que grupo 5. G7: Igual que grupo 5. G8: Disminuye el temor a nuevas situaciones. G9: Recurso de aprendizaje para el desarrollo intelectual, lógico formal. Es un desafío para el alumno. Si se habitúa al alumno a resolver problemas sus intereses se modifican y se estimulan frente al conocimiento. G10: Igual que grupo 9.

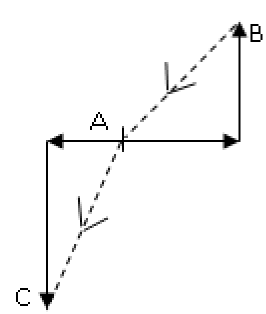
¿Cómo se ubica el problema en la planificación de la enseñanza?	G1: Como disparador. Para aplicar conceptos. G2: Para desarrollar los temas de manera creativa e integradora. G3: Motiva la introducción de un tema. Herramienta para institucionalizar resultados. Como refuerzo de conceptos aprendidos y consolidación de resultados. G4: Iniciar un tema. En general se trabaja sobre conocimientos adquiridos. Hay que ubicar en todos los temas, utilizándolo como elemento motivados (presenta ejemplo de un problema pero no justifica su empleo). G5: Es un recurso entre otros, que debe equilibrarse con otras estrategias que dependen de los contenidos, objetivos (muestra problema, no desarrolla, solo resuelve). G6: Igual que G1. G7: Para afianzar conocimientos. Para integrar conocimientos (hay ejemplos, no desarrolla). G8: Al inicio, durante el desarrollo, para evaluar. G9: Para iniciar un tema. Para evaluar. Se ubica como aplicación de conceptos aprendidos. Sería ideal partir una situación que genere un conflicto en el alumno y que el docente pueda facilitar en su resolución. Para generar un conflicto cognitivo. G10: Igual que grupo 9.

A modo de ejemplo, exhibimos las planificaciones de los grupos 4 y 9.

Grupo 4

Como actividad introductoria se presenta la siguiente situación:

Observe el siguiente gráfico



a. Desde el punto A se puede ir hasta los puntos B y C.

Si se sigue el camino trazado con línea llena, ¿cuál distancia es más corta; desde A hasta B o desde A hasta C?

b. Si se permite ir por alguna "diagonal", ¿cuál distancia será más corta: de A a B o de A a C?

Estrategias de solución abordadas por los alumnos:

a. Para medir la distancia desde A hasta cualquiera de los puntos B o C, siguiendo el camino trazado en línea llena, los alumnos cuentan los "pasos" que hay que dar desde A hasta B y desde A hasta C. Observan que por la línea llena ambos caminos tienen la misma longitud, obtienen marcando una unidad de medida.

b. Al medir las diagonales trazadas con líneas de puntos, notaron que el procedimiento no es tan sencillo y determinan así cuál distancia es mayor. Algunos optaron por hacer un dibujo a escala y medir las longitudes con la regla.

Al realizar la comparación de las distancias obtenidas no todos llegan al mismo resultado. Es el momento de la intervención docente para recordarles que los procesos de medición no siempre son exactos y se cometen errores. Pregunta el docente: ¿existirá algún camino para hallar el valor de las distancias en forma exacta? ¿existirá alguna relación ente las líneas llenas y las líneas de puntos?. Responde: el Teorema de Pitágoras da la solución y considera que entra en la etapa de formalización o institucionalización. Dice que con esta herramienta los alumnos tendrán un nuevo recurso para resolver la situación inicial considerando que los triángulos son rectángulos. De manera totalmente expositiva demuestra el teorema. Luego para afianzar el contenido propone dos ejercicios de aplicación:

1. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de 5 cm de lado.
2. Una escalera de 2,5 m de longitud se apoya sobre una pared quedando el pie de la misma a 60 cm de ella. ¿Qué altura alcanza sobre la pared.

Grupo 9

Presentan la siguiente actividad:

Dice el docente: trataremos en primer lugar, de explicarles que el conjunto de actividades que realizarán a continuación están relacionadas con uno de los problemas matemáticos universales resuelto a través de diferentes discursos por distintas civilizaciones (babilónica, egipcia, india, china, arábiga, griega,…). A través del mismo se puede explicar de manera abstracta y general la relación existente entre cuadrados, rectángulos y triángulos y resolver un gran número de problemas geométricos y algebraicos en el plano. Se conoce con el nombre de "Teorema de Pitágoras.

Comenzamos dividiendo el curso en pequeños grupos y solicitamos a los alumnos la construcción (utilizamos solo regla y compás en hoja lisa) de los triángulos que tienen longitud de sus lados {(3,4,5), (6,8,10), (5,12,13), (10,24,26), (8,15,17)} respectivamente. Luego les preguntamos si tienen alguna característica común. Fue necesario orientar la construcción, una vez lograda no tuvieron dificultad en reconocer que todos son triángulos rectángulos.

Pedimos que establezcan relaciones entre los catetos y la hipotenusa, en este punto es necesario guiarlos para que lleguen a la conclusión de la propiedad: "La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa", conocida con el nombre de Teorema de Pitágoras.

Con la intención de demostrar el teorema proponemos el siguiente:

I- Calcule el área de los cuadrados que tienen por longitud de sus lados a=3, b=4, c=5.

a) Sume las áreas de los dos cuadrados menores y compare con el área del mayor.

b) Exprese la relación obtenida.

II- Repita la actividad para las siguientes ternas:

1) p=6, q=8, r=10

2) l=5, m=12, n=13

3) x=8, y=15, z=17

III- Repita la actividad para la terna h=2, i=4, j=6.

¿Se establece la misma relación que en los casos I y II?.

La respuesta es negativa y explican diciendo que el triángulo que forman no es rectángulo y que solamente para estos triángulos se verifica la relación pitagórica. Es claro que para los alumnos es suficiente la comprobación numérica que aceptamos para su nivel (8º año).

Les damos el enunciado general del teorema: “en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”. Si llamamos *a* y *b* a las longitudes de los catetos y *c* a la longitud de la hipotenusa resulta: $a^2 + b^2 = c^2$.

A continuación mostramos un ejemplo de problema que involucra el resultado obtenido:

Un automóvil recorre 600 km hacia el este y 800 km hacia el norte hasta llegar a destino. Para regresar el conductor decide realizar otro recorrido de manera tal que el trayecto sea menor.

a) ¿cuántos km recorrerá en su regreso?

b) Si realizamos un gráfico de la trayectoria de ida y vuelta, ¿qué figura geométrica se obtiene?

c) ¿Qué conclusión se puede extraer respecto de las distancias relacionándolas con las medidas de la figura obtenida en b)?

A manera de conclusión

Del análisis de las actividades desarrolladas por los grupos podemos señalar:

Con respecto al grupo 4, que si bien definen el problema y la importancia de la actividad como generador de conocimientos nuevos solo de manera implícita, al momento de ubicarlo en la planificación no hay correspondencia. Mientras que con respecto al grupo 9 es posible apreciar que las respuestas muestran coherencia y son el resultado de una adecuada reflexión sobre la relación entre sus concepciones y la puesta en práctica.

Podemos observar que a pesar de los cambios curriculares los profesores tienden a impartir sus clases bajo el modelo en el que han sido formados, sin tratarse necesariamente del desconocimiento de otras modalidades de enseñanza. Parece quedar en evidencia que algunos docentes son partidarios del "yo-les-enseño-ellos-aplican-luego-ellos-saben". Podemos tomar algunos de los ejemplos analizados como muestra de un disfuncionamiento de la enseñanza que merece la búsqueda de múltiples explicaciones.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascon, J. (1997). *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Horsori

Fraenkel, J.; Wallen, N. (1996). *How to Desing and Evaluate Research in Education*. New York: Mc Graw Hill Inc.

García L., Azcárate C., Moreno M. (2006). *Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas*. Relime, 9(1), Núm,1, 85-116

Peltier, M. L. (1993). *Una Visión General de la Didáctica de la Matemática en Francia.* Revista Educación Matemática, 5(2), 4-9.

Sierra Bravo, R. (1996). *Tesis Doctorales y trabajos de Investigación Científica.* Madrid, España. Editorial Paraninfo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO DE MATEMÁTICA DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA DE COSTA RICA

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *El propósito de esta comunicación es el de analizar los lineamientos contenidos en los programas de estudio de matemática del tercer ciclo y de la educación diversificada del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, relacionados con la resolución de problemas*.
Palabras clave: resolución de problemas, programa de estudios, currículo

Introducción y objetivo

Una parte muy importante dentro del proyecto de investigación “Resolución de Problemas en la Educación Matemática” que está siendo llevado a cabo por investigadores de tres universidades públicas de Costa Rica: Universidad de Costa Rica, Universidad Nacional y Universidad Estatal a Distancia, consiste en conocer y analizar la postura asumida por nuestras autoridades educativas respecto a la resolución de problemas en matemática. En particular queremos determinar las referencias implícitas o explícitas sobre este tema en los programas oficiales elaborados por el Ministerio de Educación Pública, qué se entiende por problema matemático y analizar los tipos de problemas sugeridos en dicho documento.

En el Programa de Estudios de Matemática para la Educación Diversificada del año 2001 (MEP, 2001) se indica que: “El aprendizaje de lo abstracto debe concebirse a través de las situaciones escogidas y la actividad constructiva del estudiante. En buena medida, la resolución de problemas constituye el mecanismo privilegiado para llevar a cabo la educación matemática así planteada” (p. 11). En el Programa de Estudios de Matemática para la Educación Diversificada del año 2005 (MEP, 2005) se enfatiza que: “interesan en la Educación Diversificada, los procesos de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática como herramientas, con la condición de que se hagan suficientemente accesibles para el estudiante, y por ello se exige dar prioridad a la resolución de problemas y no al aprendizaje de los aspectos formales de la disciplina" (p. 36).

Se aprecia en los documentos elaborados por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica una clara orientación hacia el proceso de resolución de problemas, en todos los programas para la educación secundaria, y que este énfasis es más notorio en las revisiones programáticas del 2001 y 2005.

Marco de referencia

Polya en su primer libro (1945) presenta su teoría heurística a través de una serie de preguntas e instrucciones seguidas de varios ejemplos (Alfaro, 2006). Posteriormente publicó su obra "Mathematics and Plausible Reasoning" (1954) en dos volúmenes. En la primera parte proporciona ejemplos de problemas resueltos por inducción o analogía mientras que en el segundo volumen se centra en la pregunta de si existe o no una lógica de la inducción o un cálculo de credibilidad para las hipótesis (Barrantes, 2006). Finalmente, Polya culmina su trabajo con la publicación de "Mathematical discovery: On undestanding, learning and teaching problem solving", volumen 1 (1962), volumen 2 (1965), donde extiende sus ejercicios y presenta la versión mas madura de su teoría de la resolución de problemas

Uno de los conceptos utilizados por Polya es el de heurística, y éste término tiene diferentes acepciones. La primera es el autodescubrimiento dado en el proceso de solución de problemas; la segunda se considera como la capacidad para plantear (producir, generar) problemas y/o la capacidad para orientar la resolución de problemas; la tercera es el arte de inventar; y la cuarta consiste en las clases de información disponible para los estudiantes en la toma de decisiones durante la resolución de problemas. En computación, la heurística trata de métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso intermedio logrado en la búsqueda de un resultado final (ANSI/IEEE estándar 100-1984).

Wilson (1967) y Smith (1974) investigaron los efectos de la heurística en tareas específicas y generales. Estos estudios revelaron que la instrucción heurística en tareas específicas es más efectiva que la instrucción heurística general. Jensen (1974) utilizó la heurística en la construcción de subobjetivos al capacitar estudiantes sobre la forma de planificar la solución de problemas. Él usó el pensar en voz alta, la interacción entre compañeros "jugando" al papel del maestro y la instrucción directa para desarrollar en los estudiantes la habilidad de generar subobjetivos y resolución de problemas.

Para Schoenfeld las heurísticas como propuestas por Polya son estrategias muy generales y que por lo tanto no pueden ser implementadas en campos específicos debido a que el contexto juega un papel fundamental en la resolución de problemas. Basándose en investigaciones realizadas, Schoenfeld (1985) concluyó que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas: dominio del conocimiento o recursos, métodos heurísticos, control y el sistema de creencias (Barrantes, 2006, De Faria, 2006).

Resolución de problemas en los programas oficiales

En el programa de estudios para la educación diversificada del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 1996), elaborado a partir de la política educativa hacia el siglo XXI, aprobada por el Consejo Superior de Educación en noviembre de 1994 se explicita que:

> *"Se espera que los estudiantes lleguen a resolver problemas matemáticos y que exploren y puedan predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas simples y complejos" (p. 2).*

En el mismo programa también se enfatiza que:

> *"El aprendizaje de lo abstracto debe concebirse a través de las situaciones escogidas y la actividad constructiva del estudiante. En buena medida la resolución de problemas constituye el mecanismo privilegiado para llevar a cabo la educación matemática así planteada. La orientación constructivista y empírica y el mecanismo general de resolución de problemas que sugerimos no deben ser exclusivos de la Educación Diversificada, deben concebirse como la actitud cognoscitiva para la enseñanza de las matemáticas en estos niveles" (p. 3).*

Agrega que la búsqueda de una enseñanza matemática conectada al entorno físico y social integrada a la cotidianidad conlleva al proceso de resolución de problemas como un mecanismo por excelencia. Al concebir a la matemática como herramienta (…) "exige dar prioridad a la resolución de problemas y no al aprendizaje de los aspectos formales de la disciplina", además, "en la resolución de problemas relacionados con lo cotidiano o con otras ciencias, el énfasis se debe dar al proceso de razonamiento para resolver el problema" (p. 3). Entre los objetivos de la matemática en educación diversificada están: favorecer la aplicación de la matemática en el análisis y la resolución de situaciones problemáticas; fomentar la habilidad para la construcción y reconstrucción de modelos matemáticos que permitan comprender y resolver situaciones problemáticas o de reto mediante el uso de los métodos propios de la matemática.

Pienso que las expectativas relacionadas con resolución de problemas contenidas en los programas mencionados son ambiciosas, irreales, confusas, no define lo que se entiende por un problema matemático, no ofrece ejemplos de problemas y parece sugerir que los problemas sean enseñados para ejemplificar contenidos del programa. Mis experiencias con estudiantes recién ingresados en la universidad me llevan a inferir que, por lo general, el estudiante de tercer ciclo o de la enseñanza diversificada no está capacitado para aplicar sus conocimientos y destrezas operativas en la resolución de problemas, excepto que entendamos como problemas los ejercicios rutinarios.

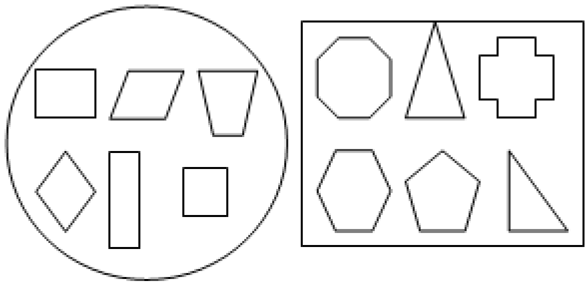
En los programas del 2001 (MEP, 2001) se repite lo escrito en los programas anteriores respecto a las expectativas para la resolución de problemas y a la concepción de la resolución de problemas como un mecanismo privilegiado para llevar a cabo la educación matemática vista como herramienta. En la página 12, se argumenta que "enseñar matemática como un medio de resolver problemas multidisciplinarios, mediante el empleo del método de modelos, definitivamente contribuirá a restaurar el interés de los estudiantes por esta disciplina".

Por lo tanto se agrega un elemento adicional: la modelación matemática como una estrategia para la resolución de problemas relacionados con la cultura cotidiana y con la sistematizada. Pienso que esto es un avance, por lo menos a nivel documental. Otro avance es la incorporación de las habilidades mentales en la sección de orientaciones metodológicas: identificación; diferenciación; representación mental; transformación mental; comparación; clasificación; codificación; decodificación; proyección de relaciones virtuales; análisis; síntesis; inferencia lógica; razonamiento analógico; razonamiento hipotético; razonamiento transitivo; razonamiento silogístico; pensamiento divergente-convergente y conceptualización. Cada una de estas habilidades viene acompañada de un ejemplo.

A continuación menciono algunos ejemplos modelo, encontrados en los programas oficiales elaborados por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2001) y sugeridos para el aula.

1. Establecer al menos tres semejanzas y tres diferencias entre los dos grupos de figuras abajo (un tipo de problema muy utilizado en las escuelas japonesas y se conoce como "The Open-Ended Approach") (Becker, J. y Shimada, S. 2005).

GRUPO 1 *GRUPO 2*



Aquí se enfatiza la importancia de la habilidad mental de diferenciación: el poder diferenciar entre las características esenciales de un concepto o situación y aquellas que son irrelevantes.

2. Para la tabla abajo, observe cada curva y marque una equis en el renglón correspondiente según su utilidad.

	Recta	Elipse	Parábola	Circunferencia	Sinusoide
Modelos Atómicos					
Péndulo					
Ondas, vibraciones					
Reflectores, linternas					
Oscilaciones					
Poleas					
Resortes					

Se afirma que una persona que ha logrado llegar al nivel de esta operación mental (de identificación), estará preparada para reconocer una realidad tomando como base sus características, ya sea en forma real o sobrentendida.

En el programa de estudios (MEP, 2001) se menciona que los problemas deben implicar un cierto reto para los estudiantes, un cierto conflicto y conllevar a una determinada finalidad. También deben de referirse a situaciones propias de la vida cotidiana, referirse a una amplia gama de contextos y responder a diferentes esquemas de razonamiento. Además, agrega que el educador debe de promover actividades en las cuales los estudiantes realicen sus propios planteamientos, descubran las hipótesis. En un primer momento los alumnos deben resolver un problema a su manera y con sus propios conocimientos. El profesor dejará que los estudiantes resuelvan por sí mismos la situación problemática. Posteriormente el profesor enseñará algunos aspectos del contenido del tema e involucrará a los estudiantes en las discusiones sobre las estrategias que ellos utilizaron para resolver el problema.

Son dados algunos tipos de problemas clasificados en dos categorías: aquellos que para su solución se requiera de operaciones, teoremas, principios, teorías o conceptos relevantes del tema que se está estudiando y los que requieren un ordenamiento de ideas lógicas y la aplicación de conceptos básicos (problemas de ingenio y acertijos). En realidad los ejemplos presentados son únicamente del segundo tipo: cuadrados mágicos, reconocimiento de patrones, problemas geométricos de mover y quitar partes de una figura para formar otra y problema de lógica.

Los programas de estudio vigentes en la actualidad (MEP, 2005) no agregan nada nuevo acerca de resolución de problemas cuando los comparamos con el los programas del 2001.

Conclusiones

La resolución de problemas en los programas de estudio para el tercer ciclo y para la educación diversificada no es considerada como una estrategia metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Se percibe un avance en cuanto a lo que se entiende por un problema, las características de un problema, el rol del docente como mediador del aprendizaje y como constructor de situaciones didácticas que sean ricas en situaciones problemáticas. También se enfatiza la utilización de modelos matemáticos y la conexión de los problemas con las situaciones cotidianas.

Las sugerencias metodológicas contenidas en los programas de matemática para la enseñanza secundaria se acercan a las dadas por Polya y a algunas planteadas por Schoenfeld, pero existen contradicciones y expectativas irreales en las propuestas planteadas. Nuestra experiencia evidencia que la realidad en el aula no concuerda con las expectativas implícitas en el programa.

Referencias bibliográficas

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Polya en la resolución de problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 1, número 1, pp. 28-46.

Barrantes, H. (2006). Matemáticas y razonamiento plausible. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 1, número 1, pp. 47-60, 61-76.

Becker, J. & Shimada, S. (Eds.) (2005). *The Open-Ended Approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

De Faria, E. (2006). Control en la resolución de problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 1, número 1, pp. 77-86.

Informe Nacional de los resultados de las pruebas nacionales de la educación formal (2005). Ministerio de Educación Pública, División de Control de Calidad, Departamento de pruebas nacionales, Sistema de educación formal. Costa Rica.

Jensen, R. (1974). A *multifaceted instructional approach for developing subgoa1 generation skills*. Tesis doctoral no publicada. University of Georgia, Athens.

MEP (1996). Programa de Estudios. Tercer ciclo y Educación Diversificada. Matemáticas. Ministerio de Educación Pública. Costa Rica.

MEP (2001). Programa de Estudios. Tercer ciclo y Educación Diversificada. Matemáticas. Ministerio de Educación Pública. Costa Rica.

MEP (2005). Programa de Estudios. Tercer ciclo y Educación Diversificada. Matemáticas. Ministerio de Educación Pública. Costa Rica.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. [Trad. castellana de Julián Zugazagoitia, Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas, 1965.]

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton, NJ: Princeton University Press. [Trad. castellana de José Luis Abellán, Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos, 1966.]

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On undestanding, learning and teaching problem solving, vol 1.* Nueva York: Wiley.

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery discovery: On undestanding, learning and teaching problem solving, vol. 2.* Nueva York: Wiley

Smith, J. P. (1974). *The effects of general versus specific heuristics in mathematical problem-solving*. Tesis doctoral, Universidad de Columbia, Disertation Abstracts International, 34, 2400A.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Wilson, J. W. (1967). *Generality of heuristics as an instructional variable*. Tesis doctoral no publicada, Stanford University, San José, CA.

ORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO DE LA DISCIPLINA MATEMÁTICA PARA CIENCIAS TÉCNICAS

José Manuel Ruiz Socarras, Gaspar Barreto Argilagos, Ramón Blanco Sánchez
Departamento de Matemática, Facultad de Informática, Universidad de Camagüey Cuba
jose.ruiz@reduc.edu.cu

Campo de investigación: Educación a distancia Nivel: Superior

Resumen. *Existe una fuerte tendencia de reducción cada vez mayor del número de horas presenciales en el nivel de pregrado y postgrado, y el empleo de modelos pedagógicos enmarcados en la nueva corriente conocida como "blended", que combinando las ventajas de lo presencial y de lo no presencial, ofrece la alternativa de la semi presencialidad. Surge así el problema de cómo abordar el mismo contenido, en cada vez menor cantidad de actividades presenciales, manteniendo iguales niveles de calidad que en el modelo presencial. Los autores del trabajo consideran que parte de la solución a dicho problema está en la organización del contenido según un enfoque sistémico estructural funcional, lo que significa organizar el contenido a partir de las estructuras funcionales estables, sobre el principio de la facilidad que tiene el hombre de asimilar conocimientos estructurados que fragmentarios.*

Palabras clave: semipresencial, modelo pedagógico, organización del contenido

La Nueva Universidad cubana

Con el triunfo de la revolución cubana en 1959, la universidad cubana abandona su carácter elitista y entre otros aspectos, se diversifican los tipos de cursos para facilitar los estudios de nivel superior a los trabajadores. No obstante en la actualidad se continúan desarrollando importantes transformaciones dirigidas a ampliar las posibilidades de estudios superiores a los sectores sociales menos favorecidos del país, a partir de una visión mas integral de los conceptos de equidad y justicia social, y sobre la base del revolucionario concepto de acercar la universidad hasta el lugar donde residen o trabajan las personas.

Con ello surge una nueva cualidad de la universidad, que radica en su presencia, cada vez con mayor intensidad, en todos los municipios del país.

La universidad cubana para enfrentar tales demandas, tiene que realizar profundas transformaciones, que caracterizan lo que se ha denominado Nuevo Modelo de Universidad, en respuestas a los actuales retos de nuestra sociedad y en general a las transformaciones que tienen lugar en el mundo en la ciencia y en la tecnología.

Así pues, dentro de las responsabilidades sociales de la Nueva Universidad Cubana están:

- El pleno acceso y elevación de los niveles de permanencia y egreso.
- Lograr una universidad ajustada a su contexto.

Dentro de las políticas y estrategias que se trazan para enfrentarlas se pueden citar:

- El perfeccionamiento continuo de planes y programas de estudio, en un proceso formativo en el que el estudiante tiene un papel activo y protagónico.
- La implementación de nuevos modelos pedagógicos, dentro de los que se destaca su mayor flexibilidad.

Por tales motivos se ha diseñado un modelo pedagógico que se enmarca en la nueva corriente conocida como "blended", que comienza a imponerse internacionalmente y que ha dado paso a la llamada modalidad semi presencial, b-learning o modelo bimodal.

Este nuevo modelo representa una posición intermedia entre el llamado aprendizaje electrónico (e-learning o educación a distancia) y la enseñanza tradicional o modelo presencia y sus características fundamentales son:

- Flexible: para que pueda adaptarse a diversas situaciones laborables, a particularidades territoriales y al ritmo individual de aprovechamiento académico del estudiante.
- Estructurado: para favorecer la organización y desarrollo del aprendizaje.
- Centrado en el estudiante: para que sea capaz de asumir de modo activo su propio proceso de formación.

- Con actividades presenciales sistemáticas: que posibiliten, en función del tiempo disponible, que los profesores guíen, apoyen y acompañen a los estudiantes.

Así pues, en la actualidad el 80 % de los estudiantes universitarios en cuba cursan estudios en la modalidad semipresencial. Por su parte la educación a distancia va pasando también paulatinamente a modalidad semipresencial y en el caso de los cursos regulares diurnos que responden a una modalidad presencial, se plantea la utilización tanto de medios como de métodos acordes al modelo semipresencial. En resumen, el modelo pedagógico semipresencial es y está llamado a ser el que prevalezca en la educación superior cubana.

La utilización de este modelo en cuba, ha conllevado a la reducción cada vez mayor del numero de horas clases presenciales, en comparación con el modelo tradicional, aunque se mantienen iguales propósitos u objetivos a lograr en los estudiantes y por tanto no se reducen los contenidos de los planes de estudio ni se renuncia a lograr altos niveles de calidad del egresado.

Surge así el problema de cómo abordar el mismo contenido de una disciplina, en cada vez menor cantidad de actividades presenciales.

En relación con la implementación del modelo semipresencial, el Ministerio de Educación Superior cubano (MES), ha implementado un plan de acción dentro del cual se plantea la necesidad de lograr una adecuada preparación metodológica de los profesores en la modalidad semipresencial. En consecuencia con ello la Universidad de Camagüey, Cuba, ha trazado dentro de sus prioridades para el trabajo metodológico del curso escolar 2006-07, el empleo de métodos adecuados para un tratamiento semipresencial en todos las modalidades de estudio. En particular, este trabajo trata acerca de la organización del contenido de la disciplina matemática, acorde a la reducción cada vez mayor de actividades presenciales, lo cual constituye una línea del trabajo metodológico del departamento de matemática de la Universidad de Camagüey.

Así pues, el objetivo del presente trabajo es orientar a profesores de matemática que laboran en carreras de Ciencias Técnicas, acerca de la organización del contenido matemático con un enfoque sistémico y ahorro de tiempo en cuanto a cantidad de actividades presenciales.

Organización del contenido

En la actualidad una organización adecuada del proceso de enseñanza aprendizaje requiere fundamentalmente poseer:

- Un ordenamiento que favorezca el aprendizaje.
- Integración temática.
- Mayores niveles de esencialidad.
- Adecuada secuencia lógica y pedagógica.

Por tanto los autores del presente trabajo consideran que una adecuada organización del contenido se logra si el mismo se organiza según un enfoque sistémico estructural funcional, lo cual significa organizar el contenido:

- A partir de las características estructurales funcionales denominadas Estructuras estables (Invariantes del sistema).
- Y de forma relacionada o estructurada, teniendo en cuenta que por la particularidad psicofisiológica del hombre, es mas fácil asimilar conocimientos estructurados (relacionados) que información fragmentaria (Dimova, 1981).

Estructura estable (Invariante del sistema)

Diversos autores utilizan el concepto de "invariante", como componente esencial del contenido en el proceso de enseñanza aprendizaje del mismo. Entre ellos se encuentra Reshetova, 1988. Por su parte Álvarez, 1988, habla en términos de invariantes de conocimientos, núcleos básicos o ideas rectoras e invariantes de habilidad. Mas recientemente y con un carácter mas general, fuentes, 2000, introduce el concepto de invariante de contenido, el que incluye las invariantes de conocimientos e invariantes de habilidad, así como valores profesionales.

Un análisis y síntesis de tales denominaciones, permiten concluir que, en general se entiende por invariante de conocimientos, los conocimientos más generales o esenciales que subyacen en la base de toda la estructura del sistema de conocimientos y de los que se infiere el resto de los conocimientos de carácter particular y singular. Por su parte, se entiende por invariantes de habilidades, a las habilidades de alto grado de generalización, fundamentales o esenciales, que permiten al sujeto actuar ante múltiples objetos y situaciones particulares. Se construyen sobre la base de habilidades más simples.

Sin embargo, Blanco, 1998, introduce el concepto mas general aun de estructura estable, el que define como, los elementos o el elemento que permanece fijo dentro de un concepto y también las operaciones u operación que es necesario repetir para ejecutar una acción o acciones que conforma una habilidad dada y si estas operaciones o conceptos son utilizados didácticamente para lograr una enseñanza sistémica, entonces son estructuras estables utilizables como recursos didácticos. De esta manera, el concepto de estructura estable permite ampliar el concepto de invariante, aunque toda invariante es a su vez una estructura estable.

Conocimiento estructurado o relacionado

La importancia que para el proceso de enseñanza aprendizaje tienen que entre las diferentes partes componentes del contenido se establezca al relación que existe entre ellos es algo que desde Comenio[1] (1592-1670) era reconocida. El señalaba como uno de

[1] Juan Amos Comenio (Comenius, en latín) escritor y pedagogo checo. Lo más destacado de su producción son sus tratados y estudios pedagógicos. Su mayor obra pedagógica es Didáctica Magna (1632)

los requisitos generales para aprender y enseñar, la relación entre las cosas. Así mismo planteaba que la solidez para aprender y enseñar se logra entre otras cosas si:

- Se tratan las cosas sin separación.
- Todo lo posterior se fundamenta en lo anterior. Dispónganse los estudios de tal manera que los posteriores tengan su fundamento en los que preceden y estos se afirmen y corroboren con los que van después. En este método natural todos los antecedentes deben servir de base a los consiguientes, de otro modo no podría haber solidez en lo que se haga.
- Todo lo coherente se enlaza siempre.

Por su parte, la Dialéctica como teoría del desarrollo y de los nexos universales, considera que para conocer realmente un objeto es necesario estudiarlo en todos sus aspectos y nexos.

Así mismo y en la actualidad, dentro del constructivismo como plataforma para prender significativamente, Lara, 1997, señala como uno de los requisitos para el aprendizaje constructivista, que se relacione la nueva información con los conocimientos previos, los cuales son los fundamentos de la construcción de los nuevos significados, porque como señala Voss, 1978, lo importante para prender algo no es lo que se va a aprender, sino lo ya aprendido, porque es con o que tiene que relacionarse para que adquiera significado. Según Lara, los alumnos tienen dificultades para vincular la nueva información con los conocimientos previos, cuando no se lo proponen, o cuando la información es poco clara, está desorganizada o de alguna forma carece de sentido.

Ejemplificación en el tema de ecuaciones diferenciales

Algunos ejemplos de estructuras estables del tema son:

- *Método de enseñanza aprendizaje por problemas*

Teniendo en cuenta tanto la fundamentación de la disciplina matemática como su objetivo general instructivo, así como el papel que desempeñan las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos de infinidad de problemas de la ciencia y la técnica, es que entendemos como fundamental en la disciplina la utilización del método de enseñanza aprendizaje por problemas, entendiendo como tal, la presentación al inicio de cada nuevo tema de problemas docentes o sea problemas dentro del proceso de enseñanza aprendizaje que simulen problemas científicos y prácticos, a situaciones concretas de la vida y sobre todo que se relacionen con la futura actividad profesional del estudiante. De esta forma se abordará el nuevo contenido como una necesidad para la resolución de dichos problemas y en función de ellos, sin caer en posiciones pragmáticas.

Este método consta de los siguientes pasos y constituye una estructura estable:

1. Modelación matemática.

2. Resolución del modelo.

3. Interpretación de la solución.

Los modelos matemáticos de acuerdo al tipo de fenómeno que modelen pueden ser determinísticos o probabilísticos (estocástico). La resolución del modelo lleva implícito a su vez dos pasos: 2.1. Determinación de la existencia y unicidad de la solución (lo que conduce a una gama de teoremas de existencia y unicidad), 2.3. La búsqueda de métodos para hallar la solución cuya existencia y unicidad ha sido analizada en el paso anterior. Dichos métodos pueden ejecutarse manual o computacionalmente, y por otra parte pueden ser analíticos, operacionales, numéricos o cualitativos.

Observemos como este método de enseñanza aprendizaje tiene un carácter general e incluye y relaciona a todo el contenido matemático que se aborda en el proceso de enseñanza aprendizaje, de ahí su condición de estructura estable. Llevar este enfoque al estudiante le permite relacionar todo el contenido matemático y verlo como un todo, como un sistema, en función de un objetivo superior que es la resolución de problemas. Es importante que el estudiante comprenda que muchos conceptos matemáticos o son puras abstracciones, sino que forman parte de modelos matemáticos de problemas a resolver. Tal es el caso por ejemplo del estudio de las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos de problemas en que se estudia la intensidad o velocidad de variación (razón de cambio) de una magnitud respecto a otras(s).

- *Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de orden n ≥ 1 con coeficientes constantes*

Una estructura estable en este caso lo constituye la forma general y_c de la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden n ≥ 1 con coeficientes constantes, a partir de identificar toda raíz de la ecuación característica, como un par de raíces complejas conjugadas a ± bi de multiplicidad k. en este caso $y_c = e^{ax} [P_{k-1}(x) \cos bx + R_{k-1}(x) \text{sen } bx]$, donde $P_{k-1}(x)$ y $R_{k-1}(x)$ son polinomios de grado k-1.

Dicho enfoque permite identificar a partir de la estructura estable, cuatro tipos particulares de raíces de la ecuación característica, para cada una de las cuales se obtienen los valores de las constantes a, b y k, que a su vez permiten cuatro tipos particulares de soluciones generales correspondientes, como se puede apreciar en la siguiente tabla.

Raíces	**a**	**b**	**k**
Reales no repetidas	a	0	1
Reales n veces repetidas	a	0	n
Complejas no repetidas	a	b	1
Complejas n veces repetidas	a	b	n

Tabla 2. Obtención de la solución general de la ecuación homogénea a partir de la estructura estable.

- *Método de los coeficientes indeterminados*

Algo similar ocurre con la identificación del tipo de función f(x) que aparece como termino no homogéneo de la ecuación diferencial ordinaria lineal de orden $n \geq 1$ con coeficientes constantes y en consecuencia la forma que se suponen tiene una solución particular y_p de dicha ecuación según el método de los coeficiente indeterminados.

El tratamiento como estructuras estables en este caso presupone considerar el caso general en que f(x) se expresa como combinación lineal de un número finito de funciones del tipo x^n (potencial), e^{px} (exponencial), sen qx o cos qx (trigonométricas) y la forma general que tendrán la solución particular, como se muestra a continuación.

Si $f(x) = e^{px} [\, R_u(x) \cos qx + T_v(x) \operatorname{sen} qx \,]$, entonces $y_p = e^{px} [\, M_s(x) \cos qx + N_s(x) \operatorname{sen} qx \,]\, x^{\alpha}$, donde $R_u(x)$, $T_v(x)$, $M_s(x)$ y $N_s(x)$ son polinomios de grado u, v y s respectivamente, $s =$ máx.$\{\, u,\ v\}$ y α es el numero de veces que aparece $p \pm qi$ como raíz de la ecuación característica de la ecuación diferencial ordinaria homogénea asociada.

Un enfoque a través de estructuras estables hace que el estudiante ante cualquier expresión de f(x) deba buscar los valores de p, q, u, v y a partir de ellos plantear la forma que debe tener y_p.

Orientaciones metodológicas generales

- Desarrollar las clases a partir de las estructuras estables, lo que permite al estudiante aprender nuevos contenidos mediante su trabajo independiente.
- Relacionar el nuevo contenido con el ya conocido por el estudiante: mayor motivación, sistematización y solidez del aprendizaje.
- Enfoque del contenido a través del método de enseñanza aprendizaje por problemas, vinculados a la carrera.
- Trabajar con un alto grado de generalidad y su aplicabilidad a casos particulares.

- Mayor énfasis en habilidades de modelar y determinación de condiciones de existencia y unicidad de la solución del modelo. Menor énfasis en habilidades de cálculo de la solución del modelo.

- Evaluar la habilidad de resolver problemas vinculados a la carrera, a través de tareas de control extraclases y/o exámenes finales, que permiten mayor nivel de integración (evaluación como elemento sinérgico).

- En el tema de ecuaciones diferenciales deben tratarse de forma presencial los modelos mas generales (ecuaciones diferenciales exactas y reducibles a exactas, ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior), así como el principio de solución de reducción de un problema a otro ya resuelto mediante el cual se reduce o transforma lo complejo desconocido en sencillo conocido. Orientar para el trabajo independiente las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden reducibles a reducibles a exactas, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Esto racionaliza el trabajo presencial con el tema de ecuaciones diferenciales.

Conclusiones

- La tendencia a dismimuir el número de horas presenciales en los cursos, exige un cuidadoso trabajo metodológico que permita decidir el contenido a abordar en ese corto tiempo.

- Se deben priorizar las estructuras estables del contenido, que constituyen los núcleos necesarios y suficientes para alcanzar los objetivos establecidos, con el apoyo del trabajo independiente que es posible a partir de dichas estructuras.

- En las ingenierías, el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas debe orientarse primordialmente a la resolución de problemas profesionales. Tradicionalmente se absolutiza la resolución del modelo y esto es inadecuado.

• En el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática es fundamental llevar al estudiante el principio general de solución de reducción de un problema a otro ya resuelto, mediante lo cual se reduce o transforma lo complejo desconocido en sencillo conocido.

Referencias bibliográficas

Amos, J. (1983). *Didáctica Magna*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Álvarez, C. M. (1998). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del profesional de perfil amplio. Univ. Central de Las Villas: [s. n.], p. 137

Dimova, V. (1981). La organización óptima del contenido de la enseñanza. En Venera Dimova, Dobromir Malamov, Venelin Chalykov. *Revista La Educación Superior Contemporánea. 4(36),* 165-177.

Fuentes, H.C. (2000). *Modelo Curricular con base en competencias profesionales*. Santa Fe de Bogotá: [s. n.].

García, L. (1970). Modelos y Teorías. *Revista Pensamiento Crítico. (47)*:7-19.

Lara, J. (1997). Estrategias para un aprendizaje significativo constructivista. *Revista Enseñanza. 15*, 29-50.

EL CURRÍCULO ESCOLAR MEXICANO DE LAS CIENCIAS EN EL NIVEL MEDIO

Adriano Balám Narváez, Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán México
balam_222@hotmail.com, alanda@uady.mx
Campo de investigación: Estudios de currícula Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo se reportan los resultados obtenidos en un estudio de tendencias realizado sobre el currículo escolar mexicano de ciencias naturales y exactas en el nivel educativo medio. Para la realización de este estudio se utilizó una metodología documental acompañado de entrevistas estructuradas a expertos en materia curricular. El propósito fue caracterizar los diferentes momentos por los que ha transitado el currículo en las últimas cuatro décadas y establecer posibles directrices.*

Palabras clave: currículo escolar, tendencias, documental, ciencias

Introducción y objetivo

La educación de un país ha de responder a necesidades propias de la sociedad donde se desarrollará el proyecto educativo, sin embargo, estas siempre se encuentran en constante cambio, de manera que las propuestas educativas deben irse adecuando a la época en la que se encuentran enmarcadas, en este sentido, se hace importante estudiar tales cambios. Por ejemplo, estudiar la necesidad de emprender nuevos trabajos en materia de currículo donde no sólo se de cuenta de su estructura, sino también que permitan obtener elementos suficientes para anticipar los posibles obstáculos causados por una incorrecta planeación.

A partir de tales consideraciones, nos propusimos desarrollar un estudio de tendencias que nos permitiera identificar diferentes vertientes del currículo escolar mexicano en el nivel medio, el fin era llevar a cabo un análisis de los diferentes momentos por los que ha transitado el currículo. Para ello, nos planteamos las siguientes interrogantes: ¿Cuáles han sido las tendencias educativas de las ciencias básicas en el bachillerato? ¿Qué retos han representado tales tendencias? ¿Cuál ha sido el tipo de funcionamiento del bachillerato en México y cuáles se vislumbran podrían ser sus nuevas perspectivas?

Para lograr dar respuesta a nuestra interrogantes, nos valimos de un método de investigación documental acompañado de entrevistas estructuradas. La investigación en este sentido, se estructuró en dos fases:

En la primera fase se realizó el proceso de documentación para establecer lo que ha sido el currículo escolar de ciencias, su breve historia, algunas de las reformas que se han establecido, los diferentes estudios que se han realizado en torno a ellas, así como diferentes investigaciones en el tema. Esta información la obtuvimos de artículos publicados en revistas especializadas en educación y enseñanza de las ciencias en México, así como de algunos documentos oficiales. En la segunda fase, se clasificó la información obtenida y caracterizamos ciertos rasgos del currículo escolar que han representado un cambio en la concepción y estructura del mismo. A partir de esto, determinamos las principales características presentes en el origen y desarrollo de los cambios en el currículo.

Ya realizado los dos puntos anteriores, nos dimos a la tarea de elaborar una entrevista estructurada (cuestionario) que tuvo como base nuestra visión proyectiva del currículo de las ciencias, para finalmente, contrastarla con las opiniones de dos especialistas sobre el currículo de ciencias en bachillerato.

El currículo de las ciencias en retrospectiva

Durante una parte de la década de los setentas, el currículo mexicano de las ciencias básicas en el bachillerato se caracterizó por centrarse en determinar lo que serían los contenidos científicos a ser estudiados por las futuras generaciones de científicos en las escuelas, durante esta década, el bachillerato mexicano pasaba por un proceso de aceleramiento en su matrícula y de ahí que fuera necesario crear nuevas instituciones que brindaran a los alumnos la oportunidad de realizar sus estudios en este nivel. Así, por primera vez se empiezan a tocar problemas torales dentro de la enseñanza de las ciencias, pues si bien era cierto que la ciencia estaba al servicio de la comunidad, debido a que las políticas de la época apoyaban en gran medida la idea de difundir a la ciencia dentro de los estatus sociales, los expertos en la enseñanza de las ciencias empezaron a notar la desvinculación entre lo que se estudiaba en las escuelas con la realidad que se vivía fuera de ellas.

Según un análisis realizado por representantes de los sectores científicos, tecnológicos, educativo y público en México en esa época, el problema básico del funcionamiento del sistema científico y tecnológico no radicaba tanto en el desequilibrio entre las diversas fases de la investigación y el desarrollo, sino fundamentalmente en la desarticulación que éstas presentaban entre sí y respecto a las actividades educativas y productivas del país (Peck, 1977)

A mediados de los setentas, la enseñanza de las ciencias no se “conformaba” con adoptar los métodos tradicionalistas, existía una gran preocupación por tratar de dotar de un significado más preciso a los contenidos enseñables. Se empieza a manejar por primera vez en el discurso, una enseñanza integradora de las ciencias, que vendría a representar una tentativa solución para tal preocupación.

Al respecto, en Díaz (citado en Luengo, 2003) se resumen las principales características de este periodo:

- Contención de la matrícula bajo el argumento de masificación de la educación.
- Promover la calidad de la educación sobre su crecimiento.
- Disminución de recursos fiscales asignados a la educación superior.
- Promover una diversificación de las fuentes de financiamiento.
- Promover la reorientación de la matrícula hacia áreas con menor demanda: ciencias exactas y naturales y ciencias agrícolas.

- Se acentúa la expansión de la educación superior privada, ésta crece numéricamente, aunque porcentualmente atiende a un porcentaje bajo de la matrícula global.

Curricular y educativamente hablando, la década de los ochentas fue conocida como el periodo de desaceleración. La crisis que afectaba la economía del país motivó a revisar la escena mundial y con ello, darse cuenta que los enfoques de enseñanza estaban en completo desfase con lo que se venia haciendo en los países desarrollados.

Se empieza a otorgar más apoyos al sector de servicios, cobrando importancia las carreras terminales y la creación de profesionales técnicos. Esto aunado a los constantes conflictos entre los diferentes tipos de bachilleratos en México agudizó los problemas en la educación secundaria.

Fue durante los años ochentas que las investigaciones reportaban la necesidad de la interdisciplinariedad, sin embargo, tal necesidad no fue considerada en las reformas curriculares de aquella época, y el carácter intradisciplinar tan poco era algo muy notorio en la práctica escolar. Se vivía pues, una confusión debido a las grandes corrientes educativas provenientes del extranjero que originaban choques en la forma de concebir al currículo de las ciencias básicas en México.

Otro aspecto importante dentro del proceso de enseñanza, fue el hecho de intentar que el alumno comprendiera la naturaleza del concepto de los diferentes contenidos temáticos de las ciencias naturales y exactas. Esta preocupación tan importante marcó una nueva perspectiva dentro de la enseñanza en general, pues a partir de esto se empieza a hablar de *aprendizajes significativos* para el alumno, concepto que se volvería central en la siguiente década.

Para la década de los noventas, nuevamente el bachillerato es el centro de atención en materia curricular, es precisamente en esa década que la educación del país se somete a procesos de evaluación en todos sus niveles educativos. Los resultados fueron considerados "desastrosos" debido a que los resultados señalaban la existencia de una profunda ruptura entre el nivel medio y el superior. Los diferentes tipos de bachilleratos inician una manifiesta tendencia de unificación en un bachillerato de carácter bivalente, pues el país ya no requería de profesionistas para solventar una crisis de la cual se iba recuperando, los países desarrollados empiezan a tener una marcada influencia en materia de educación, con su incursión a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.

Una de las propuestas de tal organización fue implementar nuevas tecnologías dentro del aula, esto se llevó acabo a través del apoyo a las instituciones para incorporar en sus estrategias de enseñanza la tecnología de la época; este requerimiento nuevamente marcó una sólida tendencia a mejorar la educación, pero que a la vez trajo como consecuencia que el currículo se viera en la necesidad de incluir en él mismo, el paso de lo tradicional a lo innovador. Esta flexibilidad se debió a una necesidad propia de la época, ya que se trataba de "copiar" los resultados en materia de educación que habían tenido éxito en otros países, en especial de Norte América.

El enfoque y tratamiento dado a las ciencias en su enseñanza, originaban que los alumnos no encontraran una correcta vinculación entre los contenidos enseñados y aquellos requeridos en su vida cotidiana o profesional. Ciencias como la Física y Química adoptaron nuevas formas de enseñanza, pues se excedían en los contenidos teóricos y se daba poca o nula importancia a las prácticas de laboratorio y talleres, siendo así poco atractivas para los alumnos.

El currículo escolar en años contemporáneos

El currículo en los años contemporáneos ha sufrido una significativa evolución, desde la década de los setentas se ha modificado su estructura y funcionamiento dentro del sistema educativo mexicano, por ejemplo, se han puesto en consideración las influencias de los países desarrollados, al grado que han sido estos y lo que sucede a su alrededor en materia educativa, la pauta a seguir.

Esto último se refleja en la transformación del currículo, transformación que inicia por considerar las necesidades apremiantes de la sociedad contemporánea, mismas que apuntan hacia una inminente competencia mundial, en donde la globalización es el factor dominante en la escena. Con esto, se ha originado que las estructuras curriculares sean ajustadas a las nuevas tendencias mundiales, donde la desigualdad social es el factor a vencer según declaraciones de la UNESCO, de ahí que la educación deba perseguir el combate a este problema.

En materia de ciencia y tecnología, se pretende desarrollar nuevos medios para generar este tipo de conocimientos, donde la característica principal es el trabajo multidisciplinario, situación que los analistas en materia de ciencia consideran poco adecuada para afrontar la realidad, por lo que se sugiere cambiar este enfoque a uno interdisciplinario donde se favorezca a todas las disciplinas involucradas en la actividad científica, ya que resulta más productivo en "todos los sentidos".

Por otro lado, diversas investigaciones que se han ido realizando en la actualidad, parecen corroborar la urgente necesidad de brindar una enseñanza de las ciencias bajo las siguientes consideraciones:

- Las ciencias como un medio de ayuda para que los estudiantes empiecen a pensar de manera lógica sobre los hechos cotidianos y resolver problemas prácticos, sencillos.
- Las ciencias y sus aplicaciones en la tecnología, son actividades socialmente útiles que esperamos se hagan familiares a los estudiantes y pueden mejorar la calidad de vida de las personas (Oviedo, et al 2004, p.687).

Principales tendencias del currículo escolar

A nuestro modo de ver, la principal tendencia del currículo escolar de las ciencias básicas en el bachillerato, está enmarcada por las influencias extranjeras y las dictaminadas por los organismos internacionales en materia de educación. En mayor o menor medida tenemos que tales influencias y organismos internacionales se proponen combatir la desigualdad, promover una educación de calidad, un trabajo cooperativo e interdisciplinario. En este escenario, las ciencias se conciben como conocimientos al servicio de la humanidad.

Se han empezado a fomentar en todos los niveles educativos la importancia de formar individuos capaces de realizar trabajos de investigación científica y académica, capaces de desempeñar mejor su práctica profesional, utilizando sus conocimientos para comprender su entorno, para emprender nuevas investigaciones, interiorizar estructuras de pensamiento que les permitan resolver problemas y que se puedan desempeñar de una mejor manera en su vida cotidiana y laboral.

Visión de los especialistas sobre el currículo escolar

Para tener una visión general de las diferentes proyecciones acerca del currículo de las ciencias básicas en el bachillerato, nos dimos a la tarea de aplicar una entrevista estructurada a algunos de los expertos en materia de educación y del currículo, su visión la sintetizamos en los siguiente párrafos.

En cuanto a una posible unificación de los diferentes tipos de bachilleratos existentes, los especialistas coinciden que las políticas educativas en el país son las que han tratado de lograr este fin, mediante la incursión de nuevas reformas que permitan mantener un determinado estándar en cuanto a educación se refiere, pero este no se vislumbra en un futuro inmediato debido a que los diferentes tipos de bachillerato en México representan la posibilidad de solventar una determinada necesidad social y posibilita la diversificación de profesionistas, situación que le beneficia en gran medida al país.

La interdisciplinariedad del currículo de las ciencias en el bachillerato, es un tema vigente donde se establece que debido a la naturaleza misma de las ciencias se ha tendido a que sus disciplinas tengan un comportamiento de vinculación, se coincide en que este cruce natural favorece en gran medida a los procesos de aprendizaje, pues facilita el aprendizaje integral y disminuye la fragmentación del conocimiento, pero esta supuesta interdisciplinariedad, deberá de ser favorecida no sólo por la naturaleza de ciencias mismas, sino que se debe prestar especial atención a los contextos donde se desarrollan, así como aquellas prácticas que favorecen el desarrollo de un verdadero pensamiento científico acorde a las necesidades sociales existentes.

Las reformas educativas en el país requieren de una valoración, antes de llevarlas a cabo, pues es inminente la influencia de corrientes educativas extranjeras así como de nuevas formas de desarrollar ciencia. Al respecto, especialistas en el currículo consideran que en la actualidad, el romper con los métodos tradicionales de enseñanza no sólo requiere de nuevas propuestas, si no de la vinculación de los docentes con estas reformas, pues ellos serán los responsables de concretarlas en las aulas.

El currículo en prospectiva

La enseñanza de las ciencias requiere de un currículo que le proporcionen a las mismas, los medios necesarios para lograr que el alumno no sólo trabaje con los conceptos, sino que le permita generar nuevas formas de pensar, donde se tomen en cuenta los diferentes contextos y las realidades sociales en los que se encuentran inmersos.

En este sentido y a partir de los resultados obtenidos, consideramos que a mediano plazo serán las propias instituciones educativas las que se encarguen de proponer reformas dentro del currículo de las ciencias y en las que recaiga la responsabilidad del proceso de formación de los profesores para que estos puedan hacer frente a las reformas, ya que en efecto, son tales instituciones las que se encuentran más involucradas con la realidad educativa de sus países.

En cuanto al bachillerato mexicano vislumbramos una posible unificación en los diferentes tipos de bachilleratos existentes, sin embargo esta tendencia no está del todo definida, el asunto es multifactorial, las necesidades sociales que siguen prevaleciendo aunque un poco confusas, pues ante los estrepitantes cambios económicos, políticos y sociales se han ido creando diferentes subsistemas de bachilleratos, pero debido al comportamiento global de querer lograr una homogenización en el sistema educativo surgen políticas que tienden a unificar los sistemas de bachilleratos, donde la idea principal es el de proporcionar una homología de socialización de la ciencia, la cultura y tecnología.

Es así que concebimos un currículo más flexible centrado en la generación de aprendizajes y la funcionalidad de los conocimientos. La idea básica será crear una verdadera ciencia al servicio de la comunidad que sea capaz de superar las barreras ideológicas mediante una política educativa de corte general. Donde las habilidades del pensamiento estén encaminadas a planear modelos para la correcta resolución de un determinado problema, plantear debates dentro de las aulas y generar preguntas en torno a la problemática con la intención de compartir y discutir estrategias donde la principal preocupación sea aprender de las experiencias.

Referencias bibliográficas

Aguirre, M. (2001). El curriculum escolar, invención de la modernidad. *Perspectivas docentes. 25*. 3-13. México: OEI.

Arriaga, G. (2006). El eje maestro de un proyecto de nación: el sistema educativo mexicano. *Convergencia revista de ciencias sociales. 41.* 223-228. México: UAEM.

Castillo, M. (2004) La evaluación: Una estrategia a nivel internacional para el mejoramiento de la calidad educativa. Obtenido en mayo 7, 2007, de http://eduteka.org/EvaluacionBogota.php

De Costilla, J.; Graciela, M. (2005). El curriculum oculto de una experiencia áulica. *Acta latinoamericana de matemática educativa 19*. 259. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Díaz, F. (1981). *Metodología de Diseño Curricular.* México, D.F, México: Trillas.

Luengo, E. (2003). Tendencias de la educación superior en México: una lectura desde la perspectiva de la complejidad. Recuperado el 3 de mayo 2007, del sitio Web de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior/Estudios y proyectos: http://www.anuies.mx/e_proyectos/

Oviedo, L.; Kanashiro, A.; Alzugaray, G.;Frausin, A. (2004). *Un problema motivador para un trabajo interdisciplinario en Matemática y Física. Acta latinoamericana de matemática educativa*. *17* (1): 687. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Peck, D. (1977). Conceptos actuales de la ciencia en México y algunas implicaciones para la enseñanza superior. *Revista de la educación superior. 6(3):*23. Recuperado de http://www.anuies.mx/servicios/p_anuies/publicaciones/revsup/res023/txt2.htm

UN ESTUDIO DEL CURRÍCULO MATEMÁTICO EN SISTEMAS EDUCATIVOS DE NIVEL MEDIO, UNA VISIÓN PROSPECTIVA

Erika Canché Góngora, Landy Sosa Moguer
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán México
emcanche@cinvestav.mx, smoguel@uady.mx
Campo de investigación: análisis del currículo Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo presentamos una caracterización del currículo matemático de nivel medio en el Estado de Yucatán, en tanto su estructura y la orientación de sus componentes con el fin de dar indicios sobre la planificación, qué matemáticas estudiar y cómo hacerlo. Este estudio se basó, entonces, en un análisis de su evolución y de la identificación de las incongruencias e inconsistencias, en cuanto a aspectos como organización y estructura que se plantean en los planes y programas de matemáticas de bachillerato.*

Palabras clave: análisis, evolución, currículo, matemáticas

Introducción y objetivo

Las evaluaciones sobre las aptitudes en matemáticas, como el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for Internacional Student Assessment, PISA) desarrollado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), reflejan que, si bien los jóvenes mexicanos de 15 años de edad tienen cierto "dominio" de conocimientos matemáticos en definiciones y fórmulas, existen deficiencias en su nivel de competencia matemática, definida por PISA como "la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OECD, 2004, p. 3; OECD, 2003, p. 24; citado por Rico, 2005).

En los estudiantes de bachillerato la situación es similar, pese a los propósitos de las reformas curriculares que se han desarrollado e implementado en esta década, se observa que los programas de estudio hacen énfasis solo en el aprendizaje de contenidos temáticos, dejando a un lado el desarrollo de su competencia matemática. Por otro lado, no se refleja el currículo como producto social y cultural, esto es, como resultado de la actividad de grupos humanos con una cultura determinada y en el que el aprendizaje se ve afectado por el contexto, las relaciones interpersonales y de la matemática con la sociedad (Rico, 1997).

Estos son algunos indicadores que ponen en cuestionamiento la funcionalidad del currículo matemático de bachillerato en México, el cual se divide en subsistemas educativos de bachillerato general y tecnológico, con dos modalidades: una de carácter propedéutico para la realización de estudios superiores y otra que además prepara a los estudiantes para desempeñar una profesión como técnico al egresar del bachillerato, respectivamente.

En el Estado de Yucatán, México, las instituciones de nivel medio han contemplado, en su objetivo y plan de estudios, nuevos planteamientos para contribuir a la formación integral de los jóvenes de bachillerato, que se ajusten a las necesidades laborales, del desarrollo sustentable, social, tecnológico y científico del país, como se plasma en el Modelo de la educación media superior tecnológica, en el 2004. Sin embargo, existe una gran brecha entre lo planificado y lo expresado en sus planes y programas de estudio. Al parecer los planteamientos realizados por las instituciones en materia de currículo matemático no se ven reflejados en el logro de sus objetivos, o quizá la organización y estructura que manejan no es coherente y consistente con éstos.

Dadas las implicaciones del currículo en la escuela y para la sociedad, así como la situación antes descrita nos preguntamos cuál será la orientación bajo la que se desarrollará el currículo de matemáticas del nivel medio superior a mediano plazo, con miras hacia el desarrollo científico y tecnológico de la comunidad. Para responder esta pregunta, se hace necesario realizar un análisis retrospectivo y circunspectivo del currículo matemático a fin de caracterizarlo mediante la identificación de sus transformaciones y los factores que han originado distintas tendencias en educación matemática.

El propósito de nuestro trabajo es dar una caracterización del currículo matemático de nivel medio en el Estado de Yucatán, en tanto su estructura y la orientación de sus componentes que nos permita obtener indicadores sobre su planificación, qué matemáticas estudiar y cómo hacerlo, así como sobre programas de formación de profesores. Este trabajo forma parte de la primera etapa desarrollada de un proyecto de investigación que lleva a cabo el grupo de matemática educativa de la Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, sobre un estudio del discurso matemático escolar en un sistema de bachillerato específico en el Estado.

Metodología

Con el propósito de caracterizar el currículo matemático en distintas épocas y estudiar sus alcances y limitaciones, analizamos la evolución del currículo de matemáticas de nivel medio superior empezando por las principales tendencias pasadas que se adoptaron, a fin de identificar sus finalidades, elementos y las causas que provocaron el surgimiento de las tendencias actuales; particularmente nos enfocamos en el análisis de las tendencias del currículo matemático desde los 70's hasta la época actual. Con base en este análisis retrospectivo y de las reformas curriculares que se implementan actualmente, se buscó proporcionar una perspectiva del currículum matemático a mediano plazo, con respecto a la orientación que tomará su organización y estructura, así como al tipo de matemática a estudiar y sus métodos para lograrlo.

El desarrollo del proyecto se dividió en tres etapas que consistieron en: realizar una investigación documental sobre el currículo escolar, la organización y finalidades de los subsistemas educativos de nivel medio y sobre demandas educativas, sociales, laborales, etc.; el análisis de tendencias curriculares pasadas en matemáticas;el análisis de documentos institucionales, planes y programas de estudio del área de matemáticas del nivel medio, de la reforma actual y anterior.

Se tomaron como referentes teóricos, estudios sobre desarrollo curricular y sobre problemáticas en la didáctica de las matemáticas.

Análisis retrospectivo del currículo matemático

Las matemáticas no son atemporales, pues son creadas por los seres humanos para responder a problemáticas sociales del mundo. Con lo anterior nos referimos a que el objeto matemático procede de la acción práctica sobre la realidad y surge de algo que tiene significado e implica una actividad real y valorativa para resolver problemas reales. Por ende, la enseñanza de las matemáticas se ha desarrollado con diferentes enfoques, ya que éstas responden a significados, circunstancias, épocas y contextos distintos.

La epistemología sobre las matemáticas y su enseñanza, ha presentado distintas concepciones a lo largo del tiempo, entre las que podemos mencionar al estructuralismo, mecanicismo, empirismo y realismo. Dichas concepciones han ido desde considerar a la matemática como una ciencia lógica–deductiva, caracterizada por un sistema deductivo cerrado y estrictamente organizado hasta considerarla como algo útil para la sociedad, lo que ha llevado a que, en términos de estructura y organización curricular, presente diferentes enfoques a nivel aula. Ejemplo de lo anterior es que hace algún tiempo, se presente a la matemática como un sistema axiomático que pasa por alto el razonamiento y que tiempo después empiece a tomar un carácter de herramienta para resolver problemas del contexto del estudiante.

El currículo se organiza, estructura y fundamenta con base en tendencias educacionales para determinada área del saber, en la epistemología de la disciplina, según las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, las políticas y corrientes filosóficas educativas de cada época, entre otros aspectos. En el caso de las matemáticas, diversidad de tendencias han orientado sobre qué matemáticas estudiar, la forma de abordar y tratar los contenidos, las estrategias de enseñanza, etc.

A continuación presentamos una caracterización de las principales tendencias del currículo matemático en las pasadas tres décadas en México, según las transformaciones identificadas en el análisis realizado:

70's - Currículo organizado alrededor de disciplinas tradicionales del conocimiento, haciendo énfasis en habilidades básicas para la comprensión de contenidos y procesos matemáticos y dando especial énfasis a la teoría de conjuntos, las estructuras algebraico-formales y a generalizaciones abstractas. (Enfoque estructuralista, con énfasis en el simbolismo). Se utilizó el análisis de jerarquías de aprendizaje como criterio para plantear objetivos perfectamente secuenciados desde una lógica disciplinar, forzando en el alumno un dominio lingüístico de la matemática. Secuencias de aprendizaje muy rígidas. El contenido a estudiar se evaluaba por el profesor mediante tareas y ejercicios. Las Matemáticas fueron vistas como una colección de saberes aislados sin ninguna conexión ni vinculación a otras ciencias (Armendáriz, et. al, 1993).

80's - Organizado en torno de la resolución de problemas. Se pretende que el alumno participe activamente en la construcción de los conceptos y procesos matemáticos, y no perciba la disciplina como simplemente contenidos estáticos o fijos listos para apropiarse de ellos. Es decir, el estudiante debía realizar actividades propias del quehacer de un matemático, discutir y analizar procedimientos para lograr la comprensión de los contenidos matemáticos y fortalecer en el alumno su habilidad para resolver problemas. Este tipo de enseñanza no está didácticamente estructurada, no se dispone de categorías y formas de acción previstas y queda mucho a la creatividad del docente y a la independencia y capacidad de los alumnos.

90's - Currículo rígido en el cual se aprecia primordialmente la secuencialidad de menor a mayor nivel cognoscitivo. Estructura curricular por asignaturas. Secuencia lineal en los contenidos. Enfoque formalista de la matemática, en el cual se le ve como la ciencia de la cantidad y la medida. Se basaba en la mecanización, en procedimientos deductivos y en la inducción (Mecanización Axiomática). Énfasis en los métodos expositivo y demostrativo.

Mecanización y ejercitación de algoritmos. El alumno se vuelve un mero receptor de los contenidos, se inhibe su iniciativa y capacidad de razonamiento del alumno.

La educación enfatizaba la necesidad de desarrollar capacidades y destrezas en los estudiantes, lo cual lo no se reflejaba en el desempeño de egresados.

Diferentes propuestas educativas y otras investigaciones reportaron que el currículo se encontraba desfasado en relación con las demandas y necesidades de los jóvenes en su comunidad, de los sectores productivos y de una sociedad en constante transformación, por lo cual era necesario un cambio ya sea en la organización de los cursos, en las estrategias de enseñanza, en las formas de evaluación y en los recursos materiales que se aplican para lograr los propósitos de cada una de ellas.

El currículo matemático en subsistemas de bachillerato general y tecnológico

Tras la necesidad del país por tener profesionistas, especialistas e investigadores capaces de crear, innovar y aplicar nuevos conocimientos en la sociedad en la que se vive, el gobierno planteó como objetivo en el Programa Nacional de Desarrollo 2001-2006, *"…atender el desarrollo de las capacidades y habilidades individuales -en los ámbitos intelectual, artístico, afectivo, social y deportivo-, al mismo tiempo que fomente los valores que aseguran una convivencia solidaria y comprometida, se forma a los individuos para la ciudadanía y se les capacita para la competitividad y exigencias del mundo del trabajo…"*, refiriéndose con esto a una educación de calidad.

En respuesta a lo expresado en el plan nacional de desarrollo y de educación, en el Estado de Yucatán, como en el resto del país, se llevaron a cabo reformas curriculares en el bachillerato. Se requería que la estructura, orientación, organización y gestión de los programas educativos, al igual que la naturaleza de sus contenidos, métodos y tecnologías respondan a los aspectos antes mencionados.

Presentamos una caracterización del currículo matemático en subsistemas de bachillerato general y tecnológico, a través del análisis de lo plasmado en las reformas actuales.

Currículo matemático	**Bachillerato General**	**Bachillerato Tecnológico**
Organización	Currículo con enfoque constructivista con cinco indicadores: Factores cognitivos y de autoaprendizaje, factores afectivos, factores evolutivos, factores sociales y diferencias individuales. Organizado en cinco niveles: básico o herramental, disciplinario, profesional, integrador y de elección libre.	Por módulos, en enfoques contemporáneos que lo conciben como: a) una estructura organizada de conocimientos, b) un conjunto de experiencias de aprendizaje, y c) una reconstrucción del conocimiento y propuesta de acción.
Estructura	Flexibilidad en la estructura. Seis semestres con una formación propedéutica general. Sus asignaturas son básicas generales (tronco común) y optativas. Secuencia lineal de contenidos, organizados de los más simples a los más complejos	Flexible. Formación básica (Tronco común) Formación propedéutica y Formación Profesional (antes, asignaturas conformadas por especialidades)
Caracterización	Matemática estudiada como herramienta metodológica, como lenguaje y como ciencia que permita a los alumnos entender y explicar su entorno, así como proporcionarles los conocimientos necesarios que contribuyan a su elección profesional.	La matemática es una herramienta que brinda elementos para el análisis de problemas que se encuentran relacionados con otras áreas específicas del conocimiento.

En los documentos institucionales sobre la fundamentación de las reformas se perciben planteamientos en los que se persigue un currículo que fomente una educación científico-tecnológica, humanística e integral, de manera flexible, basado en competencias y no en ejes temáticos. Se observa la pretensión de un currículo que motive a los alumnos través de contenidos útiles, mediante el trabajo cooperativo e individual, fomentar su creatividad e iniciativa y con habilidades en el uso de tecnologías de información y comunicación.

De modo que, en los planes y programas de estudio se esperaba que se especifiquen las metas en cada nivel y grado, en términos de valores, conocimientos, habilidades y actitudes, teniendo una organización interna práctica y flexible. No obstante, al revisar dichos documentos se encontraron inconsistencias con respecto a lo establecido en éstos y lo planeado y escrito en los documentos de la fundamentación, por ejemplo, no se hacen explícitas las habilidades socio-afectivas a promover en los estudiantes, ni la manera de evaluarlas. Así mismo, la tecnología aparece como un recurso didáctico más, no se hace explícita su incorporación al currículo como instrumento que propicie y vincule la construcción de conceptos matemáticos y el desarrollo del pensamiento matemático.

Reflexiones finales

El análisis de las transformaciones, deficiencias, consistencias e inconsistencias realizado para la caracterización de las tendencias curriculares y la consideración de investigaciones sobre educación matemática y su didáctica, nos permitió hacer una proyección del currículo matemático, en el cual se ven inmersos los siguientes aspectos:

Fines de la educación matemática. Contemplar en los objetivos y contenidos curriculares, el desarrollo de procesos del pensamiento matemático en los estudiantes, que los conviertan competentes en actividades que impliquen razonar, conjeturar, comunicar, representación de objetos matemáticos en distintos registros, modelación matemática, etc.; con el fin de que comprendan y valoren el papel de las matemáticas en la sociedad.

Organización transversal. Se requiere un currículo que responda a demandas sociales para la educación de individuos, tales como: formación en valores, actitudes positivas hacia el trabajo, la competitividad y el desarrollo intelectual (currículo transversal).

Las matemáticas como fenómeno cultural. Considerar en la organización del currículo los siguientes componentes: actividades y procesos para el desarrollo de las matemáticas en diversas culturas, tales como contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar que coadyuvan a desarrollar una tecnología simbólica de las matemáticas (componente simbólico, basado en conceptos); ejemplificación, mediante situaciones paradigmáticas, de los usos que hace la sociedad de las explicaciones matemáticas y su valoración (componente social, basado en proyectos); ejemplificación sobre cómo se generan las ideas matemáticas y demostración de la naturaleza de las matemáticas como cultura (componente cultural, basado en investigaciones), (Bishop, 1999).

Prácticas sociales. Considerar prácticas educativas que integren la funcionalidad de las matemáticas con el plano social, para lograr que en la sociedad el conocimiento se integre a la vida para transformarla y se resignifique permanentemente en ésta (Cordero, 2003).

Interdisciplinariedad. Implementar actividades que vinculen las matemáticas con otras áreas de las ciencias básicas, que muestren su funcionalidad y favorezcan la transferencia de conocimientos entre disciplinas.

La tecnología como mediación instrumental. Utilizar las computadoras y calculadoras como herramientas de re-organización cognitiva, lo cual involucra la transición de éstas tecnologías de herramientas a instrumentos matemáticos computacionales (Moreno, 2002).

Referencias bibliográficas

Armendáriz, M., Azcárate, C., Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las matemáticas y Psicología. *Infancia y aprendizaje,* 62-63, 77-100.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.

Canché, E. (2007). *Un estudio del currículo matemático en sistemas educativos de nivel medio, una visión prospectiva*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 16(1)*,* 73-78.

Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica. (2004). *Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica*. México: Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológicas.

OCDE (2003). Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) - nota de prensa para México. Recuperado el 20 de Mayo de 2007, de: http://www.oecd.org/dataoecd/47/6/39405624.pdf

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Proyecto incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia. Ministerio de Educación Nacional Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Colombia, 81-98.

Diario oficial de la federación. (2003). *Programa Nacional de Educación 2001-2006.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA*.* En Fundación Santillana (Ed.), *La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA* (pp. 21-40). Madrid: Editor.

LOS CONTENIDOS DE GEOMETRÍA EN TEXTOS OFICIALES Y SU TRATAMIENTO DIDÁCTICO

Martha Imelda Jarero Kumul, María Guadalupe Ordaz Arjona
Universidad Autónoma de Yucatán México
jarerok@uady.mx, oarjona@uady.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Básico

Resumen. *El taller fue dirigido a profesores de nivel básico, particularmente de primaria, con el objetivo de analizar y discutir la forma de abordar los contenidos de Geometría en los libros de texto que se disponen en México. La dinámica del taller incluye la resolución y discusión sobre actividades que involucran contenidos identificados de mayor dificultad, en profesores de dicho nivel educativo. En relación a las actividades, nos interesó que se identifiquen los contenidos involucrados en cada una, así como discutir en cuanto a la forma de enseñar y evaluar tales contenidos.*

Palabras clave: geometría, libro de texto.

Planteamiento del Problema

En el año de 1993 entró en vigor la reforma educativa en primaria en México y a través de la Secretaría de Educación Pública (SEP) se plantea como propósito que los niños adquieran una formación cultural más sólida y desarrollen su capacidad para aprender permanentemente y con independencia. Donde la función del profesor, en ésta filosofía educativa

> *"No es sólo transmitir información, sino, sobre todo, diseñar actividades a través de las cuales los alumnos se apropien de los conceptos matemáticos. Coordinar las discusiones en las que los alumnos participan e interactúan con sus compañeros para explicar sus procedimientos y validar sus estrategias, así como presentar ejemplos y contraejemplos, con el fin de cuestionar sus hipótesis y reflexionar sobre los problemas para replantear sus procedimientos iniciales, son también tareas indispensables para el buen logro de los objetivos del aprendizaje."* (SEP, 2000, p.10)

Para que tal finalidad se cumpliera, era indispensable disponer de libros de texto que correspondan a la filosofía educativa y que cada maestro llevara a la práctica las orientaciones del plan y los programas al tiempo que empleara los nuevos materiales educativos en forma sistemática, creativa y flexible.

Los libros de matemáticas editados a partir del año 2000, comprenden lecciones cuya resolución por parte de los alumnos favorece el uso de procedimientos informales y su evolución hacia el uso de instrumentos matemáticos cada vez más eficientes. En este escenario, el papel del maestro es fundamental para organizar el estudio, socializar los procedimientos de los niños, aclarar dichos procedimientos y vincular los recursos de los alumnos con los convencionales.

En una experiencia de capacitación y formación de profesores de primaria en el estado de Yucatán, en el área de matemáticas, concretamente en Aritmética, Geometría, Probabilidad y Estadística, realizado en el año 2004 en convenio con la Secretaría de Educación de dicho estado, detectamos a través de una prueba diagnóstica aplicada a 655 profesores, que éstos mostraban dificultades en el manejo de los contenidos geométricos.

La prueba diagnóstica se diseñó considerando los contenidos matemáticos que se estudian en primaria bajo el enfoque de situaciones problema, debido a que se pretendía identificar si los profesores podían aplicar sus conocimientos matemáticos en la resolución de problemas de la vida diaria; situación misma que se propone en la reforma educativa de 1993. El total de reactivos se distribuyó proporcionalmente según las áreas de estudio resultando de la siguiente forma: 53% para el área de aritmética, 36% para geometría y 11% en el caso de probabilidad y estadística. Los resultados de la prueba diagnóstica muestran que se responden correctamente el 76% de reactivos de probabilidad y estadística 61% de los reactivos de aritmética y tan sólo 46% de reactivos de geometría.

En la etapa de capacitación, detectamos que los profesores no logran apropiarse de la filosofía educativa antes descrita, ya que al implementar los textos en su práctica cotidiana de aula, siguen enseñando de manera tradicional y el uso del libro queda relegado a la evaluación del alumno <como un cuaderno de ejercicios> (Aparicio, Jarero, 2004). De allí la pertinencia de un taller donde se analice la forma de vincular los textos con la práctica docente. Nos enfocaremos particularmente en los contenidos de geometría, donde se reportó mayores dificultades conceptuales por parte de los profesores.

Objetivos del Taller

El taller dirigido a profesores de nivel básico, particularmente de primaria, tuvo como objetivos:

1) Determinar el tratamiento didáctico dado a los contenidos de Geometría en los libros de texto, entendiendo por ello, identificar los conceptos involucrados en las actividades planteadas y, analizar y discutir la forma de abordar dichas actividades,

2) Explorar si los profesores participantes presentaban dificultades en los mismos conceptos que reporta la prueba diagnóstica.

Elementos Teóricos

Si bien la Geometría es una disciplina estructurada de forma axiomática-deductiva, está íntimamente relacionada con la actividad humana. Aunque puede verse como la ciencia del espacio y de la forma, como una vía para el desarrollo del pensamiento. Más recientemente se reconoce la necesidad de fomentar un aprendizaje donde el alumno sea quien construya a partir del redescubrimiento de las matemáticas y teniendo especial importancia las conexiones de la matemática con otras ciencias como las naturales y las sociales.

Niss (1998), citado en Castiblanco (2004), sugiere enfatizar en los primeros niveles educativos en actividades de exploración, denominación, descripción, clasificación y representación de objetos concretos del plano y del espacio y explorar movimientos en el plano para acceder a nociones básicas acerca de las trasformaciones, la identificación de trayectorias y la ubicación espacial; es decir, enfatizar en una dimensión empírica de la geometría, que tiene que ver con la representación del espacio vital.

Por otra parte, tal como se plantea en los libros del Programa de Actualización Permanente (1997), las matemáticas deben ser para los alumnos una herramienta que ellos recrean y que evoluciona frente a la necesidad de resolver problemas. No se trata de aprender matemáticas para después aplicarlas a la resolución de problemas, sino de aprender matemáticas al resolver problemas. Esta concepción didáctica implica recuperar los significados de los conocimientos, contextualizarlos nuevamente, es decir, ponerlos en situaciones en las que éstos cobren sentido para el alumno, al permitirle resolver los problemas que se les plantean.

Es así, que este taller está basado en el aprendizaje de las matemáticas bajo la Resolución de Problemas.

Metodología implementada en el Taller

La dinámica propuesta para el taller se enfocó en dos aspectos principales: por un lado, la resolución de actividades que incorporan conceptos de geometría contempladas en el libro de texto de sexto grado, y por otro, la discusión en tanto los contenidos involucrados en cada actividad así como la forma de enseñar y evaluar tales contenidos.

El taller inició con la resolución de actividades seleccionadas de los libros de texto de *Matemáticas* de sexto grado de primaria que incluyan conceptos matemáticos donde se reportan haber tenido más dificultades los profesores en la prueba diagnóstica. La intención fue compartir con los participantes los materiales que se disponen en nuestro país para el trabajo de las matemáticas. En particular, después de haber resuelto las actividades nos interesó analizar el tratamiento didáctico, es decir, se discutió sobre qué contenidos matemáticos están tratándose en cada actividad y cómo pueden utilizar tales actividades en el aula, esto es, el momento adecuado para incorporar cada actividad, cuál es el objetivo mismo de la actividad, cómo se relaciona con la evaluación del aprendizaje y cuál es el papel del profesor.

Parte de una de las actividades del libro Matemáticas de sexto grado de primaria, se presenta en el Imagen 1; la cual se relaciona con el tema reportado como de mayor dificultad entre los profesores de primaria.

En un segundo momento, nos interesó compartir aspectos relacionados con la organización de los contenidos de matemáticas de primaria así como la perspectiva pedagógica en tanto el enfoque didáctico propuesto por la reforma de 1993, donde contempla el papel del profesor como quien se encarga de organizar el estudio, socializar los procedimientos de los niños, aclarar dichos procedimientos y vincular los recursos de los alumnos con los convencionales. Lo anterior, considera que el alumno se enfrenta a situaciones problema sin previa enseñanza y va perfeccionando sus propios procesos de solución en tanto que el maestro apreciará las distintas maneras de resolver el problema.

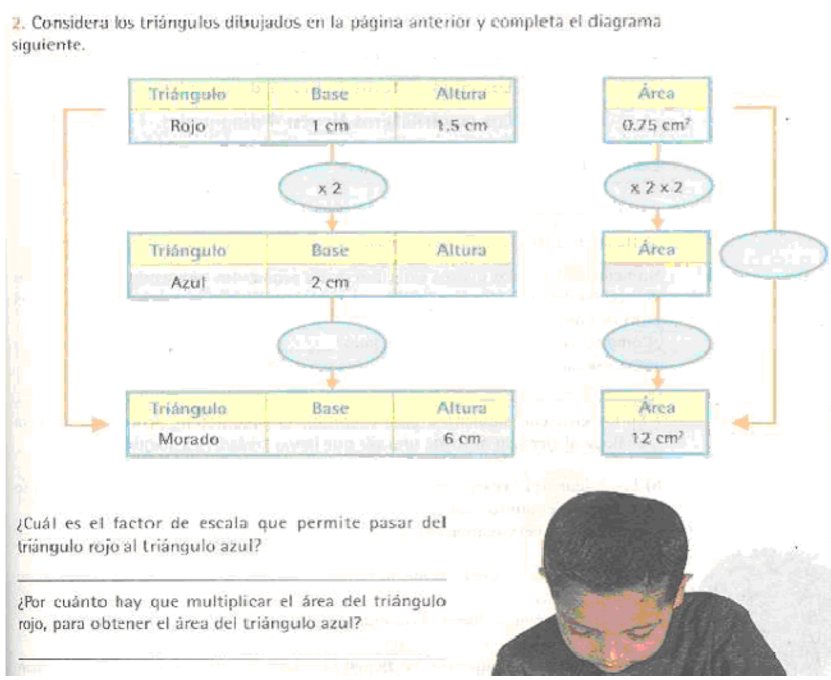


Imagen 1

Ante las reformas educativas, resulta importante considerar que los profesores requieren apropiarse de las nuevas formas de trabajo en el aula razón por la cual se ofrecen cursos de actualización. Sin embargo, Moreno (2003) reporta que en los cursos del Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica en Servicio, *"se mantiene la tendencia a privilegiar aspectos del eje "Los números, sus relaciones y sus operaciones"…".* Lo anterior concuerda con los resultados en la prueba diagnóstica, donde se reportan porcentajes más altos de respuestas correctas en el área de aritmética en comparación con las respuestas del área de geometría.

En un tercer y último momento del taller, los participantes resolvieron una actividad que incluía los reactivos correspondientes al área de geometría de la prueba diagnóstica. El interés radicó en identificar si entre los participantes se presentan las mismas dificultades que encontramos entre los profesores se primaria diagnosticados, mismas que se relacionan con los reactivos que se muestran en los Cuadros 1 y 2. Tales reactivos implican establecer relaciones entre los lados y el área de cuadriláteros y para los cuales se registran únicamente el 24% y 17% de respuestas correctas en la prueba diagnóstica aplicada a los profesores en Yucatán.

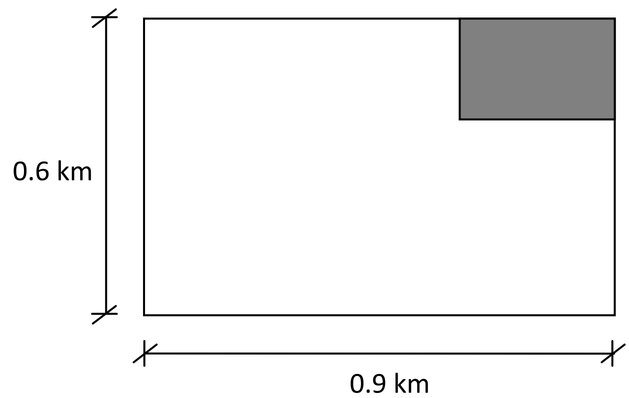
16. Don Fernando tiene un terreno rectangular cuyas dimensiones son 0.9 km de largo por 0.6 km de ancho. Un sobrino le pide que le venda una parte del terreno de manera que el largo y el ancho sean la tercera parte de los originales. ¿Cuántas hectáreas de terreno le quedarán a don Fernando después de la venta a su sobrino?

A) 48 ha

B) 36 ha

C) 0.48 ha

D) 0.36 ha



Cuadro 1

22. Dado un cuadrado se construye otro cuyos lados miden el doble del cuadrado original. ¿Cuál es la razón entre el área del cuadrado original y el cuadrado a escala?

A) 2

B) 1

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

Cuadro 2

Resultados del Taller

En cuanto a los contenidos propuestos en los libros, los profesores identificaron los conceptos involucrados en cada actividad y respecto a las formas de empleo de las actividades, se visualizan como elementos de construcción de los conceptos tratados, lo que implicaría su empleo como actividades introductorias al estudio de dichos conceptos.

Sin embargo, los participantes del país de Venezuela reportan que las actividades planteadas en los libros de texto que se discutieron se encuentran en un nivel elevado para los alumnos de su país, inclusive para los profesores. Esto está asociado con el hecho de que el currículo de aquel país aborda aspectos de álgebra desde el nivel básico.

Por otra parte, entre los participantes también se reportaron dificultades al abordar las relaciones entre los lados y el área de un cuadrado; al igual que aconteció con los profesores de Yucatán.

En general, se concluye que se requiere reforzar el dominio del contenido matemático por parte de los profesores del nivel básico, especialmente en lo referente a geometría. Sin embargo, el disponer de los libros de texto no resulta ser suficiente para llevar a cabo la implementación del modelo educativo propuesto ya que esto demanda cambio de concepciones y creencias respecto a la matemática misma y a las formas de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. Jarero, M. (2004). *Programa integral de apoyo para el desarrollo de las Matemáticas de sexto grado de primaria del Estado de Yucatán*. Trabajo de área no publicado. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Block, D.; Dávila, M. (1993). La matemática expulsada de la escuela. En Educación Matemática (3), vol 5. México

Castiblanco, A. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Ministerios de Educación Nacional. Colombia.

Moreno, M. (2003). *Estudio exploratorio. Primaria, Matemáticas.* Programa Nacional para la Actualización Permanente de los maestros de educación básica en servicio. Cursos estatales de actualización. Ciclo escolar 2002-2003. México.

Secretaría de Educación Pública (1996). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros.* Programa Nacional de Actualización Permanente. Dirección general de materiales y Métodos educativos de la Subsecretaría de Educación básica y normal. México.

Secretaría de Educación Pública. (2000). *Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Sexto grado.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

UN ESTUDIO SOBRE EL DISCURSO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS. SU RELACIÓN CON LA PRÁCTICA ESCOLAR

Mildred Maldonado, María Ordaz, María Rodríguez, Jorge Tuyub
Universidad Autónoma de Yucatán México
oarjona@uady.mx

Campo de investigación: Análisis del Currículum Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo se reportan los resultados de una investigación, consistente en un estudio de corte cualitativo, centrado en el análisis del Discurso Matemático Escolar presente en los libros de precálculo que son mayormente usados por los profesores de un determinado sistema de educación media superior. El objetivo de dicho trabajo fue caracterizar los usos de los libros en la práctica docente y analizar el Discurso presente en dichos libros, esto último a través del análisis del tratamiento dado al concepto de función. Consideramos importante un estudio de éste corte puesto que los libros de texto no sólo son los principales recursos o medios de difusión de los saberes matemáticos, sino que son los medios que de alguna manera norman el tipo de práctica docente y circunscriben el tipo de tratamiento y enfoque que se ha de seguir en los cursos.*

Palabras clave: usos, libro de texto, discurso matemático escolar

Introducción y objetivo

El Programa Nacional de Educación 2001-2006 y el Programa de Desarrollo de la Educación Tecnológica 2001-2006 formularon un diagnóstico de la situación del nivel medio superior y concluyeron en la necesidad de llevar a cabo una reforma curricular, la cual se basa en un modelo educativo usualmente conocido como constructivista. Particularmente, en los Colegios del Bachilleres del Estado de Yucatán (COBAY) dicho modelo ha ido implementándose paulatinamente desde el 2004, siendo que en la actualidad, todos los COBAY se rigen bajo este modelo educativo. Sin embargo, los problemas en el aprendizaje de las matemáticas en éste subsistema persisten, los resultados obtenidos por los estudiantes no son los deseados.

En la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) actualmente se desarrolla un Proyecto de investigación, cuyo interés se centra en el estudio del Discurso Matemático Escolar (DME), con el fin de generar entendimiento sobre cómo “vive” y se desarrolla la socialización e institucionalización de los saberes matemáticos en el dicho subsistema (COBAY). Al tener como fin analizar el DME no se puede dejar los libros de texto, ni la carencia de ellos en dicho subsistema, pues coincidimos con Rico (1990) citado en Ortiz (2002), en que uno de los factores que pueden hacer fracasar los intentos de cambio de un currículo de matemáticas, son los libros de texto, ya que "*la carencia de materiales y Libros de Texto adecuados a los nuevos currículos son en ocasiones obstáculos insalvables*".

Es así que como parte del proyecto de investigación antes mencionado, surge la necesidad de un estudio del DME presente en los libros mayormente usados por los profesores de los COBAY[2], considerando además que éstos, no son sólo un recurso o medio de difusión de los saberes matemáticos, sino que de alguna manera norman el tipo de práctica docente y circunscribe el tipo de tratamiento y enfoque que se ha de seguir en los cursos escolares. Es decir, el libro de texto es tanto una fuente que contiene plasmado el saber y el contenido a aprender, como también es un medio que dicta la actuación en un sistema educativo, lo que nos da una idea del impacto que el libro de texto presenta en el seno del salón de clases. Cabe mencionar, que para fines de este estudio, entenderemos el DME como la forma en que es comunicado o presentado de manera verbal o no verbal, explicita o implícitamente un mensaje matemático (Cordero, 2005).

La investigación

Nuestro trabajo tuvo como objetivos particulares: determinar cuáles son los usos que los profesores dan a los libros de texto y las razones que lo justifican y por otra parte, identificar cuál es el discurso matemático presente en los libros de texto del COBAY, así como determinar si el fenómeno de reproducibilidad esta presente en los Libros de Texto.

[2] Para fines de este trabajo, aquellos libros más utilizados por los profesores, serán los que llamaremos libros de texto.

Se consideró que la consecución de los objetivos antes mencionados, nos permitiría identificar y analizar aquello que se establece como discurso en los libros de texto de matemáticas, y generar entendimiento sobre los mecanismos de adaptación que sigue el conocimiento matemático y su relación con las prácticas escolares.

Elementos Teóricos y Metodológicos

Para la consecución de nuestros objetivos, nos apoyamos en la Socioepistemología en tanto aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

Se realizó un trabajo de corte cualitativo, concebido en tres etapas:

La primera etapa radicó en determinar cuáles son los libros que mayormente usan los profesores en sus cursos de precálculo (Matemáticas IV), cuáles son los usos que le dan a éstos libros y estudiar las razones asociadas a dichos usos. Para realizar el estudio, se contemplaron elementos cognitivos, epistemológicos, didácticos y socioculturales.

- Entendimos a las razones de los usos como epistemológicas en cuanto a la forma en la que los profesores creen que se construye el conocimiento matemático.
- Consideraremos razones didácticas en cuanto a la forma en la que se difunde, transmite e informan los contenidos matemáticos en los libros.
- Para analizar si las razones competen a factores cognitivos, nos preguntamos si los profesores consideran la cognición de los estudiantes al elegir los textos que utilizan, así como el diseño del propio libro, ya que éste tiene como respuesta procesos cognitivos en los estudiantes.

- Por último, consideraremos como razones socioculturales a los usos que obedezcan al consenso, a las costumbres o a normatividades.

En la segunda etapa, se realizó un análisis del DME presente en los libros de texto, en tanto el tratamiento dado al concepto de función en dichos libros; para ello, fue necesario describir los tratamientos que según los autores son útiles para su comprensión, a través de los factores presentes dentro del libro; se consideraron las siguientes unidades de análisis: revisión de notas previas, (prólogo, comentarios del autor, esquemas, entre otros), ubicación del tema de análisis, la manera en que es introducido el concepto, la argumentación (recurso "lingüístico" u de otro tipo, que da validez al objeto o concepto mismo) y los ejercicios propuestos.

Como antes ya se mencionó, se trabajó con la asignatura Matemáticas IV correspondiente a Precálculo y particularmente, en cuanto al tratamiento, nos ocupamos del concepto “Función”, debido a que es uno de los conceptos obligatorios en la educación del nivel bachillerato y de los más difíciles tanto para enseñar como para aprender (Dubinsky y Harel, 1992, citado en Farfán, et. al. 2003), además este concepto se aborda en la materia Matemáticas IV (Precálculo), que desde el punto de vista del sistema de la enseñanza, el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función (Farfán, et. al. 2003).

En la tercera y última etapa, se realiza una aproximación al estudio del fenómeno de reproducibilidad en los libros de texto, mirando a éste, como un objeto didáctico, que afecta el cumplimiento de los propósitos didácticos, y que facilita la observación de las posibles repeticiones de los múltiples factores que causan la reproducción del discurso matemático escolar contenida en los Libros de Texto al ser introducido en el sistema didáctico.

Basándonos en el trabajo de Lezama (2005), consideramos dos tipos de reproducibilidad, aquella llamada interna o implícita y la externa o explícita. Entendiendo cada una de éstas como se describe a continuación:

- **Reproducibilidad interna o implícita:** Se encuentra relacionada con la construcción de significado y aprendizaje de un contenido matemático, es decir, son las construcciones mentales que los individuos desarrollan como estrategias para enfrentarse a una situación que involucra un concepto matemático. Particularmente, para fines de este estudio, la consideraremos como aquella que esta relacionada con la construcción de un conocimiento matemático escolar en el libro de texto y cuya construcción del conocimiento se encuentra en el tratamiento que el libro ofrece sobre un concepto y que considera ideal.
- **Reproducibilidad externa o explícita:** Esta constituida por las publicaciones de los individuos, es decir, los comportamientos colectivos o individuales que se presentan a lo largo de la puesta en escena de una situación didáctica, los factores que aquí se presentan son fáciles de observar. En este caso, la consideramos como aquella que se puede observar en la propuesta que los autores presentan, es decir, son las consideraciones que el autor hizo para proponer los tratamientos que se presentan en su libro y que pueden o no contribuir a la construcción de aprendizaje significativo.

Para el análisis del fenómeno de reproducibilidad, se consideraros dos componentes de la socioepistemología: la cognitiva y la didáctica (ver Fig. 1):

- Consideramos que un tratamiento se reproducía cognitivamente si las demandas cognitivas para el estudiante son las mismas en ambos Libros de Texto, independientemente de los tratamientos que los libros están ofreciendo para un tema específico.

- Dijimos que un tratamiento se reproducía didácticamente si en la forma en que el autor comunica los contenidos matemáticos, es decir, si en el tratamiento que le da a los contenidos está normado por un mismo ideal, si la intencionalidad en ambos es la misma, si en ambos tratamientos se espera que los efectos producidos sean los mismos.

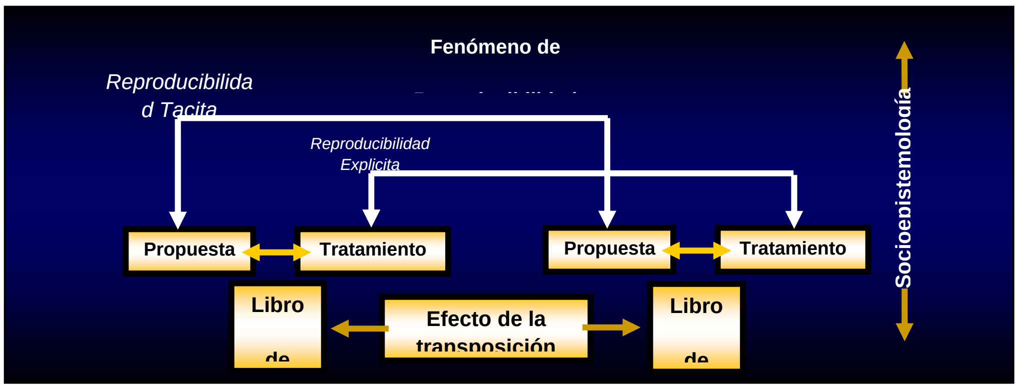


Fig. 1. Esquema de reproducibilidad sobre los Libros de Texto

Resultados

De los resultados de la encuesta se obtuvo que los tres libros mayormente usados son:

L1: *Stewart, James, et. al. Precálculo. International Thomson Editores*

L2: *Barnett, Raymond. Precálculo: Funciones y Gráficas. Mc Graw Hill*

L3: *Salazar Vázquez, Pedro, Et. Al. Matemáticas 4. Nueva Imagen*

Respecto a los usos dados a estos libros, se obtuvo que son: como fuente de información para preparar las clases, para seleccionar ejercicios y/o tareas para que el alumno resuelva en clase y/o fuera de la clase, durante la impartición de la clase y para elaborar exámenes.

Los tres libros, son libros que son utilizados por el profesor para la planeación de la clase, como apoyo o consulta, sin embargo, se resalta el hecho de que sólo el libro L3, es usado durante la impartición de la clase.

En cuanto a las razones que justifican los usos dados a los libros de texto, se encuentra que L1 y L2 son usados principalmente por que la institución lo demanda o porque sus compañeros se lo han sugerido, mientras que L3 no es un libro sugerido por la institución sino que es usado por consenso de los mismos profesores.

Respecto a L1 se mira que en su mayoría las razones de su uso se deben a aspectos socioculturales y epistemológicos. En cuanto a L2 las razones de su uso en gran medida son atribuidas a aspectos socioculturales y epistemológicos, pero también se percibió la influencia de aspectos didácticos y cognitivos aunque en menor medida. Por último, como ya se señaló, L3 no es un libro sugerido por la institución lo cual concuerda con que las razones de sus usos no se debieron a aspectos socioculturales, sino que predominan aquellos aspectos didácticos, considerando que se adapta más al programa del curso y a los objetivos del mismo.

En cuanto al análisis del DME presente en los libros de texto, después de analizar cada uno de los libros, pudimos observar aspectos invariantes en el tratamiento dado al concepto de función:

- La perspectiva del concepto de función, (…) como una relación o correspondencia entre dos conjuntos.
- Los libros buscan contextualizar al concepto, (…) al modelar fenómenos reales.
- Las representaciones del concepto: gráfica, analítica, algebraica, etc. (en ninguno de los tres libros se considera el transito entre uno y otro registro de representación, sino como cuestiones separadas).

Pese a los invariantes antes mencionados, L1 y L2 son libros dirigidos al profesor y no al estudiante, aunque los autores reconocen explícitamente que el enfoque que utilizan es de resolución de problemas, en el análisis implícito se mira que ambos lo entienden y tratan de diferente manera y por su parte L3 que mantiene un enfoque identificado como constructivista.

En cuanto al fenómeno de reproducibilidad, pudimos percibir respecto a lo cognitivo, que el fenómeno de reproducibilidad se encuentra presente en los libros de texto, en cuanto a que los libros presentan en el tratamiento del concepto de función las mismas demandas cognitivas para el estudiante, independientemente del enfoque o la estructura de su tratamiento, posibilitando, quizás, que la forma en que el concepto es apropiado por el estudiante sea la misma, creando en el las mimas noción del concepto “función” , estos libros exigen al estudiante: explicar, caracterizar, representar, analizar y comprender, entre otros.

Respecto a lo didáctico, se percibe que en cuanto a las formas de informar, en los tres libros, los autores se encuentran interesados en presentar al concepto en diversos tipos de representaciones, sin embargo, en cuanto a las formas de difundir, L2 y L3 resultan estar más adecuados al nivel del estudiante de acuerdo al vocabulario y que se trata de contextualizar los problemas en un ambiente conocido por los estudiantes mientras que esto se percibe ausente en L1, por otra parte, como ya mencionamos los tres libros mantienen diferente enfoque.

En base a lo anterior, pareciera ser que el fenómeno de reproducibilidad no se encuentra presente en la componente didáctica, o al menos con la metodología empleada para el estudio de este fenómeno no fue posible constatar su presencia.

Conclusiones

Este estudio nos permitió mirar que los profesores tienen las concepciones respecto a la necesidad de libros y/o materiales adecuados no sólo a los contenidos descritos en los programas del curso, sino a la filosofía educativa planteada en la reforma educativa, pero que su epistemología y los aspectos socioculturales, lo llevan a usar aquellos libros que no cumplen con ninguno de los dos aspectos mencionados.

Por otra parte, se mira que independiente de los enfoques de los libros y a quién estén dirigidos (profesor o alumno), los profesores les dan los mismos usos, esto es, aunque haya un libro que en gran medida se adecue a las necesidades antes planteadas, lo utilizan de la manera que podríamos llamar tradicional, es decir, el libro L3 pese a ser un libro con enfoque constructivista, dirigido al estudiante, es usado por el profesores como una fuente para seleccionar sus ejercicios, tareas, exámenes, etc. Aunado a ellos se percibe que aunque el tratamiento de los conceptos demanda al estudiante explicar, caracterizar, representar, analizar y comprender, etc. los usos que los profesores dan a los libros de texto, no permiten que el alumno se desarrolle cognitivamente en éste sentido.

Este primer acercamiento al fenómeno de reproducibilidad en los libros de texto, nos permite ver que los fenómenos didácticos no sólo se encuentran presentes en el aula, sino en aquellos dispositivos que son utilizados para la comunicación y difusión de los saberes; por lo cual, se motiva a realizar estudios más profundos al respecto, en los que se incluyan las prácticas de aula.

Referencias Bibliográficas

Barnett, R., Michael, R., Byleen, K. (2000). *Precálculo: funciones y gráficas.* (4ª ed.). México: Mc Graw Hill Interamericana.

Castañeda, A. (2005). Mecanismos para la Difusión del Discurso Matemático Escolar. En En G. Martínez, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, pp. 469-475). Clame, México.

Cordero, F. (2005). La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar. En G. Martínez, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol.18, pp 477 – 482). Clame, México.

Farfán, R.; Ferrari, M.; Martínez, G. (2003). *Lenguaje algebraico y pensamiento funcional.* México: Editorial trillas.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8(3) 339-362

Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada, España: Grupo de Educación.

Salazar, P., Callejas, L., Domínguez, H. (2005). *Matemáticas 4.* México: Nueva Imagen.

Stewart J., Redlin, L. y Watson, S. (2000). *Precálculo*. (3ª ed.). México: International Thomson Editores.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES: SECUENCIA DIDÁCTICA PARA SU ENSEÑANZA

María Rey Genicio, Clarisa Hernández, Silvia Porcinito
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Jujuy Argentina
tresm@imagine.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico y gráfico Nivel: Medio

Resumen. *Esta propuesta surge de un Proyecto de Investigación que se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo, que adopta como metodología para la investigación la «Ingeniería Didáctica» y que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. En este marco, se elaboró una secuencia de problemas que le permite al alumno construir los conceptos referidos a sistemas de ecuaciones lineales, en base a sus conocimientos previos sobre función lineal, rectas coincidentes, paralelas y oblicuas; armando un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto.*

Se han diseñado también una variedad de juegos que superan la ejercitación tradicional.

Palabras clave: secuencia didáctica, enseñanza, sistema de ecuaciones lineales

Consideraciones sobre la propuesta

El proyecto que da origen a esta Secuencia, se nutre teóricamente de las contribuciones de la Psicología del Aprendizaje y de la Didáctica. A continuación, nos referiremos con detalle a las contribuciones acerca de los procesos de aprendizaje, individuales y grupales, que provienen del marco psicológico. Los aportes de la Didáctica General y de la Matemática ("Ingeniería Didáctica" y "Teoría de las Situaciones"), que también sirven de fuente teórica, no se abordan aquí por estrictas razones de espacio, y pueden consultarse en las referencias bibliográficas y en otros trabajos de este Equipo de investigación.

Vale aclarar que es muy frecuente que los conocimientos acerca de cómo se aprende, construidos por la Psicología, se hayan traspolado al aula, aún cuando estos hayan sido fruto de investigaciones fuera de la escuela. Este no es un tema menor, ya que el aprendizaje en el aula se da en situación, o sea, en una institución con pautas determinadas, con prácticas docentes peculiares y con alumnos en particular. En este sentido, Bixio sostiene que algunas teorías de aprendizaje tienen un valor heurístico respecto a la problemática del aprendizaje pero que aún cuando sus aportes sean amplios y de calidad, eso no evita la necesidad de "*construir, a partir de las investigaciones pertinentes, las estrategias didacto-pedagógicas que la psicología no puede proporcionar. Por el contrario, nos obliga a ello*" (BIXIO, 1998, p. 14). Por ello la necesidad de que los conocimientos psicológicos se transformen en la práctica en estrategias didácticas, es decir, en el conjunto de acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica.

Hecha esta salvedad, desde nuestro Equipo, sustentamos la propuesta en los aportes de las Teorías Cognitivas, que en general entienden que el aprendizaje:

• requiere que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento

• es mediado por los procesos de pensamiento, de comprensión, y de dotación de significados.

Esta concepción supone que se pida al alumno dialogar, participar, discutir una idea con los pares, formular hipótesis, y ensayar interpretaciones, ya que no es posible que se construyan conocimientos relevantes si no se participa activamente en su construcción, o si no se es capaz de iniciar. (Las ayudas específicas son intervenciones externas que le permiten la comprensión del conocimiento y pueden ser generadas por textos, herramientas, pares y, principalmente, por el docente). Acciones que permitan plantear las dificultades apropiadamente y recibir ayudas específicas. El concepto de ayuda contingente o ayuda justa (Bixio, 1998) es el que sostiene la actividad de enseñanza. Supone que cada alumno requiere una intervención pedagógica diferente en cada momento del proceso de aprender, ya que cada sujeto es único, aún cuando la construcción de dicho proceso en la escuela sea social y cultural. Esa mediación a través del docente es crucial en el proceso de aprendizaje para las teorías sociocognitivas. Así, teniendo como base fundamental del aprendizaje la actividad de los alumnos, la acción del docente es intervenir aportando ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales los estudiantes puedan explorar, observar, y reconstruir conocimientos.

En esos esquemas se va articulando la nueva información, sea ésta aportada por el docente, los textos, los materiales o los mismos alumnos, con las acciones cognitivas que realizan los sujetos.

En suma, de la Fuente Psicológica, recuperamos las siguientes posiciones cognitivas: *el constructivismo psicogenético*, por su explicación acerca de los procesos individuales de construcción que se suceden en el sujeto que aprende; *la teoría socio-histórica de Vigotsky*, por su papel en la comprensión de los procesos de mediación propios del aprendizaje y necesarios para determinar el papel de la enseñanza y la relación entre pares; y *los tipos de aprendizaje según Ausubel,* porque caracterizan especialmente los tipos de aprendizaje que acontecen en el aula.

Desde esta misma fuente surge el concepto de Interacción Socio–Cognitiva, que sostiene que los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo. De allí que la propuesta presentada promueva el trabajo en grupos, favoreciendo estos intercambios. Sin embargo hay que insistir en que el docente debe supervisar atentamente el trabajo en grupo, buscando actividades pertinentes, favorecedoras de una tarea en conjunto, facilitando los intercambios de tipo cognitivo (no social), recuperando lo trabajado en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos, para que lo construido sea, efectivamente, el conocimiento académico esperado. (Bixio, 1998)

Propuesta didáctica

La secuencia se apoya en el conocimiento previo del alumno sobre función lineal, rectas coincidentes, oblicuas y paralelas. Comienza con una actividad donde se pretende que el alumno se familiarice con la simbolización de un enunciado y recuerde la representación gráfica de una ecuación lineal. Continúa con una actividad donde se ve la necesidad de plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (S.D.E.L.D.I);

luego, mediante los siguientes problemas, se aborda su resolución por el método gráfico y por el de igualación:

1− Susana va de paseo a Córdoba y decide recorrer distintos lugares de la capital. En la Terminal de ómnibus le entregaron 2 folletos con propaganda de empresas que realizan viajes en auto. La empresa "RAPITAXI" promociona sus servicios rápidos y económicos diciendo que cobra la módica suma de $0,75 por km. recorrido más un adicional fijo de $ 2,5. En cambio la competencia de esta empresa, "ECOTAXI", ofrece servicios confiables pagando tan solo $ 1 por km. recorrido y con un costo inicial de $ 1.

a) Si Susana quiere realizar un viaje de 4 Km. ¿qué empresa le conviene utilizar y cuánto debe pagar? ¿y si el viaje es de 10 Km.? b) ¿Cuándo saldrá lo mismo utilizar cualquiera de las dos empresas y cuánto debe pagar? c) Encuentra una ecuación que exprese el precio que deberá pagar Susana si utiliza los servicios de "RAPITAXI" y "ECOTAXI" respectivamente. d) Representa en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos ambas ecuaciones. e) Valida las respuestas de los ítems a) y b)

2 – En el problema anterior la empresa "ECOTAXI" decide bajar sus costos y ofrece el viaje pagando únicamente $ 0,75 por kilómetro recorrido.

a) Encuentra una ecuación que exprese el precio que deberá pagar Susana si utiliza los servicios de ésta empresa con la nueva promoción. b) Representa en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos la ecuación obtenida en a) y la que expresa el precio por los servicios de "RAPITAXI". c) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer Susana para que salga lo mismo utilizar cualquiera de las dos empresas? ¿a qué se debe que esto suceda?

3 – En una bandeja hay alfajores y bombones. Juan el "sabioloco" observa que si se quitan de la bandeja 3 alfajores quedan entre ambos 15 piezas y si se sacan 2 alfajores más, quedan 13 piezas.

a) Escribe las ecuaciones que permiten simbolizar cada una de las situaciones observadas. b) Representa gráficamente dichas ecuaciones. c) El "sabioloco" concluye que hay 7 *alfajores y 11 bombones, pero luego de pensarlo detenidamente concluye que hay 8 alfajores y 10 bombones. ¿Ayuda a Juan a encontrar la solución correcta?*

La secuencia continua con una actividad cuya intención es que el alumno se familiarice con la resolución de un sistema por el método de igualación y gráfico y resignifique lo aprendido anteriormente acerca de la ecuación de la recta.

Los primeros pasos para resolver un sistema por el método de reducción o de sumas y restas se dan resolviendo los siguientes problemas**:**

1 – En una librería Juan pagó $32 por la compra de una lapicera y 4 cuadernos iguales. En la misma librería Susana compró los mismos artículos que Juan pero llevó una lapicera y 2 cuadernos. Si Susana pagó $18 ¿cuál es el precio de la lapicera y de cada cuaderno?

2 – Se está ensayando la preparación de un perfume usando esencia de rosa y esencia de jazmín. Cuando se mezcló el contenido de 3 ampollas de esencia de jazmín con el de 5 ampollas de esencia de rosa se obtuvo 54,75 ml. de perfume "floral fuerte". Para obtener un perfume más suave se probó mezclar el contenido de las 3 ampollas de esencia de jazmín con 8 de esencia de rosa y se obtuvo 76,35 ml. de perfume "floral suave". A los efectos de comercializar ambos perfumes en envases del mismo contenido, se necesita conocer la capacidad, en ml., de cada tipo de ampolla.

Para obtener ecuaciones equivalentes se plantea el siguiente problema. Al hacer la puesta en común, el docente debe hacer explicito el conocimiento implícito del estudiante, para ello deberá institucionalizar las propiedades aplicadas.

1 – Susana compró 3 kg. de azúcar y 5 kg. de yerba mate y pagó $ 34. En el mismo negocio Juan compró los mismos productos que Susana pero llevó 1 kg. de azúcar y 2 kg. de yerba mate por lo que pagó $13. Con esta información completa los siguientes enunciados y luego simbolízalos.

a) 3 kg. de azúcar y 6 kg. de yerba mate cuestan ……………………………………….

b) 4 kg. de azúcar y 7 kg. de yerba mate cuestan ……………………………………….

c) 2 kg. de azúcar y 3 kg. de yerba mate cuestan …………………………………….

d) ½ kg. de azúcar y 1 kg. de yerba mate cuestan …………………………………….

e) 1 kg. de yerba mate cuesta …………………………………….

f) 1 kg. de azúcar cuesta …………………………………….

g) Con las respuestas obtenidas en e) y f) comprueba que se verifica el enunciado del problema y la respuesta dada en los ítems a). . . d).

El conocimiento logrado sobre la obtención de ecuaciones equivalentes se reinvierte en la siguiente actividad, donde la variable didáctica es la variación en los coeficientes de las variables. Al finalizar el ejercicio 3, se debe institucionalizar el método de reducción y al finalizar el 4, cuándo el sistema tiene solución única, cuándo no tiene solución y cuándo tiene infinitas soluciones. Se debe establecer la vinculación con lo visto anteriormente sobre solución de un sistema, ecuación de la recta y representación gráfica

1− Un grupo de alumnos está preparando los festejos del día del amigo. Lidia puso en una bandeja el contenido de un paquete de galletitas de chocolate y el de tres paquetes de galletitas de vainilla, en cambio Alicia puso en otra bandeja el contenido de dos paquetes de galletitas de chocolate y el de dos paquetes de galletitas de vainilla. Si en la bandeja que preparó Lidia hay 57 galletitas en total y en la que preparó Alicia hay 54 galletitas ¿cuántas galletitas tiene cada paquete?

2 – Una casa de regalos tiene preparados moños de dos tamaños distintos. Si sabes que tres moños chicos y dos grandes ocupan 4 metros de cinta y que dos chicos y ocho grandes ocupan 10 metros de cinta ¿cuántos metros de cinta ocupa cada tipo de moño?

3 – Si cinco personas van un al cine y tres van al teatro gastarían en entradas $88, mientras que si tres personas fueran al cine y dos al teatro gastarían $56. Averigua cuánto cuesta la entrada al cine y cuánto la entrada al teatro.

4 a) Para el desfile de carrozas, en la semana del estudiante, se confeccionan una cierta cantidad de flores iguales de color rojo y otra cierta cantidad de flores iguales de color *blanco (las flores rojas son de tamaño distinto al de las blancas). Miguel le dice a sus compañeros que él recopiló datos de años anteriores sobre la cantidad de flores que se pueden confeccionar con cada pliego de papel. Según afirma Miguel, 9 pliegos de papel crepé blanco y 6 pliegos de papel rojo, permiten confeccionar en total 345 flores y 3 pliegos de papel crepé blanco y 2 pliegos de papel rojo, permiten confeccionar en total 105 flores. Luego de conocer esta información, Carlos le dice a Miguel que los datos que obtuvo no pueden ser simultáneamente correctos. Utiliza el método de sumas y restas para determinar si lo afirmado por Carlos es cierto.*

b) Después de revisar sus estadísticas, Miguel dice que en realidad se equivocó al leer y que con 9 pliegos de papel crepé blanco y 6 pliegos de papel rojo se confeccionan en total 345 flores, pero que con 3 pliegos de papel crepé blanco y 2 pliegos de papel rojo se confeccionan 115 flores en total. Con esta nueva información Carlos le dice a Miguel que si quiere determinar cuántas flores se pueden hacer con cada tipo de pliego de papel, necesita más información. Utiliza el método de sumas y restas para determinar si lo afirmado ahora por Carlos es cierto.

c) Miguel, bastante abatido, revisa sus anotaciones y dice ¡Eureka! encontré un error en mis cálculos, la información correcta es que con 9 pliegos de papel crepé blanco y 6 pliegos de papel rojo se confeccionan en total 345 flores y con 3 pliegos de papel crepé blanco y 5 pliegos de papel rojo se confeccionan en total 175 flores. Ahora Carlos felicita a Miguel porque los datos son consistentes. Ayuda a Carlos a determinar cuántas flores se pueden hacer con 1 pliego de papel de cada color.

Con los conocimientos logrados a partir de la actividad anterior, se le pide al alumno que resuelva el sistema: $ax + cy = e$; $bx + dy = f$. Aquí se ve la necesidad de sistematizar las operaciones para determinar el valor de las variables; es en este momento donde el docente presenta la noción de determinante, su forma de calcularlo y la notación usada.

Para introducir el método de sustitución, se plantea el siguiente problema**:**

Beatriz y Amalia viajan, en auto, a una localidad de la Provincia de Tucumán. A fin de no cansarse, maneja un tramo cada una. Cuando llegan a destino, el cuentakilómetros marca que recorrieron 300 km. Sabiendo que Beatriz manejó el doble de km. que Amalia, a) Escribe el sistema de ecuaciones que simboliza la situación planteada. b) Sin usar los métodos vistos encuentra otra estrategia para determinar la cantidad de kilómetros que manejó Amalia y la cantidad de kilómetros que manejó Beatriz.

La última actividad tiene por objetivo que el alumno reinvierta todo lo aprendido sobre sistemas de ecuaciones lineales. Se incluye una gran variedad de ejercicios para que el docente, según el grupo de alumnos, seleccione aquellos que considere conveniente. Algunos ejercicios contienen datos innecesarios a fin de que el alumno sepa hacer la distinción entre los datos necesarios y los irrelevantes.

Finalmente se presenta una serie de juegos, cuya finalidad es practicar y afianzar los conceptos vistos. De los juegos propuestos, por razones de espacio, solo se incluye uno.

Rueda de sistemas

Bases del juego:

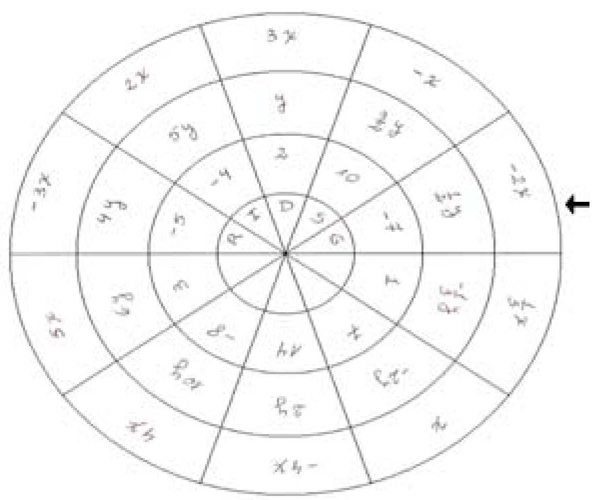
El objetivo del juego es resolver sistemas de ecuaciones y en él participan cuatro alumnos, uno de los cuales es el presidente. El presidente va rotando en cada tirada, el mismo podría ser el que está a la derecha del que tira. Cada alumno, cuando sea su turno, hace girar las cuatro ruedas y resuelve el sistema que se forma de la siguiente forma**:** una de las ecuaciones que se toma es la que indica la flecha, la misma se forma sumando la expresión que figura en el primer círculo con la que aparece en el segundo e igualando a la que está en el tercero. La otra ecuación es la que se forma tomando las expresiones en el sector opuesto. El método que se utiliza para resolver es el indicado en el cuarto círculo. El presidente es el que corrobora que la respuesta y el método usado son correctos. Para ello tiene 2 minutos. Si antes de que el presidente de un veredicto (respuesta correcta o no) alguno de los otros alumnos detecta que la respuesta no es correcta, se le adjudica 2 puntos.

Si el sistema está bien resuelto, se le otorga un puntaje que depende del tiempo que demore en resolverlo.

Si la respuesta no es correcta se le baja 3 puntos.

Gana el que mayor puntaje tenga al finalizar el tiempo estipulado para el juego.

Tiempo (min.)	Puntaje
$t \leq 2$	6
$2 < t \leq 4$	4
$4 < t \leq 6$	2
$t > 6$	0



Conclusión

Las actividades diseñadas responden a las "condiciones del buen problema": los enunciados tienen sentido en relación con conocimientos previos, todos los alumnos están en condiciones de dar al menos alguna respuesta para el problema inicial, admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (numérico, algebraico, funcional y gráfico). En toda la secuencia se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera que el conocimiento a aprender es el único eficaz para resolverlos; al mismo tiempo las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad.

En la implementación de este diseño los alumnos se comprometieron e implicaron en la tarea, valorando esto por permitirles dar significatividad al conocimiento

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1999). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. D. F., México**:** Grupo Editorial Iberoamérica.

Ausubel, David y otros. (1988) *Psicología Educativa.* D.F. México: Trillas.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Buenos Aires, Argentina**:** Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba, Argentina**:** FAMAF.

Camuyrano, M., Net, G. y Aragón, M. (2000). *Matemática I.* Buenos Aires, Argentina**:** Estrada

Castorina y Otros, (1998). *Psicología Genética*. Buenos Aires, Argentina: Miño y Dávila.

Castorina, José A. Ferreiro, Emilia y otros. (1997) *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate.* Bs. As., Argentina: Paidós Educador.

Coll, César (1991) *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Madrid. España: Paidós.

Davini, M. (1997). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía*. Buenos Aires, Argentina**:** Piados.

Garton y Pratt. (1991) *Aprendizaje y proceso de alfabetización*. Bs. As., Argentina: Paidós.

Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A. (1991). *Matemáticas, Bachillerato 1.* Madrid, España**:** Anaya.

Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R. y Diaz, B. (1999). *Matemática I*. Buenos Aires, Argentina**:** Santillana.

Larson, R.; Hostetler, R. y Neptuno, C. (2000). *Algebra Intermedia* (2ª ed.). D.F., México**:** McGraw–Hill.

Rodríguez, M. y Martínez, M. (1998). *Matemática 9.* Santiago, Chile**:** McGraw–Hill.

Vygotsky Lev. (1988) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona España: Grijalbo.

LA PRODUCCIÓN DE TEXTOS: UNA ALTERNATIVA PARA EVALUAR EN MATEMÁTICAS

Sandra Evely Parada Rico, Diana Jaramillo
Escuela de matemáticas, Universidad Industrial de Santander
saevpa@hotmail.com
Campo de investigación: Evaluación en matemáticas   Nivel: Básico

Resumen. *La evaluación, en este trabajo, es abordada desde una perspectiva formativa donde el educando es partícipe de su proceso de aprendizaje y el maestro es el "posibilitador" de experiencias y espacios de aprendizajes.*

"Producir un texto" quiere decir, de manera explícita y general, incentivar, desarrollar y ejercitar en el educando la capacidad de explicar y manifestar, mediante una información escrita u oral organizada, un concepto trabajado al interior del aula. La producción de textos, en el proceso de esta investigación, se realizó a través de la elaboración de cuentos, cartas, poesías, fábulas, entre otras expresiones que pudieran surgir del interés y creatividad del educando.

Palabras clave: producción de textos, evaluación en matemáticas, evaluación formativa, habilidades comunicativas.

Evaluación en Matemáticas

La evaluación de los aprendizajes escolares se refiere al proceso sistemático y continuo mediante el cual se determina el grado de optimización de los objetivos de aprendizaje. Ésta tiene una función primordial dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, pues por medio de ella se retroalimentan dichos procesos.

La evaluación en matemáticas ha venido replanteándose al interior del campo educativo. Entre estos replanteamientos se destaca que la Matemática debe permitir abordar diversas situaciones problemáticas, abierta para todos los educandos, centrándose en el proceso de hacer matemáticas, más que en considerar el conocimiento matemático como un producto.

Holmes (2002) plantea un paralelo entre los diferentes propósitos, filosofías y efectos en la enseñanza y el aprendizaje. Además, este autor señala cuatro propósitos de la evaluación, estos son: *formativo, diagnóstico, sumativo y evaluativo.*

Generalmente los educandos y maestros miramos hacia la naturaleza de las evaluaciones sumativas para deducir lo que es importante. Desde el punto de vista del evaluador, es claro que este escenario conduce a una clase de juego en el cual el estudiante está bajo la presión de obtener “buenas” calificaciones, y esto va en detrimento de la motivación del estudiante para lograr un conocimiento profundo de la materia (Holmes, 2002).

En este trabajo se busca rescatar la evaluación formativa, por esto se hace necesaria la construcción de instrumentos de evaluación que posibiliten el aprendizaje de la Matemática, estimulando el uso de la metacognición, dando énfasis en la evaluación por resolución de problemas y comunicación matemática en un ambiente de cooperación.

Por sus características, la evaluación formativa tendrá lugar al final de un tema, de una unidad o al término de una serie de actividades de cuyo buen logro dependa el éxito de actividades posteriores; ella tiene un papel de mucha importancia dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, se encarga de orientar la actividad a través de informes sobre la forma en que se van alcanzando los objetivos**.** Si la evaluación formativa señala que se van cumpliendo los objetivos, el maestro y los educandos tendrán mayor motivación para seguir adelante. Si la evaluación formativa muestra deficiencias o carencias en cuanto a los objetivos que pretenden alcanzarse, será tiempo de hacer las rectificaciones y ajustes necesarios al plan, para incentivar nuevamente a los educandos y para examinar si los objetivos señalados son los más oportunos para colocarse en esa precisa etapa del proceso de aprendizaje. También, en esta concepción de evaluación rescatamos dos aspectos importantes del proceso de evaluación: la autoevaluación y la heteroevaluación.

De esta forma, vemos en la elaboración y producción de textos la posibilidad de generar un ambiente crítico de trabajo, donde mutuamente —maestros e educandos— hacen observaciones y sugerencias. Observaciones y sugerencias que son asumidas con mayor receptividad, por parte de los educandos, si son planteadas por un compañero de clase.

La producción de Textos

La palabra "texto" viene del latín de las palabras *textum* y *textus* que significan entretejido, entrelazado, tejido**.** El verbo *texo* significa tejer, pero también escribir, componer una obra literaria, es decir, tejer o entrelazar palabras para producir una unidad (Porro, 2003).

El texto está íntimamente ligado a un contexto específico e individual que necesita del conocimiento general de los hablantes, es decir, se necesita tener conocimientos sobre la temática de que se desea hablar. Un texto es una unidad comunicativa, implicando que es individual y único (Porro, 2003).

Según esta autora, los textos poseen ciertos criterios comunes:

- Están compuesto de frases articuladas unas con otras.
- Se realizan mediante mecanismos de textualización y de enunciación destinados a asegurar su coherencia interna.
- Exhiben un modo determinado de organización de su contenido referencial;
- Están en relación de interdependencia con las propiedades del contexto en el cual se produce.

Cabe señalar que cada texto manifiesta características individuales y constituye un objeto siempre único. Aunque se inspire en modelos previos, cada producción verbal descansa en un conjunto de decisiones relativas a las modalidades de aplicación que elige el escritor; a partir de esas decisiones, el texto logra su aspecto definitivo y su estilo propio.

Retomamos de Luján y Suárez (1998) conceptos básicos, como:

¿Qué es producir un texto?

- Producir un texto es explicarse, es manifestarse.

- Es organizar información a partir de una necesidad.
- Es organizar información con un propósito.

¿Cuándo produzco un texto?

- Cuando cuento algo.
- Cuando escribo una carta, una poesía, etc.
- Cuando lleno un aviso, un cupón, etc.
- Cuando intercambio ideas.
- Cuando hago la lista de las compras del día.
- Cuando dejo en casa un mensaje escrito.
- Cuando escribo un libro.
- Cuando expongo el contenido de un texto.

La producción de textos hace parte del proceso comunicativo; aspecto este que, tal vez, poco se ha considerado en el área de matemáticas. Vale resaltar en ese sentido que en los lineamientos curriculares se recalca la importancia que tiene la comunicación en el área de matemáticas, ya que en ella se fundamentan los procesos de enseñanza y de aprendizaje que desarrollamos en el aula (MEN, 1998).

Se ha podido evidenciar que el proceso lúdico (en los educandos) permite ganar mayor acercamiento con los educandos a nivel afectivo y cognitivo. Es preciso que aprovechemos estos espacios también para evaluar porque de nada nos servirá desarrollar actividades de clase motivantes e innovadoras, en las que el educando quiera participar, si cuando vamos a evaluar nos volvemos al proceso tradicional de una prueba escrita, al juicio valorativo de la evaluación sumativa en la que no cabe el error.

Caminos para la Producción de un Texto

El camino para desarrollar la experiencia propuesta se inicia con una “actividad exploratoria” que consiste en la construcción de una producción escrita. El objetivo de dicha actividad preliminar es observar la actitud de los educandos frente al proceso de producir textos, además de darles a conocer el objetivo de la experiencia.

La temática debe abordarse normalmente durante las horas de clase establecidas, siendo necesario variar la metodología de enseñanza, utilizando, especialmente, el método por resolución de problemas, dado que permite que todos los educandos aporten sus puntos de vista construyendo la solución de una situación. Así mismo, este método, permite que sean ellos quienes planteen situaciones a sus compañeros y entre todos traten de resolverlas.

Al terminar el estudio de cada tema se pide a los educandos que construyan un texto en el cual expresen lo que han aprendido del mismo.

La selección de la expresión escrita se hace en común acuerdo con los educandos, con el fin de mantener su motivación. Al final del proceso sus producciones se socializan con el fin de que sus compañeros hagan las respectivas observaciones y sugerencias para, finalmente, hacer las respectivas correcciones. Cuando en el proceso de socialización se detectan dificultades a nivel grupal se hace oportuna una nueva explicación buscando, de esta forma, otras alternativas que facilitan la comprensión del grupo sobe las temáticas abordadas.

Observemos uno de los textos realizados por los educandos en el trabajo de investigación antes mencionado:

LA HISTORIA DE UN TRIÁNGULO TRISTE

Caminaba un triángulo por la calle un día, cuando tropezó con un grupo de amigos: el cuadrilátero, el pentágono y el hexágono.

La charla era amena en verdad; sin embargo, los amigos notaron un gesto de tristeza e intranquilidad en el triángulo y no pudieron dejar de preguntarle: ¿qué te pasa, porqué estás tan triste?, ya no eres el mismo.

Al principio el triángulo calló, no sabía exactamente cómo explicarles la causa de su intranquilidad, pero al final se las reveló: estoy triste porque carezco de diagonales y en cambio ustedes si tienen y hasta varias, argumentó el apelambrado triángulo.

Mas prontamente, sus amigos lo calmaron: eso no importa mucho, no es bueno estar comparándose los unos con los otros, anotó el pentágono.
Pero y bien, por qué te preocupas tanto si, en verdad, cada uno de nosotros tiene sus propias cualidades que seguramente otros carecen de ellas, dijo a una voz el hexágono, por ejemplo, tú tienes tres lados y de verdad que luces muy impactante, en cambio, yo me siento algo robusto con seis lados a cuesta, puntualizó la figura de los seis lados, mientras miraba con algo de envidia al puntiagudo triángulo.

Realmente sus palabras me tranquilizan, ya veo porqué es bueno que no todos seamos iguales, pues cómo podríamos hacer tantas cosas buenas para la gente si todos tenemos tres lados o tal cantidad de diagonales-.

Con estas palabras finales, el triángulo volvió a reír y, muy pronto, olvidándose del asunto, todos juntos retomaron la conversación y terminaron jugando al escondite de los polígonos. *(Diego Mauricio Olaya)*

Como se puede observar en este texto, el niño manifiesta su comprensión con respecto al tema de polígonos, conocimiento que es expresado de manera libre y espontánea, sin caer en pruebas con enunciados como: halle, ubique, resuelva o dibuje entre otras.

Es muy frecuente ver que la mayoría de los educandos sienten tensión en las épocas de evaluaciones; sin embargo, se percibe con mayor intensidad cuando se trata de matemáticas. Cuando se cuestiona a los educandos del por qué de ese temor, su respuesta apunta a que es la materia más difícil, por tanto la preparación para las pruebas del área requiere de mayor tiempo y dedicación.

¿Por qué la producción de textos es una alternativa para evaluar en matemáticas? Como es necesario que los educandos hagan algunos textos antes de hacer el texto de la prueba, podría pensarse en que los padres de familia pedirían apoyos particulares, pero en qué: ¿en lengua castellana o en matemáticas? La producción de textos es una alternativa porque no requiere la preparación tradicional; los textos son el reflejo de la comprensión que ha quedado fija en el pensamiento del educando de una idea o concepto. Cada producción es valiosa y única, nunca está mal o bien, más si está sujeta a observaciones y sugerencias. A través de estas producciones se desarrolla un proceso formativo donde se hace caer en cuenta del error conceptual para que se trabaje en la superación del mismo, trabajo que incluye, protagónicamente, al educando.

Es, entonces, mediante una producción de textos, cuando se pone en marcha la autoevaluación. El educando es quien autocrítica su trabajo, detecta falencias y propone alternativas de superación, ya sea con una consulta o una revisión bibliográfica, con la explicación del maestro o de un compañero y, si es necesario, del desarrollo de ejercicios que le permitan la fijación del concepto. También se pone en juego la idea de la heteroevaluación, pues son los compañeros del educando en cuestión quienes, antes que el maestro, hacen una revisión del trabajo realizado y sugieren correcciones, dando explicaciones, indicándole dónde está el error o simplemente sembrando la duda: "¿estás seguro que eso es lo que quieres decir?", o, "por favor, explícame con un ejemplo".

La producción de un texto le permite al educando el ejercicio de contextualizar el concepto, por eso es "más fácil" para él describir una situación que resolver ejercicios. No debe entenderse que estos textos carezcan de los algoritmos, necesarios para el desarrollo de la matemática, sino, complementariamente, que los algoritmos evidencien procesos de aprendizaje significativo para el alumno.

Existe una presión psicológicamente diferente para los estudiantes entre las evaluaciones formativas y las sumativas ya que son claramente distintas. Si la evaluación está para el sólo propósito de dar al estudiante y/o maestro discernimiento dentro de los niveles de entendimiento, con el propósito de mejorarlo, entonces no se necesitaría el sentido de juicio. Al respecto Deming afirma, según Holmes (2002): “tan pronto como hay una idea de sumativa -dar una calificación- el temor llega”. Este temor puede embargar a los educandos de diversas formas, y siempre va a estar presente aunque el maestro trate de manejarlo de forma que la evaluación sumativa no sea tan recalcante. Por ejemplo, una primera forma: el maestro puede pedirle al educando que se autoevalúe y, posteriormente, él dará el aval de esa autoevaluación para dar, finalmente, la evaluación sumativa; en este caso la evaluación formativa es muy escasa pues el educando se ha predeterminado al saber que el maestro será quien asigne la última palabra y reevalúe su autoevaluación. Una segunda forma: el maestro da la evaluación y, sólo después, le da participación al educando; en este caso, hay total tensión por parte del educando debido al papel secundario que juega su criterio.

La evaluación es un proceso que implica descripciones cuantitativas y cualitativas de la conducta del alumno, la interpretación de dichas descripciones y, por último, la formulación de juicios de valor basados en la interpretación de las descripciones. Evaluar mediante producción de textos no es cuestión de un momento, es un proceso.

Algunos de los aspectos que podrían evaluarse de las producciones de los educandos son, entre otros, la creatividad, el manejo del tema, la ejemplificación del tema.

Algunas reflexiones:

- La producción de textos, planteada como alternativa para evaluar en matemáticas, se constituye en una posibilidad más que nos permite favorecer los procesos de evaluación vistos desde el aspecto formativo y, principalmente, desde los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- La producción de textos es otra alternativa en evaluación que no requiere de la preparación tradicional; los textos son el reflejo de la comprensión que ha quedado fija

en el pensamiento del educando de una idea o concepto. Una producción no puede rechazarse declarándola correcta o incorrecta, pues ella está sujeta a observaciones y sugerencias. A través de estas producciones se desarrolla un proceso formativo donde se hace caer en cuenta del error conceptual para que se trabaje en la superación del mismo.

- La comunicación verbal y escrita es parte esencial del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas porque permite argumentar con sentido lógico, lo cual favorece el discurso matemático y desarrolla estructuras del sistema lingüístico que permiten la comprensión.
- La autoevaluación y heroevaluación es parte esencial del proceso de evaluación. A través de la producción de textos se evidencian procesos de autoevaluación, ya que el educando autocrítica su trabajo, detecta falencias y propone alternativas de superación.
- logros establecidos, pero sí es una herramienta que facilita el proceso de aprendizaje, y se evita los bajos resultados académicos en el área de matemáticas.

Algunas Sugerencias

- Socializar y publicar los textos construidos para que el educando mantenga su motivación e interés y sienta que su trabajo se está valorando.
- No olvidar que el objetivo del ejercicio de producir los textos como alternativa de evaluación formativa es hacer el seguimiento del aprendizaje en el área de matemáticas; por tanto, cada vez que sea necesario hay que parar y dar explicaciones pertinentes.

Referencias Bibliográficas:

Abrantes, P.(1995). *Evaluación en educación matemática.* Serie de reflexiones en educación matemática. MEM/USU-GEPEM.

Bogdan, R & Biklen, S. (1991). *Investigación cualitativa en educación.* Colección ciencias de la educación, Porto: Porto editora.

Holmes, P. (2002). *Enseñanza, aprendizaje y evaluación: categorías complementarias o conflictivas para las estadísticas escolares*, ICOTS.

Jaramillo, D. (2003). *Procesos metacognitivos en la (re)constitución del ideario pedagógico de licenciados en Matemáticas*, En FIORENTINI (org) *Formación de profesores de matemática.* Campinas: Mercado de letras Ediciones.

Luján, E. & Suárez, N. (1998). *"La producción de textos con el auxilio de la computadora*". Recuperado de http://www.cep.edu.uy./RedDeEnlace/TizayPizarron/RevMtros199/RevM199c.htm

Maciel, D. (2003). *A avaliação no processo ensino-aprendizagem de Matemática, no ensino médio: uma abordagem formativa sócio-cognitivista*. Tesis de maestría. Campinas: Editora da Unciamp.

Maciel, D. (2004*). Novas abordagens da avaliação para o processo ensino-aprendizagem de matemática: um olhar no ensino médio*, UFMA.

McKewen, C. (1998). *Teorías del desarrollo intelectual: Vygotski y Ausubel*. Fundación Alberto Merani para el desarrollo de la inteligencia, Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares del área de Matemáticas.* Bogotá, Colombia.

Porro, J. (2003). *"El texto, objeto complejo".* Revista CURZA, Recuperado el 1 de febrero de 2005, de www/curza.uncoma.edu.ar/materias/comprensionhiperv/ documentos/texto.htm.

Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México: Editorial Iberoamericana.

UNA CLASIFICACIÓN DE LIBROS DE CÁLCULO BASADA EN LOS PROGRAMAS DE CURSO[3]

María Rosado, Ángel Estrella-González, Belén Gamboa
Universidad Autónoma de Yucatán México
rocana@uady.mx, aestrel@uady.mx, lgamboa@uady.mx
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Presentamos los resultados de un trabajo realizado dentro de un proyecto de investigación sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. El objetivo consistió en identificar las relaciones entre libros y programas de Cálculo que se utilizan en los dos primeros semestres de las licenciaturas que ofrece la facultad. La metodología seguida es de corte cualitativo, basada en el análisis de objetivos y contenido de los programas; así como en los enfoques de los libros, para identificar la relación existente entre dichos elementos. Como resultados, se presenta una clasificación de libros para los cursos de Cálculo y se valida la influencia, en los programas de Cálculo, de los libros utilizados con mayor frecuencia por los profesores.*

Palabras clave: revisión de libros, enfoques, representaciones semióticas

Introducción y Objetivo

En lo que respecta a revisión de libros, es frecuente encontrar trabajos que presentan una crítica acerca de un libro específico o de manera más particular trabajos de investigación sobre las concepciones de conceptos matemáticos a la vista de lo que ha quedado reflejado en los libros de texto, tanto antiguos como modernos (Gómez, 2001).

En algunas revisiones de libros de texto de matemáticas se analiza el tratamiento que los autores de éstos dan a procedimientos, nociones y conocimientos de matemáticas (Marcolini, 2005) o por otro lado para entender las dificultades que muchos estudiantes tienen al pasar de la matemática de la preparatoria a la de la universidad, esto haciendo un análisis epistemológico de libros de texto con el objetivo de encontrar una posible fuente de ideas conflictivas (Raman, 2004).

[3] Este trabajo forma parte de un proyecto de Fondos Mixtos financiado por el CONACYT-Gobierno del Estado de Yucatán. Clave *Yuc-2004-C03-033.*

En este artículo se presentan los resultados de una revisión de libros y su relación con los programas de Cálculo (Licenciaturas, s.f.) que se utilizan en los dos primeros semestres de las licenciaturas que ofrece la Facultad de Matemáticas (FMAT) de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY). En esta revisión se analizaron los objetivos y contenido de los programas de Cálculo y los enfoques de los libros de texto, con el objetivo de identificar la relación existente entre los enfoques de los libros, los contenidos y objetivos de los cursos. En la sección 2 de este trabajo se describe el marco de referencia y la metodología utilizados para dicha revisión, en la sección 3 se propone la clasificación de los libros, basada en tres aspectos: el primero, considerando el tipo de representaciones matemáticas o enfoques usados para presentar los conceptos; el segundo, dependiendo del grado en el que se cubren los objetivos y el contenido; y el último, dependiendo tanto del mismo libro como del programa de curso, siendo esta clasificación la principal de este trabajo. Finalmente, en la sección 4 se presentan algunas conclusiones y comentarios finales acerca de los alcances y consecuencias de los resultados obtenidos.

Marco de Referencia y Metodología

Como marco de referencia de este trabajo, consideramos que esta investigación es de corte empírico, dentro del tipo de revisión objetiva, debido a que se llevó a cabo en una Facultad de Matemáticas en particular, con base en programas de Cálculo con características particulares y que, dado el objetivo de la actividad, no se cuenta con trabajos similares previos a éste como referencia de acuerdo a la metodología considerada. Asimismo, consideramos que este trabajo queda enmarcado dentro de la teoría de los registros de representaciones semióticas, ya que se parte del hecho de la importancia del uso de diversos tipos de representaciones (en este caso, nos referimos a diversos enfoques) para presentar los conceptos matemáticos.

La metodología seguida durante el desarrollo de este trabajo, consistió en realizar, primero, una revisión de los cuatro programas de Cálculo en cuanto a los objetivos y bibliografía correspondientes, para determinar los libros que serían seleccionados; posteriormente se elaboró una guía que nos ayudó a recabar la información necesaria de cada uno de éstos con respecto a sus enfoques (tabla 1) así como para determinar la coherencia en cuanto al uso de cada libro en cada uno de los cursos mencionados (tabla 2). Con base en todo ello, se realizó el análisis de la información y se llegó a la clasificación propuesta (tabla 3).

Desarrollo de la revisión de libros

1. Selección de Libros

La selección de los libros analizados se llevó a cabo después de una revisión de la bibliografía de cada uno de los programas de Cálculo mencionados anteriormente, en la cual se tomó en cuenta la opinión de profesores que los han impartido. Los libros seleccionados fueron los usados con mayor frecuencia por los profesores así como algunos adicionales sugeridos también por los profesores. Los libros analizados fueron los siguientes: Apostol, 1979; Cruse y Granberg, 1971; Haaser, 1970; Hughes, et. al., 2001; Lang, 2002; Spivak, 1988; Stewart, 1998; Strang, 1991; Swokowski, et al., 1994 . En lo siguiente, mencionaremos a estos libros usando solamente el apellido del primer autor.

De esta lista de libros, los que usualmente han sido utilizados en los cursos de Cálculo son el Apostol, Haaser y Spivak; adicionalmente, en los últimos años se ha utilizado con cierta frecuencia el libro de Stewart; los demás se han utilizado con menor frecuencia.

Para llevar a cabo la revisión de los libros mencionados, se elaboró una guía tomando en cuenta, por una parte, aspectos generales de cada texto: ficha bibliográfica, número de ejemplares en biblioteca, comentarios del autor de acuerdo al prólogo y el tipo de enfoque predominante que se describe en la sección 3.2; por otra parte, aspectos relacionados con el programa de cada asignatura: si se cubría el objetivo y el contenido del programa, si se conservaba el orden de unidades y temas o sí existían cambios relevantes. Para ello, se tomó en cuenta el análisis detallado de cada una de las unidades de los programas. Al término de la revisión de libros, se elaboró una tabla, para cada uno de los programas, que resume los aspectos generales de cada libro.

2. Clasificación de libros de acuerdo al enfoque

Los libros se clasificaron a partir de las formas en que se presentan, introducen y desarrollan los contenidos temáticos, de aquí la relación de los enfoques con la teoría de representaciones semióticas, ya que cada enfoque está determinado por los tipos de representaciones utilizados para presentar los conceptos; de esta manera, el tipo de enfoque que presenta cada libro fue el principal aspecto a considerar. Para ello, se optó por una clasificación de enfoques basada en la que se propone en el libro *"Cálculo"* (Hughes, et. al., 2001) que plantea una descripción de las características de cada enfoque. Dicho libro, en su primera edición, fue producto del trabajo del cuerpo docente en un consorcio de once instituciones y representa el primer consenso entre un grupo tan diverso tanto de matemáticos investigadores, como profesores. Los tipos de enfoques considerados son:

Enfoque teórico: Los temas son cubiertos a profundidad. Se indica cómo se formulan los axiomas, las definiciones, los teoremas y cómo se construyen las demostraciones. Se incluyen ejercicios desafiantes que guíen a los alumnos a que ellos solos construyan definiciones y demostraciones.

Enfoque sobre modelado: Se presenta el Cálculo como una herramienta para analizar el "mundo real". Los estudiantes pueden pasar el tiempo explorando a profundidad aplicaciones selectas del Cálculo.

Enfoque práctico: Se centra la atención en aumentar la destreza de los estudiantes en la mecánica de los conceptos mediante la resolución de ejercicios.

Enfoque intuitivo geométrico: Se recurre al uso de esquemas (bosquejos) y gráficas para ilustrar los conceptos.

Considerando la anterior clasificación, se realizó el análisis de los libros observando las características particulares de cada uno para identificar a qué enfoque o enfoques se apegaba, para ello se consideró la presentación de los temas, ejemplos resueltos, ejercicios propuestos, esto es, la estructura con la que se desarrollan los conceptos. En la Tabla 1 se presentan los enfoques de los libros revisados. Como puede observarse algunos libros no se limitan a un solo tipo de enfoque.

	Enfoque			
Libro	**Teórico**	**Sobre Modelado**	**Práctico**	**Intuitivo Geométrico**
Apostol	X			
Cruse		X		X
Haaser	X			
Hughes	X	X	X	X
Lang	X			
Spivak	X			
Stewart	X	X	X	X
Strang		X	X	X
Swokowski		X	X	X

Tabla 1. Enfoque de los libros revisados

3. Relación entre libros y programas

Para tener una visión clara de la relación entre los libros y contenidos de los programas, se realizó un análisis de los contenidos por unidad de cada programa y se determinó si era cubierto *totalmente o parcialmente (en mayor o menor grado)* en cada libro. Se considera que un libro cubre el programa: *totalmente* si aborda todas las unidades con la mayoría de las secciones correspondientes, cumple el objetivo del programa y los objetivos por unidad; *parcialmente en mayor grado (parcialmente +)* si aborda todas las unidades con la mayoría de las secciones correspondientes y cumple el objetivo del programa aunque no todos los objetivos por unidad; *parcialmente en menor grado (parcialmente -)* si aborda algunas unidades aunque no todas las secciones correspondientes y cubre parcialmente el objetivo del programa y los de unidad. En la Tabla 2, se resume la medida en que cada uno de los libros cubre los contenidos de cada uno de los cuatro programas analizados.

	Programa			
Libro	**Cálculo I**	**Cálculo Diferencial**	**Cálculo II**	**Cálculo Integral**
Apóstol	**Totalmente**	**Totalmente**	Parcialmente -	**Totalmente**
Cruse	Parcialmente -	Parcialmente -	Parcialmente -	Parcialmente -
Haaser	**Totalmente**	**Totalmente**	Parcialmente -	Parcialmente -
Hughes	Parcialmente +	Parcialmente +	Parcialmente -	Parcialmente +
Lang	**Totalmente**	Parcialmente -	Parcialmente -	Parcialmente -
Spivak	**Totalmente**	**Totalmente**	Parcialmente -	**Totalmente**
Stewart	Parcialmente +	Parcialmente +	Parcialmente +	Parcialmente +
Strang	Parcialmente +	Parcialmente +	Parcialmente +	Parcialmente +
Swokowski	Parcialmente +	Parcialmente +	Parcialmente +	Parcialmente +

Tabla 2. Relación entre libros y programas.

4. Clasificación basada en enfoques de Libros Y Programas de Cursos.

La Tabla 3 ofrece de entre el listado de libros analizados, una clasificación de cuáles podrían ser utilizados como libros de texto para cada uno de los programas, la cual se hace bajo la consideración de combinar los enfoques de modelado, intuitivo geométrico y práctico, cuidando que cubra el contenido del programa en un porcentaje relativamente alto. De igual manera, se sugieren como libros de apoyo aquellos que pudieran complementar el enfoque teórico o cubran solamente algunos temas del programa del curso correspondiente. Específicamente: consideramos como *libro de texto* al que presenta los enfoques de modelado, intuitivo geométrico y práctico de acuerdo a la tabla 1 y cubre en su mayoría los contenidos y objetivos del curso los cuales se encuentran en la tabla 2 con la clasificación de *totalmente* o *parcialmente +* ; en caso de que no cumpla alguna de estas dos restricciones le llamaremos *libro de apoyo*.

	Programa			
Libro	**Cálculo I**	**Cálculo Diferencial**	**Cálculo II**	**Cálculo Integral**
Apóstol	Apoyo	Apoyo	Apoyo	Apoyo
Cruse	Apoyo	Apoyo	Apoyo	Apoyo
Haaser	Apoyo	Apoyo	Apoyo	Apoyo
Hughes	Texto	Texto	Apoyo	Texto
Lang	Apoyo	Apoyo	Apoyo	Apoyo
Spivak	Apoyo	Apoyo	Apoyo	Apoyo
Stewart	Texto	Texto	Texto	Texto
Strang	Texto	Texto	Texto	Texto
Swokowski	Texto	Texto	Texto	Texto

Tabla 3. Libros que se sugieren como texto y apoyo por programa

Esta clasificación no debe interpretarse como una restricción a utilizar un solo libro durante la impartición de un curso; sino complementarse con algunos de apoyo y otros que propicien el uso frecuente de tecnología, lo cual no se incluyó en este trabajo ya que lo consideramos como una estrategia del libro para reforzar algunos conceptos y no propiamente un enfoque.

Conclusiones y comentarios

De acuerdo a la teoría de representaciones es importante tomar en cuenta los diversos enfoques para presentar los conceptos matemáticos para una mejor comprensión por parte de los estudiantes lo cual se considera para la clasificación de la Tabla 1. Adicionalmente, se debe tomar en cuenta la relación entre los libros y los programas presentada en la Tabla 2; por lo que se proponen como *libros de texto* aquellos que presentan diversos enfoques y cubren en mayor porcentaje el programa es decir se recomienda no basar un curso exclusivamente en *libros de apoyo* de acuerdo a la Tabla 3, a menos que entre ellos se complementen para cubrir las condiciones de *libro de texto* como se definió en la sección 3.4

Los programas de los cursos de Cálculo que se imparten en la Facultad de Matemáticas de la UADY presentan una fuerte influencia de los libros de texto utilizados con mayor frecuencia por los profesores que imparten dicha asignatura, estos libros son el Spivak y el Apostol, los cuales, de acuerdo a la Tabla 1, presentan sólo el enfoque teórico, por lo tanto no se complementan entre ellos de acuerdo a lo expresado en el párrafo anterior aunque, de acuerdo a la Tabla 2, cubren *totalmente* varios programas, por lo cual una de las recomendaciones del proyecto de investigación mencionado fue hacer los cambios adecuados en la bibliografía y en el uso de la misma en los programas correspondientes. Por lo anterior, podemos decir que el tipo de libros de texto, así como los programas de cursos, se pueden considerar como un posible factor que influye en el desempeño de los estudiantes y por consiguiente en las bajas y deserciones de los alumnos durante los dos primeros semestres de licenciatura.

Referencias bibliográficas

Apóstol, T. M. (1979). *Calculus*, Vol 1. México: Reverté.

Cruse, A. y Granberg, M. (1971). *Lectures on freshman Calculus.* Filipinas: Addison Wesley Publishing Company.

Garza, V. (2005) *Revisión de Libros*. En CUICyT, Mayo-Junio. Año 2, No. 8.

Gómez, B.; Puchalt, L.; Vivó, M.; Diez, P.; Pastor, C.; Jordá,M. y De La Rosa, J:P: (2001). El multiplicando y el multiplicador. ¿Es necesario distinguirlos? , ¿es indiferente?. En E. Placián y J. Sancho (EDS.). X *Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas* (X JAEM). Zaragoza. Pp. 605-609. .ISBN 84-7791-201-7, 84-7791-199-1

Haaser, N. B. (1970). *Análisis Matemático*, Vol 1. México: Trillas.

Hughes-Hallet, D. et. al, (2000). *Cálculo.* Segunda Edición. México: CECSA.

Lang, S. (2002). S*hort Calculus*. New, York: Springer & Verlag.

Licenciaturas, (s.f.). Obtenido en julio 03, 2006, de http://www.matematicas.uady.mx/programas/asignaturas/

Marcolini B. Perales F. (2005) La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria***.*** *Relime*, vol 8, Num 1, pp 25-68.

Raman, M. (2004) Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior* 23. pg 389-404.

Spivak, M. (1988). *Calculus infinitesimal*. México: Reverté.

Stewart, J. (1998). *Cálculo: trascendentes tempranas*. Cuarta Edición. México: Thompson.

Strang, G. (1991). *Calculus*. USA: Wellesley Cambridge Press.

Swokowski, E. W., et al. (1994). *Calculus.* Sexta edición. Boston: PWS Publishing Company.

CREENCIAS Y MATEMÁTICA: UN ESTUDIO DE CASOS

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr
Campo de investigación: Factores afectivos Nivel: Medio

Resumen. *El propósito de este reporte de investigación es el de compartir algunas creencias y concepciones de un profesor de matemática de una institución pública de enseñanza secundaria y de sus alumnos de décimo año acerca del tema de funciones y del uso de tecnologías digitales en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. La investigación desarrollada es de tipo cualitativo y los datos fueron obtenidos mediante la aplicación de varios instrumentos y la observación en el aula.*

Palabras clave: factores afectivos, funciones, tecnologías digitales, investigación cualitativa

Introducción y objetivo

En la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática, las investigaciones sobre la influencia de las creencias ocupan un lugar destacado (Gómez-Chacón, 2003, Moreno y Azcárate, 2003, Parra, H., 2005, Callejo y Vila, 2003,).

Los trabajos de McLeod (1988, 1992, 1994) han puesto de manifiesto que las cuestiones afectivas juegan un papel fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que algunas de ellas están fuertemente arraigadas en el sujeto y que no son fácilmente desplazables mediante la instrucción (Gómez-Chacón 2000).

Según Pehkonen y Törner (1996) "las creencias pueden tener un poderoso impacto en la forma en que los alumnos aprenden y utilizan las matemáticas y, por lo tanto, pueden ser un obstáculo al aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos que tienen unas creencias rígidas y negativas de las matemáticas y su aprendizaje, fácilmente se convertirán en aprendices pasivos, que cuando aprenden, enfatizan la memoria sobre la comprensión".

La importancia de las cuestiones afectivas ha sido puesta de relieve en los trabajos de Goleman (1996) que planteó una transformación dirigida hacia la "alfabetización emocional" orientada hacia la educación de los afectos, las emociones, las creencias y actitudes como determinantes de la calidad de los aprendizajes. La experiencia que tiene un estudiante al aprender matemáticas le provoca distintas reacciones emocionales que influyen en sus creencias, mientras que sus creencias influyen en su comportamiento en situaciones de aprendizaje y en su capacidad para aprender, haciendo con que la relación creencias aprendizaje sea cíclica. De igual forma, las creencias de los docentes acerca de la disciplina que enseñan, su enseñanza y aprendizaje, moldean las actividades desarrolladas en el aula.

Para Hersh (1986) las ideas que los docentes tienen acerca de las matemáticas moldean las actividades del salón de clases. El punto de vista de los profesores acerca de cómo se debe desarrollar la enseñanza de las matemáticas en el salón de clases depende de lo que piensen de la naturaleza de las matemáticas y no de lo que crean que debe ser el mejor método para enseñar.

Schoenfeld (1992) describe 4 categorías de conocimiento y comportamiento que aparecen involucrados en la actividad matemática de resolución de problemas y uno de ellos es el sistema de creencias. Schoenfeld considera que los sistemas de creencias son una particular visión del mundo de la matemática, la perspectiva con la cual cada persona se aproxima a ella y pueden determinar la manera en que se enfrenta un problema, los procedimientos que serán usados o evitados, el tiempo y la intensidad del trabajo que se realizará.

En esta investigación asumo que las creencias son parte del conocimiento subjetivo, pertenecen al dominio cognitivo y están compuestas por elementos afectivos, evaluativos y sociales formando un sistema, el sistema de creencias del individuo, un conjunto estructurado de grupos de visiones, concepciones, valores o ideologías (axiología) que posee un profesor con respecto al campo del conocimiento que enseña (ontología), a los objetivos sociales de la educación en ese campo (teleología), a la manera como este conocimiento se enseña y se aprende (epistemología) y al papel que tiene algunos materiales de instrucción dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje (metodología). Mi interés es el de investigar por un lado el sistema de creencias de un docente de matemática respecto a la naturaleza de las matemáticas, a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, particularmente el tema de funciones, a la utilización de recursos didácticos, principalmente las calculadoras, y la influencia que ellas tienen sobre los estudiantes. Además interesa determinar el sistema de creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y el uso de tecnologías digitales.

Como la investigación se centró en creencias acerca del concepto de funciones, los constructos teóricos acerca del tema de funciones que utilizo en la investigación fueron los de registros de representación (Janvier, 1987; Duval, 1993).

Problema de investigación

El problema de investigación consistió en determinar las creencias de un docente y de sus estudiantes respecto a las matemáticas y específicamente al tema de funciones en una institución de educación pública de Costa Rica.

Mi interés se centró en responder a las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las creencias del docente respecto a la enseñanza de las matemáticas?

¿Cuáles son las creencias de los estudiantes respecto a las matemáticas?

¿Cuáles son las creencias del docente respecto a la enseñanza del tema de funciones: procedimientos metodológicos que utiliza para enseñar, tipos de representaciones que emplea, uso de calculadoras?

¿Cuáles son las creencias de los estudiantes respecto al tema de funciones: la noción de función, tipos de representaciones más utilizados, uso de calculadoras?

Metodología

La estrategia utilizada en la investigación de tipo cualitativa fue el estudio de casos. El caso seleccionado fue una institución de educación pública: El Colegio Científico Costarricense de San Pedro. La población objeto de observación constó de 24 estudiantes de décimo y 30 de undécimo año de la educación diversificada, y el profesor de matemática básica de ambos grupos. Los 54 estudiantes y el profesor fueron observados en el aula durante las lecciones de matemática básica y el número de observaciones fue de 30 con duración de 90 minutos cada una, tiempo que corresponde a la duración de dos lecciones.

La principal técnica para recoger la información que utilicé en la investigación fue la observación participante. Para cada observación redacté notas crudas que posteriormente fueron reelaboradas en notas cocidas. Fueron aplicados dos cuestionarios a todos los estudiantes y realizadas dos entrevistas semiestructuradas al profesor investigado, además de entrevistas informales a estudiantes y administrativos de la institución. Las entrevistas al docente y algunas de las observaciones y un taller que compartí con los estudiantes fueron grabados en video y editados. También revisé los documentos relacionados con la creación de la institución, cuadernos de dos estudiantes y el libro de texto utilizado. Las estrategias utilizadas para el análisis de los datos fueron las sugeridas por Miles y Hubermann (1994): recolección de datos; reducción de los datos; despliegue de los datos y extracción y verificación de conclusiones.

Es importante resaltar que los resultados encontrados no pueden ser generalizados pues corresponde a una investigación de tipo cualitativa llevada a cabo en una institución particular de educación pública, pero los instrumentos utilizados son pertinentes para justificar los hallazgos reportados.

Principales hallazgos

Del docente acerca de:

1. Su rol como docente
    - Su tarea como profesor consiste en enseñar mientras que la de sus estudiantes es de aprender.
    - Su rol como profesor es el de un agricultor, un sembrador.
    - El buen profesor es amante del orden.
    - El buen profesor maneja el discurso en aula con propiedad y seguridad.
    - El buen profesor se desenvuelve bien frente a la pizarra.
2. Las matemáticas
    - La matemática no es difícil.
    - Se aprende matemática haciendo.
    - La memorización de fórmulas matemáticas es muy importante.
    - Enseñar matemática es como enseñar un lenguaje.
    - Aprender matemática es como aprender un lenguaje.
    - La matemática no es un lenguaje pero tiene su propio lenguaje.
3. El uso de calculadoras en el aula
    - La calculadora lleva al estudiante al tecnicismo.
    - Las calculadoras son amuletos, cajas negras, aparatos negros y son tontas.
4. La metodología
    - Más práctica implica más desarrollo de destrezas y habilidades en los estudiantes.
    - El texto desempeña un rol importante en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

- La cantidad de contenidos no es obstáculo para los estudiantes.
- La planificación de un curso no es tan importante. Es suficiente hacer una minuta o un esquema de lo que será visto en cada lección.
- Los cursos de educación no son tan importantes en la formación del profesor de matemática. La metodología se aprende al ejercer la profesión.
- Hay que vincular el contexto con el contenido programático.
- Los errores matemáticos evidencian un abordaje incorrecto del problema, un camino destinado al fracaso.

5. El tema de funciones
    - Énfasis en las representaciones algebraicas.
    - Preferencia por tratamientos en lugar de conversiones, es decir, se privilegia el trabajo dentro de un mismo registro semiótico de representaciones y no el cambio entre registros.

De los estudiantes acerca de:

1. Las matemáticas
    - Matemática: Es una herramienta
    - Una materia importante que produce satisfacciones y sentimientos de éxito
    - Un juego … no es aburrida
    - Una ciencia universal… origen de todas las ciencias
    - No es difícil pero … tiene fama de difícil
    - Produce sentimientos encontrados
2. El uso de calculadoras en el aula
    - Calculadoras: Una herramienta que no debe de ser utilizada

- Agilizan los cálculos que ya sabemos como hacerlos
- Facilita nuestra tarea y da seguridad
- No es necesaria y por lo general es inservible
- Las calculadoras graficadoras son de poca ayuda
- Quita la emoción de resolver los ejercicios individualmente
- Son herramientas que se tornan obsoletas
- Son un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas
- No hay que usarlas en los procesos de evaluación
- Tiene grandes potencialidades y secretos
- Puede ser útil si se utiliza correctamente

3. El tema de funciones
    - Las funciones son importantes y aplicables a la vida real
    - Es un tema interesante pero que no se enseña bien
    - Es fácil, importante … pero en el aula se enseña como si no fuera importante
    - Es complejo e implica la comprensión de muchos conceptos
    - Es un tema aburrido
    - Los problemas de funciones vistas en el aula no se relacionan con mi vida diaria
    - Los registros verbales y los algebraicos son los más importantes.
    - Las representaciones gestuales ayudan a comunicarnos
    - Es más fácil trabajar con el registro algebraico que con el gráfico

Conclusiones

Entre los hallazgos encontré una fuerte resistencia de parte del docente para utilizar tecnologías digitales debido a sus creencias respecto a lo que significa enseñar y aprender.

También comprobé una tendencia bastante generalizada hacia el uso de registros simbólicos y numéricos para tratar el tema de funciones. Utiliza metáforas para definir su rol como docente, y por sus creencias, se encaja perfectamente en la tipología de un profesor entrenador (Gómez y Valero, 1996) e instrumentalista (Ernest, 1988, Moreno y Azcárate, 2003), con rasgos de humanista (Gómez y Valero, 1996).

Considero que la preferencia del profesor por el registro algebraico concuerda con sus creencias acerca de las matemáticas: su aprendizaje requiere mucha práctica, disciplina y memorización. Este tipo de registro es bastante apropiado para desarrollar estas habilidades pues demanda un uso bastante amplio de algoritmos, habilidades para desarrollar operaciones simbólicas (factorización, simplificación, fórmulas para calcular raíces de ecuaciones, uso de prioridades de operadores matemáticos y de paréntesis entre otros), mientras que el registro gráfico requiere más de procesos constructivos a partir de tablas o de transformaciones de funciones prototipo (translaciones, dilataciones, simetrías entre otras).

Los estudiantes preferían trabajar individualmente y manifestaron un elevado grado de estrés cuando trabajaban con matemática. Sus creencias acerca al uso de calculadoras, por lo general, coinciden con las del profesor, lo que me permite inferir que las creencias del docente y su resistencia respecto al uso de calculadoras son reproducidas mediante la instrucción y sirven de modelo para sus estudiantes.

Los estudiantes privilegiaron los registros algebraicos y verbales. Algunos de ellos presentaron errores conceptuales al definir lo que entienden por función. Es evidente la influencia del libro de texto y de las creencias del docente sobre las de los estudiantes respecto a los registros de representaciones más utilizados, pues se espera que los estudiantes imiten y modelen a su guía y tutor, una característica fundamental del carácter reproductor de la educación tradicional.

Los estudiantes manifestaron que las aplicaciones acerca de funciones dadas por el profesor y las encontradas en el libro de texto, no se relacionan con sus vidas diarias, lo que me lleva a pensar que son aplicaciones bastante artificiales.

Referencias bibliográficas

Callejo, M., Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2, pp. 173-194.

Duval, R. (1993). Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5. IREM Strasbourg

Ernest, P. (1988). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for teaching,* 15(1), 13-33.

Goleman, D. (1996). Inteligencia emocional. Barcelona: Kairos.

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea, S. A. Ediciones.

Gómez-Chacón, I. (2003). La tarea intelectual en matemáticas: afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* Vol. X, No. 2, pp. 225-247.

Gómez P., Valero P. (1996). Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor. En Gómez, P., Mesa, V., Carulla, C., Valero, P., Gómez, C. (Eds.) *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México_ Una Empresa Docente/Grupo Editorial Iberoamérica.

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. En Tymoczko, T. (Ed.). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhauser, pp. 9-28.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

McLeod, D. B. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 134-141.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grows (Ed.). Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning (pp 575-598). New York: Macmillan.

McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (6), 637-647.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2ª ed.). London: SAGE Publications.

Moreno, M., Azcárate, G. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), pp. 265-280.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 8, No. 3, pp. 69-90.

Pehkonen, E., Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. ZDM, 96(4), pp. 101-108.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.* New York. MacMillan Publishing Company.

ACTITUDES GENERALIZADAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL MEDIO

Eduardo Canul Pech, Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán México
lalo_mat@hotmail.com, alanda@uady.mx
Campo de investigación: Factores afectivos Nivel: Medio

Resumen. *El siguiente estudio se enmarca en el dominio afectivo matemático, realizando un análisis de las actitudes, creencias y nivel de pensamiento de dos poblaciones específicas: una población de estudiantes activos cuyas edades oscila entre los 15 y 18 años y, una población de personas adultas que en algún momento estudiaron el bachillerato. Se concluye que ambas poblaciones presentan actitudes similares hacia la matemática escolar y existe una posible relación entre los dominios cognitivo-afectivo.*

Palabras clave: dominio afectivo, actitudes, creencias, niveles de pensamiento, matemática escolar

Introducción y objetivo

Las actitudes y creencias en general se ha mostrado son factores que inciden en el buen funcionamiento del sistema didáctico. La atención que se le ha prestado a las mismas no ha sido aún la suficiente, ya que como se menciona en Gil, Guerrero y Blanco (2006b) citando a otros autores, diversos estudios se han realizado sobre las actitudes hacia las matemáticas, sin embargo, son escasos los estudios sobre la dimensión afectiva y el aprendizaje de la matemática, más raros aún los relativos al estudio de las emociones.

La intención de nuestro trabajo fue estudiar las actitudes de las personas como cualidades que dan cuenta de la relación que se establece entre lo cognitivo y lo afectivo al momento de estar inmerso en un proceso de enseñanza y aprendizaje escolar.

Según Palmero (2003), hoy día se mantiene un debate sobre la pertinencia de estudiar la emoción como una disciplina independiente o si por el contrario, debe considerársele como inseparable de lo cognitivo y afectivo. Al respecto, trabajos como los desarrollados por Lazarus (1999), muestran en cierta forma que no es posible entender la dinámica conductual de un individuo si no es a partir de considerar la interacción entre la dimensión afectiva, la cognitiva y la emocional.

Así, a partir del estudio de las formulaciones multinivel, buscamos entender cómo el estímulo es percibido, evaluado y valorado, así como al conjunto de sus experiencias, entre la que merece especial atención, aquella que tiene que ver con las creencias y los niveles de pensamiento. De esta manera, se pretende generar un entendimiento en cuanto al papel de las actitudes hacia la matemática escolar (contenido, enseñanza, aprendizaje), si permanecen estables, se generalizan o evolucionan con el paso del tiempo.

Marco conceptual

El estudio del dominio afectivo debe ser un elemento de análisis en cualquier intento de conformar un currículo escolar o bien de reforma curricular. Pues como menciona Martínez (2005), la consideración de los variados factores que configuran el dominio afectivo en la educación matemática ha tenido tanta relevancia que últimamente ha sido considerado como clave para la descripción, el análisis, la comprensión o la explicación de muchas situaciones que suceden en el aula de matemáticas.

Para estudiar lo afectivo en el sistema didáctico, el salón de clases sin duda es una fuente primordial de información (Candela, 1999, citado en García, 2006). Al parecer, los docentes comparten la idea de que los alumnos poseen intereses regulados y actitudes similares hacia las matemáticas y su aprendizaje. Esto provoca que el trato hacia la población estudiantil se centre más en aspectos cognitivos (contenidos) que en los aspectos afectivos, sin establecer la relación bilateral entre ambos dominios. Tal hecho se puede deber a que los docentes poseen una cultura matemática influenciada por las creencias y conductas del entorno sociocultural, el cual abarca la familia, la institución o escuela y el entorno social en el que se desarrollaron (Mingüer, 2004).

De acuerdo con Sampieri, et al (1995) citados en Escalona y Boada (2001), las actitudes son sólo un indicador de la conducta en sí misma, por ello las mediciones de las actitudes se suelen interpretar como “signos” y no como hechos. Las actitudes están relacionadas con el comportamiento que mantenemos entorno a los objetos a que hacen referencia. Es decir, que si mi actitud hacia un contenido de aprendizaje en específico es favorable, probablemente logre obtener un aprendizaje significativo del mismo. En este sentido, en nuestro trabajo hemos considerado la *actitud* como un indicador de la conducta, posible de apreciarse a través del uso de ciertos signos discursivos (lingüísticos, gestuales) y formas de comportamiento en los individuos al momento de ser confrontados a situaciones específicas.

Al estudiar las actitudes de las personas, no se debe descartar que al generar dichos indicadores como parte de su distinción cotidiana, es necesario el uso de la cognición para discriminar entre aquellas actitudes pensadas como “buenas y malas”. Según Cantoral (1993), la cognición trata sobre el pensamiento humano en su acción por conocer, por lo cual, la investigación cognitiva busca desentrañar y comprender la mente humana. Sin embargo, el problema de dicha investigación radica en que su objeto de estudio –los fenómenos mentales- no es susceptible de observación pública. De ahí que se necesite inferir sobre datos poco fiables como la observación introspectiva o a partir de datos de naturaleza conductual, los que sin duda tendrán una fuerte dosis de circunstancialidad. Por su parte, Chacón (2000) citado en Martínez (2005), agrega que el fracaso escolar de los estudiantes no siempre se corresponde con su desarrollo cognitivo, indicando que las emociones juegan un papel facilitador, o debilitador en el aprendizaje de la matemática.

Nuestra investigación pretendió identificar el *nivel de pensamiento* (concreción, transición, formal) en que se encuentran determinadas poblaciones estudiantiles y no estudiantiles, al contrastarla con el nivel de pensamiento que mencionan las investigaciones precedentes, de tal manera que sea un referente para las actitudes que se generan a determinada edad. Para ello, nos basamos en los resultados obtenidos por

Nelmark (1975-1983) y Carretero (1980), citados en Iriarte, Cantillo y Polo (2000), quienes encontraron resultados que sitúan el nivel promedio de edad de aparición del pensamiento formal entre los 15 y 17 años, lo cual contradice las premisas teóricas de Piaget, en donde el desarrollo de las operaciones formales supuestamente tiene lugar entre los 11 y 15 años de edad.

De acuerdo con Iriarte, et al (2000), el nivel de *concreción* se caracteriza por trabajar eficazmente los conceptos y operaciones ligadas a la realidad pero no con las abstractas. Durante este nivel la capacidad de aprendizaje es limitada; lo que se aprende en un contexto no se transfiere fácilmente a otros. Por su parte, el nivel de *transición* se caracteriza porque las personas comienzan a desligar su pensamiento de lo concreto y a tender hacia un pensamiento deductivo, lógico y abstracto. Finalmente, el nivel *formal* se caracteriza por la capacidad de las personas para pensar y razonar fuera de los límites de su realidad y de sus propias creencias. El pensamiento empieza a apoyarse en un simbolismo puro y en el uso de proposiciones antes que en la realidad.

Gómez-Chacón (2000) citado en Gil, et al (2006a), afirma que la abundancia de fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, en diversas edades y niveles educativos, puede ser explicada, en gran parte, por la aparición de actitudes negativas debidas a factores personales y ambientales, cuya detección sería el primer paso para contrarrestar su influencia negativa con efectividad, aspecto que reafirma Martínez (2005), al mencionar que los altos índices de fracaso escolar en el área de matemáticas exigen el estudio de la influencia de factores afectivos y emocionales en el aprendizaje matemático.

En esta investigación partimos de la idea de que las actitudes dominantes en determinada sociedad se debe a un sesgo ideológico de influyentes afectivos -actitudes, creencias- y niveles de pensamientos presentes en la cultura que la población mayoritaria transmite a las minorías, debido a que los afectos y el actuar de los individuos provienen de la relación con las demás personas, provocando que diversas nociones, ideas y representaciones del exterior se incorporen al repertorio de pensamiento en los individuos. Así mismo, como mencionan estudios realizados por Meece, Wigfield y Eccles (1990); Wigfield y Meece (1988); Armstrong (1985); Meece, (1981); Richardson y Woolfolk (1980), citados en Gil, et al (2006a), existe una gran coincidencia entre numerosos autores al señalar que las mujeres se comportan con mucha mayor ansiedad ante las matemáticas que los varones, de tal manera que las actitudes y las reacciones emocionales de los estudiantes hacia las matemáticas y su aprendizaje varían en función del género.

Martínez (2005) menciona que cuando se enseña o se aprende matemáticas, existen muchos factores que delinean el afecto que se produce hacia esta área del saber o hacia los procesos ligados a ella; factores que están fuertemente arraigados en los sujetos, responsables de muchas de las acciones y comportamientos ante objetos involucrados en dicho proceso que definen un dominio que incluye, según Lafortune y Saint-Pierre (citados en Gómez-Chacón, 2000) actitudes, valores, comportamiento moral y ético, emociones, sentimientos, atribuciones, motivación y desarrollo personal y social. Empero, admiten que las creencias, las emociones y las actitudes serán los factores considerados como los componentes básicos del dominio afectivo, precisando cuatro componentes o dimensiones actitudinales: Cognoscitivo, Afectivo, Conativo o Intencional, y Comportamental.

Con estas breves consideraciones es notoria la interconexión que existe entre la educación matemática y factores del dominio afectivo tales como las emociones, las concepciones, las creencias y las actitudes hacia la matemática, sobre todo cuando se hace referencia al fracaso escolar.

Método de investigación

Para llevar a cabo el estudio optamos por un método cualitativo debido a que nuestro propósito era dar cuenta de las actitudes presentes en las personas hacia la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Vislumbrar la inclusión del dominio afectivo en el sistema didáctico y percibir algún posible nexo con el dominio cognitivo entre las poblaciones entrevistadas.

Dentro de la estrategia a seguir en la investigación, optamos por analizar las actitudes, creencias y niveles de pensamiento que poseen los estudiantes de tres colegios educativos entorno a la matemática que es enseñada en sus institutos. Consideramos también una población de personas adultas no profesionales pero que en algún momento habían cursado su bachillerato. La idea básica con respecto a esta última población era tener un referente para determinar si los afectos presentes en el bachillerato -a una determinada edad- perduran en este tipo de población algunos años después de haber egresado de dicho nivel educativo. Ello nos permitiría, en primera instancia, identificar el tipo de "cultura" atribuida a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, para a partir de ello identificar algunos factores o mecanismos que forjan dicha culturalización y posteriormente dar cuenta de la necesidad de promover una verdadera cultura matemática, Miguez (2004).

La recolección de información se realizó con un cuestionario para discriminar los afectos, en éste caso, las actitudes y creencias, así como los niveles de pensamientos que entorno a la matemática escolar presentan ciertas poblaciones. Dicho cuestionario estuvo conformado por veinte reactivos, ocho reactivos de opción múltiple dirigidos a las creencias y pensamientos, y doce reactivos cerrados dirigidos a las actitudes de las personas.

Resultados

La manera de analizar las respuestas en primera instancia, fue por cada uno de los tres planteles educativos, a su vez, en cada plantel se realizó un estudio por separado conforme al género: masculino-femenino. Al final se agruparon las aportaciones de cada plantel en cuanto a las actitudes, creencias y niveles de pensamientos presentes en los alumnos entorno a la matemática, su enseñanza y aprendizaje[4]; a continuación describimos lo obtenido.

Los datos obtenidos muestran que entorno a la matemática como ciencia, la mayoría de los estudiantes (ambos géneros), presentan un *nivel de pensamiento transitorio*, pues las conciben como un conjunto de operaciones a desarrollar indispensables en la vida cotidiana. De esta manera, nuestros resultados indican que los estudiantes no se ubican en un nivel de pensamiento acorde a su edad.

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, notamos que la mayoría de los alumnos ostentan un *nivel de pensamiento formal*, conciben la enseñanza como un acto instruccional asociado al desarrollo de la habilidad de razonamiento, lo cual diremos, da indicios de que se encuentran en un nivel acorde a su etapa cognitiva. Respecto al aprendizaje de las matemáticas, los jóvenes estudiantiles se ubican en un nivel divariado *transición-formal* de pensamiento, puesto que lo relacionan con la capacidad de aplicar conocimientos y procedimientos matemáticos en la solución de problemas propios de la cotidianeidad.

Respecto a la población adulta, se determinó que hacia la matemática, su enseñanza y aprendizaje, los hombres presentan un nivel de pensamiento divariado transición-formal mientras que las mujeres revelan un nivel formal de pensamiento. Al contrastar los datos presentados entre la gente adulta y los estudiantes, notamos ligeras diferencias; la principal es que mientras las mujeres mantienen un nivel de pensamiento más desarrollado después de su egreso del bachillerato, los varones adultos no muestran modificaciones en sus niveles de pensamiento. Advertimos que un posible factor en cuanto al nivel de pensamiento, se puede imputar al género, atribuido al grado de madurez cognitiva alcanzada a determinada edad.

[4] Los datos recabados fueron agrupamos en tablas para realizar el análisis.

Al estudiar los atributos que ambas poblaciones otorgan a sus *creencias* entorno a la enseñanza de las matemáticas, resaltamos el hecho de que depositan la mayor responsabilidad en la labor del docente como agente didáctico y a los métodos, técnicas y recursos que éste utilice en sus clases. En relación con el aprendizaje de las matemáticas, atribuyen mayor compromiso al esfuerzo y dedicación que se realice en forma individual.

Los resultados presentados en cuanto a las *actitudes* en los tres planteles educativos fueron muy similares, señalamos se percibe un predominio en actitudes positivas por parte de la totalidad de alumnos analizados, sin embargo, todavía se manifiesta cierta predisposición conferida al contenido matemático.

Las actitudes brindadas a la enseñanza, aprendizaje de las matemáticas resultaron favorecedoras, al manifestar su interés por los temas que se imparten en las clases de matemáticas, que en complemento con sus creencias validan un nivel formal de pensamiento otorgado a la enseñanza de la matemática. Por su parte, las actitudes otorgadas a la matemática como asignatura fueron desfavorables al atribuir en su mayoría que son una de las "materias" más temidas, que esperan utilizar poco en su vida laboral/profesional y que existen otras asignaturas más importantes que se imparten en el bachillerato, aspecto que se puede reflejar en el nivel de pensamiento transitorio otorgado a la matemática.

La población adulta manifestó resultados similares, mostrando actitudes negativas hacia la matemática como ciencia y otorgando actitudes positivas a la enseñanza, aprendizaje de las matemáticas.

Conclusiones y reflexiones

En el análisis nos percatamos que tanto estudiantes como la gente adulta presentaron una cantidad mayor de actitudes favorables hacia la matemática escolar, empero, expresaron cierta predisposición hacia la matemática como ciencia, que desde nuestro punto de vista son promovidos por factores externos a lo escolar. Dichas predisposiciones pueden provenir de la herencia cultural que la sociedad ha concedido a las matemáticas como un conocimiento complejo y difícil, del que solo se conocen sus nociones básicas (sumar, multiplicar, restar y dividir).

A pesar de que la población total analizada manifestó más actitudes positivas que negativas, es importante mencionar que los resultados no siempre favorecieron los supuestos mencionados de que las mujeres se comportan con mayor ansiedad que los varones. Consideramos que la potencialización de las actitudes positivas será un aspecto determinante en miras de una mejor enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Dentro del análisis de resultados es de resaltar que las personas con actitudes positivas, en su mayoría reflejaban un nivel de pensamiento formal, no así las personas con actitudes negativas, cuya mayoría presentaba niveles de pensamiento concreto o transitorio. Con ello, las actitudes resultaron ser un elemento calificativo de afectos hacia la matemática escolar que permitió establecer vínculos entre los dominios afectivo y cognitivo, estableciendo relación con los resultados establecidos por Weiner (1992) citado en Gil, et al (2006b), donde menciona que el tipo de atribuciones que realiza el alumno tendrá repercusiones tanto a nivel cognitivo como a nivel afectivo-emocional, lo que determinará su motivación y su grado de implicación con la realización de las actividades matemáticas.

Los contrastes mencionados entre la gente adulta y los estudiantes reflejan la actual realidad que vive nuestra sociedad; donde la cultura matemática generada, a nuestro parecer, ha favorecido los fracasos en el aprendizaje de las matemáticas y la deserción académica dentro de los sistemas educativos. Finalmente, creemos que para mejorar la enseñanza, aprendizaje de la matemática se necesita nivelar prioridades otorgadas a los dominios cognitivo y afectivo, sin perder la esencia de los objetivos planteados en el currículum matemático escolar.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones centroamericanas. 7*. 391-410.

Díaz, F. (1992). *Ensayos sobre la problemática curricular*. México: Trillas.

Escalona, J., Boada, D. (2001). Evaluación de actitudes ambientales de ciencias. *Educare. 5*(15).

García, A. (2006). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago de cálcul*o. Tesis de licenciatura no publicada. UADY. México.

Gil, I., Blanco L., Guerrero, E., (2006a). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*. *340*. 551-569.

Gil, I, Guerrero, L., Blanco L., (2006b). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa. 4* (1). 47-72.

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. España: Narcea, S.A. Ediciones.

Iriarte, F., Cantillo, K., Polo, A. (2000). Relación entre el nivel de pensamiento y estilo cognitivo dependencia-independencia de campo en estudiantes universitarios. *Psicología desde el Caribe. 5*. 176-196.

Lazarus, R (1999). The cognition-emotion debate: a bit of history. En T. Dalgleish y M. Power (eds.): Handbook of Cognition and Emotion. 3-19. Chichester: Wiley.

Martínez, O. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma. 26*(2). 7-34.

Miguez, M. (2004). El rechazo hacia las matemáticas. Una primera aproximación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17*. 292-298.

Mingüer, M. (2004). Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores de nivel superior de educación. Un estudio de caso: el instituto tecnológico de Oaxaca. *Acta latinoamericana de matemática. 17.* 894 – 898.

Palmero, F. (2003). La emoción desde el modelo cognitivista. *Revista Electrónica de Motivación y Emoción. 6*. 14-15.

ASPECTOS AFECTIVOS INTERVINIENTES EN EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA: LAS ACTITUDES Y SUS FORMAS DE EVALUACIÓN

Ana Sofía Aparicio, Jorge Luis Bazán
Programa de Post Graduación en Educación. Universidad de San Pablo. Brasil
Departamento de Ciencias. Pontificia Universidad Católica. Perú
anasofiaparicio@gmail.com, jlbazan@pucp.edu.pe
Campo de investigación: Factores afectivos Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se resalta la importancia de los aspectos afectivos en el aprendizaje de la estadística. Específicamente se enfoca la afectividad desde el estudio de las actitudes a la estadística a través de la revisión de diferentes trabajos enfocados a ese tema (en Brasil) y a través del análisis de instrumentos (escalas) utilizados en el estudio de las actitudes, a partir de Aparicio (2006).*

Se encuentra que en general hay una estrecha relación entre las actitudes positivas y el buen desempeño académico en estadística y que las actitudes no favorables a la estadística pueden dificultar el aprendizaje.

Palabras clave: afectividad, actitudes, estadística, escalas

Metodología

Primera etapa (Descriptiva):

- Revisión teórica y conceptual acerca de la afectividad y la actitud
- Revisión de investigaciones educativas relacionadas con aspectos afectivos (actitud) del aprendizaje de la estadística
- Análisis comparativos de los métodos de evaluación usados en cada investigación, así como un análisis de las principales escalas de actitud a la estadística utilizadas en la investigación educativa.

Segunda etapa (Aplicativa):

- Se evalúa un grupo de docentes peruanos donde se explora la relación entre las actitudes a la estadística y el rendimiento académico (Aparicio, Bazán y Abdounur

2004; Aparicio y Bazán 2006) con dos escalas analizadas en la primera etapa (Cazorla, Silva, Vendramini y Brito 1999; Estrada, Batanero y Fortuny 2003). Aquí se usa un diseño: Pre-test, post-test y de tipo descriptivo, correlacional y cuasi experimental.

Afectividad, actitudes y aprendizaje de la estadística

Existe una gran divergencia en cuanto a la conceptuación de los fenómenos afectivos. En la literatura se encuentra eventualmente, la utilización de los términos afecto, emoción y sentimiento, aparentemente como sinónimos. Entretanto, en la mayoría de las veces, el termino emoción se encuentra relacionado a un componente biológico del comportamiento humano. Ya que la afectividad es utilizada con una significación más amplia, refiriéndose a las vivencias de los individuos y a las formas de expresión más complejas e esencialmente humanas.

En educación matemática, Mc Leod (1989) define el afecto o dominio afectivo de la siguiente manera: “un extenso conjunto de sentimientos y humores (estado de animo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición

Considera como descriptores específicos de este dominio, las creencias, las actitudes y emociones. En general la relación entre dominio afectivo y aprendizaje, no va en un único sentido, ya que los afectos condicionan el comportamiento y la capacidad de aprender y recíprocamente el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas.

El estudiante, por ejemplo, delante de una situación de aprendizaje tiene una reacción positiva o negativa, de acuerdo con sus creencias acerca de si mismo y de la disciplina. Si la situación se repite muchas veces, produciéndose el mismo tipo de reacción afectiva (frustración, satisfacción, etc), esta puede convertirse en una actitud.

Mc Leod (1992) al conceptuar el dominio afectivo de la educación matemática, distingue entre emociones, actitudes y creencias. Así las emociones son respuestas inmediatas positivas o negativas producidas cuando se estudia matemática o estadística y las actitudes son respuestas relativamente más estables, o sentimientos más intensos que se forman por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo. Esto lo vemos en la siguiente figura:

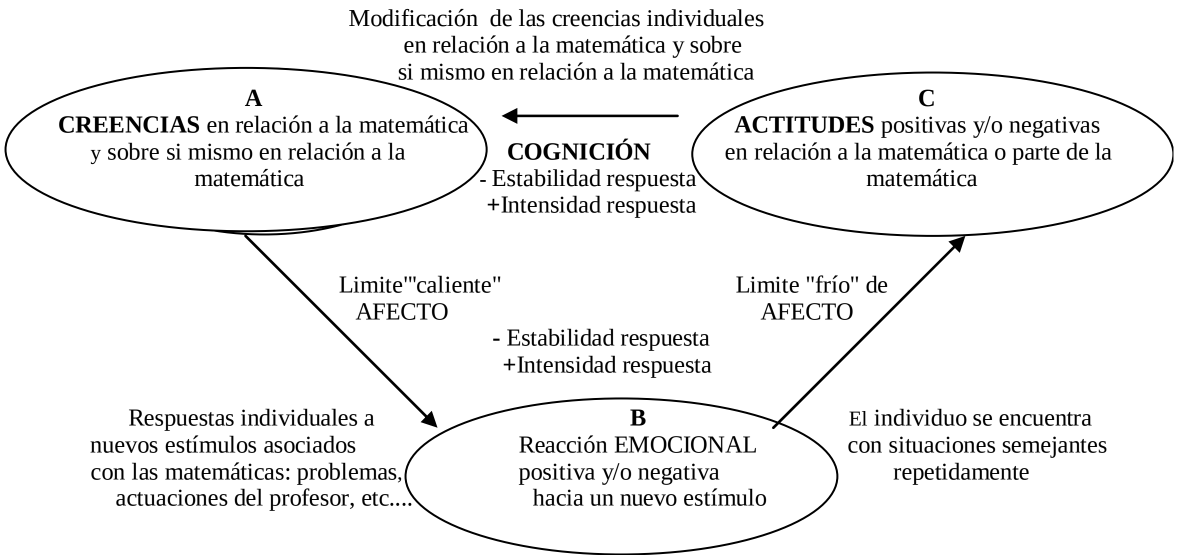


Fig. 1 Descriptores específicos del dominio afectivo en matemática

La actitud es una predisposición del individuo para responder de manera favorable o desfavorable a un determinado objeto (la estadística). Gal, Ginsburg y Schau (1997), señalan que las actitudes hacia la estadística son una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de esta disciplina.

Así, definimos la actitud hacia la estadística como una predisposición personal, presente en todos los individuos, dirigida a objetos, eventos o personas, que presenta componentes cognitivos, afectivos y volitivos. Como tratamos de sintetizar en la figura 2:

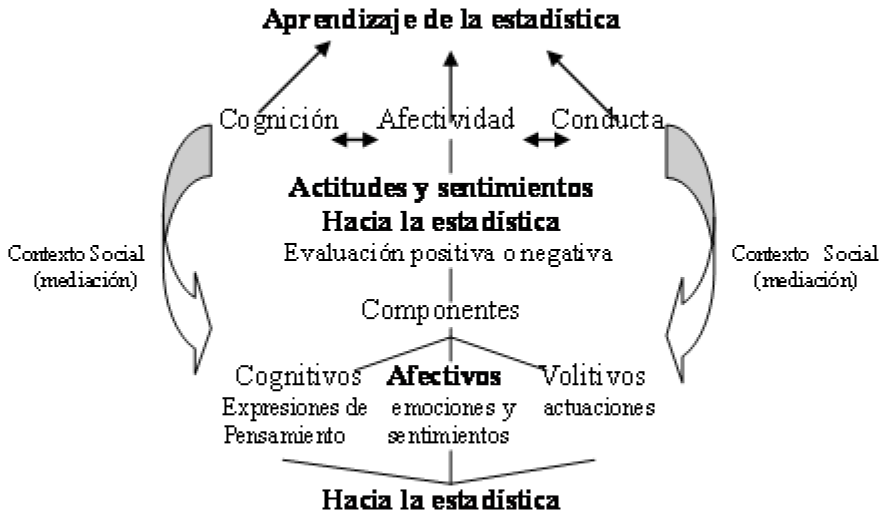


Figura 2. Componentes cognitivo, afectivo y volitivo en el proceso del aprendizaje de la Estadística

Resultados

Revisión de investigaciones realizadas relacionadas con las actitudes a la estadística (Brasil)

Se encuentran las siguientes investigaciones, entre tesis e investigaciones, realizadas en Brasil relacionadas con las actitudes hacia la estadística. Básicamente son del Grupo de investigación en Psicología de la Educación Matemática de la Universidad de Campinas, a excepción de Mendes (2003) de la Universidad Católica de Sao Paulo, Amorin, Guedes y Tozzo (2000) de la Universidad Estatal de Maringa y Aparicio (2004, 2006) de la Universidad de Sao Paulo. Estos trabajos son presentados en la siguiente tabla:

AÑO	AUTOR	TITULO
1994	Brito, Márcia	El papel de las competencias, las habilidades y las actitudes en el aprendizaje y en la enseñanza de la Matemática y Estadística.
1999a	Cazorla, I.; Silva, C.; Vendramini, C.; Brito, M.	Adaptación y validación de una escala de actitudes hacia la Estadística.
2000	Silva, C. B.	Actitudes hacia la Estadística: un estudio con alumnos de graduación.
1999b	Cazorla, I.; Silva, C.B.; Vendramini, C; Brito, M.	Concepciones y Actitudes hacia la Estadística
2000	Vendramini, Claudete	Implicaciones de las actitudes y de las habilidades Matemáticas en el aprendizaje de los conceptos de Estadística
2000	Amorim, C.; Guedes, T. ; Tozzo, A.	Análisis Estadística de las actitudes de los alumnos de iniciación científica de la Universidad Estatal de Maringa, hacia la disciplina de Estadística.
2001	Brito, M.; Vendramini, C.	Evaluación de una escala de actitudes hacia la Estadística y su relación con el concepto de utilidad de la Estadística
2002	Silva, C.B; Brito, M.; Cazorla, I.; Vendramini	Actitud hacia la Estadística y Matemática
2002	Norival, Gonçalez	Actitudes de los alumnos del curso de pedagogía hacia la disciplina de Estadística en el laboratorio de informática
2003	Mendes Clayde	Actitud hacia la Estadística y temas transversales: un estudio de caso
2004	Aparicio, Ana	Una revisión d investigaciones sobre la evaluación de actitudes hacia la Estadística en el Brasil
2006	Aparicio, Ana	Aspectos afectivos en el aprendizaje de la Estadística: actitudes y sus formas de evaluación

Revisión de escalas de actitudes a la estadística

Se hace revisión de las diferentes escalas hacia la estadística utilizadas en Brasil y a nivel internacional. Estos son los siguientes: **SAS:** Statistic Attitudes Survey; **ATS**: Attitudes Toward Statistic ; **SASc**: Statistics Attitudes Scale; **EAEA**: Escala de actitudes hacia la Estadística de Auzmendi; **SATS**: Survey of attitudes Toward Statistics; **EAEC**: Escala de actitudes hacia la Estadística de Cazorla; **EAEE**: Escala de actitudes hacia la Estadística de Estrada; **SATSes**: Statistic Attitudes Survey (adaptación española)

La mayoría de los instrumentos son en ingles como es el caso de las escalas SAS; ATS e SATS (Estados Unidos) y la escala SASc (África del Sur) Tres escalas son en español como es el caso de las escalas EAEA, EAEE e SATSes (España) y una es hecha en portugués, que es la escala EAEC (Brasil). En cuanto al número de ítems, varían de 20 a 33 con 4 a 7 alternativas de respuesta. Las dimensiones varían de unidimensionales, como la escala SASc ; bidimensionales en las escalas ATS y EAE y multidimensionales en las escalas SATS, EAEA, EAEE y SATSes. La única escala que no reporta dimensiones es la escala SAS.

Hay escalas que son adaptadas a partir de otras escalas para después elaborar una escala propia, este es el caso de las escalas SAS, EAEA, EAEC. La escala SATes, solo hace una adaptación para la población española. Otro grupo de escalas fueron elaboradas directamente como son las escalas ATS, SATS y EAEE.

En el caso de la validez ninguna reporta validez de contenido. Es reportada la validez relacionada por um critério en las escalas SAS, ATS, EAEA e SATS. Las escalas SAS y ATS tienen una validez relacionada con un criterio de carácter predictivo. Las escalas EAEA y SATS tienen una validez relacionada con un criterio de carácter concurrente y es usada la validez de constructo por las escalas ATS, SASc, EAEA, SATS, EAEC y SATSe. Todas ellas tienen una validez de carácter factorial.

En el caso de la Confiabilidad, solo es usada la confiabilidad de consistencia interna del Alfa de Cronbach y reportan confiabilidades que van de 0,64 a 0,95.

Finalmente la mayoría de escalas revisadas tienen muestras de estudiantes universitarios que llevan una disciplina de Estadística, a excepción de la escala EAEE que tiene una muestra formada por profesores en ejercicio y en formación.

Aplicación

Se investiga la relación entre la actitud y el rendimiento en la disciplina de Estadística a través de un diseño pre test (antes de iniciar la primera clase) y post teste (al final de la disciplina), analizando las mudanzas en las actitudes considerando las respuestas en las escalas. El rendimiento es medido con la nota final obtenida en la disciplina y las actitudes hacia la estadística con las escalas de Cazorla, Silva, Vendramini. y Brito (1999) y de Estrada, Batanero y Fortuny (2003).

La muestra estuvo conformada por 87 profesores peruanos de educación fundamental en ejercicio.

Se encuentra un cambio significativo en la actitud después del dictado de la disciplina y una relación significativa de la actitud final con el rendimiento en la disciplina de estadística, como se observa en la figura 3.

Los resultados revelaron la importancia de los aspectos afectivos en la enseñanza de la Estadística desde la perspectiva del profesor que puede tener impacto en el aprendizaje de los alumnos.

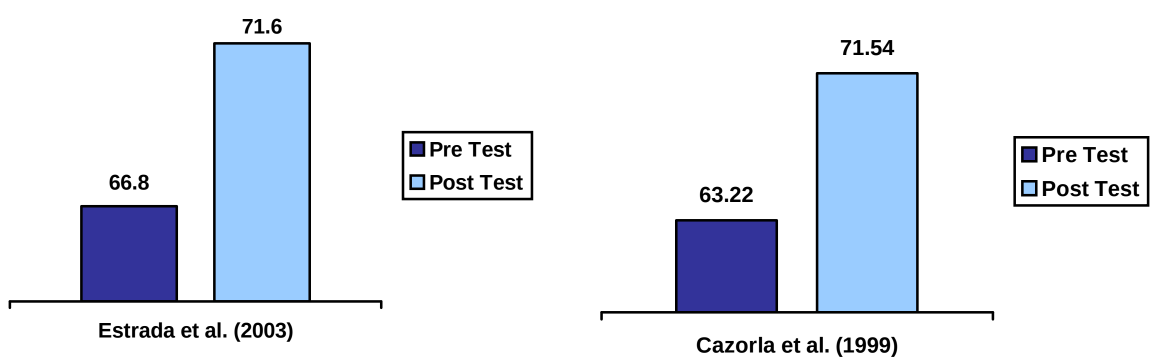


Figura 3. Cambio en los promedios de las escalas de Actitudes a la Estadística después de la etapa presencial de la disciplina (N=87)

Las escalas presentaron una correlación significativa y dos tipos de confiabilidad fueron obtenidas: de consistencia interna (alpha de Cronbach) en el pre test y post test, y de estabilidad dado por la correlación de pearson test-retest (r<0.01). En la escala de Cazorla Silva, Vendramini y Brito (1999), se reportan valores de 0.92 e 0.89 para el índice de alpha de Cronbach y en la escala de Estrada, Batanero y Fortuny (2003), valores de 0.83 e 0.81.

Conclusiones

Primera etapa. Se da a partir de la revisión de investigaciones acerca de las actitudes a la estadística:

- La actitud desfavorable a la estadística puede estar relacionada con predisposiciones desfavorables a la matemática debido a los estereótipos socioculturales que consideran a matemática una disciplina difícil.
- Hay estrecha relación entre actitudes positivas y buen rendimiento académico y viceversa. El sentimiento que el alumno tiene hacia el curso hará con que tenga una buena o mala predisposición para el aprendizaje.
- Las actitudes positivas deben estar acompañadas de adecuada información y conocimiento del curso, ya que se las actitudes tienen una fuerte carga afectiva, pero también una carga cognitiva y volitiva.
- Los principales instrumentos para medir las actitudes a la estadística son las escalas de actitudes. En Brasil básicamente se hace uso de la escala de actitudes de Cazorla Silva, Vendramini y Brito (1999).
- Se reconoce la importancia de tener instrumentos confiables y válidos, los cuales pueden ser utilizados como herramientas en la investigación de las actitudes a la estadística, que auxilien en la propuesta de programas para mejorar el rendimiento académico.

Segunda etapa. Se da a partir de la parte aplicativa:

- El desarrollo del curso de Estadística contribuye a la presencia de actitudes más favorables.
- Cambio significativo en la actitud después del dictado de la disciplina y una relación significativa de la actitud final con el rendimiento (figura 3)

- Las escalas de Cazorla, Silva, Vendramini y Brito (1999) y de Estrada, Batanero y Fortuny (2003) presentan una correlación significativa (r pre test= 0,76, p<0,01; y r post test= 0,73, p< 0,01).
- Los resultados revelan la importancia de los aspectos afectivos en la enseñanza de la Estadística desde la perspectiva del profesor.

Referencias bibliográficas

Aparicio, A (2006). *Aspectos afetivos na aprendizagem da Estatística: atitudes e suas formas de avaliação*. Tese de Mestrado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, Brasil.

Aparicio, A., Bazán, J. L. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 644-650.

Aparicio A., Bazán J. y Abdounur, O. (2004). Atitude e desempenho em relação à estatística em professores de ensino fundamental no Peru: primeiros resultados*. Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM)*. Universidade de São Paulo. Brasil. Disponible en www.sbempaulista/viiepem/anais

Cazorla, I., Silva, C., Vendramini, C. y Brito, M. (1999). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Estatística. *Anais da Conferência Internacional: Experiências e perspectivas do ensino de Estatística, desafios para o século XXI*, Florianópolis, Brasil.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2003). *Actitudes y Estadística en profesores en formación y en ejercicio.* Ponencia presentada en el *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operat*iva. Lleida, 8-11 de abril. España.

Gal, I., Ginsburg L. & Schau, C. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics: Education. In Gal & Garfield (eds). *The assessment challenge in statistics education* (pp 37-51). Netherlands.

McLeod (1989). Beliefs, attitudes and emotion: new vewof affect in mathematics education. In D.B Mc Leod & V.M Adams (Eds). A*ffect and mathematical problem solving: A new perspecteve* (pp. 245-258). New York

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization.

In: D.A. Grows (Eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

María Rey Genicio, Clarisa Hernández, Silvia Forcinito
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Jujuy Argentina
tresm@imagine.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico y gráfico Nivel: Medio

Resumen. *Esta propuesta didáctica se sostiene en un Proyecto de Investigación, que tiene como marco teórico las diferentes Teorías Cognitivistas, los aportes de Bixio (1998), de Guy Brousseau (1986) y de Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1999). Pretende brindar al docente un material estructurado en forma clara, precisa y amena para la enseñanza del tema; no como algo prescriptivo sino como una propuesta que pueda ser reflexionada, es decir que oriente el análisis y los criterios de acción del profesor y le permita decidir entre alternativas y comprobar resultados. Está pensada para que el alumno resuelva las actividades en base a sus conocimientos previos y a la interacción grupal y comunique sus resultados en una puesta en común. La función del docente será la de institucionalizar los conocimientos puestos en juego.*

Palabras clave: secuencia didáctica, enseñanza, programación lineal

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco del Proyecto de Investigación se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema**:** Programación Lineal. Sintetizamos a continuación aportes teóricos y conceptos básicos que sustentan la misma desde diferentes fuentes.

Fuente psicológica.

Teorías Cognitivas: entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, comprensión y dotación de significado. La actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por docente, textos, materiales u otros alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así, los procesos grupales de construcción de conocimientos son medios altamente eficaces para un aprendizaje significativo, aunque requieren una intervención del docente muy cuidadosa, optimizando actividades, facilitando intercambios cognitivos, supervisando, recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos.

Didáctica general y Didáctica de la Matemática

Estrategia didáctica: según Bixio (1998), es un conjunto de acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en los conocimientos previos de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

Ingeniería didáctica: elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje, y para la que, en los análisis preliminares, se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo. La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de la «Teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau (1986): proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Estas situaciones, enfrentan a los alumnos ante un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los distintos marcos le otorgan significatividad a la propuesta.

En la resolución de los problemas se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen resultados, detecten errores, analicen distintas propuestas y representaciones utilizadas y elijan las más eficaces, debatan argumentaciones, identifiquen conocimientos puestos en juego, etc., a fin de que estos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el "saber" que se quiere construir.

Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Artigue, Douday & Moreno (1999): a) los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; b) todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; c) admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos. Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Fase: Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Fase: Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Fase: Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Fase: Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Fase: Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Fase:

Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica

Se indicarán sólo algunos de los problemas propuestos en cada una de las actividades que se elaboraron. En cada actividad el docente institucionalizará, en el momento adecuado, los conocimientos puestos en juego.

Se comienza con una actividad introductoria cuyo objetivo es que el alumno se familiarice con el manejo de desigualdades que contienen una sola variable, para ello se proponen ejercicios de simbolización de inecuaciones sencillas que figuran en avisos y/o artículos aparecidos en diarios y/o revistas locales, la representación e interpretación gráfica en la recta real y por último la contextualización mediante una situación real de una inecuación dada.

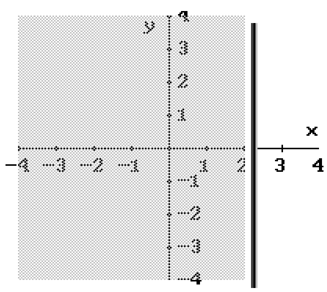
De la siguiente actividad se indican solo algunos de los ejercicios, en ella se incluyeron problemas abiertos a múltiples respuestas, para que el alumno se desprenda de la concepción de que un problema matemático tiene una respuesta única. También se pretende que el estudiante relacione inecuaciones con situaciones de la vida real.

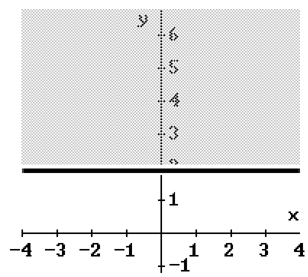
Actividad

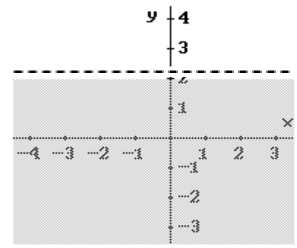
1. *El artículo más económico que produce una empresa tiene un costo de $2. a) Simboliza la desigualdad expresada en el enunciado, llamando C al costo de cada artículo. b) En un sistema de ejes coordenados cartesianos, en el eje horizontal se representan los costos de los distintos productos y en el eje vertical la ganancia correspondiente a cada producto, que siempre es positiva. Escribe las coordenadas de 5 posibles puntos que verifiquen la desigualdad dada en a) y luego represéntalos en dicho sistema. c) Mediante un sombreado, representa en el plano la desigualdad expresada en a).*

2. *Expresa mediante una inecuación cada una de las representaciones gráficas dadas*

a) b) c)







3. *Representa en un sistema de ejes las siguientes inecuaciones:*

a) $x \geq 3$ *b)* $y \leq 1/2$ *c)* $x < -1$ *d)* $y \geq 0$

4. *Una heladería vende 2 tipos de helados A y B. La ganancia que obtiene por la venta de 1 Kg. de helado tipo A es de $ 2 y la que obtiene por la venta de 1 Kg. tipo B es de $ 3. El dueño de la heladería quiere obtener una ganancia de $ 21.*

a) Simboliza el enunciado llamando ***x*** *a los Kg. de helados vendidos del tipo A e* ***y*** *a los del tipo B. b) Representa gráficamente en un sistema de ejes la ecuación obtenida en a). c) Si vende 7 Kg. de helado tipo A ¿cuántos Kg. de helado tipo B debería vender? d) Si vende 600 gr. de helado tipo B ¿cuántos Kg. debe vender del tipo A?*

5. *Suponga, que en el problema anterior, ahora el dueño de la heladería quiere obtener una ganancia mínima de $ 21.*

a) Simboliza ahora el enunciado del problema. b) Conteste los ítems c) y d) enunciados en el ejercicio anterior. c) Podría vender 5 Kg. de helado tipo A y 6 Kg. del tipo B?. d) Podría vender 1/2 Kg. de helado tipo A y 5 Kg. del tipo B?. e) Propone otra solución posible para la *venta de helados. f) Representa en un sistema de ejes, la región correspondiente a la desigualdad simbolizada en el inciso a).*

En la actividad recién enunciada, se incluye además una variada ejercitación donde, por ejemplo, el alumno debe identificar puntos cuyas coordenadas satisfagan inecuaciones dadas, decidir si un punto pertenece o no a una región, dada la representación gráfica obtener la inecuación que le corresponde, etc.

La siguiente actividad tiene por finalidad, por un lado, que el alumno aprenda a representar en el plano un sistema de inecuaciones lineales, identificando la región solución del sistema y determinando las coordenadas de los vértices de dicha región y por otro lado, que dada una región pueda plantear el sistema de inecuaciones cuya solución sea la región dada

Actividad

1. *Retoma el problema 5 de la actividad anterior y considera además que en la heladería se venden como máximo 5 Kg. de helado tipo B.*

a) Plantea la nueva desigualdad correspondiente al problema. b) ¿Podría vender 7 Kg. de helado tipo A y 1 Kg. de helado tipo B?. c) ¿Podría vender 2 Kg. de helado tipo A?. d) ¿Cuántos Kg. de helado de tipo A podría vender como mínimo? e) Realiza nuevamente el gráfico correspondiente al problema 6, y en el mismo sistema representa la inecuación hallada en el ítem a). f) Identifica la región del gráfico que corresponde a la solución del problema e indica 3 soluciones posibles, distintas a las ya vistas. g) Plantea un sistema con todas las inecuaciones que intervienen en el problema

2. *Dado el siguiente sistema de inecuaciones:* $y < 2 + x$; $y \geq -x - 4$

a) Representa la región solución del sistema. b) Indica si los siguientes puntos pertenecen o no a la región que corresponde a la solución del sistema dado: P_1 (0 ,−5) ; P_2 (1, 2); P_3 (5,

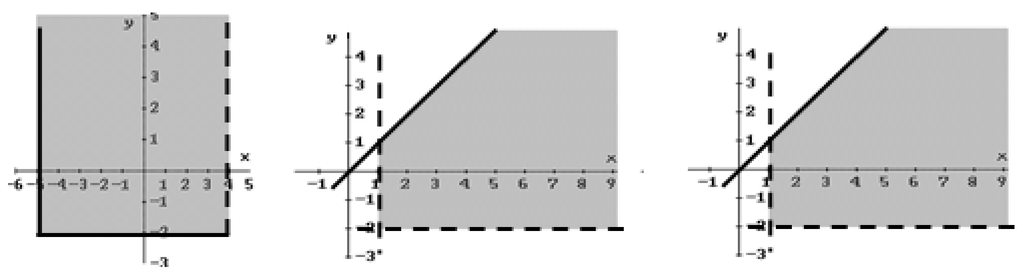
−9) ; P_4(8, 10) c) Completa el valor de x o y, según corresponda, para que los puntos indicados sean solución del sistema: P_1 (4 ,) ; P_2 (, −1.3) ; P_3 (, 9) ; P_4 (8.7 ,)

3. *Dado el siguiente sistema de inecuaciones: $x \leq 3$; $y + x > 0$; $2y + x \leq 10$*

a) Representa la región solución del sistema. b) Indica si los siguientes puntos pertenecen o no a la región que corresponde a la solución del sistema dado: P_1 (−4 , 3) ; P_2 (−2; 3) ; P_3 (3 , −3) ; P_4 (2, −1) c) Completa el valor de x o y, según corresponda, para que los puntos indicados sean solución del sistema: P_1(0 ,) ; P_2(, 1/2) ; P_3(−7.4 ,);P_4 (, 6.2)

4. *Dados los siguientes gráficos:*

i) *ii)* *iii)*



a) Escribe un sistema de inecuaciones que tenga como solución la región sombreada.

b) Determina las coordenadas de los vértices de cada una de las regiones

La secuencia continua con una actividad que incluye problemas concretos de programación lineal. Si bien el alumno explícitamente no sabe que está usando una función objetivo y resolviendo un problema de programación lineal, podrá reconocer que hay una función en la que intervienen dos variables que se debe optimizar.

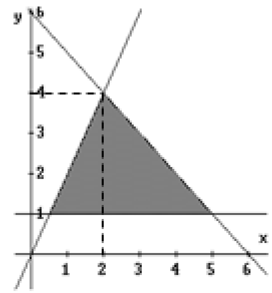
Actividad

1. *Estela recibe $ 11 para comprar lapiceras y carpetas, con la consigna de que no necesariamente gaste toda la plata. En la librería de su barrio le ofrecen las lapiceras a $2 cada una y las carpetas a $3 cada una.*

*a) ¿Podría con ese dinero y en esa librería, comprar: i) 1 carpeta y 1 lapicera? ; ii) 2 lapiceras y 3 carpetas? ; iii) 4 lapiceras y 1 carpeta? b) Plantea un sistema con las desigualdades involucradas en el enunciado, para ello llama **C** al número de carpetas y **L** al número de lapiceras. c) Representa la región correspondiente al sistema y marca en el gráfico sus soluciones. d) Lista todas las soluciones del problema.*

2. *Un negocio vende mermelada de frutilla y de naranja. La estadística muestra que se vende como mínimo el doble de mermelada de frutilla que de naranja. Ahora, por razones de espacio, a lo sumo pueden tener un stock de 15 frascos, de los cuales por lo menos 5 deben ser de frutilla y 2 de naranja.*

a) Escribe el sistema de restricciones del problema. b) Grafica la región factible. c) Si hay 10 frascos de frutilla, ¿cuántos frascos de mermelada de naranja puede haber? d) En el gráfico donde representaste la región factible, marca todos los puntos correspondientes a las soluciones posibles y luego escribe las coordenadas de dichos puntos. e) Si la ganancia que se obtiene por la venta de la mermelada de frutilla es de $ 0,40 por cada frasco y de $0,50 por la de naranja, escribe una fórmula que exprese la ganancia, en función de los frascos vendidos de ambas mermeladas. f) Indica cuál será la ganancia para cada una de las soluciones posibles. g) Determina cuántos frascos de cada una de las mermeladas se deben vender para que la ganancia sea máxima. h) Observa el gráfico e indica dónde se ubica el punto que corresponde a la cantidad de frascos vendidos que producen la ganancia máxima.



3. *El siguiente gráfico, representa la región factible correspondiente a un sistema de restricciones. Considerando que x e y son enteros:* *a) Encuentra el sistema de restricciones. b) Determina todas las soluciones del sistema y marca, en el gráfico, los puntos correspondientes. c) Si la función objetivo es f (x, y) =x+ y , indica el valor de dicha función para cada solución del sistema. d) Determina cuál de todas las soluciones minimiza la función objetivo y cuál la maximiza. e) Observa el gráfico e indica dónde se ubica el/los puntos que corresponden a la solución que minimiza la función y dónde se ubica el o los puntos que corresponden a la solución que maximiza la función.*

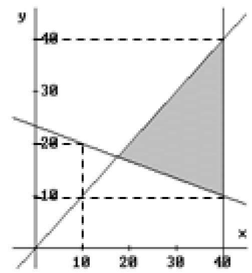
4. *Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro litros. Por otra parte, el triple de la producción de vinagre sumado con cuatro veces la producción de vino se mantiene siempre menor o igual a 17 litros. Sabiendo que cada litro de vino deja un beneficio de $2,5 y cada litro de vinagre $1,4:*

a) Plantea el sistema de restricciones. b) Grafica la región factible. c) Determina todas las soluciones posibles y marca en el gráfico los puntos correspondientes. d) Determina el beneficio para cada una de las soluciones. e) Halla el número de litros de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo. f) Observa en el gráfico e indica dónde se ubica el punto que corresponde al beneficio máximo.

La secuencia prosigue con una actividad cuyo objetivo es que el alumno se familiarice con la aplicación de programación lineal y aprecie la diversidad de problemas donde se puede utilizar. Hay problemas que tienen soluciones múltiples, otros cuya región factible es una región no acotada y otros donde intervienen tres variables, que luego se reducen a dos, lo que lo hace de una complejidad mayor. Para esta actividad sería conveniente que el profesor forme grupos y distribuya uno o dos problemas a cada uno de ellos y luego, en una puesta en común, cada uno de los grupos comunique a sus compañeros las resoluciones.

Para finalizar la secuencia, se incluye una actividad de familiarización (se indican solo algunos de los ejercicios)

Actividad



1. *El siguiente gráfico representa la región factible de un sistema de restricciones.*

a) Escribe el sistema de restricciones. b) Plantea un problema donde el sistema de restricciones sea el indicado en a). c) Indica tres soluciones posibles al problema planteado. d) Determina las coordenadas de los vértices del triángulo correspondiente a la región factible.

2. *Representa, siempre que sea posible, la solución del siguiente sistema de restricciones:* $y \leq 2x + 6$; $y \leq -x$; $x \geq 0$; $y \geq 1$

3. *En el sistema de restricciones del ejercicio anterior, elimina sólo una de las inecuaciones para que tenga solución no vacía.*

4. *Dado el siguiente sistema:* $x + 4y \leq 16$; $x + 2y \leq 10$; $2x + y \leq 14$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

a) Represéntalo gráficamente. b) Con las restricciones anteriores encuentra el máximo de la función $f(x, y) = 3x + 5$. *c) Discute si el resultado obtenido en el apartado b) seguiría siendo el mismo al añadir la condición* $x \leq 5$

Conclusión

Las actividades diseñadas responden a las "condiciones del buen problema" ya enunciadas. En toda la secuencia se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos, al mismo tiempo las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad.

En la implementación del diseño se observó que la mayoría de los alumnos mostraron mayor entusiasmo y compromiso con la tarea, y que algunos otorgaron valor al hecho de implicarse en una construcción que les permitió otorgar significado al conocimiento

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1999). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Buenos Aires, Argentina: Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba, Argentina: FAMAF.

Carione, N., Carranza, S., Diñeiro, M., Latorre, M. y Trama, E. (1995). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Santillana

Davini, M. (1997). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía*. Buenos Aires, Argentina: Paidos.

Larson, R.; Hostetler, R. y Neptuno, C. (2000). *Algebra Intermedia* (2ª ed.). D.F., México: McGraw–Hill.

Macnab, D. S. y Cummine, J. A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16.* Madrid, España: Visor.

Santaló, L. (1995). *Matemática 3*. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Seveso de Larotonda, J. Wykowski, A. y Ferrarini, G. (1998). *Matemática 9*. Madrid, España: Kapelusz.

UN ESTUDIO DEL CONCEPTO DE VARIABLE EN LOS LIBROS DE TEXTO

Lina Morales Peral, José Luis Díaz Gómez
Universidad de Sonora México
lina@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Pensamiento Algebraico Nivel: Básico, Medio y Superior

Resumen. *Se han encontrado evidencias de que estudiantes, tanto de primaria como de universidad, tienen dificultades para resolver ciertos tipos de problemas de álgebra. Los errores que manifiestan subyacen en parte, en una tenue y mal definida concepción de lo que son las variables y del papel que juegan en la resolución de problemas. Parte de esta problemática tiene que ver con el hecho de que los libros de texto dedican muy poco espacio y tiempo a la discusión y definición del concepto de variable, así como a la forma en que se define. Con el propósito de buscar respuestas a estas dificultades se realizó un análisis de libros de texto. Se examinó la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla. En este artículo presentamos resultados de este análisis.*

Palabras clave: variable, análisis de textos, enseñanza del algebra

Introducción

En los cursos de Matemáticas de todos los niveles educativos, los libros de texto y los materiales escritos son los principales, y clásicos, materiales de apoyo para la enseñanza. La producción abundante de estos materiales, y su función como transmisores de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Así pues, podemos considerar a los textos como importantes recursos instruccionales, que caracterizan de alguna manera la enseñanza y el aprendizaje. La forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden (qué y cómo), si admitimos que proporcionan la mayor parte del contenido matemático que los estudiantes deben aprender.

Desde un punto de vista superficial, puede observarse el gran esfuerzo realizado por las editoriales en actualizar el formato y la presentación de los textos. En cambio, resulta difícil determinar si en ellos se ha incorporado, y de qué manera, los resultados obtenidos en investigaciones sobre la forma en que se aprenden algunas nociones matemáticas, realizadas en el campo de la Matemática Educativa.

Con el propósito de observar hasta que punto se ha dado esta incorporación en relación con el concepto de variable efectuamos una somera revisión de algunos libros de álgebra. Esta revisión nos muestra que algunos libros le dedican a lo más una página para explicar el concepto de variable, pero otros generalmente mucho menos, e incluso algunos no definen el concepto. Esto a pesar del hecho de que la matemática contenida en ellos se basa en la existencia de variables, y que estas predominan virtualmente en cada página de los textos, sin contar, que las definiciones que se encuentran en ellos son distintas y utilizan diferentes formas para definirlas.

Problema

Varios investigadores como Matz (1982), Trigueros y Ursini (2000) entre otros han encontrado evidencia convincente de que muchos estudiantes, tanto de primaria, como de universidad tienen dificultades para resolver ciertos tipos de problemas elementales de álgebra. La evidencia muestra que los errores manifestados por los estudiantes subyacen, en parte, en una tenue y mal definida concepción de lo que son las variables y qué papel juegan en la resolución de problemas. En particular, de acuerdo con nuestra revisión preliminar, creemos que parte de esta problemática tiene que ver con el hecho de que los libros de texto dedican muy poco espacio y tiempo a la discusión y definición del concepto de variable, así como a la forma en que se define este concepto. Así pues, con el propósito de buscar respuestas a estas dificultades realizamos una revisión más profunda de algunos libros de texto en el ámbito en el que trabajamos. Creemos que aunque la revisión de la bibliografía no es exhaustiva, presenta una amplia gama de estilos de la presentación y del contenido.

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos de investigación. En este artículo se presentan los resultados de una revisión de libros de texto de matemáticas. Dicha revisión se centró en un aspecto del currículo: la presentación del concepto de variable.

Diferentes formas de analizar los textos

Centrándonos en el campo de la educación matemática, Howson (1995) distingue entre investigaciones realizadas sobre textos a posteriori, es decir, la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado; y las realizadas a priori. Entre estas últimas se menciona el trabajo de Chevallard (1985), en los que aparece la noción de transposición didáctica, es decir, la transformación de la matemática en el contenido escolar, que se refleja fundamentalmente en los libros de texto.

Por otro lado, se han desarrollado dos líneas de actuación en relación al análisis de los libros de texto, las cuales comentaremos brevemente (García y Llinares, 1995). Podemos considerar:

I. Estudios centrados en el análisis de la forma en que se reflejan en ellos los contenidos, adoptándose dos puntos de vista:

1. Los que se han ocupado del propio instrumento de análisis que se aplica al texto. Entre ellos mencionamos:

   Van Dormolen (1986) y Otte (1986) ponen énfasis en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y su representación textual y las variaciones en las interpretaciones. Sanz (1990) se centra en la necesidad de considerar los modos de representación utilizados, para realizar inferencias relativas al significado de las ideas matemáticas que los textos transmiten.

2. Los que eligen un tópico concreto y examinan la forma en que este contenido particular se contempla en diferentes textos. Como Küchemann (1987), que intenta ver cómo un mismo tópico (razón y proporción) se caracteriza en diferentes libros de texto.

II. *Estudios centrados en el uso que se hace de los textos en las situaciones de enseñanza*. Freeman y Porter (1989) describen diferentes estilos en el uso de los libros de texto de matemáticas por los profesores, en el nivel de enseñanza primaria, y examinan el solapamiento entre el contenido enseñado y el contenido que aparecía en los textos.

El trabajo que aquí presentamos se encuadra dentro de aquellos que eligen un tópico y examinan las diferentes formas en que éste se presenta. Examinamos la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla. Sin duda que el análisis pudiera ser mucho más completo, sin embargo, para nuestro trabajo el que realizamos es suficiente.

Metodología

1. Se recopilaron libros de primaria, secundaria, preparatoria y universidad, además de algunas enciclopedias recomendadas para diversos niveles.
2. Se analizó cada libro buscando la definición de variable que presenta el libro o la página donde aparece por primera vez la palabra variable.
3. Con los datos anteriores se formó una tabla de datos que contiene la información de la definición que contiene el texto y la referencia del texto.
4. Se realizó un análisis de las definiciones buscando regularidades sobre el enfoque con que se presenta y términos matemáticos que intervienen en la definición siguiendo una clasificación dada por Peter Rosnick (1980).
5. Se realizó un análisis de las definiciones para clasificar el uso que se le da en los textos de acuerdo con la clasificación siguiente: como incógnita, como número general, como variable, como relación funcional.

A continuación mostramos dos definiciones representativas.

"*La letra x se llama variable y el conjunto R cuyos elementos la remplazan se llama conjunto satisfactor. Cada vez que se usa una variable, debe uno saber cuál es el conjunto satisfactor*". Lovaglia, F. M. 1972. Álgebra. Harla. Pág. 8 – 9.

"*Una expresión algebraica es una colección de letras llamadas variables y números reales organizados de alguna manera utilizando sumas, restas multiplicaciones divisiones y radicales*". Larson, R, Hostetler R. 1985. College Algebra. D.C. Hearth and Co. Pág. 30.

Resultados

El total de libros revisados fue de 99, y la revisión de las definiciones dadas en ellos nos muestra que el concepto de variable se define con diferentes enfoques y para definirla o explicarla se utilizan varios términos que mencionamos abajo, así como el número de libros que los sustentan:

1. **El conjunto de reemplazo**. El conjunto de reemplazo de una variable se compone de todos los elementos que se puedan sustituir por la variable. Este conjunto puede estar compuesto por cosas, por un número o por un conjunto de números. En el álgebra de la secundaria el conjunto de reemplazo es casi siempre el conjunto de los números reales, pero en el Álgebra Lineal el conjunto puede estar formado por vectores, y en las Ecuaciones Diferenciales por funciones.

   Sin embargo, al introducir el concepto de variable no se presenta una definición que comprenda todas las posibilidades del conjunto de reemplazo, sino que sólo se menciona que la variable representa números, haciendo poco abstracto este concepto. Las siguientes son algunas de las formas comunes en que se describe el conjunto de reemplazo en los textos revisados:

   a) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas**. Una definición muy general es la que da Mazani y colegas (p. 34, 1968): "Las letras tales como *a*, *b*, *c*,… que pueden representar cualquier elemento (definido, pero no especificado) de un conjunto

(Este conjunto puede estar formado por cualquier tipo de objetos; personas, números, funciones, etc.) se llaman variables. 11 libros.

b) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de números**. Generalmente números reales, pero este hecho se pierde en muchos estudiantes, porque de acuerdo con Matz (1982) los estudiantes ven las variables como etiquetas para simbolizar entidades concretas, en vez de cosas abstractas relacionadas con números. La definición de Barnet (p. 234,1960), está dentro de esta categoría, define: "Una variable en álgebra es una letra que representa cualquier número de un conjunto de números bajo discusión cuando el conjunto contiene más de un número". 46 libros**.**

c) **La variable se reemplaza por un único número**. En este caso no hay referencia a un conjunto y tampoco hay una referencia a la naturaleza múltiple de la variable. En el libro "Matemáticas Aplicaciones y Conexiones (Glencoe, p. 12, 1999) se menciona; "Algunas ecuaciones además contienen variables. La ecuación $x + 9 = 17$ no es ni verdadera ni falsa hasta que x se sustituya con un número que la hace verdadera. Resuelves la ecuación cuando reemplazas la variable con un número que la hace verdadera". 6 libros.

d) **Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c).** En algunos textos el autor introduce las variables y utiliza el símbolo de "guardalugar" □ para representar la variable. En el libro Graficas y Relaciones y Funciones, de la NCTM (p. 13, 14, 1979), se utilizan además del símbolo□, los símbolos Δ, n, x para representar la variable. 6 libros.

e) **Textos que no tienen una definición explicita de variable**. Como en el texto de Álgebra I del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (1987) que utiliza el concepto de variable hasta la página 77 para describir un polinomio: "Puesto que usaremos en esta sección y en las demás de este capítulo las expresiones algebraicas llamadas polinomios, escribiremos $P(x)$ en lugar de la proposición: un polinomio en la variable *x*….” Proposición que no se encuentra en las páginas anteriores, así como la definición de variable, pero que partir de esta página utiliz*a la* palabra variable.

2. **Variación**. Las definiciones de los libros transmiten diferentes formas en las que varía la variable. Se presentan al menos tres posibilidades:

   a) **Variables que no varían**. Esto es lo que con frecuencia se llama la incógnita. Se le encuentra en los textos cuando se resuelve un problema para el cual hay una respuesta única o la mayoría de las veces muchas respuestas finitas. Por ejemplo: “encuentre el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual a 21”. La solución del problema es la ecuación $3x = 21$, donde x representa el lado del triángulo. A pesar de que la variable x tiene como conjunto de reemplazo todos los números positivos conceptualizamos un triángulo único y el lado de este triángulo no cambia. Muchos libros de texto presentan solamente problemas verbales que tienen una única respuesta numérica. En éstos el estudiante puede deducir que el único reemplazo apropiado para una variable es un único número. Thompson, (p. 38, 1976) en su definición de variable escribe: “Las ecuaciones $3x – 5 = x - 3$, $x = x +1$, y $b^2 = 4$ contienen una letra como variable. Si reemplazamos la letra con un número obtenemos una expresión que es falsa o verdadera”. Y a partir de aquí utiliza las variables. 22 libros.

b) **Variables discretas**. La consideración de las variables en las relaciones funcionales difiere de la situación "estática" descrita en (a). Una forma de demostrar la naturaleza discreta de la variabilidad de una variable está con las tablas, una técnica utilizada por varios textos, aunque no se defina el concepto de variable como sucede con los libros de educación primaria. 23 libros.

x	C
1	2
2	4
3	6

Por ejemplo, en el problema de encontrar el costo C de producir x cajas de cartón, donde el costo se encuentra con la expresión $C = 2x$, a través de la tabulación.

La variable x representa una variable discreta con un número infinito de valores.

c) Variables continuas. En general se presenta de la misma forma que en (b) excepto que se considera que la variable cambia continuamente. Un ejemplo de una variable que varia continuamente es la de la ecuación $s(t) = 50t$ donde ***s*** es la distancia y ***t*** es el tiempo (Lang, p. 15, 1990). Sin embargo, es difícil comunicar el concepto de variación continua ya que el acto de reemplazo debe de hacerse discreto. Es decir, es difícil mostrar la naturaleza continua de la variable ***s*** asignando valores a ***t*** en la expresión $s(t) = 50t$. Y esto se complica más porque aun cuando el tiempo y la distancia son conceptualmente continuos, cualquier medida de ellas debe de ser discreta. Debemos de cuestionarnos aquí en si el tratar con entidades continuas discretamente simplifica el problema o si esta es una sobre simplificación que pierde la esencia de la continuidad. 6 libros.

3. **En términos de constantes**. Algunos textos hacen la distinción entre constantes y variables, otros no. Así como el concepto de variable tiene una multitud de definiciones, también lo tiene el término “constante”. Algunos textos definen

constante, otros como un caso especial de una variable, y otros no la definen, como lo hace Barnett p. 3, 1984 donde dice que una constante es un símbolo que corresponde exactamente a un objeto. 1 libro.

4. Como componente de otro concepto matemático. Una característica de varios libros es que definen variable y constante cuando definen expresión algebraica, o polinomio, o ecuación, o formula, o bien utilizan alguna expresión particular de algún problema algebraico, mencionamos algunos ejemplos:

“Utilizaremos letras (llamadas variables) y números al formar las expresiones y proposiciones con las que trabajaremos. Una expresión algebraica es una colección de variables y números reales (llamados constantes) organizados de tal manera utilizando sumas, restas,..” (Larson/ Hostetler, p. 40, 1985).

“Un término (llamado también monomio) es una expresión que está compuesta por una constante o un producto de constantes y variables elevadas a potencias positivas” (Peterson, p. 11, 1985). 21 libros.

Estas definiciones obscurecen el significado real de variable. Una variable es un símbolo que representa una cantidad, relación u otras estructuras matemáticas, pero la esencia de una variable es que representa un conjunto de cantidades, relaciones o estructuras matemáticas. Cuando las variables son introducidas en el interior de una ecuación, los estudiantes frecuentemente desarrollan el error conceptual de que la variable representa un sólo número: el valor que hace que una ecuación tenga solución.

5. No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización. 35 libros.

6. No define ni utiliza la palabra variable en el texto. 16 libros.

7. Clasificación de acuerdo al uso.

a) Como **incógnita**, 30 libros. (b) Como **Número General**, 65 libros; (c) Como **Relación Funcional**, 35 libros.

Conclusiones

Las experiencias que se tienen con la aritmética son importantes para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la “aritmética generalizada”. El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. Sin embargo, los resultados de varias investigaciones con estudiantes de todos los niveles nos muestran la persistencia de concepciones erróneas y la evidencia de que el concepto de variable es una cuestión confusa para los estudiantes.

Creemos que parte de esta problemática se debe a que el concepto de variable es en sí mismo muy difícil de definir y esto se corrobora con los resultados del análisis de la presentación de la definición de 99 textos de matemáticas. Estos 99 textos contienen muchas maneras de presentar el concepto de variable.

Referencias bibliográficas

Rosnick, P. (1980). “The presentation of the Concept of Variable and the Development of Problem Solving Skills: A Multi-Text Review”. ERIC#: ED295804. Education Resource Information Center.

Matz M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. and Brown, J.S. (eds.) Intelligent Tutoring Systems, London. Academic Press.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dormolen, J. Van (1986). Textual Analysis, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education*, pp. 141-171. Dordrecht: Reidel.

Otte, M. (1986). What is a Text?, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education*, pp. 173-204. Dordrecht: Reídle Press.

Küchemann, D. (1987). Leaming and Teaching Ratio: A Look at some Current Textbooks. En P. Ernest (Ed.) *Teaching and Learning Mathematics. Part 2. Perspectives 34*. School of Education. University of Exeter.

Freeman, D. & Porter, A. (1989). Do Textbooks dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? *American Educational Research Journal*, 26(3), 403-421.

Sanz, I. (1990). Comunicación, Lenguaje y Matemáticas. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum*, No 10-11, pp. 103-115.

Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts*. Vancouver: Pacific Educational

Trigueros Maria, y Ursini, Sonia (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática. Vol. 12, No. 2*. (27-48)

LA COMPRENSIÓN DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO Y LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Estela Rechimont, Nora Ferreyra, Nora Andrada, Carlos Parodi
Universidad Nacional de La Pampa Argentina
rechimont@exactas.unlpam.edu.ar, noraf@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *El concepto de lugar geométrico resulta, a veces, complejo en su determinación y tal vez se deba a la posibilidad de representación en distintos registros que implican diferentes niveles de abstracción y significados. Ante situaciones relacionadas a la temática de lugar geométrico, los alumnos, generalmente, resuelven en registro gráfico solamente. Ello pone de manifiesto la existencia de dificultades para expresar el problema en un registro algebraico que caracterice el conjunto de puntos correspondiente.*

El presente trabajo analiza la respuesta de estudiantes de los primeros años de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, ante el problema de determinación del conjunto de puntos que verifican una condición dada.

Palabras clave: problema, lugar geométrico, representación, estudiantes

Introducción

Es evidente que el análisis y estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se desarrollan, en muchos casos, alrededor del uso de nociones semióticas y de representación.

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento. Las estructuras matemáticas adquieren significado para el sujeto mediante el trabajo con las representaciones, y de aquí surge su interés didáctico.

No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática (Duval, R., 1995).

Dentro de las formas convencionales de representación es común distinguir dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* y *representaciones gráficas* (Rico, 2000).

Como *representaciones simbólicas* se tienen las representaciones de carácter alfanumérico. Las *representaciones gráficas* incluyen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación.

La representación pone en consideración el objeto *representante* (símbolo o representación) y el objeto *representado* (conceptos o contenidos conceptuales) que Godino y Batanero (1994) denominan, respectivamente, *significante* y *significado*.

Duval (1995) establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracteriza por signos propios y la forma en que estos se organizan. Estos registros constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor. Considera tres fenómenos estrechamente vinculados y que deben tenerse en cuenta en la relación de enseñanza-aprendizaje:

- *Diversificación de los registros de representación semiótica*.
- *Diferenciación entre representante y representado.*
- *Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica.*

La comprensión de un concepto matemático pone de manifiesto diferentes registros de representación y es necesaria la coordinación de los mismos. La representación en un solo registro difícilmente da la posibilidad de una comprensión integral del concepto.

Para el análisis que realizaremos en un problema propuesto a alumnos de la carrera Profesorado en Matemática tendremos en cuenta las siguientes entidades:

- *Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, tanto oral como escrito).*
- *Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, intramatemáticas, ejercicios).*

- *Conceptos: Definiciones o descripciones (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, .).*
- *Propiedades: Enunciados o proposiciones.*

Consideramos, en la solución del problema, elementos ostensivos, extensivos e intensivos.

Los elementos ostensivos son cualquier representación material usada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos) y las entidades lingüísticas/notacionales. En los extensivos incluimos las entidades fenomenológicas como situaciones-problemas, aplicaciones. Los elementos intensivos son las ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones, teorías).

Experiencia

En general, un problema es una situación que ubica a quien lo resuelve ante la necesidad de desplegar su actividad cognitiva en una experiencia de búsqueda de estrategias, elaboración de conjeturas y toma de decisiones. En un problema podemos identificar las siguientes características: existe un objetivo claramente definido; la solución no es inmediata ni alcanzable mediante procedimientos rutinarios sino que, por el contrario, requiere reflexión y coordinación de experiencias y conocimientos previos para acceder a un resultado y, finalmente debe ser accesible al sujeto que está intentando resolverlo, es decir que éste pueda identificar posibles soluciones y elegir entre ellas la más adecuada.

El concepto de lugar geométrico en matemática resulta, a veces, complejo en su determinación y ello tal vez se deba a la posibilidad de representación en distintos registros que generan diferentes niveles de abstracción y significados.

En situaciones de enseñanza-aprendizaje y, considerando la temática de lugar geométrico, hemos observado que los alumnos, generalmente, presentan la situación propuesta en un registro gráfico evidenciando dificultades para expresarla en un registro algebraico que permita justificar las conjeturas elaboradas a priori.

Para abordar la investigación en torno a la comprensión de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas, se trabajó con un grupo de alumnos del Profesorado en Matemática que cursan el segundo año de la carrera en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estos alumnos han aprobado asignaturas básicas por lo que tienen conocimientos de Álgebra y Análisis.

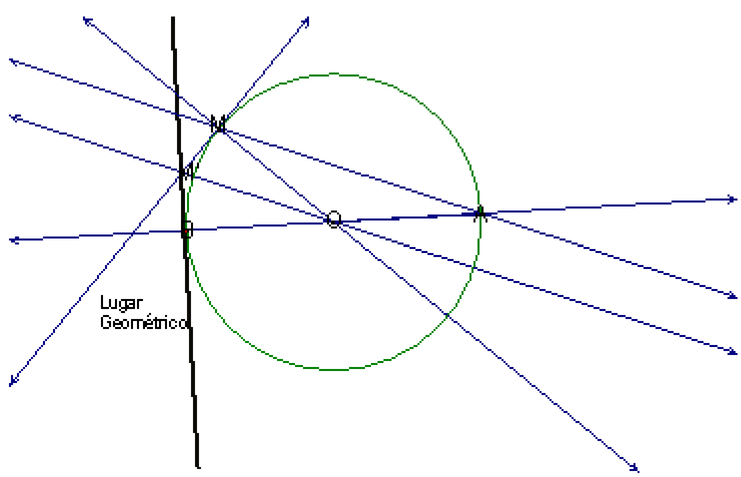
Se presentó a los alumnos, un problema de Lugar Geométrico.

Problema:

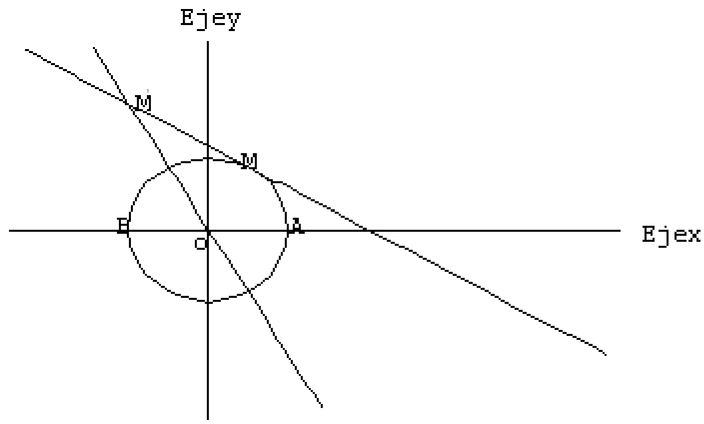
Sea C una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. *M un punto sobre la circunferencia y R la recta tangente a C por M. Sea M' el punto de intersección de esta tangente con la recta paralela a* $\overline{AM}$ *que pasa por O. Determinar el lugar geométrico de los puntos M' cuando M recorre C.*

Resolución a priori:

En un *registro gráfico*, se utilizaron construcciones con regla y compás y posteriormente se utilizó el software Sketchpad que permite visualizar el lugar geométrico a través de la herramienta de animación. Se muestra a continuación, el gráfico en un instante determinado de la animación.



En el *registro algebraico,* se confirma la solución hallada gráficamente, obteniendo una recta tangente a la circunferencia por el punto *B*.



Sea $M=(x_m,y_m)$, $r=\dfrac{AB}{2}\rightarrow A=(r,0)$ y $r^2=x_m^2+y_m^2$

Sea α el ángulo AOM , entonces $tg\,\alpha=\dfrac{y_m}{x_m}$

Sea *t* la recta tangente a la circunferencia por el punto *M*, entonces la ecuación de *t* es:

$y-y_m=-\dfrac{x_m}{y_m}(x-x_m)$ entonces $y-y_m=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{x_m^2}{y_m}$, luego $y=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{x_m^2}{y_m}+y_m$

$\rightarrow\ y=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{x_m^2+y_m^2}{y_m}$, de donde: $y=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{r^2}{y_m}$.

Sea *l* la recta que contiene los puntos *A* y *M*, entonces

$l:-\dfrac{y-y_m}{y_m-0}=+\dfrac{x-x_m}{x_m-r}$ entonces $y-y_m=\dfrac{x-x_m}{x_m-r}\,y_m\ \rightarrow\ y-y_m=\dfrac{y_m}{x_m-r}x-\dfrac{x_my_m}{x_m-r}$

luego: $l:\ y=\dfrac{y_m}{x_m-r}x-\dfrac{ry_m}{x_m-r}$

Sea *l'* la recta paralela a *l* por *O*, centro de la circunferencia, entonces la ecuación de *l'* es

$$y = \frac{y_m}{x_m - r}x$$

La intersección *M'* de *t* y *l* es la solución del sistema: $\begin{cases} y = -\dfrac{x_m}{y_m}x + \dfrac{r^2}{y_m} \\ y = \dfrac{y_m}{x_m - r}x \end{cases}$

$$-\frac{x_m}{y_m}x + \frac{r^2}{y_m} = \frac{y_m}{x_m - r}x \text{ entonces } \left(\frac{y_m}{x_m - r} + \frac{x_m}{y_m}\right)x = \frac{r^2}{y_m}$$

$$\frac{y_m^2 + (x_m - r)x_m}{(x_m - r)y_m}x = \frac{r^2}{y_m} \text{ entonces } \frac{r^2 - r\,x_m}{x_m - r}x = r^2 \rightarrow \frac{-r(x_m - r)}{x_m - r}x = r^2$$

Es decir que $x = \frac{r^2}{-r} = -r$, luego: $y = \frac{-y_m r}{x_m - r} = \frac{y_m r}{r - x_m}$

Resulta entonces que $M' = \left(-r, \frac{y_m r}{r - x_m}\right)$, esto es, *M'* pertenece a la recta perpendicular a *AB*, que pasa por *B*.

Si $x_m = r \rightarrow M'$ está en el infinito

Si $x_m = -r \rightarrow M' = \left(-r, \frac{y_m r}{2r}\right) = \left(-r, \frac{y_m}{2}\right)$ y como en ese caso, $y_m = 0 \rightarrow M' = (-r, 0)$.

Por lo tanto, el *lugar geométrico* de *M'* es la recta $x + r = 0$, tangente a la circunferencia en el punto *B*.

Análisis didáctico de la solución del problema

El enunciado del problema es el elemento extensivo y el correspondiente registro semiótico es un registro verbal.

A partir del enunciado, la imagen mental de la situación que plantea la representamos en registro figural que da, en cierta forma, el punto de partida a los distintos registros de representación involucrados en la solución.

En este análisis se explicitan diversos registros y se ponen en juego conversiones de uno a otro, teniendo en cuenta la correspondiente coordinación. Ello implica, cada vez, posicionarse en un determinado registro del cual es necesario conocer sus reglas lógicas.

Este análisis permitirá identificar:

- Puntos críticos implícitos en la resolución. Por ejemplo, la ubicación del diámetro AB de la circunferencia en un sistema de coordenadas ortogonales.
- La necesidad de ciertos conocimientos previos. Por ejemplo conceptos básicos de geometría analítica, solución de sistemas de ecuaciones.

  Además se pueden prever estrategias didácticas, que pueden presentar los alumnos para afrontar dicha solución. También permite mostrar la compleja trama de entidades y relaciones entre los registros de representación en juego en una actividad matemática.

Producción de los alumnos

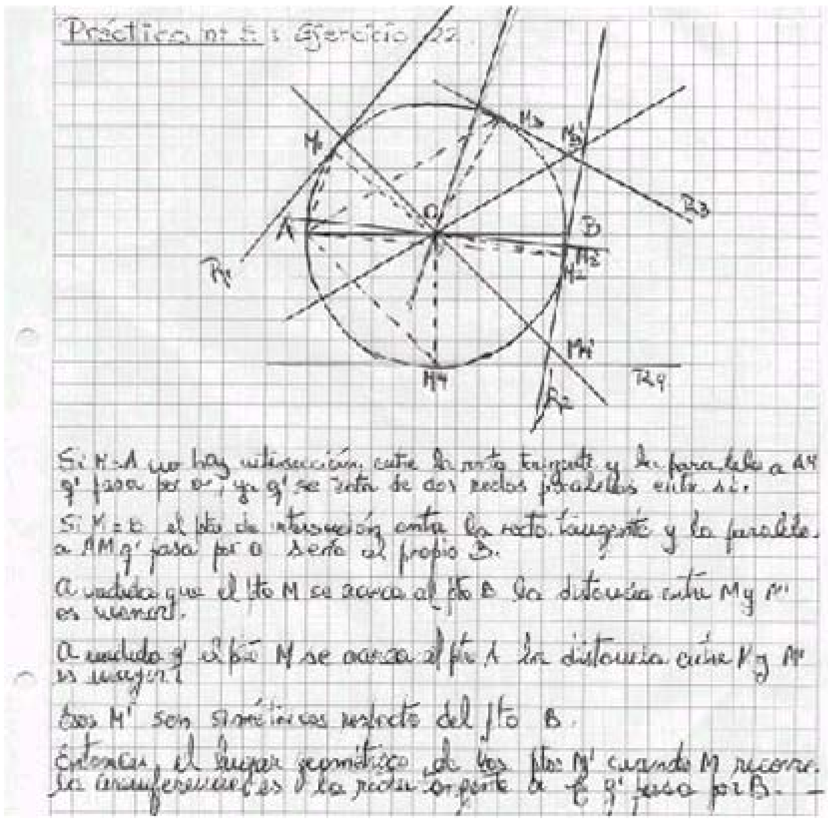
La tarea propuesta se entregó a 12 (doce) alumnos. Los alumnos en su mayoría resolvieron el problema en el registro gráfico-geométrico y no lograron justificar su conjetura en un registro algebraico.

Algunos alumnos intentan el cambio de registros de representación pero la conversión entre los dos registros (gráfico y algebraico) no se realiza de manera adecuada o se realiza de forma incompleta. Ello pone de manifiesto la falta de comprensión de algunos conceptos matemáticos involucrados en la resolución. Otros alumnos solamente efectuaron el desarrollo en el registro gráfico y concluyeron a partir de éste.

Es sabido que con la representación en un solo registro no se obtiene la comprensión integral de un concepto y, lamentablemente, no se manifiesta en la mayoría de los trabajos analizados la coordinación de al menos dos registros de representación.

Pareciera que los alumnos no descubren la relación, implícita en el problema, que permite justificar la conjetura que surge del registro gráfico.

A modo de ejemplo se muestra el trabajo de uno de los alumnos.



Conclusiones

El análisis a priori realizado para el problema presentado, pone de manifiesto una solución en un registro geométrico-algebraico utilizando representaciones de uso frecuente por parte de los alumnos.

Consideramos que este tipo de análisis es útil para describir los procesos de interpretación y comunicación del saber matemático, e identificar las razones que pueden condicionar la actividad de aprendizaje.

A priori, el equipo de investigación esperaba que la resolución del problema planteado se realizara en un marco geométrico-algebraico. Sin embargo, los alumnos no logran bosquejar un desarrollo algebraico y prácticamente ni lo intentan.

Resultó evidente que los estudiantes realizan las resoluciones de problemas fundamentalmente en un registro gráfico-geométrico y que la utilización de herramientas algebraicas no surge espontáneamente, aún cuando dichas herramientas hayan sido consideradas explícitamente en asignaturas anteriores.

Es importante trabajar con problemas que permitan que los alumnos adquieran habilidades en el tratamiento de distintos registros de representación y la correspondiente conversión entre ellos, como condición necesaria para resolver problemas y procurar el desarrollo del pensamiento matemático.

Los alumnos identifican mayormente el registro gráfico pues resulta más intuitivo, esto implica que la comprensión de la situación es a un nivel intuitivo, y como no hay correcta coordinación entre distintos registros, no se logra una comprensión a un mayor nivel de abstracción.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berna: Peter Lang S.A., Editions Scientifiques Européennes.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares. Colección MATHEMA, Nº 6.

González, F. (2001). *Cómo desarrollar clases de matemática centradas en Resolución de Problemas*. Caracas, Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. Contreras et al. (Eds) *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.219-231). Huelva, España: Publicaciones Universidad de Huelva.

UNA EXPERIENCIA DE AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACION EN GRUPOS NUMEROSOS

Marisa Angélica Digión, Beatriz del Carmen Autino
Universidad Nacional de Jujuy. Facultad de Ciencias Económicas Argentina
mlsadir@arnet.com.ar; scalu@arnet.com.ar
Campo de investigación: Aprendizaje Cooperativo Nivel: Superior

Resumen. *La evaluación formativa apunta a la necesidad de comprender las situaciones pedagógicas que se dan en el aula, para intervenir en ellas, fomentando una retroalimentación continua y significativa en el aprendizaje de los estudiantes. Implementar las estrategias didácticas para llevarla a cabo adecuadamente requiere del contexto educativo algunas condiciones; una de ellas es una apropiada relación numérica entre la cantidad de alumnos que asisten a clase y los docentes que la llevan adelante. Cuando tal índice no resulta conveniente, la tarea no es sencilla, pero tampoco es imposible. Es el caso de la experiencia desarrollada en un aula universitaria donde se pusieron en práctica instancias de Autoevaluación y Coevaluación. Los resultados obtenidos muestran una mejora en la aprehensión significativa de los contenidos por parte de los estudiantes.*

Palabras clave: evaluación formativa; autoevaluación; coevaluación

Marco Teórico

La evaluación en el contexto educativo

La complejidad que reviste el abordaje del tema "evaluación de los aprendizajes" (Bertoni, Poggi y Teobaldo, 1999) hace que su consideración requiera de un tratamiento multifacético, en general engorroso y problemático. No obstante lo expresado, y coincidiendo con Lopez Parralo (2006), es posible también afirmar que la evaluación de los aprendizajes es la herramienta más rica e interesante capaz de lograr mejorar el proceso educativo, desde el principio al final. Lograr que ella cumpla verdaderamente su función requiere, como requisito básico e indispensable, de su correcta planificación. Es el Programa de Evaluación o Sistema de Evaluación, el documento en el cual el docente debe plasmar cuestiones referidas a los contenidos, a las metas de enseñanza y a las características que delimitan el espacio de evaluación, entendido éste como "*el conjunto de condiciones que caracterizan la situación donde el docente, de manera intencional, recoge información de todo aquello que considera relevante, la analiza e interpreta y luego* *constituye juicios de valor que le permiten tomar las decisiones necesarias para la marcha del proceso de enseñanza y aprendizaje*" (Sola Villazón y De Pauw, s/d, p.4). Es precisamente en el espacio de evaluación donde surge la figura del agente evaluador, el cual, ¿o los cuales? es/son el/los protagonistas del presente trabajo.

Tendencias sobre la evaluación de los aprendizajes

Tanto la lectura bibliografía proveniente de diferentes fuentes, como las recomendaciones que se proporcionan desde los ámbitos de gestión educativa, permiten vislumbrar ciertas tendencias en cuanto a evaluación de los aprendizajes se refiere. Éstas asumen distintas direcciones las que, en términos generales, se formulan tratando de reorientar las cuestiones relacionadas con los planteos típicos sobre la evaluación de los aprendizajes, o sea: para qué evaluar, qué evaluar, cuándo evaluar, cómo evaluar, dónde evaluar y quién evalúa.

En particular, si se centra la atención en el rubro "quien evalúa" (el agente evaluador), se podría indicar que actualmente las tendencias que marcan nuevos caminos están relacionadas con:

a. Modificar la concepción de evaluación exclusivamente centrada en el profesor, a una evaluación donde se amplíe el espectro de agentes que la realizan, incluyendo el mismo a los estudiantes.
b. Combinar la forma tradicional de evaluación docente-alumnos (heteroevaluación interna asimétrica) con otras que incluyan la participación individual del alumno (autoevaluación) y la colectiva entre los estudiantes (heteroevaluación interna simétrica –coevaluación-).

De ambas tendencias se infiere un factor común: la participación de los estudiantes en su propio proceso de evaluación. Ante ello cabe preguntarse, ¿porqué el alumno debe evaluar? Dos posibles justificativos son:

a. El rol del alumno durante su formación sistémica ha cambiado. Él es considerado como el verdadero y central protagonista del proceso educativo. Desde una concepción democrática, si sobre él recaen las medidas que se abordan desde la enseñanza, también debe ser él quien participe activamente y responsablemente de las cuestiones en las que se involucren sus aprendizajes. La evaluación es una de ellas.
b. El mercado laboral del siglo XXI demanda de profesionales con una formación personal y académica diferente. Selzter (2000) destaca y describe cuales son las competencias y habilidades requeridas para insertarse en tales ámbitos del trabajo; las primeras hacen referencia a la posibilidad de que un futuro trabajador pueda utilizar de manera productiva recursos, destrezas interpersonales, información, sistemas y tecnología; en relación a las segundas, resalta como tales a: las capacidades básicas (expresión oral y escrita y capacidad de escuchar y opinar fundadamente), las aptitudes analíticas (pensar de modo creativo, tomar decisiones, solucionar problemas, usar la imaginación, saber aprender y razonar) y las cualidades personales (responsabilidad, autoestima, sociabilidad, autocontrol e integridad). Se entiende que, la evaluación con participación del estudiante puede coadyuvar a generar y ejercitar muchas de estas capacidades y aptitudes.

La autoevaluación y la coevaluación en cursos numerosos: la filosofía impresa

Cuando el proceso educativo tiene lugar en cursos numerosos, cualquier acción relacionada con la evaluación continua resulta de difícil implementación, cuando no imposible. Sin embargo, es necesario llevarla a cabo con el fin de: suministrar a los alumnos retroalimentación sobre su trabajo y proporcionar al docente los elementos para readecuar la enseñanza a las necesidades del contexto.

Surge entonces la pregunta, ¿cómo proceder para lograr tal fin aún cuando la relación alumnos por docente es elevada?

Valero - García y Diaz de Cerio (2006) ofrecen una visión particular en este sentido. Estos docentes de la Universidad Politécnica de Cataluña focalizan el fin de la evaluación de proceso a la necesidad que tiene el estudiante de saber cómo está aprendiendo. A partir de allí, asumen el siguiente posicionamiento:

a. Habitualmente, lo que requiere el alumno en su proceso de aprendizaje es saber con prontitud (lo antes posible) "si entendió o no entendió", "si comprendió o no comprendió" y si "aprehendió o no aprehendió", dejando a un lado (y por el momento) el resultado de la evaluación de producto que le asignará una calificación, precisa y fiable, para su promoción.
b. Por lo tanto, el docente debe implementar instancias que otorguen al estudiante las respuestas inmediatas que requiere. ¿Cómo lo hace cuando está a cargo de lo que se denominan grupos numerosos?
c. Precisamente, la Autoevaluación y la Coevaluación se presentan como instancias en las cuales se puede satisfacer tal demanda, siempre y cuando se priorice la característica de "prontitud" en el proceso de devolución de información por sobre las características de "precisión" y "fiabilidad" de la misma.
d. Lo citado precedentemente no debe entenderse como que precisión y fiabilidad no son requisitos necesarios y exigibles en el proceso de evaluación, sino que pasan a tener un lugar secundario sobre la prioridad fundamental: devolución inmediata. Precisión y fiabilidad son dos atributos más pertinentes al resultado de la evaluación de producto.

En las palabras de Valero-García y Díaz de Cerio (2006, p.2): "*La Autoevaluación y la Coevaluación proporcionan información con prontitud, puesto que el profesor tiene* *preparadas las instrucciones con antelación, los alumnos pueden realizar la evaluación inmediatamente después de realizar el trabajo y obtener las conclusiones rápidamente. Lógicamente, la evaluación será menos precisa y fiable que si la hubiese realizado el profesor, puesto que el profesional es él, y no los alumnos*".

Implementadas la Autoevaluación y la Coevaluación bajo estas premisas, resultarán "oportunidades de aprendizaje" por sobre "instancias para asignar una nota".

La experiencia

Consideraciones Generales

Si bien la participación de los estudiantes en el proceso evaluativo de carácter formativo está ampliamente justificada desde el punto de vista pedagógico, las dificultades que conlleva su implementación, hace que tenga escasa o nula cabida en los espacios áulicos. Sin embargo, se entiende que es necesario asumir este problema como un desafío a superar, el que quizás "de entrada" no logre los resultados esperados, pero que puede tener la oportunidad de ir mejorando paulatinamente.

Experiencias sobre Autoevaluación y Coevaluación existen, cada una con sus particularidades y sus resultados. Planificarlas e incorporarlas en el Sistema de Evaluación de una asignatura requiere que las características que se les impriman estén redactadas tomando en cuenta básicamente tres elementos:

a. Las particularidades del contexto en el que se las aplica.

b. Las disponibilidades de los docentes que las organizan e implementan.

c. La función que ellas persiguen.

Convencidos de que resulta necesario generar procedimientos de evaluación que permitan acompañar el proceso de formación de los estudiantes, brindando a éstos la posibilidad de participar en el mismo, se planteó desde la Cátedra de Algebra y Geometría

Analítica de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Jujuy (Argentina) una experiencia que involucró a la Autoevaluación y la Coevaluación. Tomando en cuenta los elementos citados con anterioridad, esta práctica fue diseñada bajo las siguientes particularidades:

a. El número de alumnos por docente fue significativamente alto (100/1).
b. El tiempo requerido para la evaluación formadora resultó acorde con la dedicación del docente, en horas cátedra.
c. Se pretendía que las instancias de Autoevaluación y Coevaluación proporcionaran a los estudiantes una retroalimentación inmediata sobre las cuestiones propuestas para evaluación.

Objetivos del trabajo

Los objetivos fundamentales de este trabajo son:

1. Presentar el contexto de aplicación de la experiencia de Autoevaluación y Coevaluación en cursos numerosos.
2. Comentar los resultados recogidos de la implementación de dicha experiencia áulica.
3. Contrastar los resultados recogidos con el marco teórico seleccionado.
4. Reflexionar sobre las consecuencias de haber brindado a los estudiantes una mayor participación en el proceso de evaluación.

Características

a. Se aplicó la experiencia a una sola comisión de 100 alumnos.
b. La instancia correspondía a una clase de Trabajos Prácticos.

c. Los enunciados contenían consignas sobre cuestiones teóricas y aplicaciones prácticas. Se asignaba al desarrollo 30’.

d. Procedimiento:

- Entrega del instrumento de evaluación a los estudiantes.
- Desarrollo de las consignas por parte de los estudiantes en el tiempo previsto.

Transcurrido el tiempo asignado, se procedía en función de tratarse de una Autoevaluación o de una Coevaluación.

Autoevaluación

- El docente indicaba, en el pizarrón, las consignas para la corrección de los puntos incluidos en el enunciado. También, establecía los correspondientes puntajes.

- Cada alumno, mediante un proceso de análisis reflexivo, cotejaba su trabajo con las especificaciones dadas por el docente; realizaba las correcciones que estimaba adecuadas; asignaba una calificación a su evaluación; finalmente, hacía entrega de la misma al docente.

- El docente, en actividad extra-áulica, revisaba nuevamente las evaluaciones, asignándoles su propia calificación.

- En la clase siguiente, el docente reponía a los estudiantes sus evaluaciones para que analizaran las observaciones hechas por éste. Comentaba tanto los errores detectados como los aciertos observados. Finalmente recogía las evaluaciones.

Coevaluación

- El docente solicitaba el intercambio de evaluaciones entre dos alumnos sentados contiguamente. Indicaba solo la calificación de cada punto requerido.

- Cada uno de los alumnos de este dueto, realizaba el análisis de la evaluación del par, tomando como referencia su propio conocimiento. Los estudiantes de la pareja compartían las observaciones que iban surgiendo. Cada uno asignaba una calificación a la producción de su compañero.

- A la finalización de esta actividad compartida, el docente desarrollaba la totalidad de las consignas en el pizarrón; retiraba las evaluaciones.

- En actividad extra-áulica, el docente revisaba nuevamente las evaluaciones, asignándoles su propia calificación.

- En la clase siguiente, el docente reponía a los estudiantes sus evaluaciones para que analizaran las observaciones hechas por éste. Comentaba tanto los errores detectados como los aciertos observados. Finalmente recogía las evaluaciones.

Conclusiones

Tomando como referencia el marco teórico establecido y, utilizando como fuentes de información los instrumentos evaluativos aplicados y la encuesta de opinión implementada a los estudiantes al final del cursado de la asignatura, es posible enunciar las siguientes conclusiones.

Respecto a la Autoevaluación, el estudiante:

1. Se manifestó inicialmente, molesto y sorprendido, por la obligatoriedad de realizar la evaluación; esta actitud desapareció, tras la primera experiencia, al informársele de los objetivos que perseguía la misma.
2. Se implicó directamente en la evaluación de sus aprendizajes.
3. Asumió los resultados como llamado de atención a la forma en la que estaba llevando a cabo su proceso de aprendizaje.
4. Valoró el papel de evaluador de su propio trabajo.

5. En general, sobrevaloró las calificaciones que se asignaba; una pequeña minoría, procedió en forma inversa.
6. Expresó su conformidad con estas formas de evaluación como instancias de aprendizaje.
7. No estuvo de acuerdo que las calificaciones obtenidas no tuvieran incidencia sobre las correspondientes a la acreditación.

Respecto a la Coevaluación:

1. Se desarrolló en un clima mucho más distendido que en el caso de la Autoevaluación.
2. Favoreció la comunicación entre los alumnos (muchas veces entre ellos desconocidos).
3. La confianza lograda entre pares permitió que el intercambio de las correcciones fuera más rico.
4. La actitud de los estudiantes frente a esta forma de corrección se percibió como altamente positiva.
5. Estimuló a los estudiantes a realizar un mayor esfuerzo ya que sabían que su trabajo sería visto por los ojos de sus pares compañeros.
6. Se incrementó el nivel de responsabilidad de cada alumno: por su evaluación y por la evaluación de su par.
7. Constituyó una excelente instancia de trabajo cooperativo y coordinado del grupo alumnos.

Dificultades

La puesta en práctica de la experiencia no fue tarea sencilla ya que, a los obstáculos institucionales que se tuvieron que sortear, surgieron otros como los que se menciona a continuación:

a. La implementación de las distintas instancias de Autoevaluación y Coevaluación en el marco de las clases asignadas para el desarrollo de los trabajos prácticos, disminuyó sensiblemente el tiempo requerido para tal tarea; esto obligó al docente a convocar a clases adicionales, cuestión que no fue bien vista ni por los estudiantes, ni por las autoridades académicas.

b. Se incrementaron notablemente las tareas del docente a cargo: diseño de instrumentos, corrección de los mismos e instancia de devolución de resultados.

c. Un pequeño grupo de alumnos pertenecientes a la comisión en la cual se aplicaron los instrumentos en cuestión, no realizaba las auto y las coevaluaciones (inasistía a la primera parte de la clase) o entregaba la hoja en blanco; indagados los motivos de tal actitud, se determinó que no tenían interés de hacerlo porque les exigía mucho sacrificio y la "nota" no influía en la calificación final.

d. Queja de algunos estudiantes porque el nivel de exigencia en las Auto y las Coevaluaciones era diferente del requerido en otras instancias puntuales de evaluación (parciales).

Ahora bien, considerando que:

- el número de alumnos aprobados se incrementó paulatinamente en las instancias de referencia, y,
- la valoración que realizaron los estudiantes sobre estas experiencias fue, en general, altamente positiva,

se concluye que las dificultades afrontadas no opacaron en absoluto el objetivo general propuesto: "Proporcionar a los alumnos herramientas de aprendizaje que les permitieran, de manera inmediata, realizar un balance de lo bueno y de lo malo de su proceso de aprendizaje".

Como docentes, creemos que la instancia de Coevaluación resulta más enriquecedora, a los efectos del aprendizaje, aunque requiere de más tiempo para su implementación.

Para terminar

Para transformar la evaluación en una herramienta de conocimiento, Celman (1998, p.63) afirma que debe cumplir ésta con dos condiciones:

"Condición de Intencionalidad: Para utilizar la evaluación como un modo de construcción de conocimientos fundado, autónomo y crítico, los sujetos deben estar interesados en ello.

"Condición de posibilidad": Se necesita un medio educativo que admita y valore, la autonomía, la autoestima y la autovalía personal creando condiciones institucionales y materiales de trabajo docente para su desarrollo".

De la experiencia recogida, creemos que la Autoevaluación y la Coevaluación reúnen las condiciones citadas por Celman, por lo cual afirmamos que ambas instancias de evaluación constituyen verdaderas herramientas de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Bertoni, A., Poggi, M. y Teobaldo, M. (1999). *Evaluación, nuevos significados de una práctica compleja.* Buenos Aires: Kapeluz.

Celman, S. (1998). ¿Es posible mejorar la evaluación para transformarla en herramienta de conocimiento? En Camilloni, A., Celman, S., Litwin, E y Palou, M. (Eds.) en *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires: Paidós.

Gonzales Perez, M. (2000). *Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria*. La Habana, Cuba: Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior (CEPES).

Lopez Parralo, M.J. (2006). *La evaluación como medida para mejorar el aprendizaje de los alumnos.* Obtenido en mayo 18 del 2006, en http://www.wanceulen.com/revista/numero1/articulos/articulo%201-8.htm

Rodriguez, J.A. (1993). La Evaluación en la Educación Primaria. Citado por Sola Villazón, A.y De Pauw, C. (Eds.) en *La Evaluación en la Programación Didáctica: Diseño de un Programa de Evaluación*. San Luis, Argentina: Universidad Nacional de San Luis.

Sola Villazon, A. y De Pauw, C. (s/d). *La Evaluación en la Programación Didáctica: Diseño de un Programa de Evaluación.* San Luis, Argentina: Universidad Nacional de San Luis.

Seltzer, J. C. (2000). *Formando competencias*. Buenos Aires: Economizarte.

Sirvente, A., Gutierrez, A. y Gonzalez, C. (2004). *Metodología y Herramienta para la evaluación entre alumnos universitario*". Obtenido en enero 22 del 2007, en: http://ares.unimet.edu.ve/encuentroted/trabajos/trabajosPDF/americo_sirviente2.pdf

Valero-García, M. y Diaz De Cerio, L. (2006). *Autoevaluación y Coevaluación: estrategias para facilitar la evaluación continuada*. Obtenido en noviembre 4 del 2006 en http://209.85.165.104/search?q=cache:KjeUWSbURrkJ:www.informatica.-uma.es/oa/seminarios/valero/material/autoevaluacion.pdf+%22autoevaluacion%22+tipos+de+evaluacion&hl=es&ct=clnk&cd=11&gl=ar

ENSEÑANZA Y COMPRENSIÓN DE ESTOCÁSTICOS EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA

Orlando Vázquez Pérez; Ana María Ojeda Salazar
DME. Cinvestav, IPN México
kepler74@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan resultados de la aplicación de un cuestionario sobre estadística y el enfoque clásico de probabilidad, antes y después de la enseñanza, con el propósito de estudiar diferencias entre ambas aplicaciones de la comprensión de esos contenidos de 37 alumnos de 13-15 años de edad. La estrategia de enseñanza puso en juego una propuesta institucional (SEP, 2006; Filloy et al, 2006). Las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) manifestadas por los alumnos señalan la necesidad de un seguimiento a lo largo de la educación básica y media superior sobre su enseñanza; asimismo, se requiere diseñar estrategias de enseñanza que presenten significativamente situaciones azarosas de manera sencilla y gradual. El término estocásticos se refiere a los temas de Probabilidad y Estadística.*

Palabras clave: Estocásticos, comprensión, enseñanza, secundaria

Introducción

Estudios previos (Elizarraras, 2004; Vázquez, 2004) revelan que los alumnos de secundaria manifiestan dificultades de comprensión de los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad aún para situaciones sencillas, lo cual augura más dificultades en los niveles educativos medio superior y superior (Ojeda, 1994). La presente investigación se interesó en la confluencia de ideas fundamentales de estocásticos, el uso e interpretación que dan los alumnos a medidas de tendencia central, a gráficas para organizar la información y a diagramas de árbol para identificar el espacio muestra de un fenómeno aleatorio y asignar probabilidades a sus eventos.

Perspectiva teórica

Se consideran referentes en tres órdenes de ideas:

i) Orden epistemológico. Piaget e Inhelder (1951) afirman que la idea de azar no es innata y que el desarrollo mental operatorio pasa por tres etapas: preoperatoria (2 a 7 años), operaciones concretas (7 a 12 años) y operaciones formales (12 a 14 años) (pp. 212-245). Estos autores argumentan que la idea de azar se inicia cuando el infante accede a la etapa de las operaciones concretas. De sus estudios resulta que las operaciones combinatorias y la idea de proporción se desarrollan hasta el nivel del pensamiento formal, lo cual permite el inventario completo de posibilidades (espacio muestra) y la cuantificación de sus probabilidades. No obstante, Fischbein (en Colín *et al*., 1993) critica estos resultados al señalar que no todos los sujetos de esta edad son capaces de descubrir el método de construcción de combinaciones y considera que, aún en el nivel de las operaciones formales, las técnicas combinatorias no se adquieren espontáneamente sino que su enseñanza es necesaria. Heitele (1975) denomina *modelo explicativo* al proporcionado por las ideas fundamentales, que son las que interesa enseñar al estudiante a lo largo de toda su educación. Estos modelos implican nociones, conceptos y sus interrelaciones; y se distinguen en los distintos niveles cognoscitivos no estructuralmente sino en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración. Son diez ideas las que propone: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números, y muestra.

ii) Orden Cognitivo. La obra de Fischbein (1975) sobre fuentes de la intuición probabilística plantea que "La enseñanza en estocásticos no sólo es posible, sino necesaria en niveles educativos tan tempranos como lo son los básicos [preescolar, primaria y secundaria]. La ausencia de una enseñanza en tales niveles redundaría en el arraigo de intuiciones erróneas, que con la edad vienen a ser más y más difíciles de erradicar" (en Colín *et al*., 1993, pp. 38-39). En tanto Frawley (1999), al considerar el tránsito del procesamiento de la información a la conciencia, alude al sujeto como máquina-humano, en cuya mente confluyen simultáneamente las partes interna y externa de la mente humana; plantea que la experiencia subjetiva se presenta de tres formas. La primera, el procesamiento no consciente, ocurre cuando se proporciona una respuesta inmediata (contestación automática), sea o no correcta o que se haya comprendido (Frawley, pp. 155-156). La segunda, la conciencia, "ocurre cuando un sujeto parece estar interpretando sobre la experiencia" (op. cit. p. 157). La metaconciencia, la tercera, se refiere a "la toma de conciencia y la organización deliberada de la experiencia" (p. 157); ésta cobra importancia pues establece el diálogo interno por medio del *habla privada* o *lenguaje para el pensamiento*.

iii) Orden social: la interacción en el aula. Steinbring (1991) señala que la epistemología del conocimiento matemático está determinada principalmente por condiciones sociales; la participación del docente, las actividades que realiza el alumno y el conocimiento matemático determinan, con mucho, el proceso de enseñanza, en el cual interactúan tanto quien enseña como quienes aprenden.

Elementos de método y técnicas empleadas

Esta investigación es cualitativa (Eisner, 1998). Participó un grupo de 37 estudiantes (14-15 años) de tercer grado de secundaria. El estudio se constituyó en dos fases: la primera se refirió a la enseñanza de estocásticos y su desarrollo; la segunda atendió a los antecedentes a la enseñanza y a los resultados en la comprensión de los estudiantes de los contenidos enseñados. Los criterios de análisis de los datos recopilados con los instrumentos aplicados (estrategia de enseñanza, guión de observación en el aula, hojas de control y cuestionario) fueron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos para organizar y tratar la información, términos utilizados, situación planteada y estructura.

Fase 1: Caracterización de la enseñanza. La propuesta institucional, plasmada en el *Plan y Programas de Estudio de Matemáticas* (SEP, 2006) y en un libro de texto (Filloy *et* *al*., 2006) que satisface los propósitos y contenidos del primero, se sometieron a escrutinio; se tuvo así un referente para considerar la enseñanza en el aula. Para ésta, uno de los presentes investigadores desarrolló la estrategia de enseñanza de manera directa con el grupo y con su profesor titular. Se utilizaron cuatro lecciones propuestas para estocásticos en tercer grado de educación secundaria del libro de texto citado. De las cuatro lecciones consideradas, tres se refirieron a los temas de presentación y tratamiento de la información y una a probabilidad. Cada sesión, de un total de cinco, tuvo una duración de 50 minutos y fue videograbada para su análisis posterior; en cada una se promovió la participación del grupo y se suministró a cada estudiante el material necesario para desarrollar las lecciones y hojas de control. Al término de cada sesión se solicitó que entregaran éstas para analizar sus respuestas a las preguntas ahí planteadas.

Fase 2. El cuestionario y su aplicación. Se diseñó un cuestionario de opción múltiple, presentado en hojas impresas, que contuvo cinco problemas sobre el enfoque clásico, uno sobre medidas de tendencia central y dos sobre estadística. Para obtener mayor información sobre la opción seleccionada, una de cuatro, se solicitó al estudiante que justificara la elección de manera escrita. Sin cambio alguno, el cuestionario se aplicó dos veces, cada una con duración de 60 minutos, antes de iniciar la enseñanza y cuatro meses después de la primera aplicación, periodo que contuvo el desarrollo de la enseñanza. El propósito fue identificar diferencias en el desempeño de los estudiantes.

La Figura 1 presenta a modo de ejemplo dos de los problemas planteados en el instrumento (problemas 3 y 7). La respuesta correcta se indica en negrita. Con las opciones propuestas en el problema 3 se buscó evidencia de si el estudiante consideró el espacio muestra, además de si aplicó el enfoque clásico de probabilidad; de este modo, el inciso **a** no establece los casos favorables al evento cuya probabilidad se demanda; el inciso **b** (correcto) consideró el evento que incluye todos los casos favorables en relación a los casos posibles; el inciso **c** previó la dificultad en la identificación de la variable aleatoria en cuestión y el inciso **d** manifiesta el desconocimiento del espacio muestra del fenómeno implicado.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, el **producto** de los puntos de las caras hacia arriba sea 12? A) $\frac{12}{36}$ B) $\mathbf{\frac{4}{36}}$ C) $\frac{1}{36}$ D) Ninguna de las anteriores **¿Por qué?** ______________________	7. Traza un diagrama de árbol para 3 volados. Marca en el árbol lo que corresponda al evento “cayeron dos águilas”. a) En total, ¿Cuántos posibles resultados hay? ________ b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo águilas? ___ c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo sol? _______ d) ¿Qué es más probable que caigan, sólo águilas o sólo soles? ____________________________________ ¿Cómo obtuviste las respuestas de los incisos b, c y d? ____ **¿Por qué?** _________________________________

Figura. 1. Ejemplos de problemas propuestos en el cuestionario.

Para el problema 7, la justificación de los incisos informa de si los estudiantes han tenido un acercamiento con el trazado de diagramas de árbol, por consiguiente, cada uno de los incisos anticipa si el estudiante establece el espacio muestra del fenómeno (lanzamiento de tres volados) y si aplica la regla del producto.

Resultados generales del cuestionario

Fase 2. La Figura 2 muestra los resultados obtenidos con las dos aplicaciones del cuestionario. En general, el cuestionario fue difícil para los estudiantes, pues sólo para cuatro problemas se obtuvo 60% o más de respuestas correctas. Por ejemplo, en la primera aplicación, para el problema 3 sólo un estudiante eligió la respuesta correcta, pero no justificó su elección. En la segunda aplicación del cuestionario cuatro estudiantes (13.51%) contestaron correctamente, pero sin justificar su elección; de forma inconsistente, el estudiante que eligió la opción correcta en la primera aplicación no lo hizo en la segunda.

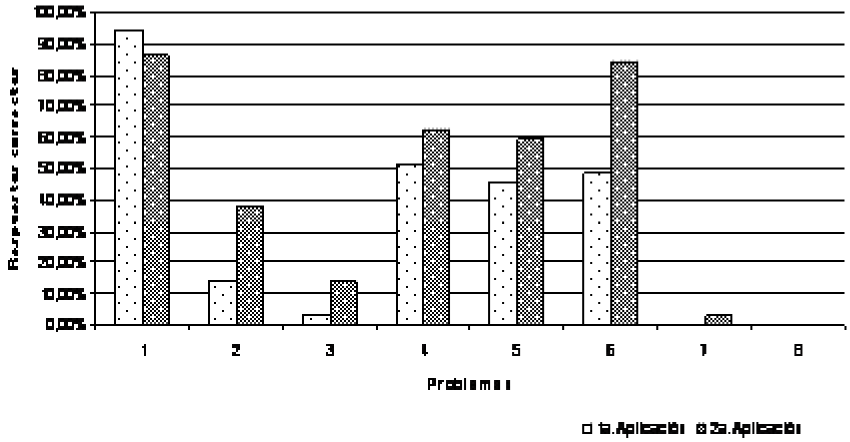


Figura 2. Resultados obtenidos en la primera y segunda aplicación del cuestionario.

En cuanto al problema 7, en la primera aplicación nadie lo contestó correctamente. En la segunda, sólo un estudiante contestó correctamente los incisos *a* y *d*, pero de modo incorrecto los otros incisos. De acuerdo con Frawley (1999), en este caso hubo una transición del procesamiento no consciente a la conciencia (ver Figura 3). Además, diez respuestas otorgadas a este problema revelaron una interpretación literal (ver Figura 4); todas las respuestas dadas aludieron al enfoque frecuencial; dos se refirieron a la “suerte” para justificar su respuesta (ver Figura 5); diez estudiantes no contestaron.

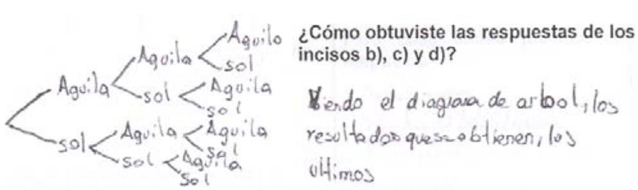


Figura 3. Del procesamiento no consciente a la conciencia.

Figura 4. Algunos trazos de diagrama de árbol de manera literal.

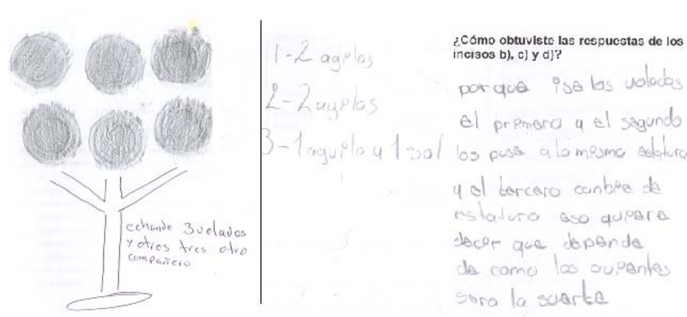


Figura 5. Alusión al enfoque frecuencial de probabilidad y a la "suerte".

En la segunda aplicación, ocho estudiantes no contestaron el problema 7; diez contestaron de manera literal, uno de los cuales aludió a la "suerte", mientras cuatro justificaron su respuesta refiriéndose a la realización de los volados (ver Figura 6); dos intentaron trazar el diagrama de árbol pero no lo completaron; cinco lo trazaron correctamente pero contestaron de manera incorrecta los incisos *a*, *b*, *c* y *d*.

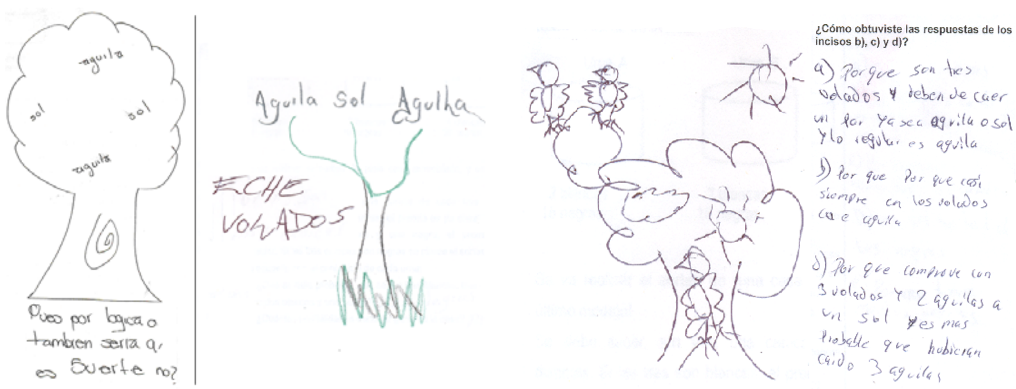


Figura 6. Requerimiento de realizar el ensayo y alusión a la suerte.

Resultados de la caracterización de la enseñanza

Fase 1. El estudio documental de la propuesta institucional para probabilidad proporcionó un marco para considerar la práctica docente. La obra de Filloy *et al*. (2006), utilizada en la enseñanza, está constituida por 5 bloques, de los cuales siete se refieren a estadística, principalmente con el uso de tablas de frecuencia absoluta y relativa, así como de gráficas de barras y circulares. Respecto a probabilidad, dos lecciones tratan sobre combinatoria, cinco lecciones se refieren al enfoque clásico y sólo dos implican tanto al enfoque clásico como al frecuencial. Algunas lecciones consideran problemas distintos, pero en general prevalece una sola situación; no proponen ejemplos ni ejercicios complejos; el uso de notaciones simbólicas es escaso. Plantean tablas de doble entrada y gráficas tanto para los temas de estadística como para los de probabilidad.

La enseñanza se desarrolló con sólo cuatro lecciones en cinco sesiones. Antecedió a éstas el desconocimiento de los estudiantes de contenidos de probabilidad. Se les plantearon dos preguntas abiertas: ¿te han enseñado temas de probabilidad y estadística?, ¿te han enseñado el tema de diagrama de árbol? A la primera pregunta, 17 estudiantes contestaron por escrito que no se les habían enseñado y nueve contestaron que sí. A la segunda pregunta, 18 estudiantes contestaron que no y nueve señalaron que sí se los habían enseñando en primero y segundo de secundaria.

Dificultades de enseñanza. Se diseñó una actividad (Carrera con dados) según la sugerencia presentada en la lección 94 (Filloy *et al*, 2006). La situación planteada en la actividad consistió en considerar del lanzamiento de dos dados ordinarios la suma de números (de puntos) en las caras que quedan hacia arriba; la lección implicó los enfoques frecuencial y clásico de la probabilidad. Se le consideró apropiada para la enseñanza pues, de acuerdo a Steinbring (1991), "la relación fundamental entre azar y regularidad entre fenómenos aleatorios, irregulares por un lado, y las ideas matemáticas de su modelaje y descripción de una manera regular y formal, por el otro, permiten una base intuitiva para la ley de los grandes números" (p. 504) Sin embargo, para los alumnos fue difícil la discriminación entre el espacio muestra y el conjunto de valores posibles de la variable aleatoria, y la de medida de probabilidad (distribución de probabilidades). La Tabla 1 resume el análisis de la actividad.

Tabla 1. Criterios de análisis.

Lección	Situación planteada	Ideas fundamentales	Otros conceptos	Términos utilizados	Recursos para tratar y organizar la información
Carreras con dados	Trece corredores, compiten avanzando una casilla, en una pista de 11, según la suma de los resultados del lanzamiento de dos dados ordinarios.	Medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, independencia, equidistribución y simetría, combinatoria.	Números naturales, su orden, adición, parejas ordenadas.	Azar, mayor número de posibilidades, menos posibilidades, imposible, más posibilidades, casi seguro, mismas posibilidades, imposible, probabilidad.	Lengua natural, figuras, tablas, símbolos numéricos.

Cuando se realizó la actividad, ganó el número (corredor) 7 (no hubo empates); se registraron todas las posibilidades para cada suma y se les organizó en una tabla, donde fue aparente que la suma 7 tenía la mayor probabilidad de obtenerse. No obstante, la coincidencia de este resultado con el de la realización efectiva de la actividad no fue suficiente razón para que los alumnos aceptaran la suma como más probable, pues ante la pregunta "*Si volvieras a jugar, ¿Qué número de corredor elegirías?*", 15 estudiantes contestaron que elegirían el número 8, sólo siete optaron por la elección del corredor 7, el resto eligieron otros números de corredores. Este tipo de respuesta es similar al otorgado por docentes al presentárseles la misma actividad (Vázquez, 2004, pp. 98-99). A este respecto, Frawley (1999) señala que "los niños y los adultos se desempeñan de manera muy semejante" (p. 46).

Comentarios generales

Los resultados obtenidos permiten afirmar que para el eje de tratamiento de la información, los estudiantes no tienen dificultades para completar gráficas, ni para calcular el promedio de una cantidad. Sin embargo, con los temas de probabilidad el escenario es distinto; aunque la enseñanza pudo haber contribuido para que en la segunda aplicación del cuestionario se hubiera obtenido un porcentaje mayor de respuestas correctas que en la primera, la diferencia no fue significativa. Un factor a considerar aquí es que el número de lecciones fue insuficiente para erradicar dificultades de comprensión provenientes de una ausencia de enseñanza. Aun cuando en el aula se dio un solo ejemplo de trazado del diagrama de árbol, no se esperaban los desempeños manifiestos en el cuestionario. Por otro lado, las expresiones utilizadas en las justificaciones proporcionadas revelaron una introducción gradual y sistemática de los términos referidos a estocásticos. Destacó el uso de la palabra “suerte”, como “ocurrencia de un evento poco probable” o como coincidencia de la anticipación de un resultado posible con su ocurrencia. Se propone el uso sistemático de tablas, gráficas y diagramas que *prefiguren* (Fischbein, 1975) la distribución de probabilidades para tratamientos sencillos de fenómenos aleatorios, a los que otorguen sentido los estudiantes para renunciar a la simple atribución al azar como causa de la ocurrencia de eventos y dar paso a un análisis de las posibilidades.

Una limitante en este estudio fue que sólo se desarrollaron cuatro lecciones con el libro de texto citado. Se requieren más sesiones para aliviar los efectos de una ausencia de la enseñanza de temas de estocásticos en la educación básica.

Referencias bibliográficas

Colín, J., Garnica, I. & Ojeda, A. M. (1993). Intuición y Probabilidad desde el punto de vista de Fischbein*. Cuadernos de Investigación* No. 26 Año VII. PNFAPM, Cinvestav del IPN. México.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós, España.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad*. Tesis de maestría. DME, Cinvestav-IPN, México.

Filloy, E., Rojano T., Figueras, O., Ojeda, A. M. & Zubieta, G. (2006). *Matemática Educativa. Primer Grado*. McGraw Hill, México.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Reidel Publishing Company, USA.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Paidós, España.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6 pp. 187-205. Reidel, Holland.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. Ph. D. Thesis. King's College London. U. K..

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La génése de l´idée de hasard chez l´enfant*. PUF. Paris.

SEP. (2006). *Programas de estudio 2006.* México.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowlegde. *Educational Studies in Mathematics* 22, pp. 503-522. Kluwer Academic Publishers. Holland.

Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria*. Tesis de maestría. DME, Cinvestav IPN. México.

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: UNA MIRADA DESDE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Jhony Alexánder Villa Ochoa
Grupo FORDAD (Ciep-Asdem). Grupo "Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Medellín — Colombia
javo@une.net.co
Campo de investigación: Gráficas y funciones — Nivel: Medio

Resumen. *En este documento se presentan los avances del proyecto de investigación "El concepto de función en las matemáticas escolares" realizado en cooperación entre el Programa de Educación Formal para Adultos del ITM y la Universidad de Antioquia. Se retoma la tesis propuesta por Posada & Villa,(2006) en donde se afirma que una didáctica del concepto de función debe abordar los aspectos de la variación, la modelación y los sistemas de representación. Con base en este plateamiento se construye una propuesta didáctica que pretende potenciar el entendimiento de algunos aspectos de la función lineal y cuadrática.*

Palabras clave: función lineal, función cuadrática, pensamiento variacional

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha sido un área de constante preocupación en las últimas décadas y a la cual muchos investigadores han dedicado grandes esfuerzos hasta lograr los desarrollos que actualmente se conocen en esta disciplina. Uno de estos alcances radica en el establecimiento de diferentes herramientas que sean de utilidad para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. En Colombia se pretende construir dicho pensamiento matemático a partir del desarrollo de otros cinco tipos de pensamiento, a saber: *Métrico, Numérico, Variacional, Aleatorio, y Espacial*; de igual manera se propone que al interior de las aulas de clase los docentes puedan implementar los siguientes cinco procesos: *el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 18)

Esta investigación aborda el estudio del concepto de función como un elemento fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica y

Media, colocando un fuerte ahínco en los procesos de modelación de situaciones de variación. A continuación se presentarán algunos elementos para una didáctica que promueva la construcción del concepto de función cuadrática y se muestra, a manera de ejemplo, una situación que permitiría ilustrar la forma en cómo se puede abordar este concepto al interior del aula de clase.

Elementos para una didáctica de la función cuadrática

En este documento se plantean algunas reflexiones sobre los procesos de variación inmersos en la compresión de la función cuadrática y se retoman elementos sobre el desarrollo del pensamiento variacional.

Con la propuesta del desarrollo del pensamiento variacional se hace especial énfasis en los procesos de variación. En términos del Ministerio de Educación Nacional, (2006)

> *[…] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.*
>
> *Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas*. (p. 66)

De lo anterior puede interpretarse que uno de los propósitos de la matemática en la Educación Básica no es únicamente el manejo de variados sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos; sino también el desarrollo de un Pensamiento Variacional. Éste, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación en diferentes escenarios de otras ciencias, de la vida cotidiana y de la misma matemática: desde lo geométrico, lo estadístico y muy especialmente en lo numérico y lo métrico. En particular la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente.

En este sentido Vasco, C. (2006) afirma que:

> *El objeto del pensamiento variacional es entonces la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.*(p. 139)

Es así como la comprensión de los fenómenos de las ciencias experimentales, la ingeniería y demás espacios de conceptualización que se basen en los principios del cálculo diferencial, adquieren sentido cuando se estructuran desde el proceso de modelación atrapado en el concepto de función.

El concepto de función lineal como base para el entendimiento de la función cuadrática desde una perspectiva variacional

En Posada & Villa (2006) se desarrolló una propuesta para introducir el concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, en dicho trabajo se retoma el concepto de unidad significante introducido por Duval (1999) para determinar algunas características de la función lineal. Al respecto se afirma que:

> [para el concepto de función lineal] las unidades significantes serán determinadas a partir de la noción de variación y razón de cambio. Esto debido a que es la razón de cambio constante la que permite determinar el concepto de función lineal desde el punto de vista variacional.

Esta decisión, permitirá dar una mirada un tanto diferente al estudio del concepto de función lineal desde tres elementos:

- Unificar la noción de función lineal y afín.

- Concebir la función lineal como un modelo matemático de un conjunto de situaciones con una misma característica (razón de cambio constante).
- Proponer una única unidad significante cognitivamente pertinente, que permita el estudio de las dificultades presentadas en la actividad cognitiva. (Posada & Villa,2006, p. 93-94)

Con base en ello, se afirma que “Se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante”(Posada & Villa, 2006, p. 96). Representando el “*cambio*” de una variable como Δx se tendría que la variación lineal puede representarse así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \text{ con } a \text{ constante}$$

Con estos planteamientos como base, se pretende dar sentido a la noción de función cuadrática partiendo de la variación lineal de la razón de cambio. De esta forma, puede plantearse una interpretación de la función cuadrática desde una perspectiva variacional en los siguientes términos.

“Se llama función cuadrática a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio varía linealmente”

A partir de esta idea se considera que un entendimiento de la función cuadrática debe tener en cuenta:

1. La descripción cualitativa del cambio a partir de la identificación de características de su gráfica.
2. La identificación del cambio de la razón de cambio como una constante.
3. La identificación del producto de dos cantidades que varía linealmente.

4. La construcción de una función $g(x)$ de la cual se conoce que su razón de cambio $f(x)$ varía linealmente.
5. La construcción de una función lineal a partir de una función constante y a partir de ella una función cuadrática de la cual puede provenir.
6. Asumir una función cuadrática y a partir de ella encontrar la función lineal que representa su cambio y a su vez la función constante que hace referencia al cambio de segundo orden.
7. La asociación de la forma como varía el cambio con las concavidades de la gráfica de la función.
8. La generalización de un patrón cuadrático a partir de la interpolación de un conjunto de datos en una tabla.

A manera de ejemplo: caida libre.

Reflexiones sobre la situación

La siguiente es una situación de variación cuadrática con la cual puede iniciarse la construcción del concepto de función de este tipo. El contexto de la situación es tomado de la física, la cual a su vez, plantea la necesidad de avanzar conceptualmente de forma paralela en ambas asignaturas partiendo de una situación común a ambos temas.

La situación ha sido pensada en tres momentos, cada uno de ellos diseñados con el objetivo de seguir, *grosso modo*, las fases de un proceso de modelación según Bassanezi, R. (2002) que apunte al reconocimiento progresivo de las características de las razones de cambio que van a permitir la caracterización de la función.

El *primer momento* está diseñado de tal manera que los estudiantes se hagan una idea mental de la situación. Primero se les presenta el fenómeno de caída de un cuerpo y luego se les pide que describan las características del movimiento con lo cual deben procurar establecer y validar diferentes regularidades, de esta manera se espera que los estudiantes reconozcan las diversas cantidades que intervienen en la situación. (v.g. la altura del objeto, la velocidad con que cae, la aceleración, la resistencia del aire…) de igual forma se puede orientar a los estudiantes hacia el reconocimiento de relaciones de dependencia entre las cantidades. En este momento se pretende dejar en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar las relaciones matemáticas lo cual se hace evidente con la descripción cualitativa con diferentes usos del lenguaje y los diferentes sistemas de representación.

En el *segundo momento* se les plantea la experimentación con una guía directa de laboratorio con materiales especializados; para ello se les pedirá a los estudiantes que lleven un control de la situación mediante un cronómetro y regla graduada y que construyan una tabla de la situación. Con base en la tabla construida y en la trayectoria dejada por el objeto los estudiantes deben reflexionar y conjeturar sobre el problema; de igual manera se espera construir un gráfico cartesiano del comportamiento de las cantidades. Inicialmente los estudiantes podrían entender la razón de cambio constante no como un cociente de diferencias, sino como el cociente aritmético entre los valores de una tabla. Esto permitirá proponer algunas ideas que ayuden a los estudiantes a identificar esta característica de la razón de cambio en el momento de la intervención.

Un *tercer momento* incluye la simulación del fenómeno en el software *modellus*, con el cual se pretende que los estudiantes puedan interactuar mostrando simultáneamente las gráficas cartesianas de la posición, velocidad y aceleración. En este momento se espera la construcción de un modelo algebraico de las relaciones entre las magnitudes.

Desarrollo de la situación

Actividad n° 1. Reconocimiento y descripción de la variación [captación cualitativa]

Se le estrega a cada equipo de estudiantes una pelota y se les pide que describan el movimiento del objeto cuando de deja se caer a cierta altura.

Se orienta el trabajo con el siguiente conjunto de preguntas:

- ¿Qué cantidades intervienen en la situación?
- ¿Cuáles de ellas son constantes y cuáles varían en las condiciones del problema?
- Presente un argumento del porqué el movimiento puede o no ser lineal.
- Realice una gráfica aproximada que represente la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el objeto.

Actividad n° 2. Cuantificación de la Variación. *[Captación numérica de la razón de Cambio]*

En este momento se le pide a los estudiantes que observen los valores mostrados por el software en la tabla No 1. Se les pide que:

Observen la tabla y describan la forma en como cambian la altura del objeto con respecto al tiempo.

- ¿Varía Linealmente? Justifique su respuesta.
- Copie los valores de la tabla y péguelos en un archivo de Excel.
- Calcule la *Razón de Cambio* de la altura del objeto con respecto al tiempo. ¿Observa alguna regularidad? Describa la forma en que *cambia* la *razón de Cambio*, y represéntela simbólicamente. (A esta razón de cambio se le llama velocidad)
- Calcule la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. (A este valor se le llama aceleración).

a 1. Generada en el software Modellus

Ficheiro Editar Caso Ventana Ayuda

Casos:

t
Y
B
Y0
V0
G

t	Y
0.10	504.95
0.20	504.80
0.30	504.56
0.40	504.22
0.50	503.78
0.60	503.24
0.70	502.60
0.80	501.86
0.90	501.03
1.00	500.10
1.10	499.07
1.20	497.94
1.30	496.72
1.40	495.40
1.50	493.98
1.60	492.46
1.70	490.84
1.80	489.12
1.90	487.31
2.00	485.40

Tabla

Actividad n° 3. Construcción del modelo.

En este momento se espera que el estudiante alcance a construir el modelo matemático de la situación determinando las gráficas cartesianas y las expresiones simbólicas.

- Construya en Excel una gráfica de la altura, velocidad y aceleración con respecto al tiempo.
- Compare los gráficos obtenidos con los presentados en el software *modellus*.
- Determine una expresión simbólica que represente la variación entre la velocidad y el tiempo.
- Determine una expresión simbólica que represente la variación entre la posición y el tiempo.

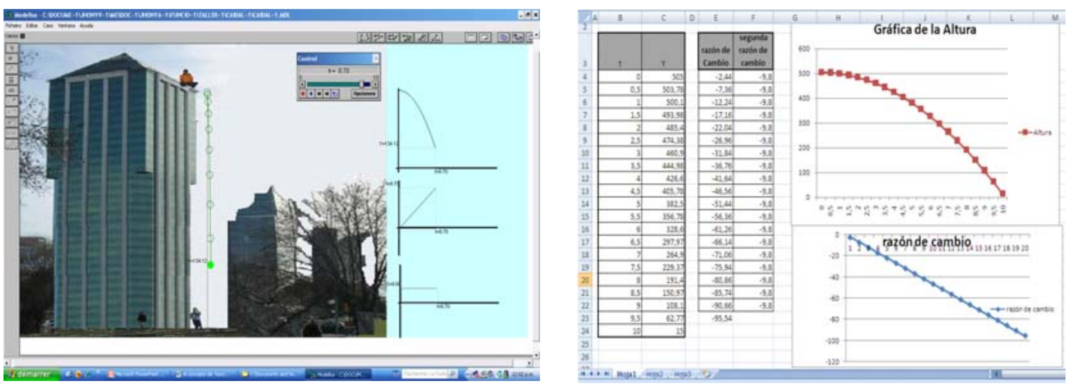


Ilustración 1. Animación en el software modellus y de las tablas y gráficas construidas en Excel.

Consideraciones finales

Las situaciones de modelización de fenómenos de variación han estado presentes en el desarrollo histórico del concepto de función (Posada & Villa, 2006). Ello sugiere que la presencia de este tipo de situaciones puede ser útil en la construcción de dicho concepto y por tanto posibilita ideas para el diseño de situaciones que ayudan a los estudiantes a reconocer, en el concepto de función, un modelo matemático que describe, sistematiza y organiza situaciones en contextos particulares donde intervienen fenómenos de variación y cambio.

Finalmente, es posible considerar que para que en la escuela se pueda alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función desde una perspectiva variacional se requieren tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
- La cuantificación de la relación mediante tablas de valores.
- La identificación de la razón de cambio y la forma en como puede cambiar dicha razón.
- El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales.
- El reconocimiento de la variación lineal de la razón de cambio como elemento que identifica las funciones cuadráticas.
- La compresión de la función como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.

Referencias bibliográficas

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curricularres: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Posada & Villa. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perpectiva variacional.* Tesis de Maestria no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Vasco, C. (2006). Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco (Ed.), *Didáctica de las matemáticas: artículos selectoss* (pág. 148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

RESULTADOS ACADÉMICOS CONFORME A LOS HÁBITOS Y ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

Marta Golbach, Analía Mena, Graciela Abraham, María Rosa Rodríguez, Graciela Galindo, Mabel Rodríguez Anido
Facultad Regional Tucumán, Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
mgolbach@tucbbs.com.ar; m-pappalardo@cgcet.org.ar
Campo de investigación: Educación Contínua Nivel: Superior

Resumen. *En este reporte se muestran los resultados de un estudio exploratorio, cuyo propósito fue conocer y analizar los hábitos y actitudes de estudio y las estrategias de aprendizaje, que utilizan los alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Facultad Regional Tucumán de la UTN en las asignaturas "Álgebra y Geometría Analítica" y "Análisis Matemático I". La metodología utilizada es la propia de un diseño exploratorio descriptivo que se aplicó para la recolección de datos y el análisis cualitativo y cuantitativo para observar estadísticamente la correlación y variabilidad de respuestas y la interpretación de los datos a la luz del marco teórico y la elaboración de conclusiones.*

Palabras clave: hábitos, estrategias, rendimiento académico, alumnos

Introducción

Diversas investigaciones realizadas sobre el proceso de Enseñanza Aprendizaje detectaron que las dificultades de aprendizaje de los alumnos en las asignaturas del área Matemática se deben fundamentalmente a: falta de conocimientos previos, insuficientes hábitos de estudios y de lectura, modos de acceso al conocimiento o estrategias de aprendizaje inapropiadas, a notables diferencias entre los conocimientos previos y los pre-requisitos necesarios para cursar primer año, etc., que repercuten negativamente en el rendimiento académico de los alumnos. Es necesario conocer y analizar, además de los aspectos propios del proceso de enseñanza aprendizaje, aquellas características de los alumnos que de alguna manera influyen en sus rendimientos académicos, su modo de aprender, la metodología de estudio que poseen, el conocimiento y control de estrategias de aprendizaje y la motivación para aprender. Poseer o no hábitos de estudio es un factor que influye en el fracaso en Matemática, por ello es importante indagar de qué forma estudian e identificar qué factores se encuentran más relacionados con el aprovechamiento en esta disciplina. Algunas investigaciones, como la realizada por Locke (1991) considera que los factores que permiten explicar los logros académicos alcanzados por los alumnos son el método de estudio y las motivaciones para estudiar. Este trabajo es la continuidad de las actividades de investigación realizadas en el marco de un Proyecto de Investigación que se desarrolla en la UTN. Tiene por objetivo presentar los resultados obtenidos de un estudio exploratorio realizado, a fin de conocer y analizar los hábitos y actitudes de estudio y las estrategias de aprendizaje que utilizan los alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información en las asignaturas "Álgebra y Geometría Analítica" y "Análisis Matemático I". Se analiza también, la correlación entre los hábitos de estudio y estrategias de aprendizaje con los resultados académicos obtenidos.

Material y Método

El estudio realizado es descriptivo, de corte transversal. La población bajo estudio estuvo compuesta por los alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información que cursan las asignaturas "Álgebra y Geometría Analítica" y "Análisis Matemático I" en la UTN, en el ciclo lectivo 2006. Se seleccionó una muestra de 174 alumnos mediante un muestreo aleatorio simple de comisiones, de los tres turnos de dictado de las asignaturas mencionadas: mañana, tarde y noche. La información se recolectó a través de una encuesta que se aplicó a los dos meses de iniciado el ciclo lectivo, a los estudiantes seleccionados en el muestreo. Y además de los resultados académicos obtenidos por los mismos una vez finalizado el período lectivo. La encuesta constó de 6(seis) partes evaluadas a través de una serie de ítems que intentan capturar la información que se necesita para la detección de las capacidades cognitivas de los alumnos.

Las variables bajo estudio fueron: Sexo, Trabajo, Situación académica, Comisión, Organización del horario de estudio, Metodología de estudio, Comportamiento frente a un examen, Motivaciones para aprender, además de: *Hábitos y actitudes de estudio:* variable aditiva (ó variable latente) considerada como la suma de los puntajes obtenidos en los 15 (quince) ítems evaluados en este aspecto. Las respuestas consideradas como totalmente desfavorables (nunca) se le asignó el valor 1 (uno), hasta 5 (cinco) asignado a las respuestas totalmente favorables (siempre). Los valores que toma esta variable aditiva van de 15, valor mínimo, denotando una actitud desfavorable en todos los ítems evaluados a 75, valor máximo de la escala, denotando una actitud favorable en todos los ítems evaluados; *Estrategias de aprendizaje:* Se construyó nuevamente una variable aditiva (ó variable latente) que intenta medir la capacidad del alumno para asimilar y aplicar diversas estrategias de aprendizaje, mediante la suma de los puntajes obtenidos en los 12 (doce) ítems evaluados en este aspecto. Los valores que toma esta variable aditiva van desde este valor mínimo, denotando una actitud desfavorable en todos los ítems evaluados a 60, valor máximo de la escala, denotando una actitud favorable en todos los ítems evaluados.

Respecto del *Rendimiento Académico de los alumnos*, como medida del mismo, se consideraron los promedios de las notas obtenidas en dos parciales y/o sus recuperaciones en las dos asignaturas antes mencionadas. Se considera alumno regular aquel que tiene solamente aprobado (nota $\geq$ 4) estos evaluativos. Para el procesamiento de la información se utilizó planilla de Excel y software estadístico SPSS. Para el análisis estadístico se recurrió a una escala de Likert aditiva como indicadora de cada variable latente, evaluando su consistencia interna o confiabilidad con el coeficiente Alpha de Crombach y se recurrió a modelos de regresión lineal, con la introducción de factores fijos y factores aleatorios.

Resultados

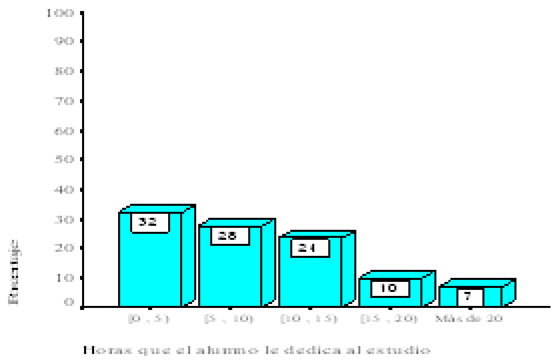


Gráfico Nº 1: Distribución de Porcentajes de alumnos según la cantidad de horas semanales dedicadas al estudio.

Se estudiaron a 174 alumnos de primer año de la carrera de ISI en la Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional, que cursan en el período lectivo 2006 las asignaturas “Álgebra y Geometría Analítica” y “Análisis Matemático I”, con edades entre 17 y 43 años y una edad mediana de 19 años. Siendo el 70% (122) varones y el 30% (52) mujeres. De los 174 encuestados, el 76% (133) manifestó que no trabaja en la actualidad y el 28% (49) es recursante. Respecto del Rendimiento Académico de los alumnos, en las dos asignaturas antes mencionadas, se obtuvieron resultados similares. Más del 50 % de los alumnos obtuvo un promedio menor a 4 (cuatro) lo que indica que ese porcentaje de alumnos no regularizó ambas materias, o sea que no aprobaron los exámenes parciales correspondientes, que les daría derecho a un examen final para aprobar las materias.

En cuanto a las horas que el alumno estudia semanalmente, los resultados obtenidos se muestran en el gráfico Nº 1. Si consideramos que el tiempo “mínimo” que el alumno debería utilizar para estudiar semanalmente es entre 10 y 15 horas para lograr un buen rendimiento, el 60 % utiliza menos de 10 horas.

A fin de obtener información referente a los hábitos y actitudes de estudio y estrategias de aprendizaje de los alumnos, se empleó un cuestionario tipo Likert, encontrándose una muy buena consistencia entre los ítems referidos a los hábitos y actitudes de estudios (Alpha de Crombach=0.75) como así también en los referidos a las estrategia de aprendizaje (Alpha de Crombach =0.72). Esto nos indica que los mismos estuvieron direccionados hacia el mismo objetivo

Los ítems relacionados con los hábitos y actitudes de estudio, intentan conocer aspectos como la organización del horario de estudio, la metodología de estudio a la que recurren, su comportamiento frente a un examen y dentro de los factores internos, sus motivaciones para aprender.

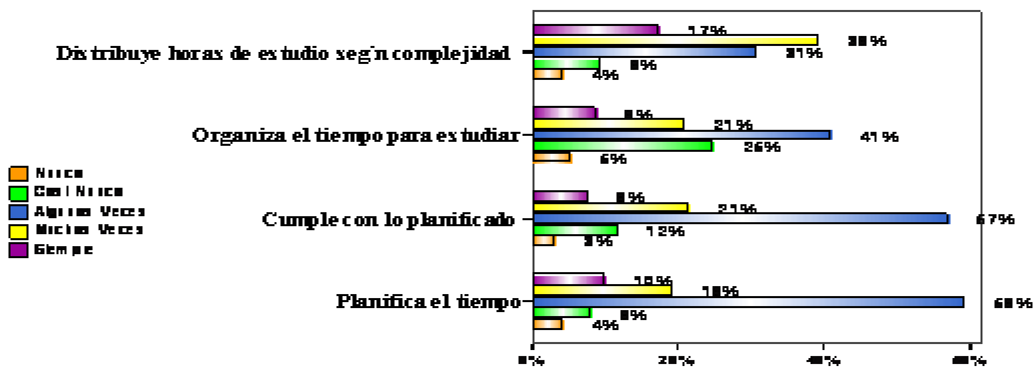
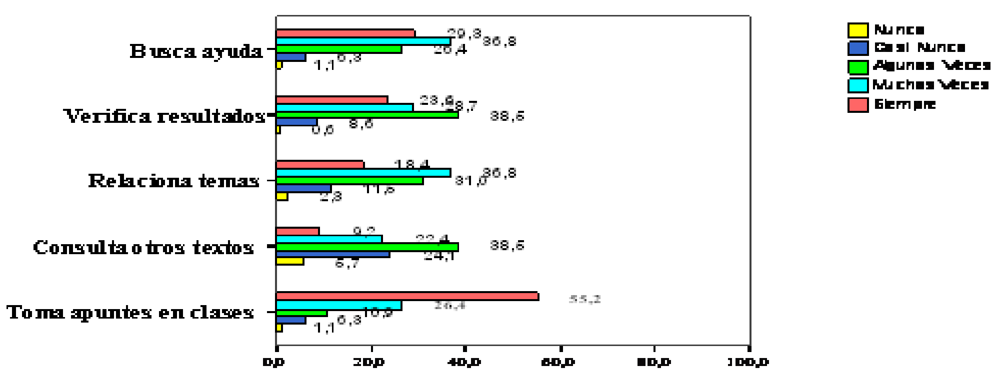


Gráfico Nº 2: Aspectos observados en la organización del horario de estudio en los alumnos encuestados

En cuanto al aspecto *organización del horario de estudio*, se observa en el gráfico Nº 2 que la proporción de alumnos que planifica siempre el tiempo dedicado al estudio, que cumple lo planificado y que estudia todos los días es alrededor del 10%, en todos los aspectos evaluados. Este porcentaje se duplica al considerar los alumnos que distribuyen siempre las horas de estudio de acuerdo a la complejidad de cada materia.

Respecto del rendimiento académico de los alumnos, se encontró que el 58%(101) no regulariza Álgebra y Geometría Analítica, mientras que en Análisis Matemático I fue de un 55%(95). Posteriormente, se investigó acerca del comportamiento que tenían los alumnos que regularizaron y los que no regularizaron estas dos asignaturas, con respecto a la organización del tiempo de estudio. Encontrándose que alrededor de un 50% de los alumnos encuestados planifican, cumplen, organizan y distribuyen muchas veces el tiempo de estudio, independientemente de haber regularizado o no las mismas. Pero si consideramos que el 60% de los alumnos estudian menos de 10 hs semanales, se explican estos resultados.

En cuanto a la *metodología de estudio* de los estudiantes encuestados se puede observar (ver gráfico Nº 3) que más de la mitad responde que siempre estudia de apuntes, frente a que solamente un 9% de los alumnos siempre "consulta otros textos". También, se ve que el 18% siempre relaciona los nuevos conceptos con los estudiados anteriormente. Casi el cuarto de la población encuestada siempre realiza la verificación de los resultados obtenidos de ejercicios y/o problemas. Mientras que los que buscan ayuda frente a las dificultades es menos del 30% de los alumnos. Es decir, que en general es muy bajo el porcentaje de alumnos que utiliza metodologías de estudio apropiadas para la adquisición de nuevos conocimientos.



Grágico Nº 3: Aspectos observados en la Metodología de Estudio de los alumnos encuestados (n=174)

De la comparación del rendimiento académico con cada una de estas variables, se obtuvieron como resultados que más del 60% de los alumnos que regularizaron las dos 260 asignaturas consideradas, toma siempre apuntes en las clases. Una cantidad similar, consulta otros textos cuando no entiende un concepto o tema, relaciona los nuevos temas de estudio con otros estudiados anteriormente, verifica los resultados obtenidos de ejercicios y/o problemas y busca ayuda cuando tiene dificultades en el aprendizaje muchas veces y siempre. Al analizar el *comportamiento frente a un examen* de los estudiantes encuestados se observó que más de la mitad de los estudiantes lee detenidamente siempre las consignas antes de resolver un examen. En cuanto al porcentaje de alumnos que siempre estudia cuando se siente presionado por un examen es relativamente bajo (10%). Respecto de *los factores internos y motivaciones para aprender*, se observó que un poco más de un 11% de los alumnos continúa siempre estudiando un tema, aun cuando este le resulte monótono. Mientras que, la participación en clase y el desarrollo de los trabajos prácticos siempre son motivadores para el estudio en el 40%. Por otra parte, es muy bajo el porcentaje de alumnos que tienen una actitud reflexiva frente al estudio. Además, la mayoría de los alumnos está de acuerdo que su asistencia a clase es importante en su estudio.

Respecto de la *comparación del rendimiento académico* de los alumnos que regularizaron las dos asignaturas, *con las variables referidas a factores internos y las motivaciones para aprender* los resultados obtenidos reflejan que un alto porcentaje de alumnos (mas del 70%), realizaron muchas veces y siempre, actividades que los motivaron. Teniendo en cuenta que al evaluar los diferentes ítems, se intenta captar información acerca de los hábitos y las actitudes de estudios (variable latente) de los alumnos, se recurrió a una escala de Likert aditiva como indicadora de esa variable latente.

De acuerdo a la distribución de frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas en la escala, se calcularon las medidas de tendencia central para esta variable, que se pueden ver en la tabla Nº 2.

Media		57,58
Mediana		58,00
Moda		58
Desv. estándar		7,268
Varianza		52,823
Puntuación más baja observada		37
Puntuación más alta observada		74
Rango resultante		37
Percentiles	25	52,75
	50	58,00
	75	63,00

Tabla Nº 2: Estadístico Descriptivo de la Variable Hábitos y Actitudes de Estudio

Teniendo en cuenta que esta escala aditiva intenta reflejar si los alumnos poseen o no buenos hábitos y actitudes de estudio, y que un valor de 15 reflejaría la ausencia de buenos hábitos y actitudes y que un valor 75 la presencia de los mismos, se obtuvo como puntaje mínimo 37 y como puntaje máximo 74 y que sólo un 48% presenta valores por arriba de la media (57,58), lo que indicaría que gran parte de los alumnos no parecen presentar buenos hábitos y actitudes de estudio.

Los indicadores considerados para las estrategias de aprendizaje fueron:

Estrategias de Aprendizaje	Nunca %	Casi nunca %	Algunas Veces %	Muchas Veces %	Siempre %
Identifica los conceptos más importantes cuando estudia	2	2	20	43	34
Interrumpe el estudio de un tema con el fin de revisarlo o repasarlo	3	7	39	36	14
Acostumbra subrayar en un texto lo más importantes de un tema	6	10	13	32	39
Le resultan útiles los subrayados que realiza en los textos y /o apuntes	6	3	15	32	44
Suele realizar esquemas, tablas gráficos o mapas conceptuales cuando estudia	23	22	29	17	8
Memoriza las definiciones, fórmulas, enunciados, etc. sin entenderlos.	5	12	36	30	17
Ante una situación problemática sabe por donde comenzar para resolverla.	2	7	64	23	4
Puede identificar en un problema cuáles son los datos y qué es lo que se busca.	1	2	34	45	18
Tiene dificultades para realizar la formulación matemática de un problema.	3	19	53	23	2
Intenta encontrar similitudes en la resol. de ejercicios y/o problemas con otros ya resueltos	4	6	32	40	19
Al resolver un problema recurre a todo el conocimiento que se relaciona con él, definiciones, propiedades, etc.	2	4	28	38	28
Verifica la solución que encontraste respecto a las condiciones del problema.	2	5	26	37	30

Tabla Nº 3: Distribución de frecuencias porcentuales de las respuestas a los indicadores de: Estrategias de Aprendizaje (n = 174).

En la tabla Nº 3 se puede observar que menos de la mitad de los estudiantes emplean siempre la estrategia referente a subrayar los textos y apuntes cuando repasan. Sólo un 25% de los alumnos utiliza la estrategia de realizar esquemas, tablas, y/o mapas conceptuales cuando estudian (categorías: muchas veces y siempre). Un bajo porcentaje de alumnos (22%), nunca y casi nunca, tiene dificultades para realizar la formulación matemática de un problema y un porcentaje similar (27%), muchas veces y siempre, ante una situación problemática, sabe por donde comenzar a resolverla.

En cuanto al análisis realizado a los alumnos que quedaron en condiciones de regular en las dos asignaturas consideradas (alrededor de un 45% en cada una) y la utilización de estrategias de aprendizaje, se obtuvieron como resultados que más de un 70%, identifican los conceptos más importantes, interrumpen el estudio de un tema con el fin de revisarlo o repasarlo y acostumbran subrayar en un texto lo más importante de un tema y esto les resulta útil. Un porcentaje mayor (más de un 80%), ante una situación problemática, sabe por donde comenzar para resolverla, identifica en un problema los datos y qué es lo que se busca, y al resolverlo recurre a todo el conocimiento que se relaciona con él, además de verificar las soluciones. Teniendo en cuenta que con el cuestionario se evaluaron diversos aspectos relacionados con las estrategias de aprendizaje de los alumnos e intentando captar información acerca de esa conducta (variable latente), se recurrió nuevamente a una escala de Likert aditiva como indicadora de dicho comportamiento.

Media		42,03
Mediana		42,00
Moda		42
Desv. estándar		4,891
Varianza		23,924
Rango		26
Puntuación mas baja observada		27
Puntuación mas alta observada		53
Percentiles	25	39,00
	50	42,00
	75	45,25

Tabla Nº 4: Estadístico Descriptivo de la Variable Aditiva Estrategia del Aprendizaje

Esta escala aditiva intenta reflejar si los alumnos poseen o no estrategias de aprendizaje, y se considera que un valor de 12 reflejaría la falta de estrategias de aprendizaje y que un valor 60 la presencia de las mismas. Se obtuvo como puntaje mínimo 27 y como puntaje máximo 53. Se calcularon las medidas de tendencia central de la variable aditiva (ver tabla Nº 4). En promedio las puntuaciones se ubican en 42,03 y se obtuvo que sólo el 49% de las puntuaciones presenta valores por arriba de la media, lo que indicaría que gran parte de los alumnos no parecen poseer estrategias de aprendizaje.

Discusión y conclusiones

De los resultados obtenidos podemos concluir que en general gran parte de los alumnos no presentan buenos hábitos y actitudes de estudio. Al evaluar los diversos aspectos se detectaron falencias en estos como en la aplicación de estrategias de aprendizaje. Los resultados reflejan que un poco más de un 50% de los alumnos presentan estas falencias. En cuanto a los alumnos que regularizaron las dos asignaturas consideradas y la utilización de estrategias de aprendizaje, la gran mayoría pareciera no tener problemas. Un aspecto a resaltar es que al no ser anónima la encuesta, para luego realizar la comparación con el rendimiento académico, los alumnos podrían haberse sentido condicionados para responder la misma, dificultando la detección de algunas falencias. En general la formación de los alumnos no es buena para emprender los estudios universitarios y en el paso de un nivel a otro existe un salto, no sólo en los contenidos y niveles de exigencia, sino también en las técnicas de aprendizaje que tienen que utilizar. Por ello se les debería brindar apoyo para su ingreso a la universidad y ayuda pedagógica para que los alumnos se apropien de variadas estrategias que les faciliten sus estudios universitarios. Por esta razón, hay que replantear la educación que pretendemos de nuestros alumnos y no verla sólo como transmisión de conocimientos, sino como formadora de individuos capaces e independientes para pensar, sentir y actuar. Además de motivarlos con estrategias creativas en el aprendizaje de la Matemática y buscando incorporar nuevos enfoques de enseñanza, acordes con las tendencias pedagógicas contemporáneas.

Referencias bibliográficas

Jonez, B.; Palincsar, A.; Ogle, D. y Carr, E. (1995). *Estrategias para enseñar a aprender.* Buenos Aires: Aique.

Locke, E. (1991). *Guía para estudiar. Métodos y sistemas para aprender con eficiencia*. México: Diana.

Noguerol, A. (1995). *Técnicas de aprendizaje y estudio*. *Aprender en la escuela.* Barcelona. España: Graó.

ALGUNAS ESTRATEGIAS DE LA EDUCACIÓN A DISTANCIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA TRADICIONAL

María del Carmen Spengler, Luisina Egidi, Ana María Craveri
Univ. Nac. Rosario, Fac Ciencias Económicas y Estadística Argentina
mariaspengler@gmail.com
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación analiza la aplicación de estrategias de Educación a Distancia (EaD) en la Educación Tradicional incorporando la labor tutorial y el uso de un hipertexto como material didáctico para promover el aprendizaje autónomo y colaborativo en temas de Matemática. Se trata de una Investigación Evaluativa, realizada durante 4 años con 1507 alumnos. Los instrumentos de recolección de datos son: examen académico, Encuesta de Opinión y Cuestionario. El análisis se organiza en 3 fases y se aplican técnicas de Regresión y Análisis de Correspondencias Múltiples (ACM), entre otras. Se concluye que la modalidad propuesta, en el contexto descrito: aumenta el rendimiento académico; propicia un seguimiento personalizado de los aprendizajes y promueve la autonomía en colaboración. Como aporte innovador se logra la elaboración de un hipertexto como material curricular y un instrumento confiable de evaluación del mismo*.

Palabras clave: aprendizaje autónomo, trabajo colaborativo, labor tutorial, hipertexto

Introducción y justificación de la investigación

Este trabajo forma parte de estudios preliminares del Proyecto PICTO: La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria, aprobado por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica. Nace ante las siguientes problemáticas, detectadas en la FCEyE de la UNR:

- *Características de los alumnos ingresantes*: la heterogeneidad, ya que provienen de distintas provincias y establecimientos educativos con diferentes calidades de enseñanza, además de las características propias del adolescente postmoderno.
- *Realidad Institucional*: caracterizada por la cantidad de alumnos, la deserción y el desgranamiento y el cambio curricular que trajo modificaciones en la asignatura.
- *Enseñanza de la Matemática Básica Universitaria:* donde generalmente se aplican enfoques tradicionales que llevan a aprendizajes memorísticos. A esto se le suma una

excesiva cantidad de alumnos por docente y la falta de cargos con dedicación exclusiva en el Dpto de Matemática para atender este crecimiento poblacional.

- *Necesidad de Investigaciones en Educación Matemática Universitaria:* desde diversos ámbitos se están reclamando investigaciones en el área, en especial desde el ICMI (La Comisión Internacional de Educación Matemática).
- *Demandas Sociales:* que exigen la formación de un nuevo Profesional con múltiples competencias como ser la utilización de las TIyC para su futuro desempeño laboral.

Problema de investigación

¿Es posible integrar en la Educación Matemática Universitaria Tradicional algunas estrategias de la Educación a Distancia, para facilitar un aprendizaje autónomo y colaborativo?

Objetivo General

"Analizar la aplicación de estrategias de la Educación a Distancia que promuevan el aprendizaje autónomo y colaborativo en temas de Matemática Básica Universitaria."

Marco Teórico

La experiencia y el saber desarrollados en el campo de la EaD pueden contribuir significativamente al desarrollo y la mejora de la Educación Universitaria Tradicional. Desde esta perspectiva, la EaD es considerada como una fuente de nuevos recursos que pueden colaborar en el progreso de la educación tradicional actual. Berger Ehrlich (2002) señala que las instituciones académicas están explorando un cambio en la educación presencial, utilizando estrategias de la EaD.

Con el término "estrategias" (Bernardo Carrasco, 1995) nos referimos al conjunto de actividades, técnicas y medios que se instrumentan para la mejoría de los procesos de aprendizaje, de acuerdo con las necesidades y conocimientos previos de los alumnos, los objetivos del proyecto y la naturaleza de la asignatura. Por ello, se plantean las siguientes estrategias de la EaD integradas en esta experiencia en la educación tradicional:

- *La labor tutorial*: El tutor es uno de los elementos que reemplazan la intervención sistemática del docente. Se trata de un orientador-facilitador-nexo-colaborador que sólo ayuda al estudiante cuando éste lo necesita, respetando sus tiempos para que lleven adelante su aprendizaje de manera autónoma, contando con consultas ya sea presenciales en la universidad, o virtuales vía mail. Kennedy (2002) a través de un análisis comparativo observa que el tiempo de comunicación entre el docente y el estudiante es un 30% mayor en la EaD que en la Educación Presencial. Romero Jaén, Sáiz Noeda, Verdú Mas y Vicedo González (2003) encontraron mejorías en los resultados académicos de un curso en el que se complementa el aprendizaje tradicional con un sistema de tutorización con foros telemáticos. Bender, Wood y Vredevoogd (2004) indican que la asistencia tutorial permite una mejor 'optimización del tiempo' de los alumnos.
- *La incorporación de un hipertexto como material didáctico*: Las ventajas que presenta son múltiples; la interactividad, adaptabilidad, autocontrol, variedad o versatilidad del programa y contenidos actualizables constantemente. Vrasidas y Glas (2002) describen experiencias educativas en las que la integración de medios interactivos en la educación presencial promueve experiencias de aprendizaje significativo. Carswell y Thomas (2000) describen cómo un proceso educativo apoyado en los ambientes virtuales, y organizado en grupos reducidos, promueve el aprendizaje colaborativo.

La aplicación de ambas estrategias condujo a plantear una nueva modalidad de aprendizaje orientada al *'aprender a aprender'*, articulando procesos de *aprendizaje* *autónomo* (Sarramona López, 1999), y de *trabajo colaborativo.* Aunque estos conceptos parezcan opuestos, la articulación entre ambos se da en el vértice en que éstos permiten que el alumno logre su independencia en el aprendizaje, respecto a la figura del profesor, pero sostenido por la colaboración mutua entre pares, propiciando el aprendizaje horizontal y la "autonomía en colaboración".

Marco Metodológico

Se trata de una Investigación Evaluativa, que implicó la indagación reflexiva del docente-investigador sobre su propia práctica, enmarcada en la Investigación-Acción y su vínculo con la Investigación Participante. El análisis de la información obtenida fue organizado en 3 fases. Con el término 'fases' se hace mención a los aspectos de un mismo proceso que no responden a una linealidad temporal o espacial, sino que muestran la simultaneidad con que fueron llevadas a cabo.

La experiencia que se describe se desarrolló en el marco del dictado de la asignatura Matemática I en los años 2003, 2004, 2005 y 2006. Se trabajó con dos comisiones divididas en 4 subgrupos en forma aleatoria. Dos subgrupos constituyeron el grupo control, asistiendo a las clases teóricas y prácticas tradicionales de la cátedra y los otros dos conformaron el grupo tratado trabajando con la nueva modalidad, a través de tutorías presenciales dos veces por semana y virtuales vía mail e incorporando el hipertexto como material didáctico. Se conformó una lista de correo electrónico de los estudiantes, los tutores y la docente, con el fin de mantener un contacto multidireccional permanente, ya que estos alumnos no asistían a las clases teóricas y prácticas dictadas por la cátedra.

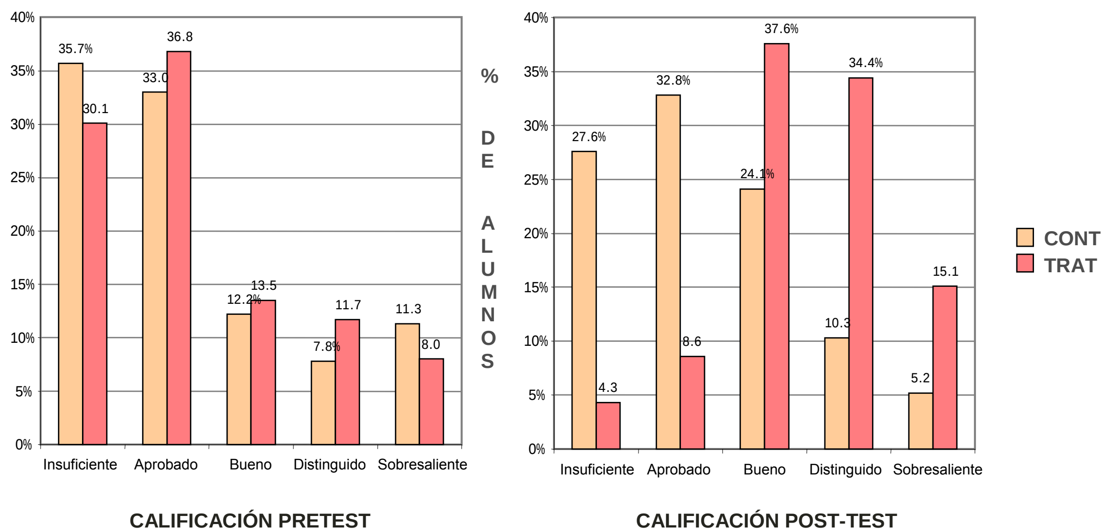
Primera Fase

Objetivo: *"Describir y comparar el rendimiento académico de los alumnos a través de un Diseño Cuasiexperimental".*

En el diseño cuasiexperimental se trabajó con un grupo tratado y un grupo control formados por 1507 alumnos, donde ambos recibieron un pretest y un postest. Se consideró como variable independiente la *aplicación de estrategias de EaD* y como variable dependiente el *rendimiento académico* de los alumnos a través de la calificación obtenida en los exámenes. El análisis de los datos apoyó la hipótesis a favor de un mayor rendimiento académico del grupo tratado con respecto al grupo control a través de los años 2003, 2004, 2005 y 2006. Es decir, todos los test fueron estadísticamente significativos. Veamos algún caso, por ejemplo el año 2003.

A continuación se presenta la comparación de las calificaciones obtenidas en el año 2003 por el Grupo Tratado y el Grupo Control antes de la aplicación de la nueva Modalidad (Pretest) y luego de ésta (Post-Test).

Calificación según grupo de pertenencia. Año 2003

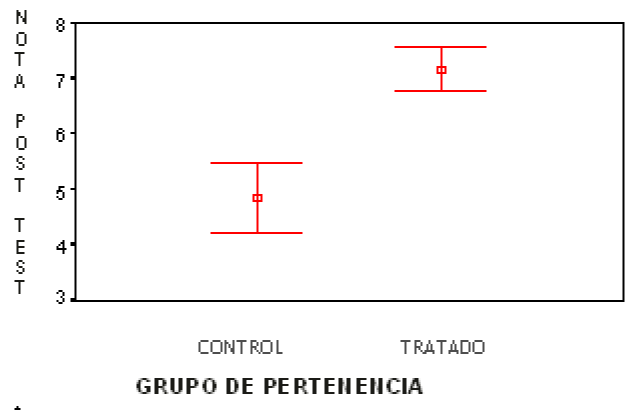


En el Pretest la distribución de las calificaciones no difiere significativamente entre los grupos como lo muestra su p-value asociado de 0.593.

En el Post-test -después de aplicada la nueva modalidad las calificaciones obtenidas difieren significativamente como lo muestra su p-value asociado de p<0.000

Otra forma de ver esto último, se presenta en el siguiente gráfico:

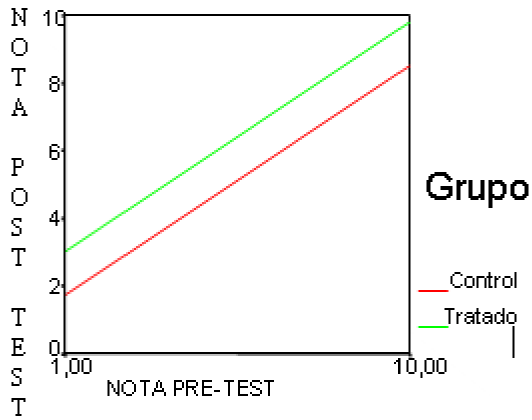
Intervalos de Confianza del 95% para la Calificación promedio del Post-Test según Grupo de Pertenencia. Año 2003.



En el Post-Test hay una acentuada diferencia en la *calificación promedio* según el grupo de pertenencia. Con un 95% de confianza, la calificación en el Post-Test es mayor (entre un punto y medio y tres puntos) en el grupo tratado que en el grupo control. Con esto, puede decirse que el grupo de alumnos que cursó la asignatura bajo la nueva modalidad en el año 2003 obtuvo calificaciones notablemente superiores a las obtenidas por el grupo control, que continuó trabajando con la modalidad tradicional.

Para aumentar la precisión del análisis se plantea un modelo de regresión lineal considerando como variable dependiente o variable respuesta la *calificación obtenida en el post-test* y como variables independientes la *calificación obtenida en el pretest* y el *grupo de pertenencia*.

Rectas de regresión comparando grupo tratado y control,
Años 2003, 2004, 2005 y 2006



Como se observa en el gráfico, en promedio hay una diferencia positiva de aproximadamente 1,3 puntos en la calificación del grupo tratado con respecto al grupo control a través de estos años lectivos. Del análisis descriptivo y comparativo, corroborado con la técnica de Regresión Múltiple, pudo comprobarse que el grupo tratado obtuvo un rendimiento significativamente mayor que el control.

Conclusiones Primera Fase

Como resultado de los análisis estadísticos, se arriba a la conclusión que la aplicación de la nueva modalidad en temas de Matemática Básica Universitaria mejora el rendimiento académico de los alumnos.

Segunda Fase

Objetivo: *"Analizar la aplicación de la nueva modalidad a través de una Encuesta de Opinión a los alumnos desde un abordaje cuantitativo"*

Para este fase se realizó una Encuesta de Opinión a los alumnos del grupo tratado, cuyas variables fueron; *Conocimientos de Informática, Acceso a PC, Aprendizaje Autónomo, Motivación, Optimización del tiempo, Comprensión del tema y Preferencia sobre la modalidad tradicional*.

Se realizó un análisis descriptivo de estas variables y un ACM que permitió divisar posibles asociaciones entre las variables utilizadas en la encuesta en forma conjunta.

Conclusiones Segunda Fase

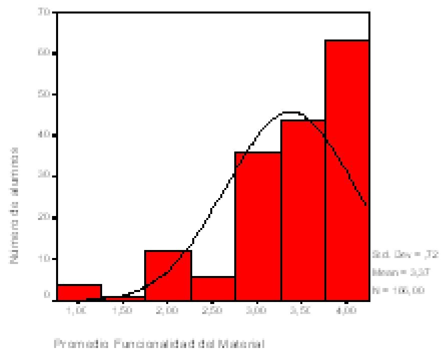
Entre las conclusiones puede mencionarse que los alumnos prefieren esta modalidad porque los motiva al aprendizaje y les permite una mayor comprensión de los temas. La labor tutorial optimiza su tiempo de estudio y facilita procesos de aprendizaje autónomo. La aplicación de la nueva modalidad no significó una mayor inversión de recursos materiales y humanos, sino el mejor aprovechamiento de los mismos.

Tercera Fase

Objetivo: "*Evaluar el diseño y uso del hipertexto como material didáctico a través de un cuestionario aplicado a los alumnos"*

Para evaluar el material didáctico se elaboró en una primera instancia un cuestionario de 77 preguntas a partir del cuestionario Anido (2004) y organizadas en grupos según las variables *Motivación – Grado de dificultad de las actividades – Trabajo Colaborativo – Diseño Gráfico – Transposición Didáctica – Aplicabilidad – Modelización - Funcionalidad del material*

Para obtener un instrumento confiable se aplicó el Coeficiente de Confiabilidad Alpha de Cronbach, que midió la coherencia interna de las respuestas en cada variable, y permitió reducir la cantidad de preguntas de 77 a 38, manteniendo alto el nivel de confiabilidad. Se reformuló el cuestionario y se aplicó nuevamente. La evaluación de cada una de las variables del cuestionario se obtuvo por medio de un análisis descriptivo. Como ejemplo de este análisis descriptivo se presenta uno de los sucesivos gráficos obtenidos, correspondiente a la variable Funcionalidad del Material:



Distribución de frecuencias para la variable Funcionalidad del material

Esta variable, al igual que las restantes, responde a un grupo de preguntas o proposiciones cuya respuesta se obtiene de una escala ordinal que se eleva de menos favorable a más favorable, es decir los alumnos encuestados deben asignarle un valor entre 1 y 4 a cada una de las proposiciones. En esta puntuación, 4 indica la aceptación total y 1; el rechazo total. Este histograma muestra mayor frecuencia de respuestas positivas o acuerdos favorables a la funcionalidad del material.

Se procedió en forma análoga con las siete variables restantes y en todos los histogramas se observó una importante asimetría izquierda, lo que implica una gran positividad o acuerdo favorable en las respuestas.

Conclusiones Tercera Fase

El diseño y uso del hipertexto permitió promover el Aprendizaje Autónomo y el Trabajo Colaborativo; optimizar el tiempo de estudio y cursado; motivar al estudio de los contenidos; facilitar la comprensión y propiciar el autocontrol de los procesos de aprendizaje por parte del alumno

Conclusiones Finales

En el contexto descripto, la investigación realizada muestra que la aplicación de la nueva modalidad

- aumenta el rendimiento académico de los alumnos,
- propicia un seguimiento personalizado de los aprendizajes de los alumnos, por parte de los tutores,
- promueve un Aprendizaje Autónomo, y a la vez Colaborativo.

Como aporte innovador a la enseñanza de la Matemática universitaria se ha logrado: la elaboración de un hipertexto como material didáctico y un instrumento confiable de evaluación del mismo.

Líneas Futuras

Continuar con el proyecto institucional, ya aprobado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad, profundizando esta línea investigativa; Diseñar y utilizar otros recursos informáticos (foros de discusión, chats, plataformas, etc.); y compartir la experiencia con otros docentes-investigadores promoviendo una cultura colaborativa.

Referencias Bibliográficas

Anido, M.- (2004) Los materiales curriculares en el desarrollo de las competencias de los estudiantes de Matemática- *Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria* – España: Universidad de Alicante

Bender, D.; Wood, B. y Vredevoogd, J.- (2004) Teaching Time: Distance Education versus Classroom Instruction (ERIC Document Reproduction Service Nº EJ 683 303)

Berger Ehrlich, D. (2002) Establishing Connections: Interactivity Factors for a Distance Education Course Educational Technology & Society, 5 (1)

Bernardo Carrasco, J.- (1995) *Cómo aprender mejor. Estrategias de aprendizajes.* Madrid: Rialp.

Carswell, L. y Thomas, P. (2000) Aprender en colaboración en un ambiente educativo distribuido, *Tecnología y Sociedad Educativa*, 3 (3)

Kennedy, D. (2002) Dimensions of Distance: A Comparison of Classroom Education and Distance Education (ERIC Document Reproduction Service Nº EJ 653 192)

Romero Jaén, R., Sáiz Noeda, M., Verdú Mas, J.L. y Vicedo González, J.L. (2003) *TeleTuVi: Foros Virtuales para procesos de Autorización.* Trabajo no publicado, Universidad de Alicante, Alicante, España.

Sarramona López, J. (1999) La Autoformación en una Sociedad Cognitiva – *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 2 (1), Barcelona. 41-60

Vrasidas, C. y Glas, G.V. (2002) *Current perspectives in Applied Information Technologies*. Volume I: Distance Education and Distributed Learning. Greenwich: CT Information Age Publishing.

ADQUISICIÓN DE LA NOCIÓN DE CANTIDAD: NIÑOS PREESCOLARES CON LENGUAJE LIMITADO

Ignacio Garnica y Dovala, Hilda Eneyda González Ortiz
Cinvestav – Matemática Educativa. IPN México
hgonzalez@cinvestav.mx, enegoo@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Percepción, cognición y/o lenguaje, Matemática Educativa Nivel: Básico

Resumen. *La investigación tiene como campo de interés, la percepción, cognición y el lenguaje, de comunidades con percepción auditiva diferenciada, frente a situaciones que implican nociones matemáticas relacionadas con la cantidad. Fue preciso conocer las condiciones iniciales de los niños, establecer supuestos en relación a la producción y adquisición de nociones matemáticas, integrando a la docente en un proceso de indagación. Con estos elementos se realizaron entrevistas preclínicas y clínicas. Se puso énfasis en conteo, agregación y seriación, al tiempo que se consideraron los elementos cognitivos: memoria, atención y acciones sobre los objetos. Obteniendo resultados positivos en: el conteo de colecciones mayores a veinte objetos y menores de treinta; la relación de correspondencia entre colecciones; la agregación de dos, tres y hasta cuatro colecciones.*

Palabras clave: noción, cantidad, cognición, audición diferenciada

Antecedentes

La investigación se realizó en El Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje (IMAL); institución de carácter privado, con reconocimiento internacional en implante coclear. Nace bajo la filosofía del oralismo; siendo su objetivo fundamental generar las condiciones para la adquisición del sistema lingüístico y el desarrollo de la producción oral.

Pregunta de investigación

¿Qué caracteriza a los procesos cognitivos relacionados con las nociones de cantidad, implícitas en actividades dentro del aula, cuando la percepción auditiva no es completa?

Objetivo

Reconocer la expresión: oral y escrita; de los niños que producen conocimiento matemático, dentro del aula, ante su condición de un déficit de audición y las formas en las que se expresa el pensamiento matemático, en nociones de cantidad.

Marco teórico

Los criterios de análisis de los acontecimientos en el aula se desprenden de trabajos relativos a la estructura y evolución del pensamiento del niño. Vygotsky, (2003), mediante una serie de observaciones y experiencias convincentes mostró que los procesos psíquicos se forman durante el desarrollo del niño, bajo la influencia de su educación, gracias a su contacto con los adultos y a la asimilación de la experiencia acumulada por la humanidad. (Piaget, 1978), explica que todos los organismos nacen con la capacidad de ajustar sus estructuras mentales o conductas a las exigencias del ambiente, utilizó los términos de *asimilación y acomodación* para describir como se adapta el niño al entorno, sostuvo que los niños no adquieren un verdadero *concepto del número* antes de la etapa de las operaciones concretas, cuando comienzan a entender las relaciones seriales y jerárquicas.

Sin entrar en un análisis detallado de las formas de comunicación se estudiaron generalidades sobre el lenguaje por la importancia en la adquisición y desarrollo de los conocimientos. En general se consideran normales los niveles auditivos para el lenguaje de 0 a 25 dB. El estado que se conoce como “debilidad auditiva” comienza a los 27 dB y la “sordera” a los 93 dB. En términos de niveles de audición encontramos una zona de incertidumbre de los 70 a los 90 dB promediada sobre las frecuencias de 500, 1000 y 2000 Hz. Dentro de esta zona algunos individuos son socialmente sordos, pero la mayoría de ellos tienen sólo una pronunciada debilidad auditiva, misma que puede ser altamente superada con el uso de auxiliares auditivos.

Escenario de investigación

El problema principal al que se enfrentan las personas que padecen sordera, en el sistema educativo nacional de nuestro país, es la falta de una política de planeación educativa que resuelva a través de las instituciones de educación especial las necesidades de los ciudadanos con este problema. Para el desarrollo de esta investigación, es necesario disponer de condiciones que permitan observar el quehacer del alumno, en un ambiente escolarizado. La *investigación en curso* se desarrolla en el Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje (IMAL) institución que nace bajo la filosofía del oralismo, tiene como propósito fundamental: propiciar las condiciones para generar acciones dirigidas a la integración educativa y social frente a este déficit sensorial, y apoyar el devenir vital de niños sordos o débiles auditivos.

La investigación se realizó con cinco alumnos, del IMAL, de 3º grado de preescolar. Cada alumno presenta características propias de percepción auditiva *diferenciada* (Garnica 2006 b) en cuanto al grado de afectación de la función auditiva, las que establecen diferentes manifestaciones: del pensamiento matemático, del lenguaje, del desarrollo cognitivo y de la personalidad en general.

El método queda definido por el órgano operativo de la investigación en curso."Sistema IMAL" fig. 1. (Ojeda, 2006).

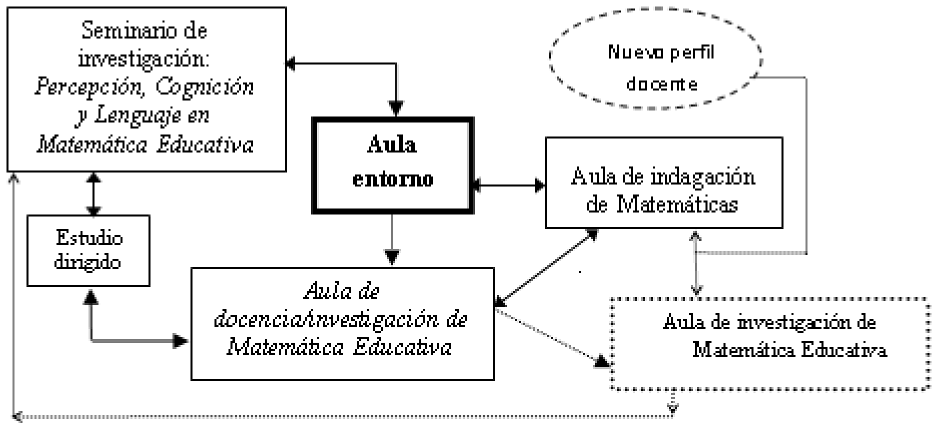


Figura 1. Órgano operativo de la *investigación en curso*. Sistema IMAL.

El espacio denominado *aula docencia/investigación,* se propone intercambiar experiencias con la docencia, la cual está inmersa en un proceso de indagación. Con este enfoque la docente planea mensualmente las tareas a desarrollar en el aula, por los alumnos, considerando el requerimiento institucional. El "*estudio dirigido*" se convierte en un órgano de reflexión conjunta pertinente al seminario que pone en juego las ideas de la indagación y la investigación en curso y que permiten el acercamiento a los objetivos planteados. De esta manera por ser en "*curso*" la "*investigación*" precisa sus términos hacia la consolidación de una respuesta a la pregunta planteada.

La investigación, dirigida por la pregunta, se incorpora al proceso de enseñanza en el aula, interviene y lo modifica a través de un proceso de indagación que inicia con la docente, estos cambios repercuten en factores que inciden en el aula: padres de familia, autoridades, personal docente de la institución y estudiantes en formación. La labor docente es compleja, las acciones realizadas en el aula reflejan la influencia de estos factores externos; para entenderla es necesario tenerlos presentes, dimensionarlos y actuar en consecuencia.

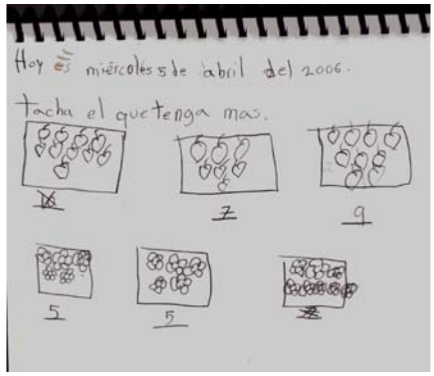
Resultados de los periodos: Preclínico y Clínico

Las entrevistas preclínicas se diseñaron con los resultados obtenidos del primer año de trabajo de investigación, en donde se precisaron las tareas a realizar por los alumnos con base en los supuestos planteados una vez analizados los resultados. Durante este periodo preclínico se entrevistó al alumno individual y colectivamente, se comentaron los resultados en el espacio de *indagación/investigación*, y se programaron las tareas propias de la entrevista clínica, donde cada respuesta dio lugar a nuevos supuestos, al planteamiento de nuevas interrogantes que dieron elementos para dar respuesta a la pregunta de investigación.

Periodo preclínico

Se intensificó el esfuerzo por reconocer las formas de conteo. Se propuso un trabajo con “colecciones” (Fuson, 1983) apoyada en las nociones de *mucho, poco, igual,* (formar colecciones de dos, tres, cuatro, cinco y hasta doce, elementos y distinguirlas a la percepción visual por la cantidad). Los alumnos reconocieron las colecciones de dos elementos y las llamaron *par*, de la misma manera la colección de doce, *docena* y la de diez, *decena*. Se sugirió un conteo de dos en dos, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco y de diez en diez. Gradualmente reconocieron una colección por la cantidad de objetos, agudizando su percepción visual.

El contenido matemático de las actividades propuestas a los alumnos en este estudio se centró en el núcleo conceptual: *Operaciones numéricas*. Se presenta el resultado de una actividad referente a noción de cantidad. La indicación fue: “tacha la colección que tiene más objetos”



2b

Figura 2. Noción de cantidad. Relaciones entre el numeral y los elementos de la colección.

El alumno tacha el numeral que colocó debajo de la colección. Fue necesario diseñar actividades que evidenciaran lo que representa para el alumno el numeral, los objetos de la colección y que relación establece con la cantidad.

Fueron evidentes las estrategias utilizadas por los alumnos, algunas de ellas: el orden de los objetos en una colección, el conteo por pares, la atención en la cantidad para determinar cuál de ellas tenía “más” o “menos” objetos. Estas estrategias favorecieron los procesos de clasificación (las distingue por la cantidad de elementos) y seriación (las ordena de mayor a menor o de menor a mayor).

Durante este periodo se presentaron dificultades lingüísticas como en el caso del determinante *“más”,* el cual sugería al alumno agregación. Ante dos colecciones: una de tres objetos y otra de cuatro, por ejemplo, la respuesta a la pregunta ¿Dónde hay más? la respuesta fue *ocho*. Respuesta que se observó en tareas desarrolladas en el aula.

Se diseñó una entrevista preclínica donde el determinante *más* sugiriera comparación, utilizando cantidades continuas como el *peso*. Se utilizaron materiales de diferente peso y tamaño procurando que los objetos de mayor tamaño no siempre fueran los de mayor peso, y que hubiera objetos de igual peso. Se formularon preguntas con el determinante *más* procurando que éste ocupara diferente lugar en el enunciado, por ejemplo: ¿cuál pesa *más*?, ¿cuál es el *más* pesado?, ¿el *más* pesado es*?,* ¿éste es el *más* pesado?, dame el *más* pesado. Se compararon objetos de diferente tamaño y peso, centrando siempre la atención en el peso. Al final de la entrevista, el alumno ordenó los objetos del mayor a menor por su peso, además de distinguir aquéllos que pesaban lo mismo. El tamaño del objeto no distrajo la atención centrada en el peso, una vez que distinguió los objetos más pesado, no fue necesario tomarlos para señalar el más pesado o el menos pesado.

Periodo Clínico

La programación de tareas durante el periodo clínico, se estructuró básicamente, bajo el perfil de la entrevista, considerando aspectos conceptuales matemáticos relacionados con la noción de cantidad, vinculados con la percepción: visual táctil, auditiva, cenestésica; teniendo presentes los procesos de cognición: atención, memoria y la representación (acción sobre los objetos).

Durante la entrevista los elementos de comunicación, para obtener información, se integraron a la tarea, se variaron los objetos para evitar la fijación en cualidades propias de ellos: forma, color, tamaño. Trabajando con cantidades continuas y discretas, favoreciendo la comunicación del contenido matemático.

La comparación de la cantidad de elementos de una colección con respecto a otra y la noción de relación. "Consciente o inconsciente asociamos, comparamos, clasificamos y evaluamos, al hacerlo, pensamos o hablamos de objetos a la luz de las *relaciones* que guardan con otros objetos" Peterson, (1999) "La noción de relación es una noción absolutamente general. El conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y en organizarlas en sistemas" (Vergnaud, 1998). Al comparar dos colecciones el alumno relaciona los elementos de ambas colecciones. "La propiedad común *cuatro* de todos los conjuntos que tienen cuatro elementos se basa fundamentalmente, para el niño en la posibilidad que tiene de hacer corresponder término a término, dos conjuntos cualesquiera de cuatro elementos" (Vergnaud, 1998).

En la tarea propuesta por la enseñanza, se indica a los alumnos que relacionen una colección de niños con una de vagones de tren. Bajo el siguiente planteamiento: *Ingrid tiene un tren de cinco vagones y tiene cinco alumnos. ¿Cómo puede Ingrid subir a sus alumnos?* La *figura 3* muestra la expresión escrita de *G* como respuesta al planteamiento anterior.

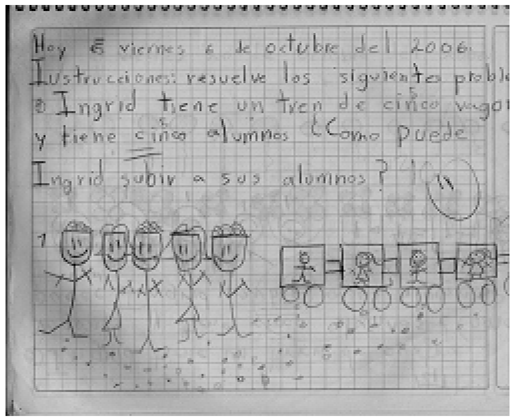
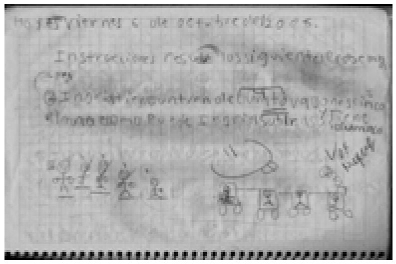


Figura 3. Noción de relación

G por medio de una secuencia de puntos, (estas sucesiones se diferencian por su color), ilustra la posible relación entre los elementos de una colección de cinco niños y otra de cinco vagones. Esta noción de relación entre objetos de diferentes colecciones, permitirá el desarrollo de nociones de equivalencia y de orden.

Esta misma actividad se modificó y ahora se propuso con cinco alumnos y cuatro vagones. Se presenta la respuesta de *M* (*véase figura 4*).

4a



4b

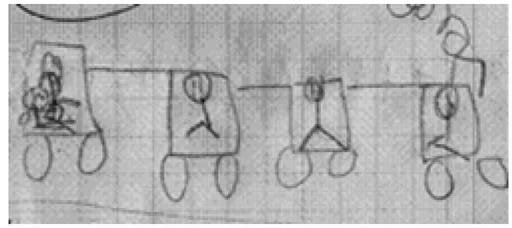


Figura. 4. Noción de relación.

La *figura 4a* muestra unas líneas trazadas por el alumno debajo de cada uno de los dibujos que representan a los cinco alumnos de la tarea planteada, al parecer son trazos que apoyaron la *noción de relación* entre los elementos de la colección de alumnos con la de vagones, lo mismo se puede considerar al observar las líneas que trazó *M* arriba de la cabeza de cada uno de los alumnos dibujados, cabe destacar el círculo que rodea al quinto elemento de la colección de alumnos (de izquierda a derecha) mismo que sugiere representar uno de los dos alumnos que colocó en el primer vagón del tren dibujado, *(véase figura 4b).* Como se puede apreciar los alumnos dan estrategias propias, que permiten observar sus nociones de relación.

Las tareas de agregación propuestas se realizaron con materiales concretos, para formar colecciones. "Las operaciones sobre los objetos consisten esencialmente en agrupar los objetos en una misma región para formar una colección." (Vergnaud, 1998). Se entenderá por "agregación" a la acción de agrupar en una misma colección. Una operación de agregación se analiza en términos de tránsito del plano de los objetos al plano de las colecciones.

Un ejemplo de este tipo de actividades se muestra en la siguiente *figura 5.*

Figura 5. Agregación.

El planteamiento fue: *Pepe tiene cinco canicas en una bolsa. Su papá le regalo tres canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pepe ahora.* Éste se presentó dibujando los datos y además dramatizando la situación con materiales concretos, con el propósito de asegurar que el contexto planteado era claro para los alumnos. La expresión escrita de los alumnos fue diferente. *G* expresó su respuesta como se muestra en la *figura 5*; dibujó la bolsa y dentro las canicas que representan las dos colecciones separándolas por medio de una línea, la línea puede sugerir un proceso de *agregación*.

Para observar el desarrollo de nociones matemáticas, específicamente de la noción de cantidad, ante la ausencia auditiva, se implementaron tareas que permitieron ver los avances cognitivos de los alumnos. Las acciones sobre los objetos, permitieron determinar el tipo de representación que el alumno considera ante la tarea planteada. La secuencia libre de sus acciones dio información de sus procesos cognitivos. Los resultados son evidencias positivas relacionadas con los procesos cognitivos pertinentes a la adquisición de las nociones de *conteo* (colecciones de cantidad de objetos mayor de veinte); *distinción por percepción visual de colecciones de hasta doce objetos, nominación de colecciones por su cantidad de objetos* (par, decena, docena); *de la relación de correspondencia* (respuestas correctas ante la comparación de cantidades de colecciones); *de la memoria de trabajo* (retención, ante el proceso de solución de la tarea, de cantidades de objetos de dos y tres colecciones); *de la agregación de cantidades* como consecuencia del desarrollo positivo de las tareas.

Referencias Bibliográficas

Fuson, K. (1983). The Development of Mathematical Thinking. *En The Acquisition of Early Number. Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review*. Compilado por Herbert P. Ginsburg. New York: Academic Press

Garnica, I. (2006 b). *Memoria del seminario de estudios sobre el Conocimiento Matemático ante la privación auditiva y la expresión lingüística limitada.* Reunión organizada los días 21 y 28 de junio del 2006 por los colaboradores del Cinvestav en el IMAL. (En prensa).

Ojeda, A. (2006). *Estudios sobre el conocimiento matemático ante la percepción y el lenguaje* Introducción a la lógica de los programas de indagación, investigación y docencia en el aula de Matemática Educativa. En Memoria del Seminario. (IMAL-Área de Ciencias de la Cognición), DME-Cinvestav del IPN. México.

Piaget, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático* Buenos Aires: Paidos

Peterson, J. (1999). *Teoría de la Aritmética.* México: Limusa

Vergnaud, G. (1998). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Editorial Trillas.

Vygotsky, L. (2003). *Pensamiento y Lenguaje.* México: Ediciones Quinto Sol.

MODELOS DE ENSEÑANZA SOBRE RAZÓN Y PROPORCIÓN

Elena Fabiola Ruiz Ledesma, Marta Elena Valdemoros Álvarez
ESCOM. IPN Cinvestav. IPN México
efruiz@ipn.mx, mvaldemo@cinvestav.mx
Campo de investigación: Números racionales y proporcionalidad Nivel: Básico

Resumen. *En el presente taller se trabajan algunos modelos pertenecientes a una secuencia de enseñanza que fue validada con dos grupos de sexto grado en dos escuelas primarias de la Ciudad de México. Esta propuesta de enseñanza corresponde al sustrato más elemental de razón y proporción, hace un recorrido partiendo de la revisión y el enriquecimiento del pensamiento cualitativo de los alumnos, se hace el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo hasta llegar a la cuantificación. El marco teórico que sustenta a ese taller parte de lo que acompaña a la producción del conocimiento mediante la forma en cómo los estudiantes enfrentan un problema de proporcionalidad y lo que piensan en torno a él, (es el caso de los trabajos de Piaget, 1978), así el uso de estrategias de solución a problemas sobre razonamiento proporcional. Se retoman los resultados obtenidos al trabajar estos modelos con estudiantes.*

Palabras clave: razón, proporción, pensamiento proporcional cualitativo, cuantitativo

Introducción

El taller fue pensado para una duración de 4 horas, en donde se abordaron tres aspectos fundamentales: el primero radica en el trabajo que se desarrollaría con los docentes que en esta Reunión Latinoamericana tomarían el taller, este trabajo radica en el desarrollo de algunos modelos de enseñanza provenientes de una secuencia didáctica, la cual surge de una problemática planteada como punto fundamental en una tesis doctoral (Ruiz 2002), el segundo está relacionado a la fundamentación teórica y didáctica de la secuencia, el tercer aspecto se refiere a algunos resultados que se encontraron al trabajar la secuencia didáctica con estudiantes de sexto grado y que serían mostrados a los docentes que participarían en este taller.

Marco Teórico

Algunos investigadores que se incluyen en este marco se enfocaron en todo lo que acompaña a la producción del conocimiento, en las que se exhibe cómo los estudiantes se enfrentan a un problema y lo que piensan en torno a él (es el caso de los trabajos de Piaget, 1978). Otros estudios examinaron la realización o los logros de los estudiantes y el uso de estrategias de solución a problemas sobre razonamiento proporcional como lo reportado en Noelting (1980); Karplus, Pulos y Stage (1983); Hart (1988); Lesh, Post y Behr (1988), etc.

Algunas investigaciones han llegado a ser extendidas a maestros en formación y maestros de la escuela elemental, en servicio.

Otros investigadores como Verganud, (1991), se interesó en las estructuras aditivas y multiplicativas y en el uso de la tabla para el reconocimiento del operador escalar y el operador función.

Los estudios de Kieren (1983) dan un amplio panorama en el trabajo de las fracciones y es él quien señala los distintos subconstructos de la fracción.

Enseguida se muestra el soporte didáctico:

Freudenthal: Razones internas y razones externas

Freudenthal, (1983), designa a las razones como entidades numéricas vinculadas a las proporciones y hace referencia al estatuto lógico de razón como una función de pares ordenados de números o valores de magnitud, marco en el que tienen una relación de equivalencia.

Para Freudenthal, en la enseñanza es preciso tomar en cuenta a las razones internas y a las razones externas, definiendo a las primeras como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud y a las segundas, como relaciones entre valores de diferentes magnitudes.

Esto último es fundamental para la secuencia de enseñanza.

Se hace referencia a la didáctica de la matemática como la actividad fundamental para la enseñanza de razón y proporción, así como la importancia que tienen las herramientas didácticas desarrolladas por el diseñador y sobre esto, se menciona la Fenomenología Didáctica de Freundenthal junto con otros antecedentes considerados para la construcción realista de las matemáticas.

Streefland recupera las definiciones de Freudenthal sobre razones internas y externas, en donde Freudenthal (1983) señala y Streefland (1991) ratifica que la distinción entre los dos tipos de razones se debe, originalmente, a dos diferentes tipos de procesos cognitivos en el sujeto:

Objetivos generales

- Trabajar dos modelos de enseñanza con los profesores para que reconozcan las estrategias que emplean al resolver las situaciones que se les presentan de razón y proporción con la finalidad de que realicen reflexiones en torno a su trabajo escolar.
- Mostrar a los profesores la secuencia de enseñanza llevada a cabo con estudiantes de sexto grado las estrategias que usa el estudiante al resolver problemas de razón y proporción simple y directa, para poder reconocer componentes cualitativos y cuantitativos del pensamiento ligado a estos tópicos y sus diversos modos de representación.

Metodología

Docentes integrantes del taller

Los participantes del taller son docentes que dan clases en nivel primaria y/o secundaria, dos de ellos tienen maestría en matemática educativa.

Diseño de la propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza estuvo integrada por ocho modelos de enseñanza, los cuales se retoman en diferentes sesiones ya que así fue conveniente para los fines que se perseguían.

En todas las sesiones se realiza una planeación previa en cuanto a los siguientes aspectos: Trabajo del estudiante. Dinámica del trabajo (individual, en equipos de trabajo y/o a nivel de todo el grupo escolar). Intervención, por parte de la profesora-investigadora, en los distintos momentos de la dinámica del trabajo. Retroalimentación de lo trabajado con los alumnos.

Modelos de Enseñanza

A continuación se muestran los modelos que se utilizaron en la secuencia didáctica y los propósitos que se persiguen.

Tabla 1 Organización de la propuesta de Enseñanza

Modelo	No.	Propósito(s)
Diseño de salones de fiesta	2	Reconocimiento cualitativo de la noción de proporcionalidad.
El Mundo de Blanca Nieves y los 7 enanos	7	Profundización de la indagación y enriquecimiento de las nociones de “reducción” y ampliación (ideas de la fotocopiadora o del dibujo a escala).
El mundo de Blanca Nieves y los siete enanos		Verificar la reducción de una figura usando algún instrumento de medida, para hacer comparaciones de naturaleza cuantitativa.
Elaboración de marcos para fotografías	2	Definir a la razón como una relación.
El gran problema de la huella	1	Utilizar la proporción a través de estimaciones.
Establecer propor ciones	3	Definir la proporción como una relación de igualdad entre razones.
Torneo de fútbol	2	Usar diferentes razones al trabajar la proporción.

Construye tu propia cancha	1	Poder trabajar un problema en donde use la razón para determinar las medidas. Usar diferentes modos de representación al trabajar la proporción.
La fotografía de tu equipo.	2	Trabajar con razones decimales, si llegara a darse el caso, al determinar proporciones. Usar diferentes modos de representación al trabajar la proporción.

Progresión de las tareas de enseñanza planeada para los docentes del Taller.

Para este taller sólo se emplearon los dos primeros modelos de enseñanza que aparecen en la tabla 1.

Se inició tomando las ideas de "reducción" y "ampliación" apoyadas en modelos del tipo de la experiencia del dibujo a escala y de la fotocopiadora, donde se maneja la situación de semejanza. Se continúa trabajando lo correspondiente a la medición de figuras para llegar a establecer relaciones con cantidades. Ahora las comparaciones son numéricas. Se llega al reconocimiento de razones como la comparación por cociente de dos magnitudes. Se trabaja la notación de la razón como una fracción a/b, con $b \neq 0$. Se utiliza la tabla como un modo de representación para la determinación de razones internas y externas. Se trabajan problemas de variación proporcional, en donde la obtención de cantidades no es sólo a través del uso del operador, sino estableciendo relaciones entre razones.

Para tener más claridad en lo trabajado con los modelos en este taller, se muestran algunos de ellos junto con lo realizado por los docentes:

Modelo 1. Diseño de Salones de Fiesta. En este modelo se debe dividir un espacio determinado para tres salones que serían destinados a niños pequeños, niños más grandes y adultos, así también tendría que destinar el mobiliario que le correspondería a cada salón, el cual tiene que ser proporcional al tamaño de las personas. El propósito del modelo es el reconocimiento cualitativo de la noción de proporcionalidad, para lo cual se trabaja sobre la integración del tamaño y la forma de los dibujos.

Modelo 2. El Mundo de Blanca Nieves y los siete enanos

En el segundo modelo se empleó el cuento de la literatura clásica “Blanca Nieves y los siete enanos”. Este modelo permitió ser trabajado a la luz de diferentes nociones; una de ellas es la noción de “reducción”, apoyada en la experiencia del dibujo a escala y de la fotocopiadora, para lo cual se solicitó a los maestros (al darles el material que consistía en una figura que representaba la cama de Blanca Nieves y 6 figuras para elegir la cama de los enanos), que hicieran una comparación entre la cama de Blanca Nieves con respecto a la cama de los enanos, usando argumentos de carácter cualitativo. De esta forma se trabajó la noción de reducción a través de tres vías: escrita, oral y empleando el dibujo.

Posteriormente se utilizó este modelo al abordar la noción de ampliación, también apoyado en la idea de la fotocopiadora y del dibujo a escala. En este caso se empleó otro mobiliario de la casa de los enanos que es la mesa, y los maestros debían seleccionar de entre cuatro opciones la mesa que correspondiera a Blanca Nieves. En esa selección emplearon argumentos de carácter cualitativo.

Posteriormente los profesores verificaron la reducción y la ampliación de las figuras usando algún instrumento de medida para hacer comparaciones de naturaleza cuantitativa. Se introdujo la tabla como un recurso para organizar datos. Se emplearon las frases “cuántas veces cabe.” o “qué parte representa de .”, al hacer referencia a la mitad y al doble de una magnitud. Después de comentar, tres equipos llegaron a seleccionar la cama correcta, mientras que dos equipos eligieron una cama diferente, la cual tiene el respaldo más pequeño y la otra tiene el respaldo más alto. Comentaron el por qué de sus elecciones.

Resultados análisis del trabajo con los profesores del taller

Ubicándose únicamente en el plano visual, algunos profesores tuvieron confusión al elegir la cama reducida, tres equipos seleccionaron la que estaba reducida mientras que dos equipos eligieron la que tenía el respaldo más pequeño, (ver figura 1 y 2, respectivamente). Después hicieron reflexiones sobre sus elecciones y emplearon, primero, la superposición, para determinar cuál es la figura reducida, posteriormente emplearon una regla como instrumento de medida, concluyendo que es la figura 1, ya que linealmente está reducida a la mitad en todos sus lados.

Emplearon una tabla para anotar los datos obtenidos de las mediciones, también usaron la notación de fracción (1/2) para representar la razón en la que se encuentra el largo del respaldo de la cama reducida con respecto a la original, el largo de la cama reducida con respecto al largo de la cama original; el ancho del respaldo de la cama reducida en relación al largo del respaldo de la original.

Cuando los profesores trabajaron con la figura de las mesas hicieron la selección correcta de la amplificación solicitada. Y procedieron de la misma forma que con la figura de las camas, es decir, emplearon la superposición, la regla como instrumento de medida, la tabla para vaciar los datos y la escritura de las razones como fracciones.

En la misma tabla determinaron las proporciones al establecer las equivalencias.

Por lo observado en el trabajo desarrollado con los profesores y por los comentarios que realizaron puedo decir que la mayor parte de ellos están muy acostumbrados a trabajar en lo numérico, no así en lo visual. Además de que el uso que se le dio a la tabla es diferente al que ellos le dan en sus clases. Comentaron que en la tabla se pueden leer las razones y las proporciones, por lo que concluyeron que es un registro de representación de las razones y proporciones más que una herramienta.

Los profesores señalaron la utilidad de este modelo para trabajar la razón 1 a 2 y dos a uno. Y comentaron que ellos podrían elaborar otras figuras para trabajar otras razones.

Figura 1. Cama seleccionada por tres equipos de profesores, cuyo argumento fue que es la reducida.

Figura 2. Cama seleccionada por dos equipos, señalando que tiene el respaldo más pequeño.

Finalmente, se les mostró a los profesores las respuestas que habían dado los estudiantes de sexto grado al finalizar el modelo de Blanca Nieves y los siete enanos con la finalidad de hacer comentarios sobre ello. Por lo que muestro dos preguntas con sus respuestas dadas por los alumnos de sexto grado a quienes se les aplicó este modelo:

1) *¿En qué te basaste para elegir la cama de los enanos y cuál de ellas elegiste?*
2) *Al comparar la cama de los enanos con la de Blanca Nieves ¿qué puedes decir?*

En cuanto a lo común de las respuestas dadas a la primera pregunta, se encontró lo siguiente:

En la forma y el símbolo.

En comparar tamaño y forma de las camitas con la de Blanca Nieves.

En las características que tiene la cama de Blanca Nieves.

Elegí la cama C

Elegí la cama D

Respecto a la segunda pregunta se encontró:

La cama de Blanca Nieves es más grande pero son iguales en el diseño y la forma del símbolo.

Son iguales en la forma, sólo de diferente tamaño.

Son las mismas camas sólo que una es más chica y la otra grande.

Es más pequeña la de los enanos, pero igual.

Es idéntica, pero más pequeña.

Comentarios de los maestros sobre lo realizado por los alumnos de sexto grado

Los profesores del taller realizaron los siguientes comentarios:

- *"Los alumnos usan un lenguaje más común que técnico",*
- *"No tienen desarrollado el aspecto visual".*
- *"Cometimos el mismo error que ellos al seleccionar la cama D (la del respaldo más pequeño".*
- *"Tienen buenas nociones de lo que es la reducción."*
- *" Son observadores, más que nosotros, pero debido a que no tienen ampliamente desarrollado el aspecto visual, eligieron la cama incorrecta".*

Conclusiones

Los profesores muestran la necesidad de trabajar en el pensamiento proporcional cualitativo antes de abordar el algoritmo. Señalaron que: El estudio de razón y proporción en sexto grado, debe partir de reconocimientos cualitativos para llegar hasta la cuantificación, pues de esta manera los alumnos primeramente encuentran el significado de términos que posteriormente rebautizarán con nombres empleados en el lenguaje de la matemática, lo que los conducirá a darles el sentido que tienen hasta llegar a la generalización de conceptos.

Referencias bibliográficas

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures:*Holand D., Dordrecht: Reidel Publishing Company. 28-33, 178-209.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Concepts andoperations in the Middle Grades, 2.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of

Mathematics. 198-219.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. En: Zweng et al. (Eds.). *ICME Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, (506-508). Birkhauser Boston.*

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisitions of Mathematics Concepts and processes (45-90).* New York: Academic Press.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En: J. Hiebert y M. Behr. (Eds.). *Concepts and operations in the Middle Grades, 2.* Reston,Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 93-139

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part. I E*ducational Studies in Mathematics, 11-2.* 217-253.

Piaget, J. (1978). *Psicología del Niño.* Madrid: Ediciones Morata.

Ruiz, E. F. (2002). *Estudio de estrategias de solución y una propuesta de enseñanza de razón y proporción.* Tesis Doctoral. Cinvestav, IPN. México.

Streefland, L. (1991). *Fractions in RealisticMathematics Education.* Tesis Doctoral publicada por Kluver Academia Publishers.

Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS. UNA EXPERIENCIA DOCENTE

Mariana Morales Vilorio
Universidad Autónoma de Santo Domingo
mmorales500@hotmail.com, mmorales64@uasd.edu.do
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *Tradicionalmente, el aprendizaje de la factorización de polinomios ha sido uno de los tópicos más problemáticos para nuestros alumnos y alumnas, debido a la forma de "enseñanza", basada en reglas o pasos, según el caso de que se trate. Esta dificultad se presenta en los niveles medio y superior (pre-cálculo).En nuestra práctica docente y en los materiales impresos que hemos producido, hemos aplicado un enfoque diferente, a partir de los productos notables, los cuales se trabajan previamente mediante la técnica de taller. Se organizan las actividades de aprendizaje de tal forma que los alumnos y las alumnas descubren por sí mismos las propiedades, antes llamadas "reglas" y que eran dadas como un dogma que había que memorizar.*

Palabras clave: experimentación, aprendizaje cooperativo, aprendizaje significativo, comunicación efectiva.

Algunas reflexiones didácticas

El aprendizaje se produce en los que aprenden si el objeto de conocimiento tiene algún significado para ellos y si pueden relacionarlo con otros conocimientos previamente obtenidos. Es lo que llamamos el sujeto situado. El sujeto situado es el aprendiz ubicado en su realidad, en su medio, en un contexto, ya sea este físico, ambiental o cultural.

De esta forma se enseña al aprendiz a pensar y actuar sobre contenidos significativos y contextualizados, mediante procesos activos donde el sujeto cognitivo es aportante, no un simple receptor de conocimientos. Además, lo que aprende debe tener alguna aplicación, ya sea para educar el pensamiento, para agilizar los procesos posteriores de razonamientos, o para resolver algún problema o situación problemática o alguna otra función cognitiva.

"*Los tres aspectos claves que deben favorecer el proceso instruccional serán:*

a) El logro del aprendizaje significativo.

b) La memorización comprensiva de los contenidos escolares.

c) La funcionalidad de lo aprendido." (Díaz; Hernández, 1999, pág. 16)

Para el aprendizaje de la factorización de polinomios hemos organizado las actividades en forma de taller, de tal manera que los estudiantes tomen el control de ellas y desarrollen las estrategias que le permitan factorizar correctamente los polinomios, de acuerdo al grado de dificultad que corresponde a su nivel de estudios.

> *"…el pensamiento matemático se desarrolla entre los estudiantes en la medida en que ellos estén en condición de tomar el control de sus propias actividades matemáticas organizadas por su profesor."* (Cantoral; Farfán, 2000, pág. 56)

Aprendizaje cooperativo

Los estudiantes han aprovechado las ventajas del aprendizaje cooperativo, logrando que todos los miembros de cada grupo desarrollen las estrategias para la factorización de polinomios, a partir de los productos notables.

Según Frida Díaz y Gerardo Hernández, "*al realizar actividades académicas cooperativas, los individuos establecen metas que son benéficas para sí mismo y para los demás miembros del grupo, buscando así maximizar tanto su aprendizaje como el de los otros. El equipo trabaja junto hasta lograr que todos los miembros de grupo han estudiado y completado la actividad con éxito.*" (Díaz; Hernández, 1999, pág. 55)

Importancia de la comunicación en el aprendizaje de la factorización

La comunicación correcta es clave para aprender a factorizar polinomios y para cualquier otro tópico del campo del conocimiento matemático.

"*En el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, el lenguaje sí tiene un lugar privilegiado.*" (Mora y Wladimir, 2006, pág. 277).

Los estudiantes deben comprender correctamente los términos: factor, divisor, múltiplo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, monomio, polinomio, binomio, trinomio, cuadrado, raíz cuadrada, factores primos, polinomio irreducible, etc.

Además, deben saber interpretar los textos que leen o escuchan; deben comunicar correctamente los conceptos, las ideas, las expresiones algebraicas y las estrategias a utilizar en el trabajo matemático.

Es común entre los estudiantes confundirse al leer las expresiones algebraicas como:

"El cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2$ "y "la diferencia de cuadrados: a^2-b^2"

Confunden la factorización del trinomio cuadrado perfecto: "$x^2 - 2xy + y^2$" con la de la diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2$

Escribimos a continuación algunos ejemplos de los que trabajamos en el taller, organizados en grupos de tres (3) personas.

Actividad #1. Factorizando diferencias de cuadrados.

A) Desarrollen los productos siguientes, aplicando las propiedad del producto de la suma por la diferencia de dos cantidades: (a+b) (a-b).

a) $(x+9)(x-9) =$ ________________ b) $(6x-11)(6x+11) =$ __________

c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{5}\right) =$ __________ d) $(x+y)(x-y) =$ _____________

¿Qué tipo de polinomios han obtenido?

¿Qué relación existe entre los términos de los binomios obtenidos con los términos de los binomios factores?

B) Escribiendo de forma reflexiva estas igualdades, obtenemos otras igualdades equivalentes, las cuales deben completar en equipo.

e) $x^2 - 81 =$ ________________ f) $36x^2 - 121 =$ ______________

g) $\frac{x^2}{4} - \frac{9}{25} =$ ________________ h) $x^2 - y^2 =$ ________________

Cuando expresamos que: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, estamos factorizando (escribiendo en forma de factores) la diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2$, ya que (x + y) y (x-y) son factores primos entre sí.

Como pueden ver x^2 es el cuadrado de x. Además, y^2 es el cuadrado de y

En el caso (f): $36x^2 - 121 = (6x+11)(6x-11)$, puedes descubrir que: $6x$ es la raíz cuadrada de $36x^2$ y que 11 es la raíz cuadrada de 121.

La descomposición factorial de la diferencia de cuadrados: $36x^2 - 121$ es igual al producto de los dos binomios lineales $(6x+11)$ y $(6x-11)$

Analicen los casos (e) y (g) de la misma forma y escriban sus conclusiones.

Discutan sus conclusiones entre sí, acerca de cómo se factoriza una diferencia de cuadrados. Escriban dichas conclusiones. Luego factoricen la diferencia de cuadrados dada: $4x^4 - 25$

Completen la siguiente propiedad:

Si a y b son dos expresiones cualesquiera, entonces, $a^2 - b^2 = (a+ \quad)(\quad -b)$. (1)

La expresión: $x^2 - 5$, ¿se pude factorizar como una diferencia de cuadrados?

¿Cuál es el cuadrado de la $\sqrt{5}$ _____________ $(\sqrt{5})^2 =$ ________ ?

Efectivamente, $x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x - \quad)$. Completen la factorización.

C) Factorizar las diferencias de cuadrados siguientes, aplicando la propiedad (1)

1) $16x^2 - 64$ 2) $\frac{1}{y^2} - 4$ 3) $1 - 9x^2$ 4) $x^2 - 7$

5) Escriban otras diferencias de cuadrados y factorícenlas.

***Actividad # 2 Factorizando trinomios cuadrados perfectos*.**

A. Desarrollen directamente los productos siguientes, aplicando las propiedades del cuadrado de un binomio: $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$.

a) $(x+y)^2 =$ _______________ b) $(x+5)^2 =$ _________________

c) $(x-y)^2 =$ ______________ d) $(3x-4)^2 =$ _______________

Los polinomios obtenidos en cada ejercicio son trinomios cuadrados perfectos (t.c.p), por ser el desarrollo del cuadrado de un binomio. Observen las relaciones entre los términos de los binomios y los de los trinomios.

B. Escribiendo de forma reflexiva cada igualdad, obtenemos otras igualdades equivalentes, los cuales deben completan ustedes en equipo.

e) $x^2 + 2xy + y^2 =$ _______________ f) $x^2 + 10x + 25 =$ _______________

g) $x^2 - 2xy + y^2 =$ _______________ h) $9x^2 - 24x + 16 =$ _____________

La expresión: $(x+y)^2$, que equivale al producto: $(x+y)(x+y)$, es la forma factorizada del trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2xy + y^2$. Igual sucede con $(x-y)^2$ o $(x-y)(x-y)$, que es la forma factorizada del t.c.p: $x^2 - 2xy + y^2$

Analicen las dos igualdades: (e) y (g):

e) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ y g) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

Comparen los términos del t.c.p., $x^2 + 2xy + y^2$ con los del binomio: $x + y$.

Lo mismo hagan con el otro trinomio: $x^2 - 2y + y^2 \;\; y \;\; el\ binomio \;\; x - y$

¿En qué se diferencian los dos trinomios, $x^2 + 2xy + y^2 \;\; y \;\; x^2 - 2xy + y^2$?

¿En qué se diferencian las dos expresiones factorizadas, $(x + y)^2 \;\; y \;\; (x - y)^2$?

Hagan el mismo análisis con las igualdades (f) y (h), es decir, comparen los términos del t.c.p.: $\underline{x^2 + 10x + 25}$, con los del binomio: $x + 5$ y los términos del t.c.p: $9x^2 - 24x + 16$, con los del binomio: $3x - 4$.

En grupo, hagan la factorización de los trinomios:

$x^2 + 16x + 64 \qquad y \qquad x^2 - 16x + 64\cdot$

- Establezcan las características de los trinomios cuadrados perfectos.

Discutan y escriban sus conclusiones sobre cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Completen la siguiente propiedad.

Si a y b son dos expresiones cualesquiera, entonces, $a^2 + 2ab + b^2 = (\quad + \quad)^2$ y $a^2 - 2ab + b^2 = (\quad - \quad)^2$ (2)

C) Factoricen los trinomios dados, aplicando la propiedad (2)

1) $x^2 - 12x + 36$ 2) $x^2 + 14x + 49$ 3) $4x^2 + 20x + 25$

Escriban otros trinomios cuadrados perfectos y factorícenlos, si les parece oportuno.

Actividad #3 Factorizando trinomios cuadráticos de la forma: $x^2 + bx + c$

A. Apliquen la propiedad del producto de dos binomios lineales para desarrollar los productos dados:

a) $(x-3)(x-2)=$ ________ b) $(x+8)(x+6)=$ ________

c) $(x+7)(x-5)=$ ________

Los polinomios obtenidos son trinomios cuadráticos de la forma: $x^2 + bx + c$.

¿De acuerdo? Compárenlos.

B. Si escribimos las tres igualdades de forma reflexiva, obtenemos otras tres igualdades equivalentes, los cuales ustedes deben completar entre todos (as):

d) $x^2 - 5x + 6 =$______ e) $x^2 + 14x + 48 =$______ f) $x^2 + 2x - 35 =$______

La expresión: $(x-3)(x-2)$, es la forma factorizada del trinomio cuadrático: $x^2 - 5x + 6$.

Observen las relaciones que existen entre las constantes (- 3) y (- 2) y los coeficientes (- 5) y 6, del trinomio $x^2 - 5x + 6$.

Completen: $(-3)+(-2)=\underline{\quad ? \quad}$; $(-3)(-2)=\underline{\quad ? \quad}$

Analicen también la factorización del trinomio (e): $x^2 + 14x + 48 = (x+8)(x+6)$.

Describan las relaciones que existen entre los coeficientes del trinomio y los de los binomios factores.

Completen: 8+6=____?____; (8).(6)=____?____

….Hagan el mismo análisis en el caso de: $x^2 + 2x - 35 = (x+7)(x-5)$

- Discutan entre ustedes y escriban sus conclusiones acerca de:

1. ¿ Cómo se reconoce si un polinomio es un trinomio cuadrático de la forma: $x^2 + bx + c$?
2. ¿Cómo se hace la descomposición factorial?

Factoricen entre todos (as) los trinomios: $x^2 + 2x + 1$ y $x^2 - 2x + 1$.

Completen la siguiente propiedad:

En general, si b, c, p y q son constantes reales, entonces, $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$, donde: p.q=_____? y p+q = ___?___¡Completen! (3)

C. Factoricen los trinomios siguientes, aplicando la propiedad (3)

1) $x^2 - x - 6$ = 2) $x^2 - 9x + 20$ = 3) $x^2 + 11x + 10$ =

Estos son sólo algunos ejemplos de cómo se puede organizar las actividades de aprendizaje en ambientes donde no existen medios tecnológicos como computador, pizarra electrónica, etc., sino solamente lo esencial en una aula de clase de universidades estatales con escasos recursos para equiparlas con las nuevas tecnologías que eficientizan la educación. Existen programas con los cuales se puede trabajar la factorización a través de un computador, los cuales utilizan la estrategia de que los estudiantes trabajen para encontrar las soluciones.

Conclusiones

En nuestra experiencia, hemos comprobado algunas hipótesis, tales como:

El alumno aprende mejor si relaciona los nuevos conocimientos con los que ya posee.

El aprendizaje debe ser una actividad significativa para el aprendiz.

El profesor o la profesora debe organizar las actividades de aprendizaje analizando el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen los alumnos.

Cuando se parte de los saberes previos y se favorece la experimentación y el análisis para llegar a la conceptualización y a la generalización, el aprendiz "reconstruye" los conocimientos y se apropia de ellos, pasando entonces a la fase de la fijación, la aplicación y a la valoración de éstos.

Al relacionar la factorización de polinomios con las propiedades de los productos notables se produce ese enlace fenomenal de conocimientos que permiten un aprendizaje eficaz.

Referencias bibliográficas

Díaz, F., Hernández, G. (1999). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Un enfoque constructivista.* México: Mc Graw Hill.

Cantoral, F., Cordero, F., Farfán, R. (2000). Desarrollo de Pensamiento Matemático. ITESM. Universidad Virtual. México: Trillas.

Mora, D.; Serrano G. (2006). Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. GIDEM—Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática. La Paz: Campo Iris.

DIFICULTADES CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Jesús López Cahun, Landy Sosa Moguel
Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán México
jesus_2002mx@hotmail.com, smoguel@uady.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Medio

Resumen. *El presente reporte corresponde a una investigación realizada con el propósito de identificar cuáles son los factores que influyen en las dificultades de aprendizaje y los errores cometidos por alumnos del nivel medio superior al momento de manipular el concepto función. La identificación de los errores se realizó mediante la aplicación de instrumentos de carácter exploratorio elaborados a partir de un análisis epistemológico del concepto. Reportamos algunos factores de carácter cognitivo, epistemológico y didáctico que influyen en las dificultades que enfrentan los alumnos en el estudio de funciones en el ámbito escolar.*

Palabras clave: Funciones, ecuaciones, dificultades, errores

Introducción

Uno de los fenómenos que se repite en distintos cursos de matemáticas es la reducción de "aprendizajes" a la realización mecánica de procedimientos y algoritmos. Es decir, en el aula no se prioriza la comprensión de conceptos matemáticos y de sus significados, generando en los alumnos muchas concepciones que no son congruentes con las aceptadas por las matemáticas (Dolores, 2004). En cálculo, son diversas las dificultades y problemáticas en el estudio de funciones, pudiéndose observar un fenómeno como al que se hace referencia. Como menciona Artigue (1995), "…si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos (….) y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en el campo del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento…"

Los cursos de cálculo se desarrollan en torno al estudio de propiedades o aspectos asociados al concepto función, tales como: tipos de funciones, dominio, rango, derivada de una función, operaciones con funciones, etc.; siendo uno de los pilares más importantes para el cálculo y la modelación de situaciones y fenómenos en varios ámbitos profesionales y de la ciencia, de modo que los resultados y procesos en distintas ciencias pueden verse afectados por una inadecuada conceptualización y aplicación del concepto. Por lo tanto, se hace necesario conocer y entender las causas que propician la falta de comprensión del concepto para tener así un panorama general de cuáles son los puntos a atender si se pretende favorecer en los discentes su construcción a través de experiencias significativas.

La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de constitución del concepto función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes. Bajo este referente, nos propusimos identificar y clasificar los factores que influyen en las dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al aprendizaje de funciones y los errores aunados a éstas.

Metodología

Para desarrollar la investigación implementamos la ingeniería didáctica como metodología, en su primera etapa: análisis preeliminar. La investigación se desarrolló en tres etapas fundamentales, a saber: revisión documental, exploración y diseño de instrumentos y análisis e interpretación de resultados.

La primera etapa consistió en una revisión documental en busca de las prácticas de enseñanza y la evolución del concepto función. En la segunda etapa se elaboraron dos instrumentos consistentes en una serie de reactivos a modo de cuestionario. La elaboración de estos instrumentos se basó en el análisis de errores reportados en algunas investigaciones y en las definiciones, nociones e ideas sobre función identificadas en el análisis epistemológico. Los instrumentos se aplicaron a veinte estudiantes del cuarto semestre de bachillerato, quienes ya habían estudiado funciones en la primera unidad de su curso de Precálculo. Mediante el primer instrumento indagamos cuáles son las concepciones de función que tienen los alumnos; a partir de sus respuestas identificamos y clasificamos dificultades para el aprendizaje de funciones. El propósito del segundo instrumento fue analizar los errores asociados a una de las dificultades identificadas: discernir entre funciones y ecuaciones. La tercera etapa consistió en analizar e interpretar los resultados obtenidos con la implementación de los dos instrumentos a alumnos de un Colegio de Bachilleres del Estado de Yucatán, en orden de clasificar y explicar las causas de las dificultades detectadas e identificar errores conceptuales y procedimentales.

Marco de referencia

En la investigación se consideraron los aspectos didácticos y epistemológicos como marco de referencia de las prácticas de enseñanza que inciden sobre las dificultades en el aprendizaje de funciones y en orden de analizar las situaciones, contextos y obstáculos en el proceso de constitución del concepto función.

Tratamiento en la enseñanza de funciones. Las problemáticas que presenta el aprendizaje de funciones en el aula responde a una serie de dificultades propias de la naturaleza misma del concepto y de la forma en que comúnmente es enseñado, por ejemplo, podemos mencionar el hecho de que durante su enseñanza suelen presentarse diversas formas de representar al mismo objeto matemático (diagramas sagitales, conjuntos, gráficas, etc.), pero estas representaciones se hacen de manera aislada y no siempre se dirigen hacia la conceptualización de función como relación de correspondencia entre los elementos de uno a otro conjunto ni como relación entre variables.

Así mismo, existe una secuencia casi dogmática de presentar el concepto en el aula, siguiendo tres pasos concretos:

1. Presentación del concepto función mediante conjuntos. Es común que el primer paso para definir "función" a los alumnos es por medio de la representación de dos conjuntos unidos por una flecha, la cual recibe el nombre de función y es denotada por la letra **f,** en la que el profesor dicta la definición dada por Dirichlet. En la enseñanza de funciones, suele tratarse solamente su definición como correspondencia entre dos conjuntos, con poco énfasis en la regla mediante la cual se establece dicha relación de correspondencia entre los conjuntos dados; su definición como relación entre variables y las ideas de variación no se desarrollan en el ámbito escolar.
2. Expresión analítica de una función. Después, se denota una función como una expresión algebraica de la forma "*f(x)* = …"
3. Gráfica de una función. La función es representada en el plano cartesiano, mediante pares ordenados de puntos, obtenidos a partir de la tabulación de los valores de las variables independiente y dependiente.

Evolución histórica y conceptual de función. El estudio de la historia y evolución de los objetos matemáticos nos permite observar aquellos elementos que hicieron posible la construcción de los diversos conceptos matemáticos, como bien mencionan Farfán y Hitt, (1983) citado en (Sastre, et. al., 2005).: *"Existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible, la construcción de un concepto: todos estos son andamios de los que se vale el sujeto en su acción sobre el objeto, para acceder al concepto en sí, andamiajes con vida efímera que, circunstancialmente, son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto y donde el "error" y la sensibilidad a la contradicción desempeñan un papel importante*". Por otra parte, un análisis histórico de los conceptos matemáticos nos permite tener una idea intuitiva de cómo se desarrollan en la mente de nuestros alumnos, dada la similitud entre el desarrollo cultural y científico que ha mostrado el ser humano como especie y el desarrollo cultural y científico que muestra un ser humano a lo largo de su vida (Sastre, et. al., 2005).

A lo largo de la historia evolutiva del concepto existieron momentos que marcaron la pauta para su desarrollo, hasta su definición formal. Algunas de sus transformaciones fueron:

- En un principio las cantidades se describían de manera verbal o gráfica y no existía una idea abstracta de variable. El conteo implica correspondencia entre un conjunto de objetos y una secuencia de números para contar; de modo que las cuatro operaciones aritméticas elementales son funciones de dos variables.
- Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales y las ideas se desarrollan alrededor de cantidades variables independientes y dependientes sin definirlas específicamente. Una función se definía mediante una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, no utilizándose formulas (Sastre, 2005).
- Durante el periodo moderno, que comenzó a finales del siglo XVI, las funciones fueron consideradas como expresiones analíticas. Esto fue cuando Descartes y Fermat lograron que la aritmética y el álgebra superaran su subordinación de la geometría dando lugar a la construcción de nuevas curvas, mediante ecuaciones algebraicas, que antes no eran consideradas por no ser posible trazarlas con regla y compás.
- En 1692, Leibniz utiliza por primera vez el término función para referirse a cualquier cantidad que varia de un punto a otro en una curva, como la longitud de la tangente, la normal, subtangente y de la ordenada. Para él una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.
- En 1775, Euler define función como una expresión analítica "la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes".
- Dalembert, Euler y D. Bernoulli lograron que este concepto evolucionara y se enriqueciera cuando trataron de resolver el problema de la cuerda vibrante. En 1753,

Bernoulli formula la siguiente definición: "llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada *x*, y por constantes, ya sea algebraicamente o trascendentemente"

- En 1829, Dirichlet definió función como: "*y* es una función de la variable *x*, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable *x* en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable *y*. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia".
- La teoría de conjunto iniciada por Cantor (1845-1918) produce una nueva evolución del concepto de función, extendiéndose esta noción para incluir en su definición: *"toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjunto numéricos o no numéricos".*

La naturaleza cognitiva de esta investigación nos llevó a enmarcarla en la teoría de los campos conceptuales, al permitir localizar filiaciones y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual. Esta teoría nos permitió tener una perspectiva amplia de las filiaciones entre ecuación y función, en cuanto a conocimientos y conceptos se refiere.

Resultados

Con base en el análisis y la interpretación de las respuestas de los estudiantes en la aplicación del primer instrumento, identificamos las siguientes dificultades en el estudio de funciones.

- Distinguir entre variable e incógnita
- Enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables

- El manejo operacional arbitrario con funciones, como si fueran ecuaciones, en el desarrollo del tema por parte del profesor
- Discernir entre funciones y ecuaciones
- Que el estudiante enuncie la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se define una función
- Que el estudiante obtenga la inversa de una función y su gráfica
- Utilizar diferentes representaciones de funciones
- Obtener una expresión analítica o gráfica de una función que modele un fenómeno
- No se hace explicito el carácter unívoco de las funciones
- Analizar el comportamiento e interpretar la gráfica de una función

En la tabla siguiente, se reportan algunos factores de naturaleza cognitiva, epistemológica y didáctica que influyen en ciertas dificultades identificadas.

Dificultad	Cognitivo	Epistemológico	Didáctico
Obtener una expresión analítica o gráfica de una función que modele un fenómeno	Esquemas que responden a situaciones muy similares	La enseñanza el concepto ha tomado una dirección contraria a la génesis del mismo	Los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas o situaciones de variación
Confusión entre función y ecuación	Similitud de gráficas	Función como puente entre la geometría y el álgebra	Operar y manejar funciones como cualquier expresión algebraica. Sintaxis utilizada

A continuación reportamos los errores asociados a la dificultad para discernir entre funciones y ecuaciones, detectados según las respuestas que dieron los estudiantes en el segundo instrumento. Cada uno, se ejemplifica mediante alguna de las respuestas dadas por los alumnos (en cursiva) a los reactivos diseñados.

Error: Concebir una función como ecuación

Ejemplo. *"Es una ecuación que se puede expresar en una gráfica. Como* $f(x)=2$*, su grado es cero y es una lineal (la más fácil) o* $f(x)=(x^2+2)-3=0$*"*

Observación. Se puede apreciar como definen a las funciones como una ecuación con gráfica; de igual manera se puede mirar que estos conceptos parecen estar siendo asociados por medio de la representación analítica y la idea de ecuación.

Error: Identificar una expresión algebraica como una función por la notación típica o usual al representar esta última.

Ejemplo. "$3x^4+2x=-3$ *no es una función, porque no tiene nada que lo identifique como una función, no tiene f(x)"*. "$c(m)=2m+1$, *es una función porque* $c(m)$ *representa una función"*

Observación. Parece ser que los alumnos han asociado el concepto función a la presencia de una notación tal como $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc.

Error: Considerar que el dominio de una función siempre es el conjunto de números reales.

Ejemplo. Dominio: *"Son todos los que se encuentran en el eje de las x"*

Observación. Este tipo de error puede ser el causante de que los alumnos no consideren a las funciones de dominio discreto como tales.

Error: Identificar variables dependientes como independientes, y viceversa, en un fenómeno, problema o expresión analítica de una función.

Ejemplo. En uno de los casos en los que se les pedía identificar lo que varía e indicar cuál es la variable dependiente y la independiente, dos de los estudiantes respondieron:

E1:

i. La cantidad de dinero recibida en una tienda de telas por la venta de lino, si cada metro cuesta $25.
Variables: ancho de la tela
Variable dependiente: cada metro
Variable independiente: cantidad de tela vendida.

E2:

Variables: 1m= 25
Variable dependiente: x
Variable independiente: y

Observación. El alto porcentaje de respuestas de este tipo obtenidas, nos da la pauta para creer que esto no es casual, sino más bien resultado de prácticas en el aula en las que el lenguaje simbólico y el uso de variables carecen de sentido para los estudiantes. Sin importar su naturaleza u origen, los estudiantes no atribuyen algún significado a las variables.

Conclusiones

El análisis epistemológico y la identificación de las dificultades de aprendizaje y errores cometidos por los estudiantes, nos permitió establecer aspectos a tomar en cuenta en el diseño de actividades didácticas sobre funciones, como son:

- Los alumnos no son capaces de percibir, por si solos, el carácter unívoco de las funciones, por lo que esta característica tiene que hacerse explicita, ya sea por medio de actividades, problemas o por el profesor mismo.
- Las literales empleadas tanto en las ecuaciones como en las funciones suelen ser las mismas, por lo que es necesario presentar problemas en los que el uso de las literales tengan significados distintos, como variables en unos y como incógnitas en otros.
- La diversidad de elementos y representaciones en la enseñanza de funciones (dominio, contradominio, gráficas, tablas, diagramas, etc.) de forma aislada o sin

conexión, no favorece la construcción del concepto, dada la confusión que esto causa en el estudiante al mirar muchos objetos ahí donde el matemático no ve más que uno (Ruiz, 2000).

- La enseñanza del concepto función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la interacción de este registro con otros, como el gráfico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y modelación de fenómenos.
- La "definición" mediante conjuntos con la que se parte la enseñanza de funciones, limita y esconde el carácter variacional que poseen.
- La génesis histórica del concepto función debe ser referente sobre cómo se construye éste en la cognición de los alumnos y de la estructura del concepto.
- En ocasiones, los alumnos son capaces de reconocer las variables que intervienen en un fenómeno, sin embargo no pueden describir un fenómeno de carácter variacional.

En síntesis, es necesario considerar los aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos para el aprendizaje de funciones, en actividades y experiencias que promuevan el lenguaje y pensamiento variacional, la visualización y la modelación de situaciones o fenómenos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C., Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. *Epsilon, THALES*, 58, 20(1), 45-73.

López, J. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Ruiz, L., Rodríguez, J. (2000). La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función en enseñanza secundaria. En Cantoral, R. (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 265 - 290). Sevilla, España: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., Maldonado, S., Villacampa, Y. (2005). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19(1), 22-27.

SIGNIFICADOS ELEMENTALES Y SISTÉMICOS DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Luis E. Capace P., Mario Arrieche
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria. Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay — Venezuela
lcapace@cantv.net, marrieche@ipmar.upel.edu.ve
Campo de investigación: Pensamiento algebraico — Nivel: Básico

Resumen. *El presente trabajo consistió en caracterizar los significados elementales y sistémicos a los protocolos de respuestas dadas por un estudiante sobre ecuaciones de segundo grado y los puestos de manifiesto, en relación al mismo tema, por los autores del libro de texto que se utilizó de apoyo a la enseñanza y aprendizaje. Para tal fin aplicamos la técnica del análisis semiótico, generada del modelo ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003 y Godino y Arrieche, 2001), que nos permitió determinar el significado institucional de referencia y el significado personal declarado. También se identificaron conflictos semióticos, es decir; discordancias entre los significados personales e institucionales.*

Palabras clave: análisis semiótico, enfoque ontológico-semiótico, ecuación de segundo grado, significado personal y significado institucional.

Introducción

El enfoque *semiótico-ontológico de la instrucción y cognición matemática* (Godino, 2003) es una marco teórico para investigaciones en Didáctica de la Matemática, en el cual se considera que en todo proceso de estudio de la Matemática, están presente seis dimensiones, a saber: Epistemológica, cognitiva, mediacional, docente, discente y emocional. El fundamento del enfoque son los significados institucionales y personales del objeto matemático en estudio. El presente trabajo es un ejercicio de aplicación de la técnica de *análisis ontológico-semiótico para determinar significados* (Godino, 2003). De acuerdo a Godino y Arrieche (2001), ésta nos permite caracterizar los significados elementales y sistémicos o praxeológicos de un objeto matemático, presente en cualquier acto de comunicación matemática. Por otra parte, permite identificar situaciones que pudieran generar conflictos semióticos en los textos empleados en un proceso de estudio o durante la interacción didáctica.

Las diferentes dimensiones en que se presentan las entidades emergentes de la actividad matemática, se pueden resumir en: *Lenguaje* (escrito, oral, gráficos), *situaciones-problema* (tareas, ejemplos, técnicas), *conceptos* (definiciones), *propiedades* (proposiciones) y *argumentos* (justificaciones y validaciones). Estas dimensiones pueden asumirse desde las siguientes facetas: *Persona* (lo cognitivo) e *institucional*, *ostensiva* (perceptible) y *no ostensiva* (mental /gramatical), *extensiva* (ejemplo) e *intensiva* (concreto – abstracto), *elemental* (unitaria) y *sistémica* (compuesta) y *expresión* (significante) y *contenido* (significado).

En este informe presentamos conflictos semióticos que se manifestaron en el análisis del protocolo de respuestas dadas a una prueba sobre ecuaciones de segundo grado y en el libro de texto Amelli, y Lemmon (1998). Es importante resaltar que este era el libro de texto de apoyo a la enseñanza y aprendizaje que utilizó el estudiante que formó parte de este estudio.

Determinación de significados institucionales

En esta sección se analizará el significado institucional de *Ecuación de segundo grado* en el libro de texto antes mencionado. Debido al número de páginas requeridas para este artículo, mostraremos el análisis de algunos de los contenidos que presenta el libro en relación a este tema.

U0	*ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA*
U1	Como ya sabes, las funciones cuya variable es de grado 2, reciben el nombre de *funciones Cuadráticas.*
U2	Su forma general es *f(x)=ax2+bx+c,* donde *a,b y c* son constantes y $a \neq 0$.
U3	Trataremos ahora de desarrollar un método que nos permita encontrar los ceros (raíces) de la función cuadrática. Así se plantea *ax2+bx+c* = 0.
U4	Observamos que el doble signo de la raíz permite hallar los dos valores de la variable que hacen cero la función $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
U5	En general si el discriminante b^2-4ac es: > 0; la función tiene dos soluciones reales diferentes. = 0; la función tiene dos soluciones reales iguales. < 0; la función cuadrática no tiene soluciones reales.

TABLA 1. El texto y las unidades primarias

Praxis	*Lenguaje*	*Logos*
Situaciones: Búsqueda de una expresión que permita calcular los ceros o raíces de una ecuación de segundo grado. Cómo conocer la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado sin resolverla. *Acciones:* Cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado. Determinar cómo son las soluciones de una ecuación de segundo grado sin resolverla.	*Términos y expresiones:* Función cuadrática, ecuación de segundo grado, ceros o raíces, soluciones reales, suma producto, expresión, construir. *Notaciones:* *f(x)=ax2+bx+c* *ax2+bx+c = 0* $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ b^2-4ac	*Conceptos:* 1. Función cuadrática 2. Ceros o raíces de una función cuadrática. 3. Ecuación de segundo grado. 4. Discriminante de una ecuación de segundo grado. *Propiedades:* 2. *Si* b^2-4ac *> 0, entonces x1, x2∈ R y x1≠ x2* *3. Si* b^2-4ac *= 0, entonces x1, x2* ∈ *R y x1 = x2* *4. Si* b^2-4ac *< 0, entonces x1, x2* ∉ *R y x1≠ x2* *Argumentaciones:* Las justificaciones en U3.

TABLA 2. Entidades matemáticas (unidades elementales)

Unidades U1 y U2: En el libro de texto se presenta el tema de *Ecuación de segundo grado* (ESG) con una breve introducción de la función cuadrática. De esta manera vincula el nuevo objeto con el estudiado en los apartes anteriores y justifica su estudio ya que se hace necesario para determinar los ceros o raíces de una función cuadrática de manera analítica.

Unidades U3 y U4: En el libro de texto no se deduce la fórmula resolvente de una ecuación de segundo grado. Sólo presenta ejemplos de cómo usarla para determinar las raíces en diferentes ecuaciones. Al estudiar U_3 se puede inferir que esta es la única vía para resolver una ecuación de segundo, no explora otras alternativas de resolución.

Unidad U_5: En el texto se define el discriminante de una ESG y se caracteriza lo que significa que sea "mayor que cero", "igual a cero" o "menor que cero" en relación a las soluciones de la ecuación. La notación es incorrecta y puede producir aberraciones en el uso del lenguaje matemático.

Significado institucional pretendido

El análisis muestra, que la noción de *Ecuación de segundo grado* está ligada a un sistema de prácticas operatorias y discursivas que progresa a medida que el estudio se profundiza en un campo de problemas. También el análisis nos permite caracterizar los elementos del significado institucional del contenido matemático pretendido, al estudiar el objeto en base al Libro de Texto seleccionado. A continuación se presenta una tabla con esos elementos

<table>
<tr><td>Lenguaje:</td><td>Situaciones:</td></tr>
<tr><td>1. Ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$
2. Resolvente $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
3. Discriminante b^2-4ac
Raíces o ceros de una ESG x_1 y x_2.</td><td>1. El cálculo de las raíces o ceros de una función cuadrática.
2. En base al discriminante, conocer previamente al cálculo la naturaleza de las soluciones.</td></tr>
<tr><td>Acciones:</td><td>Definiciones:</td></tr>
<tr><td>1. Calcular las raíces de una función cuadrática.
2. Identificar la naturaleza de las raíces de una ESG sin resolverla.</td><td>1. Función cuadrática.
2. Ecuación de segundo grado.
3. La fórmula resolvente.
4. El discriminante.</td></tr>
<tr><td>Propiedades:</td><td>Argumentaciones:</td></tr>
<tr><td>De acuerdo a las soluciones de la ESG se puede conocer cómo corta al eje de las abscisas, la parábola que representa la función que conforma la ecuación.</td><td>Se deduce la fórmula o resolvente</td></tr>
</table>

Tabla 3

Determinación de significados personales

A continuación se analiza el protocolo de respuesta a una prueba sobre el objeto matemático estudiado.

	1. *Defina Ecuación de Segundo Grado*
U_1	Es una igualdad con una variable elevada al cuadrado y que se pueden calcular sus raíces que son los valores que anulan a $ax^2+bx+c=0$.
	2. *Geométricamente ¿qué representa las raíces de una Ecuación de segundo Grado?*
U_2	Si la expresión $ax^2+bx+c=0$ representa en el plano cartesiano una parábola entonces $x_1\ y\ x_2$ representan un único punto de corte con el eje de las abscisas respecto a la ordenada.
	3. *Resuelve* $12x^2-8x=15$
U_3	$12x^2-8x=15$ Utilizando el método de la resolvente se obtienen las raíces reales $12x^2-8x-15=0$ que anulan al polinomio. $x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4.12.(-15)}}{2.12}$ $x=\frac{8\pm\sqrt{784}}{24}$ $x_1=\frac{8-28}{24}=-\frac{5}{6}$ $x=\frac{8\pm\sqrt{64-(-720)}}{24}$ $x=\frac{8\pm 28}{24}$ $x_1=\frac{8+28}{24}=\frac{3}{2}$
	4. *Estudia la naturaleza de las raíces de la ecuación x^2- 2x +5 =0*
U_4	Al factorizar $x^2-2x+5=0$ mediante el método de la resolvente $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.5}}{2.1}$ $x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$ $x=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.5}}{2}$ $x=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$ Al observarse la cantidad sub-radical del discriminante, es menor que cero, esto implica que la ecuación sólo tiene raíces complejas.
	5. *Dada la ecuación $4x^2$ – 6x +3 =0 calcula la suma y el producto de sus raíces, pero sin resolver la ecuación.*
U_5	$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}=\frac{3}{4}$ $\mathrm{S}=-\frac{-6}{4}=+\frac{3}{2}$
	6. *Si x_1=2 y x_2= -1/3 construye la ecuación de segundo grado que tenga esas raíces.*
U_6	Construir la ecuación de segundo grado significa escribir el producto de dos factores binomiales para conseguir la expresión $ax^2+bx+c=0$ $(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow x^2+\frac{1}{3}x-2x-\frac{2}{3}=0\Rightarrow x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0$

TABLA 4. Protocolo de respuestas de Pedro a una evaluación sobre ESG

Unidad U_1: La definición que Pedro da como respuesta a la primera pregunta, “Es una igualdad con una variable elevada al cuadrado”, no está en sintonía con el significado institucional. Según lo que señaló Pedro $x^3+2x^2+1=0$ es una ecuación de segundo grado. Pedro no establece en esta definición la relación entre la ecuación de segundo grado y la función cuadrática.

Unidad U_2: En esta respuesta establece que la representación gráfica del polinomio que conforma la ecuación es una parábola y señala que x_1 y x_2 son los únicos puntos donde la parábola corta al eje de las abscisas. Este planteamiento se aproxima al significado institucional donde se asume que en x_1 y x_2 la parábola corta al eje de las abscisas.

Unidad U_3: Resuelve la ecuación por la misma vía (la fórmula) coincidiendo con el significado institucional manifestado en el libro de texto analizado. Pedro en ningún momento dudo en resolver la ecuación de esa manera ni comentó la posibilidad de hallar la solución por otros caminos. Parece que la utilización de la fórmula o resolvente presenta muy pocos conflictos semióticos, de allí que sea el método más utilizado para calcular las raíces de una ecuación de segundo grado.

*Unidad U_4***:** Pedro no presentó ningún tipo de conflicto al analizar el discriminante, al observar que éste es menor que cero, señaló que las raíces son complejas. Este término no esta presente en el texto debe provenir de la interacción con el profesor u otras fuentes.

Unidad U_5: Como lo presentó el libro texto, Pedro calculó la suma y el producto de las raíces de la ecuación $4x^2 - 6x + 3 = 0$, con las expresiones *S*=$-\frac{b}{a}$ y *P*= $\frac{c}{a}$ planteadas en el texto y que son consecuencia de la propiedad que existe entre los coeficientes de la ecuación y la suma y el producto de las raíces de la ecuación. En este sentido el significado que le dio pedro a esta actividad es coincidente con el institucionalizado.

Unidad U_6: En esta unidad Pedro construye la ecuación con el producto $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, a pesar de que escribe $(x \pm x_1)(x \pm x_2) = 0$. Aparentemente le genera menos conflictos desarrollar el producto y reducir los términos semejante para obtener la ecuación, que utilizar directamente la expresión $x^2 - Sx + P = 0$ previamente calculado *S* y *P*. En el libro se plantean los dos caminos con significado institucional. El significado que Pedro le da a la actividad es el mismo significado institucional.

Síntesis de conocimientos personales de Pedro sobre la ecuación de segundo grado.

A partir del análisis anterior, se pueden inferir algunas características del significado personal que Pedro atribuye a la ecuación de segundo grado. Es importante considerar lo delicado de esta inferencia ya que se hace en base a una evaluación escrita que presenta ciertas limitaciones. A continuación se presenta una tabla con esos elementos

Lenguaje:	*Situaciones:*
A excepción de la respuesta a la pregunta 1, donde señaló que una ESG "es una igualdad con una variable al cuadrado" en el resto de la evaluación uso un discurso matemático y un buen uso de los términos, notaciones y expresiones.	Conoce que la ESG permite calcular los puntos de corte de una parábola con el eje de las abscisas. Resolvió una ecuación con la fórmula. Analizó como son las soluciones de una ecuación de segundo grado dada, sin resolverla.
Acciones:	*Conceptos:*
Calcula las raíces de una ecuación utilizando la fórmula. Determina la suma y el producto de las raíces de una ecuación dada, sin la necesidad de conocer las raíces. Al construir la ecuación cuyas raíces le había sido dadas, no dudó en desarrollar el primer miembro de la expresión $(x- x_1)(x- x_2)=0$. De tal forma que Pedro tiene un significado del objeto ecuación de segundo grado que proviene de un sistema de prácticas y que en a veces no coincide con el significado institucional pretendido en el texto.	El concepto de ecuación de segundo grado que expone no lo tiene muy claro, ya que no está en correspondencia $ax^2+bx+c=0$. Tiene clara la idea que las raíces son los valores donde la parábola que representa la función se anula.
Propiedades:	*Argumentación:*
Hace buen uso de las propiedades del discriminante. Construye la ESG conociendo sólo sus raíces.	Argumenta geométricamente que representan las raíces de una ecuación de segundo grado. Argumenta en U_4 que por el hecho que el discriminante es menor que cero las raíces son complejas.

Tabla 5

Conclusiones

1. La dialéctica entre significados institucionales y personales en el análisis de las respuesta de Pedro a las preguntas de la evaluación, nos mostró las complejidades semióticas de las relaciones didácticas entre los significados institucionales (manifiesto en el libro de texto) y los significados personales (lo

que el sujeto aprende), esto sin considerar la actividad más rica en información como es la actividad de clase.

2. La dependencia entre los significados personales e institucionales se percibe, porque el significado de las expresiones e identidades que el sujeto debe apropiarse son consecuencia de la información y actividades propuestas por el profesor y las que se presentan en el libro de texto. Por ejemplo en libro de texto analizado, no se consideran otros métodos diferentes al uso de la fórmula lo que generará esa deficiencia en los estudiantes.
3. Por otra parte el orden de presentación de las informaciones y tareas debe adaptarse a los conocimientos del aprendiz que progresivamente ha venido adquiriendo. De alguna forma entonces los significados del estudiante condicional a los significados pretendidos. En el texto analizado se presenta primero la definición de ecuación de segundo grado, antes de presentar las prácticas que constituyen las razones de tal definición.
4. Con este pequeño ejemplo; el análisis de dos textos involucrados en un proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática como son las respuestas dadas a una prueba escrita por un estudiante y el libro de texto utilizado de apoyo, se pretende ejemplificar las bondades de está técnica en la caracterización de los significados personales e institucionales sobre un objeto matemático dentro de un proceso de estudio.

Referencias bibliográficas

Amelii, M., Lemmo, J. (1998). *Matemática 9*. Caracas: Salesiana.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Trabajo de investigación presentado para optar a la cátedra de universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada.

Godino, J. D., Arrieche, M. (2001). *El análisis Semiótico como Técnica para Determinar Significados*. Recuperable escribiendo a jgodino@ugr.es

LAS IDEAS PREVIAS SOBRE EL CÁLCULO INTEGRAL EN LOS ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE LA UNIVERSIDAD

Liliana Milevicich
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco, Buenos Aires Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico, Pensamiento geométrico, Pensamiento matemático avanzado, Visualización Nivel: Superior

Resumen. *La algebrización del cálculo diferencial e integral fue un producto de la corriente formalista en el siglo XX que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis. En la enseñanza universitaria, se ha puesto de manifiesto a través de un enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo, que se basa en las operaciones algebraicas con límite, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista los conceptos específicos del análisis, tales como las razones de cambio o la integral definida.*

Nuestro objeto de estudio han sido varias comisiones de alumno de primer año de la carrera de ingeniería. Los estudios exploratorios implementados sobre los conocimientos previos que estos alumnos poseen acerca del cálculo integral, un análisis detallado del material bibliográfico que utilizan los docentes en las escuelas de nivel medio con orientación técnica y de los escritos de los alumnos, permiten inferir que se enseña el concepto de integral como una antiderivada, poniendo el acento en los aspectos algebraicos.

Creemos que las dificultades que presenta el aprendizaje del cálculo integral en primer año de la universidad, son fundamentalmente atribuibles a esta situación de contexto, dado que estas ideas previas, fuertemente arraigadas, condicionan la adquisición de un nuevo conocimiento.

Palabras clave: cálculo integral, ideas previas, algebrización, visualización

Descripción del problema

Obstáculos epistemológicos en la enseñanza del cálculo

Uno de los fenómenos didácticos que se considera fundamental dentro de la enseñanza del Análisis Matemático es el de la algebrización del cálculo diferencial. Artigue(en Contreras, 2000: 72) habla de un “enfoque algebraico y reduccionista del cálculo” que se basa en las operaciones algebraicas con límites, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista las ideas y técnicas específicas del Análisis, como son la idea de razón de cambio instantáneo, o el estudio de los resultados de esas razones de cambio.

Explica Contreras (2000) que cuando el profesor explica una determinada noción matemática y, no aborda (o lo hace de forma superficial) los problemas característicos del Análisis, deslizándose hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar, produce una verdadera ruptura del contrato didáctico, denominado por Brousseau "efecto Topaze".[5]

Concepciones erróneas de los alumnos

La perspectiva de las concepciones de los alumnos es de fundamental importancia. A la hora de diseñar una propuesta de enseñanza aprendizaje del cálculo integral, estos aprendizajes previos pueden condicionar el logro de los objetivos propuestos. Llorens y Santonja (1997) realizan valiosas consideraciones acerca de las concepciones erróneas en los alumnos.

a) En primer lugar argumentan que frecuentemente*, los estudiantes identifican integral con primitiva*. En este sentido, en el cálculo de la integral, para ellos, no interviene ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado y, siempre, autocontenido, de modo que un alumno puede conocer distintos métodos de integración e, incluso, saber aplicarlos con cierta soltura (integrales por partes, de funciones racionales o trigonométricas, etc.) y, al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo que son las sumas de Riemann.

b) En segundo lugar, los alumnos identifican *las integrales definidas con la regla de Barrow,* incluso cuando ésta no pueda aplicarse. El caso más habitual es el de las integrales impropias con uno o más puntos intermedios con discontinuidad esencial.

---

[5] En una situación de aprendizaje, las respuesta que debe dar el alumno está determinada de antemano. El profesor escoge la pregunta acorde a la respuesta que desea obtener y si ésta no aparece, el profesor elegirá cada vez preguntas más sencillas hasta que el conocimiento buscado aparezca. En este sentido, se sugiere la respuesta haciéndola cada vez más transparente. Esto implica un fracaso completo del acto de enseñanza dónde el profesor toma a su cargo lo esencial del trabajo. Brousseau (1986)

c) Una tercer problema tiene su origen en *la falta de asociación entre la integral definida y el análisis de la convergencia*. En general, cuando específicamente se estudian las integrales impropias, a la mayoría de los estudiantes le parece muy sorprendente que una integral pueda ser divergente.

d) Finalmente, *no se integra el concepto de área con el de integral*. Es probable que los alumnos hayan advertido que existe una relación entre las integrales definidas y el área, pero no se trabaja con los alumnos sobre estos aspectos, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral. De hecho, es muy frecuente que esa interpretación de la integral como área sólo se utilice cuando expresamente se pida en ejercicios que típicamente empiezan con el enunciado: “Calcular el área encerrada por la gráfica de f(x)=.".

El alumno utiliza el contexto algebraico-formal en vez del visual-geométrico sencillamente porque no los ha integrado.

Consideraciones sobre la bibliografía

Una revisión de los libros de texto cálculo de los niveles pre-universitario y universitario, correspondientes a primer año, puede aportar pautas esclarecedoras sobre el origen de los obstáculos en el proceso de enseñanza aprendizaje. Se describen brevemente los modos de introducir el concepto abordado por tres autores diferentes cuyos textos son muy habituales en los cursos básicos de precálculo y cálculo.

1) Repetto (1981:136) introduce concepto de integral con una breve referencia al problema del cálculo del área para luego presentar los símbolos: $\int_a^b f(x)dx$, nombra a cada elemento constitutivo pero llamativamente no hace mención a dx.

La definición de integral definida pareciera ser independiente del significado geométrico. No se explicita la relación entre el área y el proceso de sumación y tampoco se muestran las etapas sucesivas en que la suma de los rectángulos se aproxima “geométricamente” al área.

Por otra parte, la definición de integral no es inducida a partir del límite de sumatorias y esto la convierte en una definición no algorítmica.

2) Sadosky y Guber (1980: 356-357), a diferencia del caso anterior “construye” la definición de *integral* como límite de una suma, pero lo hace en un contexto de fundamentación teórica, sin ningún auxilio gráfico. Por otra parte tal fundamentación teórica es muy débil ya que no introduce el teorema que garantiza la existencia de la suma, (Tall, 1986, en Turégano, 1998). Cabe señalar que, en general, el abordaje de las series numéricas y el estudio de su convergencia es muy posterior en la mayoría de las currículas.

3) De Simone y Turner (1996: 235) construyen el concepto de integral a partir de la aproximación mediante sumas superiores e inferiores de rectángulos. No solamente se prescinde del estudio de la convergencia de las respectivas series sino que:

a) no se explicita como obtener los mínimos y máximos en cada intervalo
b) no se establece relación entre las subdivisiones de intervalos y “dx” que aparece sin ninguna justificación formando parte del símbolo de integral.

Por otra parte, a partir de un análisis curricular, podemos ver que la secuencia de contenidos en el apartado de Cálculo Integral es, en general, en el orden siguiente:

1. Cálculo de primitivas.
2. Métodos de integración.
3. La integral definida. Regla de Barrow.
4. Aplicaciones de la integración: cálculo de áreas y volúmenes.

Esto implica considerar la integración, principalmente, como la operación inversa de la diferenciación. De esta manera el objetivo que se persigue es adiestrar a los estudiantes en el cálculo de primitivas y ello a base de repetir muchos ejercicios, exigiendo un considerable y progresivo nivel de destreza, por lo que se facilitan, incluso, trucos y recetas que contribuyan a ser más eficaces en la obtención del resultado. En los textos analizados aparecen frases tales como:”.el truco que facilita el proceso consiste en multiplicar numerador y denominador por.” o bien “.utilice la sustitución.”

Metodología

La exploración sobre las preconcepciones de los alumnos acerca del cálculo integral fue realizada sobre diferentes comisiones de primer año de ingeniería eléctrica y mecánica. El instrumento de recogida de información fue una evaluación escrita formada por 7 ítems. En la *consigna 1* se intentó averiguar de que modo los alumnos relacionan los conceptos de desplazamiento y velocidad con el concepto de integral. La *consigna 2* presentó una dificultad adicional: la relación con los aspectos geométricos a partir de la necesidad de realizar una estimación del área. En la *consigna 3* se pretendió averiguar de que modo los alumnos aplican la regla de Barrow, y sobre todo, si tienen en cuenta la continuidad de la función a evaluar en el intervalo propuesto. En la *consigna 4* se intentó conocer si los alumnos asocian el concepto de área con el de integral o bien si poseen una interpretación puramente algebraica del concepto. Teniendo en cuenta que los alumnos de primer año de ingeniería utilizan integrales definidas en física, en la *consigna 5* se presentó un problema típico de su utilización para relacionar velocidad y desplazamiento. En la *consigna 6* se intentó conocer si los alumnos identifican conceptualmente integral definida e indefinida y diferencian ambos conceptos. Finalmente la *consigna 7* estuvo destinada a explorar sobre el concepto de integral definida y su estrecha relación con el área que define.

Modelo de evaluación

- *Consigna 1*

La siguiente tabla representa los datos de un ciclista en una prueba por etapas

Día	Tiempo de la etapa (hs)	Velocidad media (Km/h)
Lunes	7	35
Martes	8	30
Miércoles	4	22
Jueves	7	28
Viernes	5	37
Sábado	10	24
Domingo	4	40

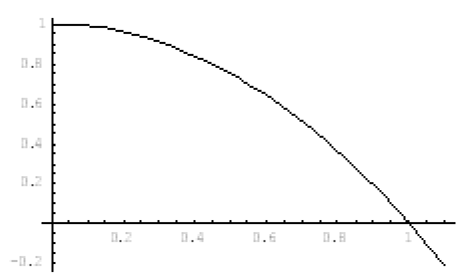
a) ¿Cuál día realizó un menor recorrido?

b) ¿Cuántos km. ha recorrido en la semana?

c) Represente los valores de la tabla mediante un gráfico de barras

- *Consigna 2*

Ahora la velocidad del ciclista está dada por una curva y se solicita estimar los km. recorridos hasta que el ciclista se detiene



- *Consigna 3*

Argumente acerca de la veracidad o falsedad del siguiente desarrollo.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

- *Consigna 4*

Calcule $\int_{-1}^{1} |x| dx$

- *Consigna 5*

Una partícula se mueve en línea recta y tiene una aceleración dada por a(t)=6t+4. Su velocidad inicial es v(0)=-6 cm/s y su desplazamiento inicial es s(0)=9 cm. Encuentre la función posición s(t).

- *Consigna 6*

Calcule

a) $\int (2x+5)dx$

b) $\int_{0}^{2} (2x+1)dx$

c) ¿Qué diferencias existen entre los dos cálculos solicitados anteriormente?

- *Consigna 7*

Calcule $\int_{2}^{2} x^2 sen(x)dx$

Los resultados fueron agrupados en tres grupos y para cada una de las consignas se exhiben los porcentajes respecto del total de alumnos evaluados en la tabla 1.

Consigna	Sin respuesta	Respuesta correcta	Respuesta incorrecta
1 a	3 %	88 %	9 %
1 b	3 %	88 %	9 %
1 c	12 %	63 %	15 %
2	70 %	22 %	8 %
3	27 %	0 %	73 %
4	67 %	15 %	18 %
5	20 %	35 %	45 %
6 a	0 %	95 %	5 %
6 b	0 %	95 %	5 %
6 c	58 %	0 %	42 %
7	100 %	0 %	0 %

Tabla 1

Las respuestas obtenidas aparecen como representativas de una desconexión profunda entre el concepto de integral y su particular imagen de ese concepto, tal como se evidencia en las respuestas a las consignas 2, 3 y 4. Particularmente en la consigna 3, las respuestas equivocadas no sólo indican que los alumnos no se ha percatado de que la función es discontinua en $x = 0$, sino que, claramente, no tiene una imagen visual del problema, ni de la gráfica de la función, ni de la propia integral entendida como área. Éste último aspecto también se observa en las respuestas de la consigna 7.

También se evidencia una ausencia de conexión entre los conceptos de integral definida e indefinida (consigna 6c). Ninguno de los alumnos evaluados pudo diferenciar conceptualmente la familia de funciones que representa la integral indefinida, del valor numérico que representa la integral definida.

La consigna 4 fue resuelta correctamente por un número pequeño de alumnos utilizando integrales, sin embargo, ninguno utilizó el atajo de calcular el área del triángulo (figura 1), pues, tal como manifestaron a posteriori, lo consideraron una trivialidad.

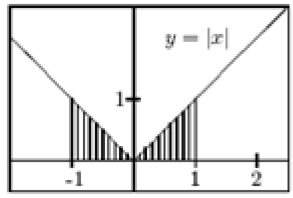


Figura 1

Consideraciones finales

El fracaso de los alumnos en la comprensión de los conceptos de cálculo, de manera más general, y de la integral definida, en particular, constituye uno de los problemas más preocupantes en el aprendizaje de análisis Matemático en primer año de las carreras de ingeniería, ya que esto obstaculiza la comprensión y resolución de numerosísimos problemas de aplicación.

El camino de búsqueda de la causalidad de este fracaso nos conduce a plantear la necesidad de un cambio de enfoque conceptual. Creo que una modificación en los conceptos matemáticos que enseñamos debe hacer referencia a la forma de concebirlos: un cambio concepcional más que conceptual, es decir un cambio en los procesos y representaciones mediante los cuales los alumnos procesan, en este caso, el concepto de integral. En ese sentido, me parece importante estudiar el origen y evolución del concepto de integral definida a lo largo de la historia, de tal manera que los alumnos puedan comprender el valor histórico de estos descubrimientos.

Por otra parte, la utilización del ordenador y la posibilidad, a través de su utilización de realizar enorme cantidad de cálculos y de visualizar las aproximaciones sucesivas, con el propósito de dar significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico*. (14a. ed.). México: Siglo XXI.(Trabajo original publicado en 1938)

Contreras de la Fuente, Ángel (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* España, Huelva. pp. 71-94

De Simone Irene y García de Turner, Margarita (1996). *Matemática 5*. (5ª edición) Buenos Aires, Argentina: A-Z Editora.

Llorens Fuster, José y Santonja Gómez, Francisco (1997).Una Interpretación de las dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas* vol. 5, Nº. 1/2 , pp. 61-76

Repetto, Celina (1981).*Manual de Análisis Matemático*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Macchi.

Sadosky, Manuel y Guber Rebeca (1980). *Elementos de cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires, Argentina: Alsina.

Turégano Moratella, P (1998) Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. E*nseñanza de las Ciencias,* 16 (2), 233-249

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL EN EL CONTEXTO DE PRIMER AÑO DE LA UNIVERSIDAD

Liliana Milevicich
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco. Buenos Aires Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado, Visualización, Lenguaje matemático Nivel: Superior

Resumen. *Atendiendo a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático, fundamentalmente aquellos relacionados con los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de la integral, he focalizado este estudio en diseñar un modo diferente de enseñar y aprender el cálculo integral, ponerlo a prueba y describir sus implicancias en cuanto al rendimiento académico de los alumnos.*

El diseño aplicado es de tipo pre-experimental de pre-prueba – tratamiento- post-prueba con un solo grupo. Las variables independientes fueron el diseño de enseñanza y los conocimientos previos de los alumnos sobre la integral definida. La variable dependiente fue el rendimiento académico.

Palabras clave: preconcepción, retroalimentación, argumentación, extrapolación

Fundamentación

Distintos autores han señalado un conjunto de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático, han estudiado sus orígenes y diferentes modos de abordarlo (Guzmán, 1989a, 1989b y 1996; Llorens y Santonja, 1997; Turégano, 1998; Contreras, 2000). Se señalan como dificultades esenciales: la comprensión de los procesos al infinito en la conceptualización del límite, de la derivada e integral y la utilización de los distintos modos de representación. También se asocia tales dificultades con el enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo y el abordaje simplista de los conceptos específicos del análisis, tales como las razones de cambio o la integral definida.

Orton ha trabajado durante largo tiempo sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo. Sus investigaciones en la Universidad de Leeds confirmaron que los alumnos tenían dificultades en el aprendizaje de los conceptos de cálculo: la idea de tasa de cambio, la noción de derivada como un límite, la idea de área como el límite de una suma (Orton, 1979). Cornu (1981) arribó a similares conclusiones respecto de la idea de "límite inalcanzable" y Schawarzenberger y Tall (1978) respecto de la idea de "muy próximo a .". Ervynck (1981) no sólo ha documentado las dificultades de los alumnos en comprender el concepto de límite sino que resalta la importancia de los procesos de visualización mediante aproximaciones sucesivas. En este sentido, los habituales gráficos encontrados en los libros de cálculo tienen dos problemas: son estáticos, con lo cual no pueden transmitir la naturaleza dinámica de muchos de los conceptos, y además poseen una variedad limitada de ejemplos, uno o dos generalmente, lo cual conduce a desarrollar en el alumno una imagen restringida del concepto en cuestión. (Tall y Sheath, 1983)

Atendiendo a esta problemática, he focalizado este estudio en *diseñar un modo diferente de enseñar y aprender el cálculo integral, ponerlo a prueba y describir sus implicancias.* La propuesta de abordar el estudio del cálculo integral desde una perspectiva geométrica, se sustenta en los procesos que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, de modo parecido al que el matemático activo utiliza al enfrentarse con un particular problema de matematización. Considero, parafraseando a Miguel de Guzmán (1989b), que la historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia y nos da pautas para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés.

Al proponer a nuestros alumnos las situaciones-problema en las que tuvo lugar la gestación de las ideas de las que vamos a ocuparnos, deberemos tratar de estimular su búsqueda autónoma, su propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de modo natural.

Metodología

Se aplicó un diseño de tipo pre-experimental de pre-prueba – tratamiento- post-prueba con un solo grupo. Las variables independientes fueron el diseño de enseñanza y los conocimientos previos de los alumnos sobre la integral definida. La variable dependiente fue el rendimiento académico. El objeto de estudio fue una comisión constituida por aproximadamente 35 alumnos de la carrera de Ingeniería Eléctrica.

Un estudio exploratorio sobre las características del grupo nos permitió detectar que varios de ellos poseían formación técnica. A partir del material bibliográfico que utilizan los docentes en estas instituciones y los escritos de los alumnos se infiere que se enseña el concepto de integral como una antiderivada, poniendo el acento en los aspectos algebraicos.

Otro grupo estuvo constituido por alumnos que cursaban la materia en segunda o tercera instancia. Sólo unos pocos de ellos habían concluido el curso en años anteriores sin lograr regularizar la materia, con lo cual poseían algunas ideas previas sobre cálculo integral y sus aplicaciones, el resto del grupo poseían escasos conocimientos previos.

Se consideró necesario atender a la posibilidad de que las ideas previas condicionen la adquisición de un nuevo conocimiento o bien lo obstaculicen (Bachelard, 1975), fundamentalmente en aquellos alumnos que asocian la integral exclusivamente a procesos algebraicos. Es por ello que fue de fundamental importancia la realización de una prueba diagnóstica que permitiese explorar sobre las habilidades e ideas previas que tienen los alumnos respecto de la integral definida, cuyas características y resultados se describen en el desarrollo de la experiencia.

La intervención programática fue pautada para 8 semanas con una frecuencia de 4 horas semanales, espacio habitualmente destinado al cursado de la asignatura Análisis Matemático I.

Las evaluaciones continuas que formaron parte de todo el proceso tuvieron un doble propósito: por una parte como retroalimentación de las producciones de los alumnos, y por la otra, como instrumento de recogida de datos que permitiera valorar la evolución de sus aprendizajes.

La realización de un postest permitió determinar los niveles de avance que se había logrado en el aprendizaje de los conceptos de cálculo integral en relación con los resultados obtenidos en las cohortes de los tres últimos años (2003, 2004 y 2005) y de que modo los saberes previos habían condicionado los distintos resultados académicos.

También se previó la implementación de una entrevista escrita al finalizar la intervención para conocer el grado de satisfacción de los alumnos y sus observaciones sobre la experiencia en la que habían participado.

Para la realización de la misma se contó de un laboratorio con 20 PCs y varias mesas de trabajo adicionales, apropiadas para el trabajo en grupos.

Desarrollo

Una prueba de pretest al inicio de la intervención permitió ubicar a cada alumno en una categoría preestablecida acorde con los siguientes niveles de la variable independiente:

Nivel 1: asocia el concepto de integral al de primitiva de una función y calcula integrales sencillas.

Nivel 2: asocia el concepto de integral al de primitiva de una función, calcula integrales sencillas y vincula el concepto con el área bajo la curva.

Nivel 3: asocia el concepto de integral al de primitiva de una función y vincula el concepto con el área bajo la curva.

Nivel 4: no posee conocimientos previos específicos asociados al tema.

Las características de las producciones nos permitió ubicar a la mayoría de los alumnos en los niveles 1 y 4. Cabe observar que quienes provenían de escuelas técnicas habían logrado un considerable nivel de destreza en el cálculo de integrales pero desconocían su vinculación con el concepto de área.

En cuanto a las características de la intervención, se pautó un trabajo sistemático para cada uno de los encuentros. En la primera parte se discutían los avances y dificultades de la práctica anterior, el propósito esencial era lograr que los alumnos analizaran sus propios errores, y en la segunda se trabajaba sobre nuevos conceptos, en el laboratorio de informática, a partir de un conjunto de actividades orientadas a promover que los alumnos conjeturen, experimenten, y luego extrapolen y argumenten. El uso del ordenador permitió disponer de una gama muy amplia de problemas, dónde la elección no fue condicionada por las dificultades del cálculo algebraico.

La primera parte de cada encuentro estuvo guiada por el docente titular de la cátedra, un docente auxiliar y un docente observador. La segunda parte contó con el mismo personal y un docente jefe de trabajos prácticos, adicional.

Se rediseñaron las técnicas de evaluación, de tal manera que el análisis de las producciones, facilitase al alumno el poder reflexionar sobre sus propios errores. Las evaluaciones continuas durante la intervención se implementaron a partir de:

a) las producciones de los alumnos plasmadas semanalmente en sus carpetas y cuadernos electrónicos. Éstos permiten guardar celdas con comentarios, observaciones, etc; material muy valioso a la hora de evaluar el grado de comprensión logrado por los alumnos,

b) la participación del alumnado en el desarrollo de las clases y en los grupo de trabajo.

En ese sentido, las planillas de seguimiento de actividades resultaron una herramienta eficaz para evaluar diferentes aspectos que hacen al desempeño de cada integrante (Planilla 1).

Pautas de evaluación	Alumno
Ha determinado necesidades de información	
Ha sabido evaluar constantemente su trabajo y los resultados	
Ha podido localizar y obtener información	
Ha logrado procesar y producir información	
Ha podido documentar (mantener registro de la información)	
Ha tenido éxito en manipular la información para obtener conocimiento	
Ha tenido éxito en manipular la información para obtener conocimiento	
Ha sabido comunicar información	
Ha sabido referir su aprendizaje (puede decir dónde empezó y donde terminó)	
Ha sabido referir las formas en las que aprende	
Ha sabido referir cómo los otros ayudan a su propio aprendizaje y cómo él contribuye al de los otros	
Ha sabido desarrollar una capacidad crítica de su propio trabajo y de su propio proceso	
Ha sabido desarrollar una capacidad crítica de su propio trabajo y de su propio proceso	
Ha sabido usar y construir estrategias para la resolución de los diferentes momentos de la tarea	
Ha sabido localizar diferentes caminos (procesos) para lograr el resultado	
Ha sabido usar y construir estrategias para el mejor uso y aprovechamiento de las herramientas informáticas	
Ha sabido identificar patrones, es decir, referir la lógica detrás los procesos para el uso de herramientas	

Planilla 1: Desempeño de los alumnos

Un resumen de las anotaciones realizadas por el docente observador a lo largo de las 8 semanas nos permitió inferir el cambio de actitud en un grupo de estos alumnos. De la población inicial, conformada por 35 cursantes, 24 de ellos mostraron cada vez mayor compromiso con el desarrollo de las actividades. El trabajo de retroalimentación llevado a cabo en la primera parte de cada encuentro, contó con la asistencia de todo el grupo a partir del cuarto encuentro.

El postest se pautó como evaluación de cierre del proceso, con actividades similares a las que habían formado parte de la experiencia.

- *Problema 1*

a) Calcule el área de la región determinada por las curvas $y=e^x$, $y=3$, $x=0$

b) Determine el volumen del sólido obtenido haciendo girar la región limitada por esas curvas alrededor de eje x

c) Suponga que eje de revolución está dado por y=k ¿Cuál deber ser el valor de k para que el volumen sea 16?

d) ¿Cuáles son los límites de integración: **a** y **b**, si se desea obtener un sólido alrededor del eje y, a partir de esta región?

e) ¿Varía el valor del volumen si se modifican los límites con un corrimiento hacia arriba de tal modo que el límite inferior es ahora **a+h** y el superior es **b+h**? Justifique su respuesta

- *Problema 2*

Proponga una función tal que el área bajo la curva entre 0 y n, se corresponda con el área del triángulo de base n y altura 1/n

- *Problema 3*

Encuentre el número k / la recta y=k divida la región limitada por las curvas $y=x^2$, y=10 en dos regiones con áreas iguales

- *Problema 4*

Sea la región determinada por $S=\{(x,y)/ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq Tan(x) Sec(x)\}$

a) Encuentre valores adecuados para a y b de tal modo que la región resulte finita.

b) Estime el área en el ítem anterior con una aproximación de 50 subdivisiones

- *Problema 5*

Encuentre una función f y un número a tales que: $$6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$$

- *Problema 6*

Sea g(x)= $\int_1^{\cos(x)} \sqrt[3]{1-t^2}dt$

a) Grafique g

b) ¿Cuáles son los puntos críticos de g?

c) ¿En cuáles puntos g tiene máximos o mínimos?. Justifique su respuesta

d) Analice la concavidad de g

e) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g

Si bien el postest tuvo lugar en el laboratorio de informática y cada alumno pudo utilizar mismas las herramientas que durante la experiencia, algunos ítems pretendían evaluar una conceptualización que no requería del uso del software. Tal es el caso de los ítems 1c, 1d y 1d, dónde tuvieron importantes inconvenientes. Del mismo modo ocurrió con el problema 3.

No se presentaron mayores dificultades en relacionar derivada e integral en los problemas 5 y 6. Un grupo importante de alumnos utilizó correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo.

En general, no se presentaron dificultades en los desarrollos algebraicos. Es posible que estos obstáculos no se hayan presentado, o al menos en una menor proporción, debido al uso del ordenador.

Cabe mencionar que no hubo diferencias sustanciales entre los alumnos que pertenecían a las diferentes categorías, según el pretest.

Los porcentajes de respuestas correctas, por ítem, sobre el total de 24 alumnos evaluados, se exhiben en el gráfico 1.

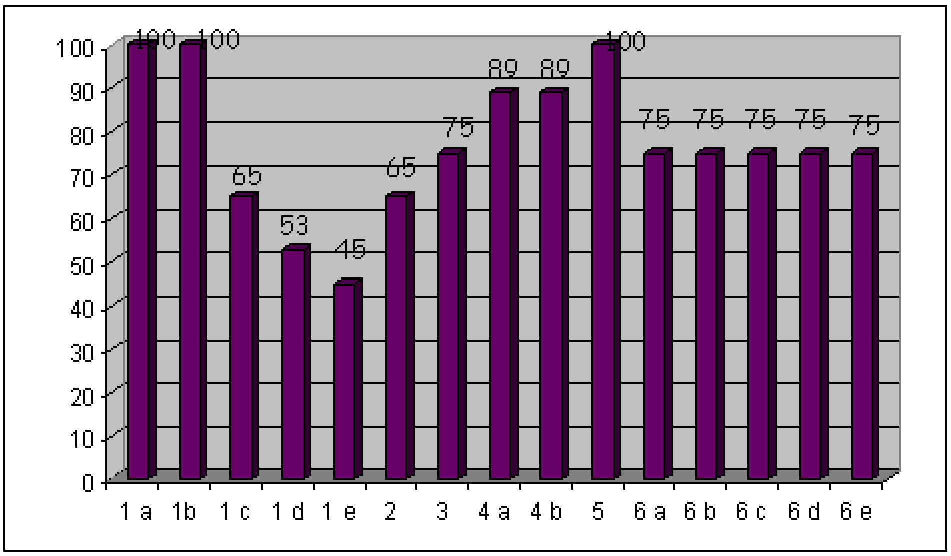


Gráfico 1: exhibe los porcentajes de respuestas correctas por ítem.

Conclusiones

El proceso de construcción del área a partir de la *sumación* que permite sumar infinitas cantidades infinitamente pequeñas resulta difícil de comprender por parte de los alumnos. El análisis del pretest permitió confirmar algunas conjeturas:

- Generalmente, los estudiantes identifican “integral" con “primitiva". La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico.

- Las integrales definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse.
- Los alumnos no asocian el concepto de área al de integral. Algunos de ellos han escuchado que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no realizan una adecuada unión entre ambas. Existe una interpretación puramente algebraica del concepto.

Respecto de los resultados de la intervención:

- La utilización de un software ad-hoc permitió a los alumnos visualizar la aproximación geométrica entre los rectángulos con base cada vez más pequeña y el área curvilínea que se pretende determinar.
- La utilización del ordenador constituyó una valiosa estrategia específica con el propósito de lograr aprendizajes significativos.
- Los resultados obtenidos en el postest permiten inferir que estos alumnos, en su gran mayoría, habían logrado establecer un puente entre la conceptualización de la integración y los problemas de aplicación relacionados con la ingeniería.
- Un análisis de los resultados del postest en relación con la categorización inicial, permite concluir que las ideas previas no condicionaron la adquisición de los nuevos conocimientos. No se observaron diferencias entre los alumnos categorizados en los niveles 1 y 4.

Referencias bibliográficas

Baçhelard,G. (1975) *La formación del espíritu científico.* (21ª edición). México: Siglo XXI.

Contreras, A (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* España, Huelva, 71-94.

Cornu, B.(1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. En *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME,* (pp. 322-326). Grenoble, France.

Ervynck, G.(1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function. En *Actes du Cinquieme Colloque du Groupe Internationale PME, (pp. 330-333). Grenoble, France.*

Guzmán, M y Colera, J (1989a). *Matemáticas II.* España. Madrid: Anaya.

Guzmán, M (1989b). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. Studia Paedagógica. *Revista de Ciencias de la Educación,* 21, 19-26.

Guzmán, M (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis*. España. Madrid: Pirámide.

Llorens, J y Santonja, F (1997).Una Interpretación de las dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas,* 5 (1/2), 61-76.

Orton, A.(1979). An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. En *Cognitive Development. Research in Science and Mathematics,* Universidad de Leeds (pp.201–215). Gran Bretaña.

Schwarzenberger, R. y Tall, D.(1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching*, 82,44–49.*

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 357–362). Israel.

Turégano, P (1998) Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. E*nseñanza de las Ciencias*, 16 (2), 233-249.

LA INTEGRAL DEFINIDA COMO OBJETO DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Ileana Pluss
Universidad Nacional de Rosario Argentina
ipluss@cablenet.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *El trabajo que se presenta se basa en la concepción de la Educación Matemática como ciencia de diseño (Wittman, 1995) y se enmarca en estudios didácticos e investigaciones sobre los procesos de aprendizaje de unidades curriculares, diseñadas y construidas como material de apoyo para la enseñanza de tópicos específicos, seleccionados por su valor conceptual en los programas de la llamada Matemática Básica en Facultades donde el carácter de esta ciencia es instrumental. El tema a tratar es "Integral definida" y se desarrolla a partir de un problema concreto de economía. Se presenta el desarrollo de las fases de una Ingeniería Didáctica correspondientes a los "análisis preliminares" y a "la concepción y los análisis a priori" (Artigue, Douady, Moreno, Gomez, 1995).*

En un trabajo predictivo se han determinado algunos obstáculos que caracteriza la teoría de Brousseau (1983).

Palabras clave: ingeniería didáctica, integral definida, enfoque geométrico

Justificación del tema y objetivo del trabajo

Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo conceptual del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de la matemática. (Artigue, y cols., 1995) Esto está reforzado por la propia experiencia docente y nos ha llevado a enfocar especialmente el tema "Integral definida".

¿Qué razones justifican esta elección?

- *Su valor conceptual*

Siguiendo el lenguaje de Douady, se nutre en los "cuadros" de la Geometría, el Álgebra, la Geometría Analítica, el Análisis Matemático.

- *Su valor formativo*

Estimula a reflexionar sobre los fenómenos de variación continua que llevan a adquirir las nociones de predicción, de acumulación y otras asociadas al concepto de integración.

- *El razonamiento lógico que exige*

Implica, entre otras cosas, manejar simultáneamente el concepto de área de una región plana y el de límite de una función.

- *Su estímulo a un pensamiento visual*

Va más allá de una simple visualización, exige operaciones de relación provocadas por dicha visualización.

Es pues el objetivo del trabajo, facilitar la comprensión del "concepto de integral definida" en el contexto de una Facultad de Ciencias Económicas.

Marco metodológico de la investigación

Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se ubica en el registro de los estudios de casos, cuya validación, esencialmente interna, se basa en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue et al, 1995).

La Ingeniería Didáctica incorpora una visión propia del aprendizaje de la matemática; si bien parte de una concepción constructivista del aprendizaje, se distingue dentro de este tipo de teorías por su modo de incorporar la relación entre el alumno y el saber. Los contenidos son el fundamento sobre el cual se van a desarrollar, de manera jerarquizada, las estructuras mentales. El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber, con el fin de optimizar su control y su reproducción.

Los contenidos matemáticos toman especial importancia, ya que no se pueden separar la concepción de la Matemática como Ciencia de su propio proceso de estudio.

En el diseño de la Ingeniería Didáctica al cual nos adherimos (Artigue et al, 1995), se realizará la distinción temporal en un proceso de cuatro fases:

1.- Análisis preliminar; 2.- Concepción y análisis a priori; 3.- Desarrollo de una experiencia y 4.- Análisis a posteriori y evaluación.

En este trabajo, se abordarán solo las dos primeras fases referidas al diseño del material didáctico, que implican una indagación epistemológica y una propuesta didáctica.

Análisis preliminar que ha guiado al diseño de esta unidad

Comprende en general: una dimensión epistemológica, una cognitiva y una didáctica**.**

Dimensión epistemológica

Nuestro diseño se basa sobre la validez matemática del conocimiento geométrico obtenido por visualización, y sobre la importancia de las operaciones de relación provocadas por dicha visualización.

Dimensión cognitiva

En nuestro diseño la planificación de la enseñanza del tema Integral Definida está basada en la localización de los obstáculos. Para Brousseau (1983) un obstáculo es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y fuera de dicho dominio puede ser fuente de errores y dificultades. La localización de los obstáculos inherentes al conocimiento de un tema, es esencial para la planificación de su enseñanza. En su determinación interviene la experiencia del docente y su interés en saber porqué el alumno comete los errores.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan:

> *"Suele haber cierta unanimidad en que los obstáculos se manifiestan mediante errores reproducibles, con cierta coherencia interna (no se trata de errores impredecibles y arbitrarios), persistentes (siguen apareciendo después de que el sujeto haya rechazado conscientemente el modelo defectuoso) resistentes (muy difíciles de modificar) y relativamente universales. En el caso de los que tienen*

> *origen epistemológico, se postula rastrear además en la génesis histórica de los conceptos en cuestión"* (p. 224).

En nuestro caso, el concepto de límite de una función de *una variable real visualizable en su movimiento sobre un eje aproximándose a un punto,* puede ser un obstáculo epistemológico para la comprensión del concepto de integral definida como límite de una función de *una variable "partición" cuyo movimiento es la disminución de las amplitudes de los intervalos.*

La introducción previa del concepto de antiderivada o integral indefinida, puede ser un obstáculo epistemológico para la comprensión del concepto de integral definida, debido a la similitud en el nombre y en la simbología de ambos conceptos.

El recurso adecuado de visualizar un área para introducir el concepto de integral definida, puede llegar a ser un obstáculo didáctico posible al avanzar sobre aquellos casos en que la integral no representa un área.

Dimensión didáctica

Nuestro diseño está centrado en la actividad del alumno. Las actividades que se proponen motivan el surgimiento de situaciones de exploración, formulación y validación generadas en el interés del alumno. Esta dimensión está condicionada por la cantidad de alumnos donde se realizará la experiencia, lo cual confiere gran importancia al diseño del material que deberá ayudar a un aprendizaje autónomo.

Concepción y análisis a priori

En esta etapa el "investigador diseñador" toma decisiones en cuanto a la elección de los contenidos. En nuestro diseño, esta elección se expone en los siguientes *objetivos*:

1.-Educar al alumno en una lectura completa y cuidadosa de un problema.

2.-Interpretar los datos y proponer soluciones aproximadas.

3.-Traducir al lenguaje matemático el límite de la suma inferior y de la suma superior de Riemann.

4.-Relacionar geométricamente el concepto de área con el de integral definida.

5.-Interpretar fenómenos de variación continua de los cuales se deriven problemas cuya solución exija una integración.

6.-Identificar la integral definida con el resultado acumulado de un proceso de cambios.

En la selección de los contenidos teóricos se decide:

✓ Enunciar la definición de Riemann de integral definida.

Prospectiva

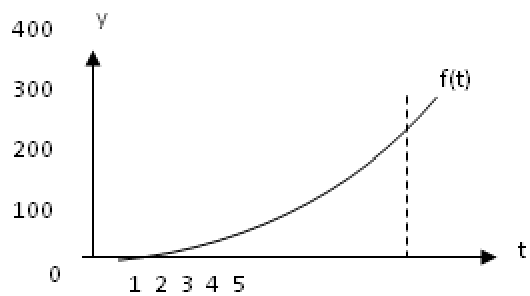
El "análisis preliminar" y "la concepción y los análisis a priori" presentados preparan el terreno para que, luego de la observación del desarrollo y de los resultados, se realice la confrontación de los análisis a priori y a posteriori y se puedan así validar las predicciones de aparición de situaciones adidácticas (Brousseau, 1986) que caracterizan el aprendizaje de un conocimiento matemático.

"La selección didáctica"(Artigue, 1995): el problema como eje que conduce y da significado a la definición de integral

Luego de un estudio apropiado, un fabricante de automóviles estima el gasto de mantenimiento de uno de sus modelos en función de la edad del automóvil, con el siguiente modelo: $f(t)= 100+10t^2$ donde t es la edad del automóvil en años y f(t) está dado en dólares. El fabricante desea conocer los gastos estimados de mantenimiento acumulados durante los primeros cinco años.

7.- Interpretación de los datos y algunas preguntas orientadoras

¿Cuáles son las características más importantes de f? ¿Cómo interpretamos en la representación gráfica de f, los gastos estimados acumulados de cero a cinco años?



f es continua, positiva y monótona creciente en todo su dominio; cuanto más años tenga el auto más dinero requerirá su mantenimiento. Así por ejemplo:

A los seis meses se estima un gasto en dólares igual a: f(0,5) = 100+10.(0,5)2 = 102,50

A los cinco años se estima un gasto en dólares igual a:

f(5) = 100+10.(5)2 = 350

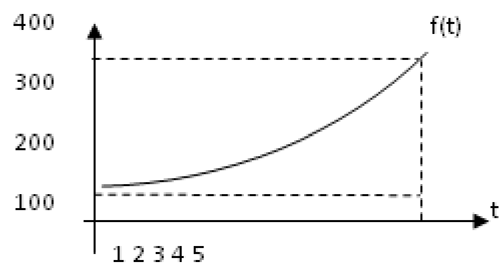
Obviamente los gastos estimados acumulados durante los primeros cinco años, tendrán un valor igual a la suma de todos los gastos que se espera se realicen durante dicho período de tiempo, es decir a “la suma” de todas las ordenadas f(t) desde t=0 hasta t=5.

¿Cómo se puede interpretar geométricamente esta suma?

Visualizamos en la representación gráfica de f que dicha suma es el área de la región limitada por la curva, el eje t y las rectas t=0 y t=5.

¿Cómo calculamos el área de esta región limitada por una curva? ¿Porqué no utilizar el método que empleó Arquímedes (siglo III a C) para calcular el área del círculo el cual consiste en dividir la figura en franjas mediante rectas paralelas y en los extremos de estas franjas aproximar los trozos de curva mediante segmentos?

Comencemos por considerar una sola franja, es decir trazar las paralelas por los puntos 0 y 5. Como f es continua en el intervalo [0, 5], alcanza un máximo absoluto (M_a) y un mínimo absoluto (m_a) en dicho intervalo, es decir que $m_a \leq f(x) \leq M_a \ \forall x \ \varepsilon \ [0, 5]$. Podemos así aproximar la curva en el intervalo [0, 5] por el segmento de altura M_a o por el de altura m_a.



Es evidente que el área que buscamos está comprendida entre las de los rectángulos de base 5 y cuyas alturas son m_a = f(0) =100 y M_a = f(5) = 350 Es decir: 5.100 < A < 5. 350

500 < A < 1750

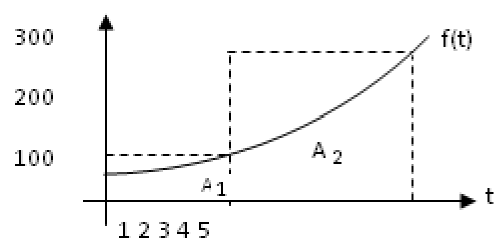
Notemos que el área del rectángulo más pequeño es una aproximación por defecto y la del rectángulo más grande es una aproximación por exceso del área que buscamos.

Continuamos con el método de Arquímedes partiendo el intervalo [0, 5] en subintervalos más pequeños. ¿Qué puntos elegimos para trazar las paralelas al eje Y?

Es evidente que 0 y 5 deberán estar siempre, y luego agregamos los que deseemos.

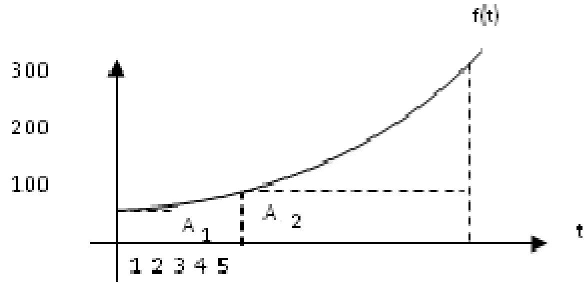
Supongamos que se nos ocurre elegir el siguiente conjunto de puntos: P = {0, 2, 5}. De esta forma el intervalo [0, 5] queda partido en dos subintervalos: [0, 2] y [2, 5], en cada uno de los cuales f alcanza un M_a y un m_a.

¿Cuáles son las aproximaciones por defecto y por exceso correspondientes a la partición del intervalo que hemos elegido? Utilicemos representaciones gráficas.



Visualizamos en la figura que el área que buscamos es menor que la suma de las áreas de los dos rectángulos que hemos llamado A_1 y A_2 , es decir:

$A < A_1 + A_2$ = 2. 140 + 3. 350 = 1330



Podemos observar en la figura que el área que buscamos es mayor que la suma de las áreas de los dos rectángulos que hemos llamado A_3 y A_4, es decir:

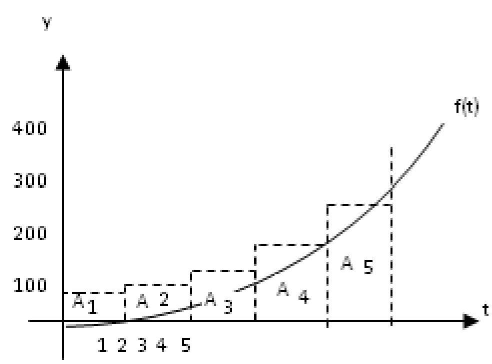
$A > A_3 + A_4 = 2.\ 100 + 3.140 = 620$

Las aproximaciones mejoraron. Ahora los números dicen: 620<A< 1330

¿Superaremos esta mejoría si agregamos más puntos a la partición P={0, 2, 5}?

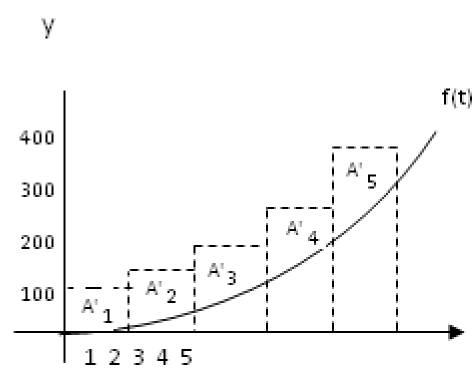
Por ejemplo, se nos ocurre elegir la "partición" del intervalo [0,5] determinada por el siguiente conjunto de puntos: P'= {0,1,2,3,4,5}.

Figura 1



$\sum_{i=1}^{5} A_i = \sum_{k=0}^{4} 1.(100+10k^2)$ = **800**

Figura 2



$\sum_{i=1}^{5} A'_i = \sum_{k=1}^{5} 1.(100+10k^2)$ = **1050**

Es evidente que mejoran las aproximaciones cuando se agregan puntos a una partición. Ahora los números dicen: 800 < A < 1050

Observemos que las aproximaciones por defecto y por exceso correspondientes a una partición P son sumas de áreas de rectángulos; las llamaremos suma inferior y suma superior y las simbolizaremos s_P y S_P respectivamente.

Cuando se agregan puntos a una partición P, se dice que la nueva partición P' que se obtiene es más fina que P, queriendo significar que con P' se afina o achica la diferencia entre la suma superior y la inferior: $s_P \leq s_{P'} < A < S_{P'} \leq S_P$. Esto nos lleva preguntarnos:

A medida que se van refinando las particiones, buscando lograr que las amplitudes de todos los intervalos vayan tendiendo a cero ¿tenderán ambas sumas a un único número? En este caso éste sería el área que buscamos.

Para encontrar la respuesta necesitamos una expresión general de ambas sumas. *¿Cómo expresamos s_P y S_P correspondientes a la partición P que divide al intervalo [0,5] en n subintervalos - y para simplificar el cálculo - de igual amplitud?*

Observemos que con esta partición, la base de cada rectángulo es $\frac{5}{n}$ y la altura de cada uno es $f(\frac{5}{n}k)$. Definimos entonces las sumas:

$$s_P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{n} f(\frac{5}{n}k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{n}[100+10(\frac{5}{n}k)^2] \;;\; S_P = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{n}.f(\frac{5}{n}k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{n}[100+10(\frac{5}{n}k)^2$$

que llamaremos suma inferior y superior de Riemann relativas a la partición P.

Notar que si elegimos intervalos de igual amplitud, entonces tal amplitud tenderá a cero cuando el número de subintervalos tienda a infinito.

De esta forma, *si calculamos el límite de la suma inferior y de la suma superior de Riemann para n tendiendo a infinito y si ambos límites dan por resultado un mismo número, éste será el valor del área que buscamos***.**

$$\lim_{n\to\infty} s_P = \lim_{n\to\infty} [\frac{5}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}(100+10.(\frac{5}{n}k)^2)] = \lim_{n\to\infty}[\frac{5}{n}\sum_{k=0}^{n-1}100 + \frac{5}{n}\sum_{k=0}^{n-1}10.(\frac{5}{n})^2.k^2] =$$

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{5}{n}.(n-1).100+\frac{5}{n}.10.\frac{25}{n^2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}k^2}_{\text{suma de los cuadrados de los primeros } (n-1) \text{ números naturales}}] = \lim_{n\to\infty}[500(1-\frac{1}{n})+\frac{1250}{n^3}\frac{(n-1).n.(2(n-1)+1)}{6}] = 916{,}99$$

En forma similar calculamos el límite de la suma superior, resultando:

$$\lim_{n\to\infty} S_P = \lim_{n\to\infty}[\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}(100+10.(\frac{5}{n}k)^2] = 916{,}66$$

Ambos límites existen y son iguales, entonces se dice que la función f es integrable en el intervalo [0,5] y a este número se le llama integral definida de la función $f(t) = 100+10t^2$ desde cero hasta cinco y se indica con el símbolo:

$$\int_0^5 (100+10t^2)dt = 916{,}66$$

- [0,5] es el intervalo de integración.
- 0 y 5 son los límites inferior y superior de integración respectivamente.
- El valor de la integral coincide con el área por ser f una función continua y positiva en el intervalo de integración.

¿Le respondemos al fabricante?

"Se espera que los gastos de mantenimiento acumulados durante los primeros cinco años asciendan a 916,66 dólares".

<u>Nota:</u> Observar que el modelo matemático $\int_a^b (100+10t^2)dt$ nos resuelve el problema de estimar los gastos acumulados de mantenimiento en cualquier intervalo de tiempo [a,b] .

¿Y si hubiéramos elegido una partición que determinara subintervalos de diferentes amplitudes?

Entonces debemos tener cuidado: notar que cuando n tiende a infinito no necesariamente todas las amplitudes tienden a cero.

Pero si la amplitud del intervalo mayor determinado por la partición P tiende a cero, entonces todas las amplitudes tenderán a cero con él. Simbolizamos con δ la amplitud del mayor intervalo y la llamamos norma de la partición.

Entonces si hubiéramos elegido una partición que determinara subintervalos de diferentes amplitudes, cuando calculamos el límite de las sumas de Riemann debemos hacerlo para δ tendiendo a cero, en cuyo caso también n tenderá a infinito; sin duda que se complicará aún más el cálculo de la integral con las sumas de Riemann, y hay que estudiar propiedades de la integral definida que faciliten su cálculo.

Reflexionemos sobre los siguientes interrogantes:

¿Obtendríamos el mismo resultado si expresamos una suma de Riemann valorizando f en un punto cualquiera de cada intervalo en lugar de hacerlo en el M_a o en el m_a?

¿Si la función no fuera positiva y continua en el intervalo de integración, podría existir el límite de la suma de Riemann y por lo tanto la integral definida?

Siguiendo la misma metodología, se orientará al alumno para que pueda responder estas preguntas y llegar a enunciar la definición formal de Riemann de integral definida.

Conclusiones

Lo que se ha presentado es un análisis a priori de una Ingeniería Didáctica en el cual, las elecciones del profesor han buscado la construcción del concepto de integral definida según Riemann por el análisis de un problema, en una ventana conceptual que se nutre de los cuadros mencionados al comienzo y profundiza la vinculación con el concepto de límite de una función. El problema elegido, creemos que es adecuado para entender el concepto integral definida como los resultados acumulados de un proceso de cambios.

Agradecimientos

PICTO EDUCACIÓN 2005: La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria.

1 ECO 68: La Selección, Análisis, Producción y Evaluación del Material Didáctico para la Matemática Básica Universitaria en Carreras Profesionales.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *El lugar de la didáctica en la formación de profesores.* México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1996). La Didàctique des Mathemàtiques en la formació del professorat. *Butlleti de la Societat Catalana de Mathemàtiques*, *11*(1), 33-45.

Chevalard,Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática.* Barcelona: ICE-Horsori.

Wittmann, E. (1995) "Mathematics Education as a Design Science". *Educational Studies in Mathematics, 29*. pp. 355-274.

MOSTRANDO LOS CONCEPTOS DIDÁCTICOS EN UNA CLASE DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Ana Elisa Ibañez
Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional Argentina
anaibanez@arnet.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo tiene como objetivo mostrar algunas estrategias de enseñanza que pueden utilizar los docentes en el desarrollo de sus clases. Las mismas están dirigidas a ayudar a los alumnos a aprender a aprender y con la finalidad de lograr aprendizajes significativos; ya que, lo que necesitan en forma urgente los alumnos no es tanto más información, sino capacidad para organizarla, interpretarla y darle sentido. Al decir de Edgar Morin, lograr en los alumnos una cabeza bien puesta y no una cabeza repleta.*

Las estrategias que se muestran a través de la clase sobre el tema "Recta Tangente y recta normal a una curva", se basan en una concepción constructivista del aprendizaje y la intervención educativa como convergencia de diversas corrientes psicopedagógicas.

Palabras Clave: educación continua, estrategias de enseñanza, aprendizaje significativo, corrientes psicológicas, técnica de la rejilla

Introducción

En este trabajo nos abocaremos a presentar las estrategias de enseñanza como aporte de la concepción contrustivista al proceso enseñanza-aprendizaje, asumiendo ésta como la convergencia de diversas corrientes psicológicas, tales como:

- La psicología cognoscitiva.
- El enfoque psicogenético piagetiano.
- La teoría Ausebeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo.
- El enfoque histórico-cultural Vigostkiano.
- La teoría de la actividad de Aleksei N Leóntiev
- Aunque estos enfoques se sitúan en concepciones teóricas diferentes, comparten el principio de la *importancia de la actividad constructiva del alumno.*

"La finalidad de la educación sustentada en la educación constructivista del aprendizaje en el salón de clase es promover los procesos de crecimiento personal del alumno en el marco de la cultura del grupo al que pertenece" (Frida Díaz Barriga, 2003)

"*…estos aprendizajes no se producirán con éxito, a no ser que se suministre una ayuda específica a través de la participación del alumno en actividades intencionales, planificadas y sistemáticas que logren propiciar en éste una actividad mental constructiva*" (César Coll, 2002).

Estas actividades deberán ser diseñadas por el docente, el cual deberá tener en cuenta las diferentes estrategias de enseñanza a aplicar para que el alumno se apropie significativamente de la nueva información, al mismo tiempo que selecciona las estrategias de aprendizaje que deberá desarrollar en el alumno.

Objetivo: Presentar, a través del tema *"Recta Tangente y recta normal a una curva"*, cómo se tienen en cuenta las estrategias de enseñanza en la planificación de una clase.

Marco Teórico: Se podría definir a las estrategias de enseñanza como "los procedimientos o recursos utilizados por el agente instruccional, el docente para este caso, para facilitar de forma intencionales procesamiento más profundo de la información nueva, para promover aprendizajes significativos" (Farmer & Wolf, 1991).

Existen variadas clasificaciones de estrategias instruccionales. La que se adopta en el presente trabajo es la que toma como punto de partida los procesos cognitivos en los que incide la estrategia.

El siguiente cuadro muestra la relación entre los tipos de estrategias y los procesos cognitivos en los que ellas inciden:

Tipos de estrategias de enseñanza	Incide en los procesos cognitivos siguientes
Objetivos o propósitos Preinterrogantes Actividad generadora de información previa	Activación de los conocimientos previos Generación de expectativas apropiadas
Organizadores previos Analogías	Para potenciar el enlace entre conocimientos previos y la información a aprender
Mapas conceptuales Redes semánticas Resúmenes	Promover una organización más adecuada de la información a prender
Uso de estructuras textuales	Contribuye en la comprensión y recuerdo de la nueva información
Preguntas insertadas Ilustraciones Pistas o Claves Tipográficas o Discursivas	Orientan y mantienen la atención

Finalmente, el método de enseñanza utilizado en la clase práctica es el que permite el trabajo independiente de los alumnos, que tiene lugar cuando ellos emplean los conocimientos y capacidades que poseen y resuelven las tareas propuestas sin necesidad de que el profesor intervenga directamente para orientar cada detalle del trabajo, pero si, jugando siempre el papel de dirigente. Dentro de esta tendencia se desarrollan los llamados métodos activos, productivos, problemáticos y diversas técnicas de trabajo en grupos, de dinámica grupal. El empleo de estos métodos resulta imprescindible en un sistema educativo que se sustente en el enfoque histórico-cultural, la teoría de la actividad y tome presupuestos teóricos y metodológicos de la psicología cognoscitiva. Es por ello que se eligió la técnica de la rejilla para ser aplicada en el desarrollo de la clase práctica.

Ejemplo: Para el desarrollo del tema se requiere que el docente previamente reflexione acerca de las actividades que son necesarias realizar, para que las mismas tengan un carácter constructivo, y el aprendizaje que se logre sea significativo en el contexto particular de su aula. Se debe tener también en cuenta como elementos de análisis aspectos tales como: características de los alumnos y del grupo, textos, materiales a emplear, organización del tema y su propia labor como docente.

En el desarrollo del ejemplo que se presenta se muestra como actúa un docente que tiene en cuenta lo antes señalado. También se destacan las estrategias de enseñanza que el docente puede utilizar.

El docente procede así:

Clase teórica

Tipo de clase: seminario de preguntas y respuestas

Tema: **Recta tangente y recta normal a una curva**

Recordar que cuando comenzamos la unidad titulada **Derivada**, les dije que este concepto tiene variadas aplicaciones. Una de esas aplicaciones la vamos a desarrollar en la clase de hoy.

Pero antes recordemos que en la 1º clase vimos la definición de derivada:

- ¿Recuerdan cuál es?

-R

$$\boxed{\lim_{\Lambda x \to 0} \frac{f(x+\Lambda x) - f(x)}{\Lambda x} = f'(x)}$$

PI

PD **ED** **OP**

Recordemos que luego de dar la definición de derivada de una función en un punto, vimos su interpretación geométrica. ¿Recuerdan cuál era?

PD

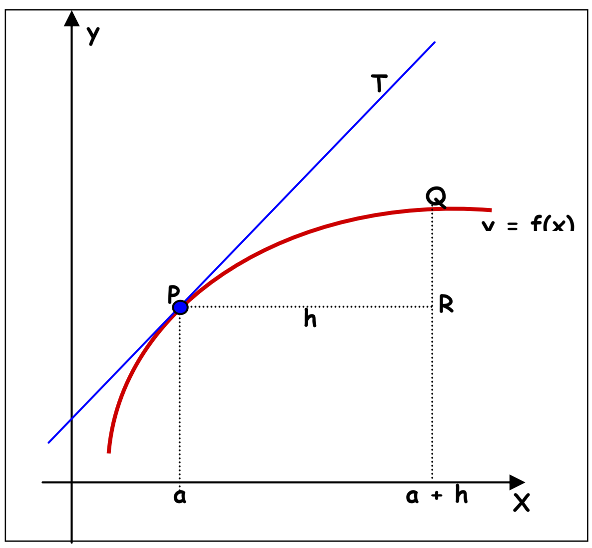
Figura Nº 1

P(a, f(a))
Q(a+h, f(a+h))
QR= f(a+h) – f(a)

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$y' = m_T$$

PT



Ilust.

OP

El valor de la derivada de una función en un punto es igual al valor que toma la pendiente de la recta tangente en ese punto.

ET **ED**

También les dije en ese momento que luego de ver las reglas de derivación volveríamos sobre este tema para estudiar sus aplicaciones.

Hoy vamos a ver una de ellas; como el título lo indica, vamos a obtener las ecuaciones de la recta tangente y normal a una curva

PD

Primero vamos a encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva y=f(x) en x=a de acuerdo a la Fig. 1 y que designa con la letra T.

Observando la figura, vemos que:

$f'(a)=m_T$ y que

P(a,f(a)) es un punto de paso de T

Por lo tanto, ya tenemos las dos condiciones necesarias par escribir la ecuación de la recta T'. Para ello utilizaremos la ecuación **$y - y_1 = m(x - x_1)$**

Reemplazando nuestras dos condiciones resulta: **$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$**

que es la ecuación de la recta tangente a la curva **y = f(x) en x = a** **ET**

Problema de aplicación **PT**

a) Encontrar la ecuación de la tangente a la parábola **$y = x^2 - 8x + 9$** en el punto (3,-6)

La ecuación a aplicar es:

$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$ **ET** donde a = 3; f(a)= -6 **$f'(x)= 2x - 8$; $f'(3)= -2$**

por lo tanto la ecuación seria: **$y = - 2x$** **PT**

Ahora debemos encontrar la ecuación de la recta normal a la curva en un punto. Les pregunto:

¿Cuál es la condición de perpendicularidad entre dos rectas?

R: Dadas dos rectas R_1 y R_2 son perpendiculares entre sí si se cumple que: **PI**

$m_1.m_2 = -1$ o $m_1 = -1/ m_2$

$\boxed{y' = m_T = f'(a)}$

PT

N es la recta normal a la curva y = f(x) en x=a.

Sabemos que N es perpendicular a T, por lo tanto se cumple que; si la pendiente de N la designamos en m_N es:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{f'(a)}$$ ET

Como además N también pasa por el punto P, tenemos las dos condiciones para poder escribir su ecuación, la cual seria:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$ ET

que es la **ecuación de la recta normal a la curva y = f(x) en x = a** PT

Problema de aplicación

Al problema ya resuelto le agregamos:

Encontrar la ecuación de la recta normal a la misma curva y en el mismo punto. PD

La ecuación a aplicar es $$\mathbf{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)}$$ ET

reemplazo directamente los datos y obtengo: $$\mathbf{y = \frac{1}{2}x - \frac{15}{2}}$$ PT

Con este problema completamos la clase teórica.

En los últimos minutos hacemos una síntesis de los nuevos conceptos aprendidos. PD

- La ecuación de la recta tangente a la curva

  y = f(x) en x = a es: $$\mathbf{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$ ET

- La ecuación de la recta normal a la curva

  y = f(x) en x = a es: $$\mathbf{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)}$$ ET

- Las rectas tangentes y normal a la curva **y = f(x)** en **x = a** son perpendiculares

Res

entre si.

Clase Práctica **Tipo:** Taller

Del material de trabajo 2006, abrimos en la página correspondiente al tema: *Recta tangente y recta normal a una curva.*

Para resolver estos ejercicios vamos a utilizar la "Técnica de la rejilla"

Como esta técnica ya la hemos utilizado en otras ocasiones, les recuerdo a grandes rasgos para qué sirve y en qué consiste.

Sirve para que ustedes manejen una gran cantidad de información en poco tiempo, que la analicen y sinteticen en equipo.

Consiste en formar equipos, cada uno de los cuales tendrá a su cargo la resolución de un ejercicio, en nuestro caso del 1 al 5. Les voy a dar para ello un determinado tiempo que será de 20 minutos.

Como son 5 los ejercicios a resolver, vamos a formar 5 equipos. Para ello van a numerarse por fila, así como están sentados, para luego escribir la grilla con los integrantes de cada uno de los equipos en el pizarrón. Comiencen.

Vemos que llegamos hasta el número 35, por lo que los equipos quedarían integrados de la siguiente manera:

	Equipo 1	**Equipo 2**	**Equipo 3**	**Equipo 4**	**Equipo 5**
Eq I	1;26;31	2	3	4	5
Eq II	6	7;27;32	8	9	10
Eq III	11	12	13;28;33	14	15
Eq IV	16	17	18	19;29;34	20
Eq V	21	22	23	24	25;30;35
	Ejercicio 1	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**Ejercicio 4**	**Ejercicio 5**

De acuerdo al cuadro escrito en el pizarrón forman los equipos de trabajo. Recuerden que tienen 20 minutos para resolver el ejercicio asignado. Los equipos comienzan a trabajar; pueden consultar sus apuntes de clase y también al profesor para evacuar las dudas que le surgen en la resolución del ejercicio. Todos tratan de resolver en el tiempo estipulado, pero casi siempre es necesario concederles unos minutos más. Cuando todos los quipos han concluido, se pasa a la segunda fase de la técnica aplicada.

Para la segunda fase, vamos a hacer una reestructuración de los equipos: vamos a leer los equipos por fila, como se lo estoy marcando ahora en el pizarrón: EqI, EqII, EqIII, EqIV, EqV.

Como ejemplo vemos que el EqI está formado por los alumnos 1, 26, 31, 2, 3, 4, 5.

Esos nuevos equipos tienen la particularidad que cada uno de sus integrantes ha resuelto un ejercicio diferente. Volviendo al EqI, vemos que:

- los alumnos 1, 26 y 31 resolvieron el Ejercicio 1
- el alumno 2 resolvió el Ejercicio 2
- el alumno 3 resolvió el Ejercicio 3
- el alumno 4 resolvió el Ejercicio 4
- el alumno 5 resolvió el Ejercicio 5

Se inicia aquí una nueva etapa de la técnica de la rejilla, donde cada alumno explica al resto del equipo el ejercicio que él resolvió. Les voy a dar para esta etapa 20 minutos. Suele ocurrir que la explicación del alumno no es suficiente para que el resto entienda el ejercicio y debe intervenir el docente para dejar claro los puntos más complicados.

Cumplido el tiempo, pasamos ahora a realizar el plenario. Para ello necesitamos elegir cual de los cinco equipos explicará los ejercicios en el pizarrón.

Para realizar esta selección, tengo aquí un sobre que contiene 5 papelitos doblados en cuatro. Cuatro de ellos están vacíos y hay uno solo que dice **“Su equipo expone”**. Pase un integrante de cada equipo y saque un papelito.

Pasan los alumnos nº 26, 8, 15, 17 y 24. ¿A quién le tocó el papelito con la frase? Al nº15; por lo tanto explica los ejercicios el equipo EqIII

Para seleccionar al integrante del equipo que va a explicar cada uno de los ejercicios voy a poner ahora en el sobre 7 papelitos, cada uno con un número perteneciente a un integrante del equipo.

En este caso los papelitos contendrán los nº 11, 12, 13, 28, 33, 14 y 15.

Va a pasar un alumno de otro equipo y va a ir sacando papelitos, hasta obtener el quinto. Esos serán los que expongan y en el orden en que salieron. Los números extraídos, por orden, son: 28, 12, 15, 11 y 14. Por lo tanto pasa el alumno nº 28 a explicar el ejercicio nº 1, cuyo enunciado es el siguiente:

Ejercicio Nº 1 : Halle las ecuaciones de la recta tangente y normal a la siguiente curva, en el punto indicado: y = x –2 P(-2,.) x+3

El alumno comienza a desarrollar paso a paso el ejercicio en el pizarrón. Por lo general resuelve sin ayuda el ejercicio explicando cada uno de los pasos que realiza, ya que las dudas fueron evacuadas en las instancias anteriores. No obstante, al finalizar, y antes de pasar al segundo ejercicio, el profesor pregunta si está todo entendido. Si hay alguien que necesita una aclaración, la realiza el profesor.

En forma análoga, el profesor hace pasar al alumno que resolverá el 2º ejercicio y así sucesivamente hasta tener resuelto el 5º ejercicio.

Al finalizar la actividad el profesor insiste en aquellos aspectos más importantes del tema tratado y también pide la opinión de los alumnos sobre la técnica utilizada.

Referencia bibliográfica

Ander-Egg, E. (1999). *Interdisciplinariedad en educación.* Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Hannan, A. Silver, H. (2005). *La innovación en la Enseñanza Superior.* Madrid, España: Narcea.

Menin, O. (2002). *Pedagogía y Universidad.* Rosario, Argentina: Homo Sapiens Ediciones

Pérez Pantaleón, G. (2006). *Compilación de materiales para los cursos de pedagogía universitaria y didáctica*. Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta*. Argentina: Nueva Visión.

Baquero, R. (1999). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Baquero, R. Luque, M. (2001). *Introducción a la psicología del aprendizaje escolar*. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Quilmes Ediciones.

Pozo Municio, J. (1999). *Aprendices y maestros*. Madrid, España: Alianza Psicología Minor.

Referencia abreviaturas

Organizadores Previos	Estructura Textual	Pista Tipográfica
Analogías	Pregunta Intercalada	
Resumen	Evaluación Diagnóstica	Pista Discursiva

MATEMÁTICA APLICADA A CRISIS EMPRESARIALES

María Rosa Rodríguez, Jesús A. Zeballos, Eduardo M. Nieto
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
marosarodriguez@arnet.com.ar, jesuszeballos@tucbbs.com.ar
Campo de investigación: Estudios Socioculturales Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo presentamos aplicaciones lógicas y matemáticas a la resolución de concursos de acreedores, que surgen por falencias en una empresa. Mostramos cómo las ciencias formales son imprescindibles en la cuantificación de activos y pasivos de una institución, aunque no siempre se da una total adecuación entre los resultados matemáticos y lo que dictamina una norma jurídica en su aplicación a hechos reales concretos.*

En la práctica profesional se aplican diversos conceptos lógicos y matemáticos para dar mayor rigor a los informes de los procesos concursales, contemplando las normas técnicas, jurídico – contables. Se apreciará en ellos la relativa interrelación de las ciencias formales y sociales. Servirá, además, para que un docente pueda evidenciar los alcances y límites de aplicaciones lógico-matemáticas a una realidad social, en este caso un juicio de proceso concursal.

Palabras Clave: Porcentaje, clase, frecuencia acumulada, cuantificación, proceso concursal

Introducción

Las Ciencias Económicas, en el proceso de construcción de modelos hipotético-deductivos, apelan con mayor asiduidad a los recursos de la Lógica y de la Matemática para acceder a un mayor rigor científico. Esta nueva perspectiva es fundamental en el ámbito de la Administración de una Empresa, en especial cuando se debe resolver un concurso de acreedores. Aquí la importancia de la matemática cobra singular relevancia, pues su aplicación muestra la relatividad del conocimiento social, incluidas las normas legales.

En el presente trabajo se intenta mostrar de qué manera pueden utilizarse diversos conceptos lógicos y matemáticos para dar mayor rigor a los informes de los procesos concursales, contemplando las normas técnicas, jurídico – contables. En él se puede apreciar también los alcances y límites de aplicaciones matemáticas a las Ciencias Sociales.

A los efectos de facilitar una mejor comprensión haremos unas breves consideraciones sobre conceptos básicos del proceso concursal.

Los Procedimientos Concursales

Los sujetos del derecho pueden ser entes de existencia física, como las personas, o de existencia ideal, como las sociedades, que son los titulares de un conjunto de bienes, derechos y obligaciones, denominado patrimonio.

Su integración puede ser la resultante de la actividad desarrollada por el sujeto durante su existencia (por ejemplo los ingresos obtenidos en el ejercicio de una profesión, o las utilidades generadas por la comercialización de bienes o prestación de servicios) o, pueden provenir de decisiones de terceros (tal el caso de las donaciones o legados, aportes de capital formalizados por los socios que constituyen una sociedad, etc.).

Las consecuencias positivas de los aciertos, beneficios o utilidades, se traducen en incrementos de lo que denominamos patrimonio; en tanto que las negativas, pérdidas, devienen en un decremento del mismo.

La actividad puede realizarse íntegramente con recursos propios, con una mezcla de recursos propios y de terceros o totalmente con recursos de terceros. Los propios configuran "componentes activos" del patrimonio y los de terceros los "pasivos".

La aparición de pasivos en la conformación de los patrimonios conlleva la carga u obligación de atenderlos, es decir, cancelarlos. Diversas circunstancias pueden derivar en dificultades para cubrir tales obligaciones y a veces en la imposibilidad de afrontarlas.

La legislación nacional, a través de una normativa específica (Ley Nº 24.522) contempla tales situaciones y estatuye un régimen, al que deben ajustarse quienes se acojan a esos trámites judiciales. Entre las normas contenidas en dicha ley se encuentran las que pautan la actuación de los Contadores Públicos en calidad de síndicos concursales. Este servicio profesional tiene lugar en el ámbito tribunalicio, en el decurso de un juicio específico – que puede ser un concurso preventivo o una quiebra – y bajo el directo control de un juez.

Los síndicos concursales deben presentar dos tipos de informes. Uno de ellos se vincula con los pedidos de los acreedores para formular un aconsejamiento técnico al juez que adoptará una resolución sobre cada pedido. Cuando el pronunciamiento del juez es favorable al acreedor surge lo que técnicamente se denomina pasivo verificado. El otro informe debe ser un análisis de otros aspectos relacionados con el sujeto concursado.

La Lógica en Procesos Concursales

Los enunciados de los informes concursales expresan proposiciones categóricas acerca de relaciones lógicas entre acreedores y deudores. En relación al *status lógico* de su verdad o falsedad, estas proposiciones se clasifican en: analíticas o *lógicas a priori*, fácticamente necesarias y contingentes. Desde un punto de vista lógico, los procesos concursales pueden ser considerados una extensa argumentación, en la que se interrelacionan enunciados analíticos, *sintéticos a priori* y fácticos contingentes.

Por ejemplo el enunciado "Todos los sujetos con los cuales un sujeto está vinculado en calidad de deudor son sus acreedores", es una proposición universal positiva A, analítica y lógicamente necesaria, pues no hay deudor sin acreedor y viceversa.

En lenguaje lógico tradicional y matemático: *Todo S es P*, $(\forall x)\ (\exists y)$ [Dxy $\Rightarrow$ Ayx],

De la normativa concursal vigente surge que "Todos los acreedores de un sujeto concursado que ella no exceptúe deben pedir la verificación de su crédito". Este enunciado reviste el carácter de verdad necesaria, pero no por su estructura lógica sino por su condición jurídica. Es una verdad fácticamente necesaria.

Si consideramos la estructura lógica de los razonamientos de los procesos concursales, se ve que muchos se ajustan al esquema de los silogismos categóricos típicos. Por Ej:

a) Todo concursado es deudor.

b) Algunos comerciantes son concursados.

c) Por lo tanto, algunos comerciantes son deudores.

Esto es un silogismo de la primera figura y del modo DARII.

La premisa mayor (a) pertenece a la forma "Todo M es P", $(\forall x)\ (Mx \Rightarrow Px)$

la menor (b) al esquema "Algún S es M", $(\exists x)\ (Sx\ .\ Mx)$

la conclusión (c) a "Algún S es P" $\therefore\ \overline{(\exists x)\ (Sx\ .\ Px)}$.

En algunas de esas argumentaciones, las premisas no son todas explícitas. Generalmente están supuestos los principios lógicos y las normas establecidas por la legislación jurídico-concursal, además de las conclusiones intermedias o previamente comprobadas.

Supongamos la siguiente serie de enunciados que adoptan la forma del *sorites*:

Todos los síndicos concursales son contadores públicos.

Algunos graduados universitarios son síndicos concursales.

Todos los graduados universitarios son personas laboriosas.

Todas las personas laboriosas son amantes de la buena música.

Todos los amantes de la buena música tienen buena salud espiritual.

Según ellos, podría concluirse lógicamente: Algunos contadores públicos tienen buena salud espiritual.

Dicha proposición está implícita en el contenido de los juicios que la preceden. Para manifestarla explícitamente, deberá razonarse como una cadena de silogismos donde está implicada la conclusión anterior:

Todos los síndicos concursales son contadores públicos.

Algunos graduados universitarios son síndicos concursales.

Luego, algunos graduados universitarios son contadores públicos.

Todos los graduados universitarios son personas laboriosas.

Luego, algunas personas laboriosas son contadores públicos.

Todas las personas laboriosas son amantes de la buena música.

Luego algunos contadores públicos son amantes de la buena música.

Todos los amantes de la buena música tienen buena salud espiritual.

Luego algunos contadores públicos tienen buena salud espiritual.

Como puede verse, la Lógica de estas argumentaciones se basa en los principios y estructuras de una Lógica cuantificacional, de Relaciones y en la Teoría Silogística.

La Matemática en Procesos Concursales

Ahora veremos cómo ciertos conceptos del Álgebra y de la Estadística son utilizados en la elaboración de los informes concursales, de manera implícita o explícita.

En la solución matemática del siguiente problema se necesita destreza en *cálculo de porcentajes* y *relación proporcional* entre la totalidad de la deuda, que corresponde al *conjunto* de acreedores y los importes parciales, correspondientes a *subconjuntos* de acreedores. Otros conceptos aplicados son los de *clase, frecuencias acumuladas*, tanto de importe de capital como de número de acreedores.

1.- En un concurso preventivo de acreedores el deudor informa al juzgado que su deuda nominal de origen, a la fecha en la que solicita su apertura, asciende a $3.200.000.

Posteriormente, y dando cumplimiento con las disposiciones legales vigentes los pasivos que pertenecen únicamente a la catalogación de 'sin privilegio', ascienden a un total de $2.800.000 y sus titulares conforman un universo de 32 acreedores.

La ley concursal exige que el deudor llegue a un acuerdo con los acreedores y lo hace imponiendo un doble régimen mínimo de mayoría: mitad más 1 de la cantidad de acreedores que, por otra parte, sean titulares de créditos admitidos cuya sumatoria equivalga a los 2/3 del importe total de las deudas verificadas.

Aplicando dicha disposición a los datos referidos se llega a la conclusión de que las mayorías mínimas resultantes son las siguientes:

a) Acreedores: 32/2 + 1= 17 acreedores

b) ∑ de capital = 2/3 x $ 2.800.000 = $ 1.866.666.67

Ahora bien, si consideramos como población a los 32 acreedores ¿quiénes deben integrar la muestra de 17?.

Como la ley nada dice (podría haber establecido como criterio orientador que obligadamente deben serlo los de mayor cuantía) la consecuencia lógica es que puede componerse casi como al azar. De todas maneras, un método que puede utilizarse como un criterio orientador es el siguiente: se tabulan los datos siguiendo un sentido creciente del importe del capital de cada uno de los 32 acreedores. Surge el cuadro siguiente:

Transportes		188.000		640.000		1.506.000	
Nº de Orden	Crédito verificado $	Nº de Orden	Crédito verificado $	Nº de Orden	Crédito verificado $	Nº de Orden	Crédito verificado $
1	10.000	9	37.000	17	84.000	25	140.000
2	15.000	10	44.000	18	87.000	26	151.000
3	18.000	11	53.000	19	91.000	27	160.000
4	21.000	12	57.000	20	95.000	28	164.000
5	26.000	13	59.000	21	104.000	29	165.000
6	29.000	14	64.000	22	133.000	30	168.000
7	33.000	15	67.000	23	135.000	31	171.000
8	36.000	16	71.000	24	137.000	32	175.000
Tpte.	188.000	Tpte.	640.000	Tpte.	1.506.000	∑ Total	2.800.000

Cuadro Nº 1: Pasivos reconocidos 'sin privilegio' ordenados en sentido creciente

La distribución de frecuencias de acreedores y de pasivos verificados es la siguiente:

Clase	Acreedores			Pasivo verificado		
	Cantidad	Acumulado	%	Total	Acumulado	%
0-24.999	4	4	12.5	64.000	64.000	2.29
25.000-49.999	6	10	31.25	205.000	269.000	9.61
50.000-74.999	6	16	50	371.000	640.000	22.86
75.000-99.999	4	20	62.5	357.000	997.000	35.61
100.000-124.999	1	21	65.625	104.000	1.101.000	39.32
125.000-149.999	4	25	78.125	545.000	1.646.000	58.79
150.000-174.999	6	31	96.875	979.000	2.625.000	93.75
175.000-199.999	1	32	100	175.000	2.800.000	100

Obsérvese que el rango de 17 acreedores (uno de los mínimos que en este ejemplo requeriría la ley) corresponde a la clase del 62,5%. Pero el otro mínimo necesario (2/3 del pasivo verificado, equivalente al 66.67%) llega a un acumulado de capital del 35.61%. Por lo tanto, para cumplir con la norma legal, debe avanzarse a la clase que integra el 96,875 % de los acreedores, o sea, un acumulado de 31.

No estamos diciendo que debemos tener la conformidad de 31 acreedores cuyos créditos, sumados, ascienden a $ 2.625.000 sino que, partiendo de la clase que redondea 25 acreedores (78.125 % del total de acreedores, superior al mínimo exigido) alcanza un acumulado de pasivo verificado de $ 1.646.000 que resulta inferior a los 2/3 necesarios. En consecuencia, debemos avanzar en la clase siguiente hasta encuadrarnos en la previsión legislada.

Considerando los cuadros anteriores vemos que partiendo del pasivo acumulado correspondiente a los 25 primeros acreedores y avanzando por tanteo hasta lograr el recaudo legal, tendríamos:

Primeros 25 acreedores	$ 1.646.000
Acreedor Nº 26	$ 151.000
Subtotal	$ 1.797.000
Acreedor Nº 27	$ 160.000
Total	$ 1.957.000

Es decir, con un 84.37 % del total de acreedores daríamos cumplimiento con la exigencia de la legislación concursal.

Puesto que las personas, reales o jurídicas, no son divisibles indefinidamente, el resultado matemático puede no coincidir con lo prescripto por la ley, ya sea por exceso o por defecto. En tal caso se recurre al método de interpolación.

También, se podrían ordenar los créditos en sentido decreciente y efectuar un análisis similar al anterior. Siguiendo esta alternativa, la mayoría absoluta de acreedores (17) representa 79.68 % del pasivo ($2.231.000) base de referencia.

La negociación puede determinar que la mezcla de acreedores tenga otras configuraciones. Los planteos hipotéticos aquí presentados pueden servir de referencia para un análisis que muestra la borrosidad de la ley.

***2.** Supongamos ahora otra configuración: en el juicio hipotético que estamos considerando se logra el acuerdo con los acreedores, que consiste en:*

Pasivo verificado = $ 2.800.000

Propuesta de pago a los acreedores: Quita del 75 % sobre el pasivo verificado.

Pago del 25 % del pasivo verificado = $ 700.000.00 (capital a amortizar = An).

Plazo de pago: 5 años (período de pago = n). Tasa de interés a reconocer: 10 % anual.

Período de amortización: semestral vencido (sub períodos m = 2).

Sistema de amortización a aplicar: francés (cuota semestral constante)

Se quiere saber a cuánto ascenderá la cuota que periódicamente deberá abonarse a los acreedores y también sus elementos componentes.

La fórmula a aplicar para calcular la cuota semestral de amortización (sistema francés):

$$C = \mathrm{Anm}\neg \,.\, \frac{i}{n}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} / \left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} - 1$$

$$C = \$\ 700.000.00 \,.\, \frac{0.10}{5} \,.\, (1 + \frac{0.10}{2})^{5.2} / (1 + \frac{0.10}{2})^{5.2} - 1 = \$\ 90.653.17$$

Dado que la cuota de amortización del servicio periódico está constituida por capital e interés, para establecer cada uno de dichos componentes, bastará con calcular los intereses de cada subperíodo. Como la cuota es constante en el sistema francés, detrayendo los mismos del valor de aquélla se conocerá el capital respectivo.

Aplicando la fórmula de interés I = C.R.T./ 100.Ut para cada subperíodo y capital adeudado al inicio del mismo, podemos confeccionar el siguiente cuadro:

Subperíodos	**Capital adeudado al inicio subperíodo**	**Cuota constante de c/ subperíodo**	**Interés que se abona en c/ cuota**	**Capital que se amortiza en c/cuota**
1	$ 700.000.00	$ 90.653.17	$ 35.000.00	$ 55.653.17
2	$ 644.346.83	$ 90.653.17	$ 32.217.34	$ 58.435.83
3	$ 585.911.00	$ 9 0.653.17	$ 29.295.55	$ 61.357.62
4	$ 524.553.38	$ 90.653.17	$ 26.227.67	$ 64.425.50
5	$ 460.127.88	$ 90.653.17	$ 23.006.39	$ 67.646.78
6	$ 392.481.10	$ 90.653.17	$ 19.624.05	$ 71.029.12
7	$ 321.451.98	$ 90.653.17	$ 16.072.60	$ 74.580.57
8	$ 246.871.41	$ 90.653.17	$ 12.343.57	$ 78.309.60
9	$ 168.561.81	$ 90.653.17	$ 8.428.09	$ 82.225.08
10	$ 86.336.73	$ 90.653.17	$ 4.316.44	$ 86.336.73
Totales		$ 906.531.70	$ 206.531.70	$ 700.000.00

En este problema financiero se agregan cálculos acerca de los intereses, total y parcial que derivan del acuerdo realizado entre los acreedores y el deudor.

Para la solución en este nuevo planteo se ha utilizado una *tabulación* que expresa un *sistema de amortización* en *periodos* y *subperiodos*, fundamentada en el concepto matemático del *Binomio de Newton*.

Conclusiones

Los costos en que se incurre para obtener una mayor capacidad de producción futura son inversiones. Tales inversiones permiten formar stocks que pueden ser cuantificados económicamente y traducibles a los términos valorativos de los activos o los pasivos tangibles de una empresa.

En este trabajo hemos presentado aplicaciones lógicas y matemáticas al proceso de concurso de acreedores que surgen por falencias en una empresa. Mostramos que, si bien la lógica y la matemática son imprescindibles en la resolución del concurso de acreedores, no siempre se da una total adecuación entre lo que dictamina una norma jurídica y su aplicación a hechos reales concretos. Sin embargo, estas ciencias formales proporcionan los medios para obtener la solución mas adecuada posible.

De este modo, los estudiantes pueden ver los alcances y límites de aplicaciones matemáticas a una realidad social, en este caso un juicio de proceso concursal.

Referencias Bibliográficas

Ballester, S. (1995). *La Sistematización de los Conocimientos Matemáticos.* La Habana: Academia.

Mancera, E. (2000). *Saber Matemática es Saber Resolver Problemas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Mendenhall, W. y reinmuth J. E. (1993). *Estadística para Administración y Economía*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Rouillon, A. A. N. (2004). *Régimen de Concursos y Quiebras – Ley 24.522*. (13ª). Buenos Aires: Astrea.

Zeballos, J. y Rodríguez, M. R. (2002). Fundamentos Epistemológicos en Disciplinas Económicas. *Estudios de Epistemología IV,* 131-144. Tucumán: Instituto de Epistemología, UNT.

Zeballos, J. A. (2005). *Lógica*.(2ª). Tucumán: El Graduado.

IMPLICACIONES EPISTEMOLÓGICAS EN LA COMPRENSIÓN DE PROBABILIDAD EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA

Saúl Elizarrarás Baena, Ana María Ojeda Salazar
Secretaría de Educación. GEM. Cinvestav. DME. IPN México
elizarrarasaul@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan resultados de la aplicación de un cuestionario, antes y después de una enseñanza, diseñado para estudiar variaciones en los conocimientos de 40 alumnos de 13-15 años de edad, sobre los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad y probabilidad condicional. La estrategia de enseñanza puso en juego una propuesta institucional (SEP, 2006; Filloy et al, 2006); sin embargo, para remontar las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) evidenciadas por los alumnos se requiere la implementación de una estrategia similar y un seguimiento a lo largo de toda la educación básica en estocásticos. Particularmente, conviene diseñar estrategias de enseñanza que presenten significativamente situaciones azarosas de manera sencilla y gradual.*

Palabras clave: probabilidad, epistemología, cognición, secundaria

Introducción

Estudios previos (Elizarrarás, 2004; Vázquez, 2004; Carballo, 2004) pusieron de manifiesto que el predominio del pensamiento determinista coarta el desarrollo del pensamiento de lo *posible* de los alumnos de educación básica; por tanto, este último se promete más difícil en los niveles educativos medio superior y superior (Ojeda, 1994).

Elementos teóricos

La perspectiva de la investigación pone en juego aspectos epistemológicos y cognitivos sobre la comprensión de probabilidad de estudiantes de tercero de secundaria.

1.1. Epistemológicos. Heitele (1975) propone una lista de diez ideas fundamentales de estocásticos para un curriculum en espiral: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Su carácter de fundamental radica en que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que se diferencian en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura. Señala también que la enseñanza de estocásticos debe iniciar tan pronto como sea posible, mediante el desarrollo de conexiones significantes de la experiencia del alumno con la realidad. Por otro lado, según Piaget e Inhelder (1951) la idea de azar no es innata, sino que se origina y evoluciona en correspondencia con las operaciones lógico-aritméticas, y se le advierte en el período de las operaciones formales (12-15 años), las cuales constituyen un sistema de acciones interrelacionadas siempre bajo un camino riguroso y reversible.

1.2. Cognitivos. Fischbein (1975) ha enfatizado que la adquisición temprana de intuiciones equivocadas sobre estocásticos se debe prevenir con la enseñanza, pues a falta de ésta se tornan de más en más difíciles de desarraigar y obstaculizan el pensamiento analítico y reflexivo. En su opinión, la coincidencia de la frecuencia relativa con la probabilidad de un evento requiere de tiempo, pues es paralela al desarrollo intelectual general (14-15 años aproximadamente). Esta declaración nos remite a Frawley (1999), quien considera al ser humano a la vez como máquina y como persona, pues la parte interna y la externa de la mente humana confluyen simultáneamente. De aquí que caracterice tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia.

Algunos estudios han señalado que el enfoque frecuencial de la probabilidad permite un acercamiento más natural hacia la idea de azar y, cuando se presenta la información numérica en formato de frecuencias (por ejemplo, en porcentajes) en lugar del formato estándar de probabilidad, se activa de manera natural el razonamiento probabilístico en los sujetos (Gigerenzer y Hoffrage, 1995).

Elementos de método

Este estudio es predominantemente de orden cualitativo (Eisner, 1998).

2.1. Escenarios. La investigación atendió a la *propuesta institucional* (plan y programas de estudio y libro de texto), al *aula* y al desempeño del *alumno*. En los dos últimos participó un grupo de 40 estudiantes (14-15 años) del tercer grado de secundaria pública; la investigación desarrollada en el primero proveyó de un referente para el diseño de la estrategia de enseñanza que se puso en juego en el segundo escenario.

2.2. Criterios de análisis. Los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto de programa de estudios y libros de texto como de datos recogidos. Se consideraron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos de la información, términos utilizados, situación planteada y estructura de la lección.

2.3. Aula. Este investigador, durante seis sesiones de 50 minutos cada una, utilizó cuatro lecciones propuestas para estocásticos en tercer grado de educación secundaria de un libro de texto (Filloy, et al, 2006), como parte de la estrategia de enseñanza que desarrolló de manera directa con el grupo de alumnos; el profesor titular sólo fue observador. Las sesiones fueron videograbadas y transcritas para su análisis posterior; en bitácora escrita se anotó información fuera de cinta y lo que se consideró conveniente señalar. La *estrategia de enseñanza*, basada en las lecciones, consistió en coordinar la lectura de cada una; los estudiantes leían en forma alternada y respondían preguntas planteadas en el texto; se confrontaron las respuestas incorrectas; las dificultades evidenciadas se fueron remontando conforme se iba avanzando en la lección. Sólo en dos sesiones se realizaron efectivamente ensayos independientes de Bernoulli (lanzamientos de dados) para dos de las lecciones, una de las cuales propone dos ruletas numeradas del uno al seis que se sustituyeron con dados.

2.4. Desempeño del alumno. Se aplicó un cuestionario previamente a las seis sesiones de enseñanza. Un mes después de la primera aplicación, se administró tal cual el mismo cuestionario, para identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

El cuestionario consistió en cinco problemas para el enfoque clásico, uno sobre probabilidad condicional y cuatro sobre el frecuencial. Con formato de opción múltiple (cuatro opciones) para cada uno de los diez problemas planteados, se solicitó justificación escrita de cada selección realizada y se permitió la corrección de respuestas; su presentación insinuó la justificación en lengua natural. La contestación, individual, requirió de 60 minutos en su primera aplicación y de 80 minutos en la segunda. Se alternaron los problemas, de tal modo, que se presentaba uno referido al enfoque clásico y enseguida otro al frecuencial (por ejemplo, ver respectivamente problemas 1 y 2 en la Figura 1).

Las opciones propuestas en el problema 1 completan las posibilidades con las fichas de dominó: con el inciso **a** se consideraron respuestas incorrectas respecto al espacio muestra y combinatoria, por la influencia del uso de una tabla similar para el caso del lanzamiento de dos dados; con el inciso **b** (correcto) se consideró el evento que incluye todos los casos favorables en relación a los casos posibles; con el inciso **c** se previó la dificultad de considerar sólo de manera correcta a los casos favorables; y el inciso **d** manifiesta dificultades con las ideas de espacio muestra y combinatoria, que incluyen a una prevalencia de la operatividad aritmética. Para el problema 2, los incisos se propusieron por lo siguiente: el inciso **a** consideró respuestas que sólo toman en cuenta los partidos ganados, mientras que el inciso **b** tomó en cuenta las respuestas basadas exclusivamente en los partidos empatados; el inciso **c** (correcto) consideró los partidos empatados o ganados y en el inciso **d** sólo se consideraron los partidos perdidos.

1. Considerando las **28** fichas de un dominó con la cara de sus puntos hacía abajo. Completa la tabla para que identifiques todas las parejas ordenadas que corresponden a los puntos de sus fichas.

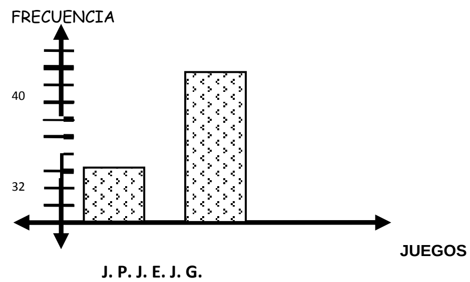
•	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	**(0, 1)**						
2							
3				**(3, 3)**			
4			**(2, 4)**				
5					**(4, 5)**		
6	**(0, 6)**						**(6, 6)**

¿Cuál es la probabilidad de que al voltear una ficha al azar, la suma de sus puntos sea mayor a ocho?

A) $\frac{12}{36}$ B) $\frac{6}{28}$ C) $\frac{6}{25}$ D) $\frac{12}{49}$

¿Por qué?

2. En la gráfica siguiente se muestran los resultados obtenidos por el equipo de fútbol "*Halcones*" luego de que ha jugado 50 partidos:



Completa la gráfica y calcula: ¿cuál es la probabilidad de que en su siguiente juego **no** pierda el equipo "*Halcones*"? $A)$ 44 % $B)$ 40 % $C)$ 84% $D)$ 16%

¿Por qué?

Figura 1. Ejemplos de problemas propuestos en el cuestionario.

Resultados del análisis de la propuesta institucional para probabilidad

La Tabla 1 presenta resultados del análisis de dos lecciones (63 y 64) del libro de texto citado como ejemplo del examen al que se sometió la propuesta institucional.

Tabla 1. Análisis de lecciones propuestas en el libro de texto (Filloy *et al*., 2006).

Criterio Lección	Ideas fundamentales	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos de la información	Términos utilizados
Lección 63	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición Regla del producto e independencia Equidistribución y simetría Combinatoria. Variable aleatoria, muestra y ley de los grandes números	Números naturales y racionales. Operaciones elementales de números racionales. Equivalencia y orden en las fracciones.	Tabla de doble entrada. Expresiones numéricas. Imágenes. Lengua natural	Frecuencia Probable, Eventos Enfoque clásico de la probabilidad. Oportunidades Ventaja, posibles resultados, azar, esperas.
Lección 64	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición Regla del producto e independencia Combinatoria. Variable aleatoria.	Números naturales. Operaciones con números naturales.	Tablas de doble entrada. Diagrama de árbol. Imágenes Lengua natural	Experiencia aleatoria. Fórmula clásica. Experiencias repetidas.

Las lecciones de probabilidad (Filloy *et al*, 2006) satisfacen los propósitos y contenidos del *Plan y Programas de Estudio de Matemáticas* (SEP, 2006). En general, están estructuradas a partir de una *introducción*, luego se plantea un problema o actividad para aplicar conocimientos previos (*Practico lo que he aprendido*), enseguida se trata el nuevo contenido (*Conozco más*) y, finalmente, se proponen algunos problemas distintos a la situación propuesta central (*Practico lo que aprendí*). De las lecciones empleadas, sólo una propone ensayos independientes mediante el uso de dados, sin pretender un análisis completo de las frecuencias absolutas y relativas obtenidas por los estudiantes.

Resultados de la enseñanza en aula

Algunas de las dificultades que evidenciaron los estudiantes respecto a la comprensión de ideas fundamentales fueron remontadas, incluso, desde su pleno y total desconocimiento (según resultados de la primera aplicación del cuestionario), como en el caso del predominio de la operación aritmética sobre la distinción entre espacio muestra y los valores respectivos de la variable aleatoria:

I: Escriban (sobre las líneas) por qué los jóvenes no pueden ganar el premio más caro.

A: Porque tienen que atinarle dos veces al "seis" o dos veces al "uno" y son cuatro posibilidades de doce.

I: ¿Por qué son cuatro posibilidades de doce?

A: Porque sería uno y uno, y seis y seis.

I: ¿Cuántas posibilidades son?

A: … ¡Ah, no! ¡Veinticuatro!

Una dificultad para la enseñanza fue la nula comprensión de los alumnos del cálculo de la frecuencia relativa para estimar la probabilidad de eventos. Los estudiantes, desde un principio, manifestaron poca familiaridad con el llenado de tablas y gráficas. Para la última sesión, 10 alumnos todavía tenían dificultades para completar una tabla de doble entrada, de los cuales dos también activaron un razonamiento aritmético y con ello evidenciaron dificultades con la idea de espacio muestra (ver Figura 2).

ESTRELLA

HEXÁGONO	+	1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,2	(2,3)	(2,4)	(2,5	(5,2)	2,6
	3	3,3	(3,4)	(3,5)	(4,3)	(3,6)	(3,7)
	4	4,4	(3,5)	(3,4)	(3,6)	(3,7)	(3,8)
	5	5,5	(2,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(6,5)
	6	6,6	(3,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(6,6)

ESTRELLA

HEXÁGONO	+	1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	2,1	(2,3)	2,4	(5,2)	2,6
	3	(3,1)	3,2	(3,3)	(4,3)	3,5	3,6
	4	(4,1)	4,2	(3,4)	4,4	4,5	4,6
	5	(5,1)	(2,5)	5,3	5,4	5,5	(6,5)
	6	(6,1)	6,2	6,3	6,4	6,5	6,7

Figura 2. Ejemplos de dificultades mostradas por los estudiantes al completar una tabla de doble entrada.

Resultados generales del cuestionario

En general, en la *primera aplicación* los alumnos evidenciaron dificultades para completar tablas como las que se propusieron en el cuestionario; sólo tres alumnos (15 %) consideraron correctamente los datos proporcionados en la tabla e identificaron las parejas ordenadas que conformaban el espacio muestra. En la *segunda aplicación*, de los ocho alumnos (20 %) que contestaron correctamente el problema 1, sólo cuatro completaron correctamente la tabla proporcionada y dieron evidencias de su dominio de las ideas fundamentales implicadas en la situación propuesta; otros cuatro alumnos la completaron incorrectamente, pero su respuesta fue correcta. Las Figuras 3 y 4 muestran los resultados obtenidos con el cuestionario de ambas aplicaciones.

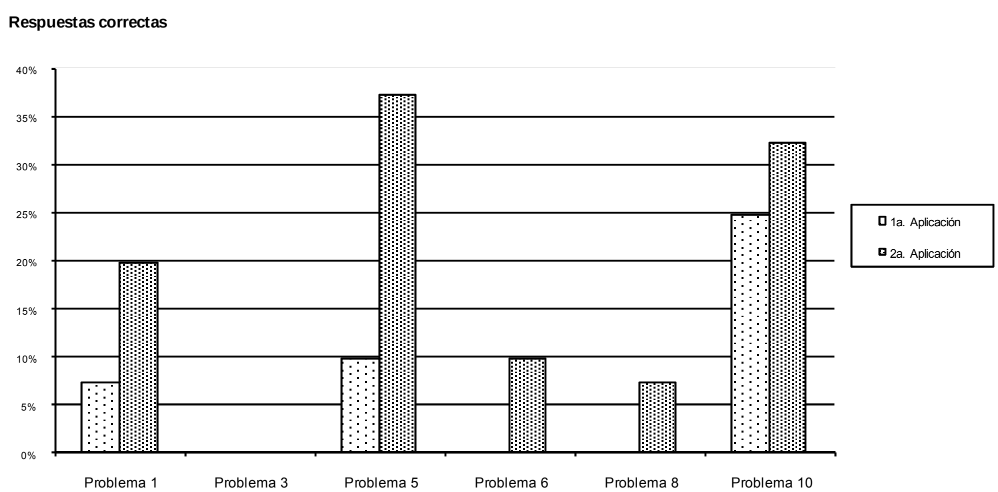


Figura 3. Resultados obtenidos en el enfoque clásico (antes y después de la enseñanza).

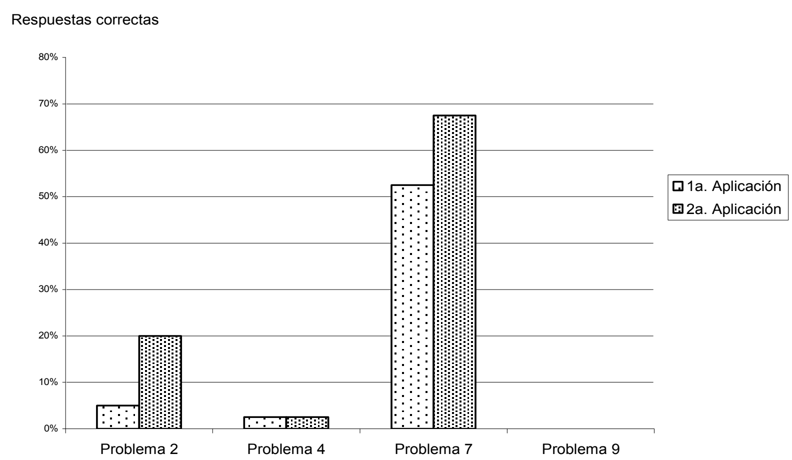


Figura 4. Resultados obtenidos en el enfoque frecuencial (antes y después de la enseñanza).

Para el problema 2, hasta la segunda aplicación sólo cuatro alumnos (10 %) proporcionaron una respuesta correcta fundamentada en la complementación de la gráfica presentada; otros cuatro estudiantes (10 %), aunque también respondieron correctamente, no completaron la gráfica. En la segunda aplicación, diez alumnos (25 %) completaron la gráfica correctamente, pero su respuesta fue incorrecta; mientras que, en la primera aplicación, la completaron incorrectamente.

Comentarios generales

La enseñanza y el tratamiento del enfoque frecuencial pudo haber contribuido para que en la segunda aplicación del cuestionario, los alumnos sistematizaran sus respuestas al completar tablas por su inclusión en lecciones; además, algunos alumnos, aunque no lograron completar las tablas de manera correcta, en la primera aplicación ni siquiera identificaban la información requerida. La enseñanza de probabilidad en el aula ofrece la oportunidad para aplicar otros contenidos de las distintas áreas del programa, ya sea geometría o aritmética, pero se requiere conservar en primer plano la idea de azar y las de estocásticos implicadas (Heitele, 1975).

Se tuvo como principal limitación el desarrollo de sólo cuatro lecciones del libro de texto empleado como medio de enseñanza, las cuales se desarrollaron en seis sesiones en un período corto de un mes. La problemática compleja que reviste el tratamiento de estocásticos en la educación básica requiere realizar un estudio más amplio en cuanto al número de sesiones y de lecciones que se pongan en práctica, de tal manera que se pueda proveer a los alumnos de más elementos de estocásticos en su formación. También es necesario un seguimiento de los estudiantes y la realización de estudios clínicos.

Referencias bibliográficas

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el Segundo Ciclo de la Educación Primaria: Determinismo y Azar*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado*. *Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós, España.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Filloy, E., Rojano, T., Figueras, O., Ojeda, A. M. & Zubieta, G. (2006). *Matemática Educativa, primer grado*. Mc Graw Hill, México.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Reidel, Holland.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. (Trad.: Arnáiz, V. M.). Paidós, España.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction. Frequency Formats. *Psychological Review*, 102, pp. 684-704. APA, USA.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Stochastic Fundamental Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, pp. 187-205.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. Ph.D. Thesis. King's College London. U. K.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l'Idée de Hasard Chez l'Enfant. PUF, París.*

SEP (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación básica. Secundaria*, México.

Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria*. Tesis de maestría. DME, Cinvestav IPN. México.

LAS HIPÓTESIS PREVIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD

Teresita E. Terán, Mercedes Anido de López
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística U.N.R. Argentina
teresitateran@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística Nivel: Medio

Resumen. *En distintas carreras universitarias se imparte un primer curso de Estadística (en su mayoría primero y único), donde se contemplan contenidos básicos de estadística descriptiva, probabilidad y temas de inferencia.*

De las experiencias docentes surge la existencia de una gran dificultad, en particular, en la comprensión de temas que abarca la inferencia estadística

Considerando que según Ausubel et al. (1983) el factor más importante que influye en el aprendizaje, es lo que el alumno ya sabe, en el trabajo que se presenta se realiza un análisis del currículum de la Escuela Secundaria y de las dificultades en Estadística de los alumnos ingresantes a la Universidad.

Palabras clave: formación previa, estadística, diagnóstico, alumno ingresante

Introducción

En varias carreras universitarias se observa la presencia de un primer curso de Estadística (en su mayoría primero y único) donde se contemplan contenidos básicos de estadística descriptiva, probabilidad y temas de inferencia.

Como docentes de Estadística en la Universidad, observamos especialmente una gran dificultad en la comprensión de los temas que abarca la inferencia estadística junto con la presencia de errores que año tras año se repiten.

Partiendo de la posición de Ausubel et al. (1983) en cuanto a que el factor más importante que influye en el aprendizaje, es lo que el alumno ya sabe, nos planteamos como interrogantes básicos del trabajo que se presenta: ¿Qué formación previa tienen los alumnos universitarios en Estadística en nuestro país?, ¿qué prevee respecto a la enseñanza de la Estadística en la currícula de la EGB y de la Polimodal con la implementación de la Ley Federal de Educación?

Si bien esa Ley ha sido modificada y debe regularse la adaptación de las reformas, varias promociones ingresarán a la Universidad formadas en sus regulaciones: ¿brinda una base suficiente en los temas de Estadística?, ¿el alumno de un primer curso de Estadística en la Universidad tiene el sustento suficiente en su formación para comprender la inferencia?, ¿qué conocimientos y competencias de estadística deberían tener los alumnos ingresantes a un primer curso?

Las cuestiones planteadas nos llevan a precisar como objetivos:

- Analizar el currículum de la Escuela Secundaria en relación a la Enseñanza de la Estadística.
- Analizar las concepciones de los alumnos a partir de los cuales se puedan diseñar situaciones de aprendizaje.

La enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria

La Estadística es considerada en los distintos niveles que contempla la Ley Federal de Educación como un bloque incorporado a la Matemática. Si bien esta ley se ha derogado, en el proceso de cambio se continúan desarrollando los mismos contenidos. A pesar de la modificación estructural, se espera que se mantengan los contenidos esenciales de las Ciencias Básicas.

Respecto a los mismos, se establece que la enseñanza de la matemática tenga como propósitos fundamentales, que los alumnos:

- Planteen y resuelvan problemas con variedad de estrategias, descubriendo que la Matemática es una habilidad humana a la que todos pueden acceder.
- Relacionen los conocimientos matemáticos con el mundo real, entre sus diversas ramas y con otras ciencias, otorgándoles significación y funcionalidad.
- Comprendan la potencialidad de la matemática para modelizar problemas de otras disciplinas, a partir de su estructuración lógica y su lenguaje.

- Valoren las nuevas tecnologías como recurso para la construcción de los contenidos matemáticos.
- Adquieran esquemas de conocimiento matemático que les permitan ampliar su experiencia cotidiana.

Se supone que la enseñanza de la matemática, en tanto ha ocupado un lugar de privilegio en los programas escolares, también ha influido implícita o explícitamente en las dimensiones formativa e informativa dirigidas hacia el sujeto. Hoy se suma lo social por cuanto la matemática desde su lenguaje y desde su método se ha constituido, al menos fuera del ámbito escolar en un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico en que vivimos.

Es decir, que el enfoque con que deberían tratarse los contenidos de matemática requeriría destacar: la comprensión conceptual, la habilidad de plantear problemas y resolverlos con una variedad de estrategias, la significación y funcionalidad de la matemática a través de su conexión con el mundo real, la potencia de la matemática para modelizar problemas de otras disciplinas, a partir de su estructuración lógica y de su lenguaje y el valor de la nueva tecnología que se incorpora al aula y que posibilita experimentar, enriqueciendo el campo perceptual y las operaciones mentales involucradas en los procesos de construcción, estructuración y análisis de contenidos.

La formación en Estadística

En relación a la "Estadística y Probabilidad" *se establece como objetivo la resolución de problemas donde se muestre la necesidad de una teoría cuantitativa que permita tomar decisiones en presencia de la incertidumbre. Como expectativa de logro se espera que al finalizar la Educación Polimodal, los estudiantes se encuentren en condiciones de interpretar y aplicar los conceptos y procedimientos básicos de la Estadística y la*

Probabilidad, reconociendo los alcances y las limitaciones de sus usos en la resolución de los problemas y en la toma de decisiones.

Si se pudiese hacer efectivo lo expuesto, muchas de las falencias en la formación Estadística que se han detectado en las últimas promociones no deberían presentarse. En un primer análisis algunas de las causas de estas dificultades (en las que existe un consenso generalizado entre maestros y profesores al respecto) serían:

1. Los maestros de la E.G.B. y de los profesores de Matemática en su currícula de formación de grado no han recibido preparación suficiente en Estadística o directamente no estaba incluida como asignatura de su formación profesional.
2. Si bien los cursos de perfeccionamiento docente o postítulos apuntan a subsanar estas falencias, la actualización de conocimientos de los docentes es un proceso aún en marcha.

Las dificultades en el aprendizaje de la Estadística del alumno en un primer curso de la Universidad

La naturaleza dinámica de la Estadística requiere la revisión continua de los contenidos y métodos de enseñanza en la universidad. La tecnología por su parte en el momento actual, influye en el *qué y cómo enseñar*, lo que produce una continua revisión y análisis de contenidos, condicionada por las hipótesis previas que determinan el aprendizaje.

Ahora bien, ¿qué requerimientos sociales y corrientes pedagógicas, influyen y demandan nuevos estudios en el campo de la enseñanza de la Estadística?

¿Qué problemas se señalan especialmente? Diversos investigadores de la Estadística buscan respuestas a los mismos.

Broers (2002) en un estudio relacionado con el aprendizaje y la instrucción realizado en Londres (Inglaterra), sobre 59 alumnos ingresantes a la carrera de Psicología a los que tomó una prueba sobre conocimiento estadístico, observó que 47 fallaron en algunos de los pasos que eran necesarios para encontrar la solución. Cuatro factores son señalados como causantes de este fracaso: *la carencia de conocimientos previos, el nivel de abstracción de los hechos, la "reciente adquisición" de los hechos y la falta de habilidad para razonar lógicamente.* Además se encontró que en 20 de las 59 respuestas, los alumnos, cuando debían encarar un problema que demandaba la combinación de varios conceptos que se suponían conocidos, se basaban en concepciones erróneas. El autor citado observó que aunque acertaran en las respuestas sobre conocimientos aislados, las fallas se debieron a lo que interpretó como *deficiencias en la organización cognitiva.* En dicha experiencia, Broers observó que la mayoría de los estudiantes no tienden a expresarse matemáticamente, sino que en general se manifiestan con términos del lenguaje común. Tal situación es para el autor una evidencia de que los hechos abstractos son más difíciles de recordar que las proposiciones verbales. A partir de estas conclusiones, Broers para lograr eficacia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística sugiere: contemplar el tiempo de maduración y fomentar la integración de nuevas ideas y conceptos en esquemas complejos a través de refuerzo y ejercicios de afianzamiento.

Este estudio es importante para identificar las interpretaciones erróneas más frecuentes que pueden interferir en el proceso de maduración. A partir de la comprobación de que todos los errores cometidos por los alumnos se debían al uso de conceptos e ideas preconcebidos pero inadecuados, este autor destaca que el conocimiento "primitivo" del alumno la mayoría de las veces es un obstáculo en el desarrollo de conocimientos más complejos.

Batanero (2000) advierte en relación a la *Metodología de la Enseñanza*, que uno de los problemas principales en un curso introductorio de Estadística a nivel universitario, es lograr la transición del análisis de datos a la inferencia. La escasez del tiempo disponible y de los conocimientos previos de los alumnos, impiden llevar a cabo un estudio completo de la probabilidad.

Para Socas (1999), las dificultades se pueden sintetizar de manera más explicita y en líneas generales, en los siguientes tópicos:

1. Dificultades asociadas con la complejidad de los objetos de las matemáticas.
2. Dificultades asociadas con los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
4. Dificultades asociadas con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas con actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

En la concepción de Brousseau (1983): un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas.

Encontrar estos obstáculos mediante un análisis histórico y superarlos parece ser una condición necesaria para la construcción de una concepción adecuada (Batanero, 2000).

Respecto al aprendizaje de la Estadística en el nivel universitario en la Argentina, históricamente ha sido considerada una asignatura "difícil" en la que se presentan altos índices de deserción.

No obstante, en un intento de superación de antiguas concepciones que incluían, en la estructura curricular de algunas carreras la Estadística como materia aislada y abstracta, se ha evidenciado a partir de las actuales propuestas de cambios curriculares en las distintas facultades de la U.N.R., una tendencia a la integración adecuada del conocimiento a situaciones de aplicación en las áreas específicas.

Dificultades en la enseñanza de la estadística derivadas de la formación previa

Algunas de las dificultades en el aprendizaje de la Estadística derivan de las dificultades generales en el aprendizaje de la Matemática. Estas dificultades están siendo estudiadas, a través del Sistema Nacional de Evaluación (SINEC), que trabaja para mejorar la calidad de la educación con la producción sistemática y permanente de información acerca del rendimiento de alumnos de los años terminales de ciclo en la Educación General Básica (EGB) y final de cada nivel del Sistema Educativo formal.

Para ello, desde 1993 se realizan Operativos de Evaluación de la Calidad Educativa en todo el país. El análisis e interpretación de los resultados obtenidos en cada Operativo, han proporcionado información acerca de las dificultades detectadas a través de las regularidades en los resultados, dificultades que ante un mismo contenido evaluado, año tras año, se mantienen constantes y se presentan con diferentes niveles de complejidad entre alumnos de distintos grados y/o cursos.

Del análisis de los contenidos de temas relativos a Estadística en las diferentes evaluaciones de Matemática a nivel nacional se destaca para 5º Año Nivel Medio 1996, entre los contenidos que presentaron mayor dificultad, el análisis combinatorio simple (ítem Nº 38) cuyo porcentaje de respuestas correctas fue de 41,82 %. Vemos una disminución del rendimiento y un aumento de errores en los temas específicos de Estadística.

En el año 1997, entre los contenidos que presentaron mayor dificultad en 7º Año EGB en Matemática se destaca la lectura e interpretación de gráficos (46,69% de respuestas correctas). En 9º Año EGB se observa que los ítems interpretación de gráficos de barras e interpretación de gráficos de torta obtuvieron pocas respuestas correctas (43,88% y 48,4% respectivamente). En 5º Año el contenido referido a Cálculo combinatorio y Probabilidad (probabilidad simple) se destaca por la gran dificultad presentada en su resolución (40,5% de respuestas acertadas).

En el Operativo 1998 en 5º Año, se tomó un problema sobre Estadística Descriptiva, el 67 % de los alumnos evaluados la resolvió en forma incorrecta, testimoniando así, la dificultad que se presenta para analizar datos de un cuadro y aplicar el concepto de promedio.

Anido y Guzmán (1998) analizan causas y efectos que dificultan el aprendizaje de la Matemática en los primeros cursos de la Universidad. Sumando nuestra experiencia personal en Estadística a dicha información, podríamos sintetizarlas en el siguiente cuadro:

Causas y efectos que dificultan el aprendizaje de la Estadística en los primeros cursos de la Universidad

PROBLEMAS	***CAUSAS***	***EFECTOS***
Relativos al alumnado	➢ Escasos **conocimientos previos** sobre el **cálculo numérico** (propiedades matemáticas). ➢ **Aprendizajes previos mecánicos** en matemática e informática. ➢ Deficiencias en la **comprensión de textos** escritos , especialmente en los aspectos inferenciales (como actividad cognitiva) ➢ Deficiencias en el conocimiento de lenguajes simbólicos ➢ Desconocimiento de **conceptos previos (pertenecientes a EGB y Polimodal)** sobre probabilidades e inferencias estadísticas.	➢ Errores de procedimiento y carencia de estrategias que faciliten el cálculo numérico ➢ Resistencia a toda actividad que exija procesos demostrativos ➢ Dificultades en la utilización de distintos lenguajes(verbal, numérico, simbólico matemático y gráfico) para la comprensión y producción ➢ Marcada dificultad en el pasaje de un lenguaje a otro ➢ Imposibilidad de comprender o plantear problemas de la realidad cuya solución implique el uso de los conceptos de probabilidad e inferencia estadística ➢ Desorientación al elegir estrategias de solución
Relativos a la metodología	➢ El **carácter abstracto** de la teoría estadística y la masividad de los cursos hacen que gran cantidad de contenidos deban desarrollarse dentro de la modalidad “clase expositiva”.	➢ Marcados desniveles de concentración y aprovechamiento en los grupos-clase.

Bonacina, Haidar y otros (2002), en un estudio de los esquemas conceptuales en alumnos ingresantes en la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la U.N.R., observan que, a pesar de que las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos ingresantes a la Universidad son históricas y de gran diversidad, ha habido un notable incremento en el índice de deserción y fracasos en los primeros meses de cursado, junto a un incremento de las dificultades de aprendizaje. Su investigación basada en el análisis de la desconexión existente entre el Ciclo Medio y el Superior, se realizó sobre 119 alumnos ingresantes a las carreras de Licenciatura en Biotecnología y Licenciatura en Química de la ya mencionada Facultad. En la prueba diagnóstica el 60% de las respuestas son erróneas y del análisis de las mismas, concluyen que la desconexión entre el Ciclo Medio y el Superior indicaría obstáculos epistemológicos, que a su vez son una de las causas de los errores que cometen los alumnos.

Antoni y Quaglino (2001), han realizado una investigación sobre el desempeño académico y capacidad lógico-formal en tres mil alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la U.N.R.

Uno de los instrumentos analizados, intenta encontrar a partir de una prueba matemática compuesta por quince problemas de sencilla resolución, la incidencia del grado de desarrollo de la capacidad lógica formal del alumno, diferenciando las capacidades de operar con proporciones, analizar probabilidades, realizar operaciones combinatorias, comprobar hipótesis obteniendo conclusiones y controlar variables, a través de una categorización por niveles.

El conjunto de los resultados obtenidos corresponde, a cuatro cohortes consecutivas de ingresantes a las carreras de Contador Público Nacional y Licenciado en Administración de Empresas desde 1997 al 2000.

Al analizar la información correspondiente a los años 1997, 1998, 1999 y 2000, se observa que en el año 2000, solo el 39% de los alumnos alcanza el nivel definido como razonamiento formal.

Por otra parte, en el terreno específico de la Matemática, en los estudios realizados por Koegel y Sagristá en el año 2001, en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística con los alumnos ingresantes a las carreras de Contador Público, Licenciatura en Administración, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Estadística, dentro del Marco del Proyecto "La enseñanza de la Matemática con herramientas computacionales", se observa que en las pruebas de Diagnóstico de Matemática de los años 1997, 1998 y 1999, los problemas relativos a aplicación correcta de "conceptos básicos" de la Enseñanza Secundaria, fueron resueltos satisfactoriamente sólo por un 30% de los alumnos ingresantes, manteniéndose esta regularidad en los resultados a través de los 3 años analizados.

En base a tales resultados, estos investigadores indican la necesidad de estudios didácticos para minimizar en algún grado problemas importantes para la Universidad, como lo son el abandono y el retraso en el avance.

Si bien es claro que el fenómeno social presenta una riqueza y complejidad tal que no es posible encerrar los resultados que se presentan en conclusiones definitivas, éstos ayudan a comprender algunos aspectos de la problemática abordada en este trabajo.

Conclusión

En el marco de este análisis surge la necesidad de reforzar el aprendizaje de la Matemática y la Estadística, desde una perspectiva integral profundizando el estudio de las concepciones, dificultades, errores y los obstáculos de los que devienen para compatibilizar la formación previa del ingresante con la exigencia de los ciclos terciarios y universitarios.

Agradecimiento

PICTO EDUCACIÓN 2005: La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria.

Referencias bibliográficas

Anido de López, M. y Guzmán, M. (1998). Los Grandes Temas de la Educación Matemática Ecos del ICME-8. *IRICE. Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación.* Vol. 12. pp. 115-139. Rosario, Argentina.

Antoni, J. y Quaglino, M. (2001). Desempeño académico y capacidad lógico-formal. *Actas de las Sextas Jornadas Investigaciones en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística*. *Universidad Nacional de Rosario.* pp. 77-86. Rosario, Argentina.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning.* Vol. 2(1-2). pp. 75-98.

Bonacina, M., Haidar, A., Quiroga, M, Teti, C. y Sorribas, E. (2002). Un estudio de los esquemas conceptuales en alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas. *Jornadas de Profesores de Matemática y Estadística del Ciclo Básico de las distintas Facultades de la U.N.R. Secretaría Académica del Rectorado. U.N.R.*

Broers, N. J. (2002). Educational studies in mathematics. *Learning and Instruction.* pp. 323-344. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1983).Les obstacles epistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* Vol. 4(2). pp. 164-198.

Koegel, L. y Sagristá, R. (2001). Estudio de características de los ingresantes a las Carreras de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. 1997/2000. *Actas de las Sextas Investigaciones en la Facultad de Cs. Económicas y Estadística*. U.N.R.

Socas, M. (1999). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Coord.). *La Educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: I.C.E/Horsori.

LIBROS DE TEXTO Y PROGRAMAS DE CÓMPUTO EN EL AULA DEL TERCER CICLO DE EDUCACION PRIMARIA

María Patricia Flores Marroquín, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN México
pflores@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística Nivel: Básico

Resumen. *El objeto de estudio de esta investigación es identificar la comprensión de los alumnos de ideas fundamentales de estocásticos resultante de su enseñanza con el uso de distintos medios (entendiéndose éstos como los que median la enseñanza, en este caso los que corresponden al planteamiento institucional), entre ellos programas de cómputo (Enciclomedia) y libros de texto, en el tercer ciclo de educación primaria (quinto y sexto grado). De entre otros, los resultados obtenidos en el proceso de investigación provienen del análisis cualitativo de sesiones de enseñanza videograbadas en aula alterna, y de las respuestas proporcionadas en entrevistas a distintos alumnos seleccionados por su desempeño en clase.*

Palabras clave: estocásticos, programas computacionales

Introducción

El planteamiento institucional para el tercer ciclo de educación primaria se conforma por *Plan y programas de estudio* (SEP, 1993), *Libro para el maestro* (SEP, 2002 y 2003), *Avance programático* (SEP, 1997 - 1998), *Fichero de actividades didácticas* (SEP, 2000 y 2003), *Libro de Texto. Matemáticas. Quinto grado* (SEP, 2000) *y Matemáticas. Sexto grado* (SEP, 2004) y *Enciclomedia* (SEP, 2005). Estas obras son guía de la enseñanza en aula y dirigen el perfil de egreso del alumno; en particular, son motivo de interés para identificar las ideas fundamentales de estocásticos implicadas en ellas.

Problema de Investigación

Esta investigación se ha orientado por la pregunta *¿Cuál es la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria resultante de su enseñanza según distintos medios institucionales?* Los objetivos propuestos son: i)

Caracterizar el uso de medios en la enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria. ii) Identificar la comprensión de los alumnos, resultante de esa enseñanza, de ideas fundamentales de estocásticos.

Elementos teóricos para el enfoque de los estocásticos en educación

Tres ejes orientan esta investigación. Primero, el *epistemológico* considera la propuesta de Heitele (1975) para ideas fundamentales de estocásticos como guía de un currículo en espiral. Esa propuesta responde al requerimiento de que *El principio decisivo de la enseñanza de un tópico es la transmisión de ideas fundamentales…que proporcionen al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración* (Heitele, 1975; pág. 186). Segundo, el eje *cognitivo* considera las investigaciones de Fischbein (1975) relacionadas con las fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico de los niños, de donde plantea un modo alternativo de enseñanza que pretende el aprovechamiento y consolidación de los fundamentos intuitivos del desarrollo del pensamiento probabilístico. El autor indica que la *enseñanza en estocásticos no sólo es posible, sino necesaria, en niveles educativos tan tempranos como lo son los básicos (preescolar y primaria)* (Colín *et al*., 1993, pág. 37). Tercero, el eje *social* orienta la investigación hacia situaciones reales del acto educativo en su marco institucional, y considera las dimensiones de ese acto señaladas por Eisner (1998): la *intencional*, que se refiere a los propósitos que orientan la función educativa en aulas e instituciones; la *estructural*, que sugiere una organización institucional, desde los contenidos y la temporalidad para éstos, una distribución temporal por la relevancia del contenido y que influye en lo que los alumnos aprenden; la *curricular*, que determina los contenidos y las actividades que ocupan a los estudiantes; la *pedagógica,* que enmarca lo que se pretende enseñar, los medios de que se vale el docente para ello y su limitación en cuanto a los contenidos a enseñar; finalmente, la dimensión *evaluativa*, como el juicio de valor que se otorga a algún objeto, situación o proceso.

Enfoque y organización de la investigación

La investigación presenta un enfoque cualitativo (Eisner, 1998). Su organización estuvo dictada por el "órgano operativo de investigación" (Ojeda, 2006) y siguió los criterios de la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006). En consecuencia, se examinó la propuesta institucional para estocásticos para determinar sus características, pues constituye el principal referente para la enseñanza. Ésta se desarrolló en *aula alterna* (Ojeda, 2006), la cual conjuga experiencias del docente con su grupo de alumnos y de la investigadora, y es el escenario para el desarrollo de esta investigación. Con los medios de la propuesta institucional (libro de texto y *Enciclomedia*) se desarrolló la enseñanza de contenidos de probabilidad y de estadística, en sesiones que se videograbaron, digitalizaron y luego se transcribieron para su análisis. Desde un seminario de investigación, la enseñanza con cada lección presentada se sometió a escrutinio: propósitos, el papel del medio empleado, estrategia, dificultades de enseñanza y de los alumnos, y temporalidad; pero más específicamente, se analizó lo concerniente a ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos presentes, recursos semióticos en juego, términos empleados (referentes a estocásticos).

A partir de su desempeño en el aula durante el empleo de "interactivos" del programa de cómputo, se identificaron dos alumnos de quinto grado (interactivo "Ruletas") para realizar entrevistas individuales, orales, semiestructuradas, sobre situaciones de decisión. De sexto grado se identificaron cuatro alumnos para realizar entrevistas semiestructuradas individuales durante la interacción alumno–programa de cómputo con dos lecciones. A los estudiantes se les colocó frente a la computadora para que interactuaran con dos "interactivos" del programa de cómputo (*Dados* y *Diagrama de árbol*); se les pidió, primero, que reconocieran sus componentes, luego que activaran sus simulaciones (lanzamientos de dados y trazo de diagramas de árbol) y durante éstas se les preguntó acerca de espacio muestra, variable aleatoria, ley de los grandes números y el principio multiplicativo. Todas las entrevistas fueron videograbadas y después transcritas para su análisis. El propósito fue obtener más datos de la comprensión de los alumnos de algunas ideas fundamentales de estocásticos.

Finalmente, se aplicaron cuestionarios a docentes (al término de cada lección) y a los alumnos de sexto grado, al finalizar la enseñanza de estocásticos, lo cual, por razones de espacio, se trata en otro sitio.

Participaron en la investigación dos docentes, un grupo de quinto grado (44 alumnos) y su docente, un grupo de sexto grado (39 alumnos) y su docente, de una escuela pública de turno matutino, previo acuerdo académico con autoridades institucionales, supervisión, dirección y docencia. El estudio tuvo lugar en condiciones reales, con acatamiento espacio-temporal delimitado.

Programa de cómputo: Enciclomedia

Enciclomedia es un programa de cómputo diseñado para su uso en el aula mediante la proyección, ante todo el grupo, de lo que presenta la pantalla del monitor. Tiene como propósito: *Fortalecer los procesos de enseñanza a través de la reflexión del quehacer docente y la vinculación en el uso de las Nuevas Tecnologías de Información y Comunicación (NTIC´s) de los profesores de 5o y 6o de educación primaria* (SEP, 2005). Consiste, básicamente, en los documentos que constituyen la propuesta institucional, digitalizados, y en la inserción de vínculos en las lecciones de los libros de texto, como son: *Encarta 2005, Glosario, Biblioteca del aula, Actividades (Atínale al que sigue, ¿Sabes contar?, Por fin vacaciones, ¿De cuántas maneras?), Ejercicios suplementarios (similares a los que presenta el libro en la lección y que complementan los mismos), Generador de gráficos (circulograma, barras e histograma) e Interactivos (Dados, Ruleta, Diagrama de árbol, Juego de pelota, Ciclopista),* para remisión al mismo tema u otros relacionados, ya sea en los libros de texto, en otras actividades propuestas en el programa o en algunos sitios de Internet (*Sepiensa, Redescolar*). En consecuencia, el objetivo propuesto con las lecciones de los libros de texto es el mismo que se propone con su versión digitalizada en *Enciclomedia.* En las aulas que disponen de pizarrón electrónico se puede interactuar con lo proyectado que incluya botones o vínculos. En esta investigación, la proyección tuvo lugar sobre un pizarrón común.

Los interactivos a los que en este reporte nos referimos (ver Figura 1) presentan: i) Simulaciones de lanzamientos (uno, diez, cien) de *Dados* (uno, dos y tres), con puntos o colores en sus caras y que, mediante una gráfica de barras, muestran la frecuencia del número de los puntos del dado, o de la suma de los puntos al lanzar dos o tres dados. ii) Para *La ruleta*, se presentan, de acuerdo al nivel, simulaciones de giros de una (sencillo) o dos ruletas (medio y avanzado) hexagonales (seccionadas en sextos, con un numeral del uno al seis en cada sección); al detenerse presenta una pregunta acerca de la probabilidad de un evento dado. iii) *Diagrama de árbol* requiere la entrada del nombre de los elementos y número de niveles que ordenará el diagrama de árbol, el cual carece de raíz y se despliega de izquierda a derecha, a diferencia de los diagramas de árbol presentados en el libro de texto (de arriba hacia abajo).

Libro de texto y Enciclomedia en la enseñanza de estocásticos en tercer ciclo

La enseñanza en *aula alterna* se desarrolló bajo la estrategia prevista por el docente con su grupo de alumnos. Cada alumno dispuso de la lección en su propio libro de texto al tiempo en que ésta también era proyectada al frente en el pizarrón por su digitalización en *Enciclomedia*. Como es común, el docente utilizó las lecciones del libro de texto de manera puntual, paso a paso, como el medio lo presenta, como guía de su enseñanza (por ejemplo, ver Carballo, 2004), pero la interacción de los alumnos con el programa de cómputo estuvo restringida a presenciar lo proyectado. Al tiempo en que el docente seguía la lección proyectada, los alumnos la seguían en su libro de texto; la contestación de las preguntas planteadas en la lección se escribía también en la lección proyectada, de modo que las respuestas se uniformizaron para todo el grupo, pues los alumnos las copiaban en su propio libro de texto. Al finalizar la lección, el docente procedía a utilizar los vínculos propuestos en ella por el programa de cómputo, como al glosario y a los interactivos.

Figura 1. Interactivos en *Enciclomedia* (SEP, 2005).

De las sesiones de enseñanza desarrolladas en el marco de esta investigación, nos referiremos a las de quinto grado en que se utilizaron las lecciones 45 y 81 (SEP, 2000) y el interactivo *La ruleta* (SEP, 2005); y a las de sexto grado con las lecciones 30, 35 y 48 (SEP, 2004) y los interactivos *Dados* (SEP, 2005) con la primera y *Diagrama de árbol* (SEP, 2005) propuesto en las dos últimas. El contenido de estocásticos en lecciones e interactivos se resume en la Tabla 1.

Quinto grado (SEP, 2000)			**Sexto grado** (SEP, 2004)		
Interactivo (SEP, 2005)	**Lecciones**	Idea fundamental	**Interactivo** (SEP, 2005)	**Lecciones**	Idea fundamental
Ruleta	45	Espacio muestra, independencia, variable aleatoria	*Dados*	30	Espacio muestra, independencia, variable aleatoria (Ley de los grandes números)
	81	Espacio muestra e independencia	*Diagrama de árbol*	35	Combinatoria (principio multiplicativo)
				48	Combinatoria (principio multiplicativo)

Tabla 1. Contenido de estocásticos en lecciones e interactivos empleados en la enseñanza en *aula alterna.*

Sobre los contenidos de estocásticos en los libros de texto de matemáticas no se proporciona información necesaria para que tanto docentes como alumnos los identifiquen como los objetivos por alcanzar con el estudio de las lecciones respectivas. Las situaciones planteadas en el libro, así como en el programa de cómputo se conjugan en la reproducción de lo que presentan, tanto aciertos como errores. De manera particular, aún con el programa de cómputo no se remonta la relevancia otorgada a otros contenidos de matemáticas, por ejemplo de aritmética, en relación con los de probabilidad (Carballo, 2004).

Las instrucciones que presentan los libros de texto *Matemáticas, quinto grado* y *matemáticas, sexto grado,* no son claros, confunden a docentes y alumnos, a la vez que los *recursos semióticos* que se presentan para mostrar la información contienen errores de comprensión (sintaxis).

El programa de cómputo (*Enciclomedia*), por su propia constitución, privilegia colores e imágenes. De manera particular, acentúa el uso de los recursos semióticos como fin y se desplaza el foco de lo conceptual. Por ejemplo, la falta de identificación del número de niveles de ramificación para un diagrama de árbol aplicado al caso particular de la determinación del número de combinaciones de un candado con tres cilindros, cada cilindro con los dígitos 1, 2, 3, dio lugar a la siguiente interacción en el aula con el uso del interactivo *Diagrama de árbol* (“M” denota al maestro y “A” al alumno):

M: … vamos a hacer ¿uso de qué?

A: De diagrama de árbol.

M: Para contar posibles resultados, dependiendo ¿de qué? De las combinaciones. … Pásale, [al frente] ¡hay muchas! … se supone que el diagrama de árbol nos da muchas combinaciones.

……………………………………….

M: Levante la mano quien ya entendió por qué se ramifican y qué son.

A: Diagrama de árbol.

M: Pero, ¿por qué se llama diagrama de árbol? … todas las posibles combinaciones que puede haber de los elementos … A ver, en la página … va a leer …

A: ¿Cuántas combinaciones posibles hay en este diagrama?

M: Pónganle muchísimas.

A: No se acaban.

El principio multiplicativo no tuvo un sitio en la clase. El interactivo *Diagrama de árbol* confundió a los alumnos y fue causa de que su atención se perdiera por su propia estructura, pues no presenta una imagen clara de un diagrama de árbol completo para las situaciones planteadas en clase, tal que el principio fundamental del conteo se dejó de lado.

Por otro lado, con el interactivo *Dados*, el cual presenta los resultados de simulaciones de lanzamientos de dados en una gráfica de barras, se requiere nuevamente una orientación del docente hacia el aspecto conceptual (espacio muestra, variable aleatoria, distribución de posibilidades), más allá de la mera asistencia al crecimiento de las barras conforme aumenta el número de simulaciones (ver Figura 1).

La entrevista mediada

Las entrevistas semiestructuradas realizadas confirmaron la necesidad de orientar la atención del alumno hacia lo conceptual que subyace a la presentación de figuras dinámicas. Más aún, fue manifiesta la necesidad de una experiencia concreta, ya fuera física o mediante los modos propios, idiosincrásicos, del alumno, de emplear signos en un proceso de organización de los elementos del problema planteado (ver Figura 2):

E: ¿Cuántos posibles resultados habrá en tres volados?

A: Seis.

E: Seis, ¿cómo le hiciste?

A: Porque si en un volado sale águila con águila, o sale águila con sol … y entonces ahí es el de un volado y sería sol con águila, o sol con sol … ¿y el otro podría ser? (duda el alumno).

E: A ver, quita ése. Me dijiste que eran seis posibles resultados. Haz tu árbol con tres volados. ¿Cuántos resultados?

A: Ocho.

A: *En dos volados serían cuatro. En tres volados serían seis* (conteo de dos en dos).

E: ¿Qué te puede salir al lanzar tres volados? ¿Cuál es un posible resultado? A ver, léemelo (el alumno lee los posibles resultados). Ahora, eso cómo lo representarías sin tener que contarlo. ¿Alguna manera en que pudieras hacerlo? ¿Cómo?

A: ¡Echando el volado!

Figura 2. Aún después del despliegue en pantalla del diagrama de árbol, el alumno requiere de modos propios de organizar los elementos del problema

Comentarios finales

La confluencia de la presentación simultánea, proyectada e impresa individual, de las lecciones en la enseñanza en el aula, acentúa la necesidad de atender las condiciones en las cuales se utiliza un medio particular. Esas condiciones atañen desde la ambientación (la nitidez de lo proyectado requiere de menos luz al tiempo que la escritura en el libro o en el cuaderno demanda buena iluminación) hasta la consideración del efecto que, en lo cognitivo, puede producir la presentación de figuras dinámicas, o bien estáticas, a falta de una experiencia más directa con el tipo de situaciones en estudio, particularmente las aleatorias. El interactivo *Dados* causó confusión en alumnos y docentes, en las simulaciones de diez y cien lanzamientos, por lo menos debido a la falta de identificación de lo relevante en la gráfica de barras que presenta. Por tanto, el objetivo detrás del diseño de la simulación, el enfoque frecuencial de la probabilidad, no se logra. Sin embargo, lo que ha sido relevante es la necesidad de atender a una formación docente en estocásticos.

Referencias bibliográficas

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el Segundo Ciclo de la Educación Primaria: Determinismo y Azar*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Colín, J., Garnica, I. & Ojeda, A. M. (1993). Intuición y Probabilidad desde el punto de vista de Fischbein*. Cuadernos de Investigación* No. 26 Año VII. PNFAPM, Cinvestav del IPN. México.

Eisner, E. (1998). *El ojo Ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós, España.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Reidel Publishing Company. Dordrecht-Holland/Boston- USA.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6 pp. 187-205. Reidel, Holland.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. Santillana; Cinvestav del IPN. México, págs. 195-214.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* The Norton Library, W:W: Norton & Company inc New York.

SEP (2000). *Matemáticas. Quinto grado*. México.

SEP (2004). *Matemáticas. Sexto grado*. México.

SEP (2005). *Matemmáticas.* En línea*.* [Disponible en]

www.sep.gob.mx/worklappsite/Enciclomedia/documentoenciclomedia.pdf.24-08-05

UNA ACTIVIDAD PARA EL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD, DISEÑADA CON EL MÉTODO HISTÓRICO CULTURAL DE VYGOTSKI Y LA TEORÍA DE LA ACTIVIDAD DE LEONTIEV

Jorge Gómez Arias
Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN México
jgomez@esfm.ipn.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística
Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Se comienza viendo qué es la Zona de Desarrollo Próximo y qué convierte un material didáctico y tecnológico en una herramienta semiótica, aclarándose la intima conexión del pensamiento de Vygotski con el de Leontiev. Luego se describe la estructura, aplicación y resultados de un examen-diagnóstico, usado como herramienta semiótica para introducir el tema de la probabilidad: su dialéctica con el azar y la incertidumbre, sus modalidades metodológicas y problemas básicos de modelación matemática, sus definiciones informales. Los resultados, puede apreciarse, fueron muy significativos.*

Palabras clave: Zona de Desarrollo Próximo, herramientas semióticas, probabilidad, actividad, examen-diagnóstico

Introducción

En los últimos decenios han surgido nuevas propuestas para la enseñanza de las matemáticas, como las basadas en la tecnología educativa o las constructivistas. Desde su respectivo enfoque metodológico han mejorado las posibilidades de la práctica docente pero ninguna ha superado satisfactoriamente los problemas del aprendizaje. Los factores sociales (económicos, familiares, condiciones de las escuelas públicas) pesan demasiado en el rendimiento de los alumnos. Por eso, es importante comenzar este reporte planteando que la propuesta didáctica de Vygotski y Leontiev constituye una herramienta teórica muy adecuada para las condiciones en que trabajamos en nuestro medio. Dentro de la estructura psicológica de la actividad, son las interacciones de los alumnos con los profesores, con sus compañeros, consigo mismos (su lenguaje interno), siempre usando las herramientas semióticas, el factor principal en esta concepción, y es Leontiev quien proporciona una teoría consistente y viable de la actividad escolar.

En este caso, la meta inicial es que el alumno construya una caracterización adecuada del concepto central de la disciplina que es el objeto de aprendizaje: la probabilidad. Así que la primera actividad del curso está enfocada a esa construcción, para lo cual se emplea una herramienta semiótica denominada "Examen-Diagnóstico" (E-D). Se trata de que los alumnos reconozcan varios de los aspectos más característicos de la probabilidad, su objeto de estudio y su metodología,

Antecedentes teóricos

La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) se define por la divergencia entre el nivel requerido para la solución de las tareas que son accesibles al niño con ayuda de los adultos o para el joven con ayuda de los profesores o expertos (nivel potencial NP) y el nivel de solución de las tareas que puede resolver en su actividad autónoma (nivel actual NA). *"Lo que hoy el niño hace con ayuda de los adultos mañana lo podrá hacer en forma autónoma"* (Vygotski (1989) p. 217). Por ello, *"sólo es buena aquella enseñanza que se adelanta al desarrollo"* (Idem. p. 218). La enseñanza *"es el momento interno necesario y universal en el proceso del desarrollo infantil* (o en cualquier otra edad de la persona) *pero no de las capacidades naturales sino de las capacidades históricas del hombre"* (*Idem.*, p. 219).

El profesor tiene que optimizar la peculiaridad esencial de la instrucción escolar, aquella que la convierte en una ZDP, su carácter social. El potencial de la ZDP depende del nivel potencial de desarrollo psicológico del alumno, de su capacidad de llegar a grados de generalidad todavía no maduros pero ya posibles en él y a capacidades superiores de ligar lo general con lo particular. Para que la actividad sea capaz de aprovechar al máximo ese potencial es preciso que la actividad esté estructurada de acuerdo con las leyes generales de la psicología evolutiva.

Leontiev retoma varios conceptos esenciales del método histórico-cultural vygotskiano:

- El reconocimiento de la actividad organizada en el ámbito escolar como el mecanismo idóneo para que los alumnos aproximen sus sentidos personales (NA) - vinculados a sus experiencias prácticas, a sus conocimientos ya dominados o a su intuición personal- de los conceptos y operaciones que son objeto del aprendizaje a los significados objetivos, teóricos, de dichos conceptos y operaciones (NP).
- Para ello, el ámbito escolar facilita el empleo de herramientas semióticas en forma de materiales de apoyo.
- Asimismo, la escuela proporciona la oportunidad de crear una Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).

El propósito central es ir recorriendo cada vez más hacia “arriba”, hacia niveles cada vez más altos de habilidades intelectuales, el intervalo de la ZDP, lo cual significa que no debemos subestimar las potencialidades del estudiante, como suelen hacerlo bastantes maestros que no se atreven a ir mucho más allá de tópicos básicos elementales, pero tampoco demandarles más allá de lo razonable, como pretenden hacerlo los profesores empeñados en ver los temas matemáticos en un nivel rigurosamente formal. La enseñanza no sólo exige una o varias metodologías didácticas con una buena base científica y tecnológica… todo profesor con experiencia sabe que educar es también un arte, que precisa cierto “toque” y sensibilidad del docente para saber aplicar en cada caso específico el grado de dificultad y de problematización requerido por las condiciones de cada grupo específico.

Leontiev crea su modelo psicológico de la actividad, con el cual es posible estructurar con un criterio sistémico las actividades escolares en el momento de diseñarlas, para que los postulados vygotskianos ya enunciados sean puestos en práctica.

Debe subrayarse la gran importancia que se reconoce en este modelo al profesor como diseñador y orientador de las actividades (en vez de transmitir información como en las lecciones tradicionales), el profesor *va sugiriendo* en lo posible objetivos particulares y procedimientos para que los alumnos no se desvíen y se aproximen a los significados objetivos de un tema dado); en segundo lugar, Leontiev utilizó su modelo para ir construyendo sistemas de motivos más complejos y elevados. En este trabajo –y sin dejar de reconocer la importancia fundamental de los motivos- nos centraremos en la estructura psicológica de la actividad de Leontiev como fundamento del diseño de los cursos.

La actividad, en cuanto estructura psicológica basada en la evolución de las capacidades cognoscitivas de los jóvenes alumnos, es un proceso compuesto por una serie de acciones, cada una con sus propios motivos, operaciones y fines parciales, proceso unificado en torno a uno o varios fines generales compartidos por el conjunto de acciones. Su diseño debe incluir el tipo de motivos que se busca producir en los estudiantes, las condiciones de trabajo (que incluyen la selección o elaboración de herramientas semióticas); su ejecución debe haber previsto los mecanismos y los lineamientos generales para que el profesor vaya orientando constante y sistemáticamente el trabajo de los jóvenes para que en vez de resolver por ellos los problemas les dé pistas para que ellos busquen sus propias soluciones y no se desvíen demasiado de los temas. La actividad sólo adquiere todo su sentido para el estudiante cuando éste descubre la relación entre los motivos y los fines de la misma actividad (no como una vivencia de sus necesidades sino como una toma de conciencia de su objeto).

Es clave en esta concepción la noción de significado: los *significados* son los formadores primordiales de la conciencia; tras ellos están los modos de acción socialmente elaborados u operaciones -que tienen siempre un valor cognoscitivo-. El *significado* es la conceptualización de los procesos operativos debidamente insertados en una actividad bien orientada. Ese significado sólo puede ser estudiado dentro del contexto de la actividad a partir de la creación de los fines y motivos que han generado la actividad misma. Los significados se convierten en conocimiento sólo cuando sistematizan las acciones de la actividad como resultado de la sistematización de los conceptos. El *pensamiento* consiste en usar los significados para obtener nuevos conocimientos y resolver nuevos problemas.

Diseño de la actividad

Para que los alumnos lleguen a la doble caracterización de la probabilidad en cuanto "medida de la ocurrencia de un evento" (alusiva al aspecto objetivo de la probabilidad) y "medida de la incertidumbre sobre la ocurrencia de un evento" (correspondiente al aspecto subjetivo) el objetivo inicial de la actividad debe ser que los alumnos empiecen por reconocer el objeto de estudio de la probabilidad, o sea el carácter aleatorio de cierto tipo de sucesos, naturales o sociales, para luego ir reconociendo las diversas maneras en que puede ser medida la probabilidad, según las características de las situaciones planteadas.

Con estos elementos, y con la adecuada orientación del profesor que debe pedirles ejemplos de aplicaciones de la probabilidad con las cuales se topan a diario en su vida personal, la actividad se iniciará con un examen diagnóstico (E-D) para reconocer los sentidos personales que los alumnos poseen de la probabilidad y sus diversas modalidades en el momento de iniciar el curso.

Pero las funciones del E-D deben ir más allá de las tradicionales, debido a su carácter de herramienta semiótica con que se debe diseñar, permitiendo que los alumnos tomen conciencia de:

- Los diversos modos existentes para asignar probabilidad a un evento dado.
- La necesidad de un razonamiento lógico preciso para determinar las posibilidades de ocurrencia en un determinado suceso y si hay o no equiprobabilidad entre ellas para la asignación de la probabilidad.
- Modelos matemáticos diferentes en la modelación de un mismo suceso y viceversa, sucesos diferentes modelados con un mismo modelo probabilístico.

- La necesidad de analizar las situaciones para diferenciar el carácter objetivo y subjetivo, así como diferenciar lo empírico y lo teórico de los métodos.
- Determinar mediante un análisis subjetivo, con el tratamiento descriptivo de la información, cuál de las simulaciones (en relación al número de repeticiones) tiene una mejor aproximación con lo teórico.
- Construir una medida de la discrepancia entre lo empírico y lo teórico para la toma de decisiones objetiva.

La peculiaridad epistemológica de las nociones de probabilidad implica situaciones donde el lenguaje (lleno de términos empíricos) y las condiciones (también empíricas, debido a la génesis histórica de la probabilidad) no son las que tradicionalmente se dan en las matemáticas. Por esto, cuando la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina es puramente algorítmica y operativista, omitiendo ver los aspectos conceptuales de lo probable, entonces *suele tener malos resultados para el alumno cuando éste se ve obligado a resolver problemas distintos a los vistos en clase*. Por supuesto, hay que memorizar fórmulas y definiciones pero usando una memoria lógica (a la que Vygotski basa en la comprensión, no en la sustitución, del significado de los conceptos), no una memoria mecánica

Desarrollo y aplicación de la actividad

El E-D es una herramienta semiótica porque conecta el código intuitivo de los alumnos con el teórico-operativo de la probabilidad, haciéndolo de manera sistemática al insertarlo en el desarrollo de una actividad didáctica. Con los sentidos personales del alumno integra la lógica de la psicología del aprendizaje con la lógica de la disciplina, compuesta por los significados teóricos.

El E-D está estructurado así: las preguntas iniciales aluden a situaciones de certeza absoluta, por tratarse de un evento imposible y de un evento seguro. Las preguntas tres a siete se refieren a situaciones donde se emplea la probabilidad clásica en diversas modalidades; la pregunta tres aborda la situación opuesta a la de las preguntas anteriores, la de máxima incertidumbre, donde la probabilidad tiene un valor igual a 0.5. Las preguntas cuatro y cinco plantean la situación en la que se reduce el grado de incertidumbre aumentando el de certeza, lo que permite observar el carácter dialéctico de la incertidumbre y la certeza. La seis requiere de una argumentación correcta en la construcción del espacio muestral y la séptima, la más compleja de esta batería, exige la utilización de todo lo anterior, además de combinar lógicamente los elementos del espacio muestral para construir el espacio muestral de una transformación que se aplica a los resultados del suceso. Las preguntas ocho a diez tratan lo referente a la probabilidad frecuencial, la diez es complicada porque requiere del concepto de independencia y de la ley del complemento de la probabilidad; la once y la doce llevan al estudiante a la probabilidad subjetiva y se finaliza pidiendo al estudiante que dé su primer acercamiento a un significado lógico del concepto "probabilidad".

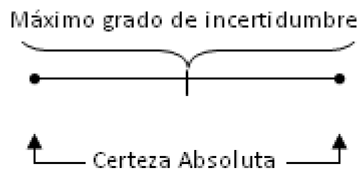
Así, se pasa a la acción de aplicación del E-D a los estudiantes. Después sigue la acción del análisis de las respuestas y sus respectivas argumentaciones, esto se hace mediante el diálogo grupal dirigido por el profesor. De dicho análisis resultó que:

Los errores más comunes en las respuestas fueron:

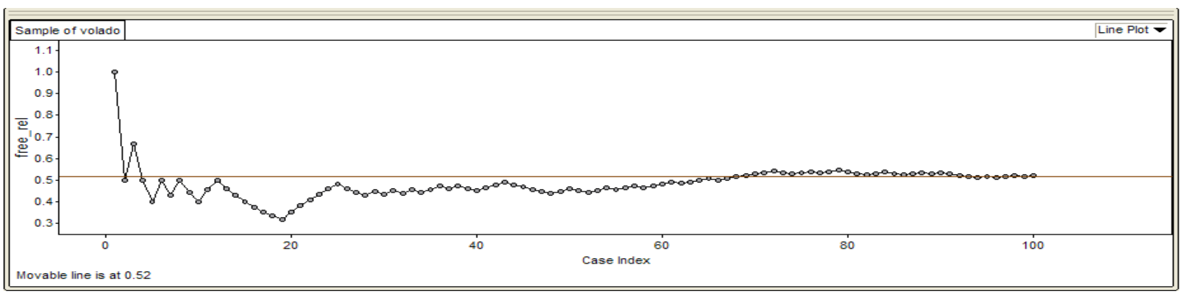
- No reconocer la equiprobabilidad en la asignación clásica de la probabilidad.
- Asignar probabilidad de 0.5 a eventos que guardan simetría sin ser exhaustivos.
- Argumentos ilógicos fuera de contexto en relación al suceso y evento involucrado.

Se desarrolla el concepto de lo determinístico y lo aleatorio con los significados de "certeza absoluta" y "máximo grado de incertidumbre". El análisis de las preguntas uno a tres se sintetiza en el siguiente esquema:

$0 \ \frac{1}{2} \ 1$



En las preguntas cuatro y cinco se ve que disminuye la incertidumbre y aumenta la certeza en ambas direcciones (hacia lo imposible y hacia lo seguro), así se llega a la reciprocidad dialéctica de estas categorías. Con la sexta se hace explícita la presuposición de la equiprobabilidad y en la modelación del suceso se calcula la probabilidad con dos modelos probabilísticos diferentes. Además se inicia la acción de realizar y simular el suceso dando estimaciones de la probabilidad para diferentes repeticiones y para que con esto el alumno pueda valorar el grado de confianza en sus estimaciones de la probabilidad con base en la regularidad estadística mostrada en gráficas como la siguiente:



La séptima es una generalización de la sexta, lo que permite elevar el grado de objetividad en las estimaciones de la probabilidad frecuencial debido a que se construye una medida de la discrepancia entre la probabilidad frecuencial y la clásica, llegando así a un nivel más alto de abstracción, puesto que se eleva considerablemente su nivel de pensamiento y de lenguaje probabilístico, *que es lo esencial: por encima del aprendizaje de la disciplina está la evolución de las capacidades cognoscitivas de los jóvenes alumnos*.

La octava y la novena refuerzan la importancia de la definición frecuencial al no ser aplicable la definición clásica, y la décima es una generalización de la novena en donde la forma natural de calcular la probabilidad es conjugando la definición frecuencial y las leyes de la teoría de la probabilidad, así en este ejemplo la única forma de asignar una probabilidad a estas alturas del curso es simulando el suceso.

Las preguntas once y doce son para que el alumno tome conciencia de que hay sucesos en los cuales la única forma de asignar una probabilidad a un evento es empleando el criterio personal y que si esto se va a hacer para toma de decisiones dicha asignación debe ser efectuada por personas expertas en la disciplina a la que pertenece el suceso.

Con la última pregunta se llega a uno de los objetivos principales de la actividad: el estudio de los dos aspectos epistemológicos de la probabilidad: el objetivo “medida de la ocurrencia de un evento” y el subjetivo “medida de la incertidumbre sobre la ocurrencia de un evento”.

En suma, el E-D desarrolla en forma de introducción general los significados básicos del tema, que luego serán vistos de manera más detallada, para que los alumnos no entren “en frío” (como suelen hacerlo) a las propiedades de la probabilidad, a sus aplicaciones conjuntivistas y a sus modalidades teóricas (con leyes o axiomas). Los aspectos filosóficos les permiten además enriquecer sus experiencias probabilísticas y sobre todo conectan los dos códigos, el empírico-intuitivo y el teórico, implicados en el E-D.

Resultados

Aparte de que los niveles de participación en clase se elevaron sustancialmente porque apareció un nuevo motivo en los alumnos -cotejar sus propias respuestas y argumentaciones con los resultados correctos-, sus habilidades para modelar situaciones aleatorias (o probabilísticas) mejoraron de manera sistemática, y al aumentar el trabajo extraclase se hizo evidente que empezó a generarse un sistema de motivos, como lo establece la estructura psicológica de la actividad de Leontiev, dichos motivos fueron la necesidad de manejar un razonamiento lógico preciso para el cálculo de probabilidades clásicas y el uso de la computadora para asignar probabilidades en forma simultánea fue el aspecto detonante.

Al estar atento a trabajar continuamente en la parte “alta” de la ZDP y pendiente de que el logro de los fines parciales de las acciones se convirtieran en operaciones como lo estipula la estructura psicológica de la actividad de Leontiev, se generó un proceso continuo de evaluación del estudiante. Se concluyó el estudio de la unidad de probabilidad con una evaluación sumaria constituida por dos exámenes: el primero fue de nuevo el propio E-D y el segundo fue relativo al aprendizaje de la significación y a la aplicación de la teoría de la probabilidad que conforma la segunda parte de la unidad de estudio.

Con esta segunda aplicación del E-D se observó en casi todos los alumnos, en los grupos en donde se llevó a cabo esta metodología didáctica, un gran avance tanto en el cálculo de las probabilidades como en el lenguaje utilizado en sus argumentaciones.

El reporte de la investigación acerca de la segunda parte de la unidad de probabilidad y de sus resultados es motivo de un segundo trabajo que dé continuidad al presente.

Referencias bibliográficas

Castillo Padilla, J. y Gómez Arias, J. (1998). *Estadística inferencial básica.* México, Iberoamérica.

Díaz Godino, Juan, Batanero Bernabeu, Ma. del C. y Cañizares Castellanos, Ma. de Jesús. (1987). *Azar y probabilidad. (Fundamentos didácticos y propuestas curriculares).* Madrid, Síntesis.

Hacking, Ian. (1991) *La domesticación del azar.* Madrid, Gedisa.

Leontiev, A.N. (1978) *Actividad, conciencia y personalidad.* Buenos Aires, Ciencias del Hombre.

Petrovski, A. V. (1985) *Psicología evolutiva y pedagógica.* México, Cartago Argentina y Letras México.

Vygotski, L. S. (1993). *Obras escogidas* (cuatro vóls.) Madrid, Visor.

Vygotski, L. Leontiev A. y Luria A. (1989) *El proceso de formación de la psicología marxista.* Moscú, Progreso.

MODELOS MATEMATICOS A PARTIR DEL MODELO NOMOLÓGICO – DEDUCTIVO DE LA EXPLICACION CIENTIFICA

Horacio A. Caraballo. Cecilia Z. González
Colegio Nacional "Rafael Hernández", Bachillerato de Bellas Artes. Argentina
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales, Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de La Plata
horacioca@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Mostraremos a continuación la posibilidad de generar modelos matemáticos simples a partir de la explicación de un hecho físico. El marco teórico de partida es el de la explicación científica con la estructura del modelo nomológico-deductivo.*

El uso de modelos matemáticos en este marco genera herramientas didácticas de distinto tipo, en este articulo desarrollamos brevemente el diseño de proyectos de investigación para los alumnos.

El docente puede generar y luego utilizar estos proyectos de distintos modos, por ejemplo, como actividad de cierre de un curso, o también para generar una discontinuidad en el transcurso de la cursada, como actividad en paralelo que ocupe algún momento de las clases, etc.

Palabras clave: modelos matemáticos, física, explicación científica

Introducción

Entendemos por explicación científica la que se estructura a partir del clásico modelo nomológico-deductivo (MND) en el que explicar significa deducir, a partir de premisas-leyes y premisas-hechos, una ley o hecho físico.

Como, en física, muchos de los enunciados y leyes se expresan matemáticamente el modelo MND genera directamente el modelo matemático (MM) y la explicación está articulada a través de una deducción matemática.

Desde un punto de vista didáctico este marco genera distintas herramientas que van desde la construcción misma del modelo hasta, por ejemplo, el desarrollo de pequeños proyectos de investigación, relacionados con la explicación de diversas cuestiones de la Física, por parte de los alumnos. Parece interesante resaltar este último punto ya que en este contexto es relativamente simple generar proyectos de investigación en los que se explique científicamente un hecho. El propósito general de este tipo de actividad es el de resignificar un conjunto de saberes matemáticos que se integran y aparecen como herramientas fundamentales para construir la explicación. El MND aparece como marco metacognitivo para el conocimiento matemático puesto en juego. Además se produce una articulación entre la Matemática y la Física. De manera mas general entre la Matemática, la Física y la Epistemología en el caso de existir, esta última, como materia de estudio.

El marco de partida

Tomamos como estructura teórica de partida el modelo de la explicación científica tal y como lo propusieran Hempel y Popper. En este trabajo seguimos la presentación del MND que hace Gregorio Klimovsky en el capitulo 15 de su libro “Las desventuras del conocimiento científico”.

Las características centrales son:

- La explicación es siempre una deducción.
- Lo que se deduce es un enunciado que expresa lo que quiere explicarse.
- Por último, entre las premisas siempre figura al menos una ley.

Estas características hacen que el modelo sea conocido como “modelo nomológico deductivo”. Puede utilizarse para explicar leyes o para explicar hechos.

La explicación de leyes es sencilla, debe disponerse de una teoría en la cual la ley a explicar aparezca como hipótesis derivada de las premisas-leyes de la teoría general.

La explicación de hechos, que es la de interés en este trabajo, es algo más compleja. Para explicar un hecho se deduce el enunciado que lo expresa a partir de premisas-hechos y premisas-leyes, los hechos y las leyes deben ser verdaderos y el hecho que se explica debe ocurrir. Esquemáticamente:

L_1 L_2 L_3 . . . L_N premisas-leyes

H_1 H_2 H_3 . . . H_N premisas-hechos

Explicación:

En nuestro caso las leyes, obviamente, son las de la física, los hechos que figuren en las premisas merecen una atención especial referida a su enunciado en el marco de un protocolo experimental por mas modesto que este sea. La deducción es lógico-matemática mediante el modelo que genera el conjunto de leyes físicas.

En otras palabras el MM es el soporte lógico-deductivo de la explicación científica de un hecho físico.

Implementación

Se puede llevar al aula de distintos modos tal vez el mas ambicioso sea el de presentar la modelización en el marco de un proyecto de investigación. Básicamente este proyecto consiste en la explicación de un hecho físico simple que ocurre de manera concreta. Este hecho ocurre a partir de una experiencia o del funcionamiento de algún artefacto construido por los alumnos.

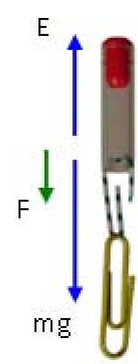
El desarrollo de estos proyectos se produce paralelamente al curso de Matemática o puede establecer una discontinuidad en el mismo. Otra posibilidad es la de articulación con el curso de Física, si lo hubiere. Están pensados para que ocupen unas pocas clases del curso (entre dos y seis dependiendo de la complejidad y del tiempo disponible). Los alumnos forman grupos de trabajo no muy numerosos. El primer paso es enunciar el hecho que pretende explicarse. Se sigue con una investigación sobre las leyes de la Física necesarias. El tercer paso es la construcción del MM. Pudiendo terminar el proyecto con un informe escrito y una defensa pública del mismo.

Ejemplo

Como ejemplo se muestra a continuación un resumen del modelo matemático que se genera a partir de la explicación del hecho: un aumento de la presión externa hace que un ludión se hunda.

El ludión

Un ludión, también llamado "diablillo de Descartes", es un sumergible simple. En el caso de las ilustraciones que siguen está construido utilizando un tubo cerrado por uno de sus extremos y abierto por el otro (bolígrafo cortado). Tiene un lastre (clip). Este dispositivo se coloca en una botella flexible llena de agua y cerrada herméticamente. La cantidad de lastre se elige de manera que el ludión flote y que un aumento de presión sobre la botella lo hunda.



La explicación

El hecho que se observa y quiere explicarse es el siguiente. "Si se aprieta la botella el ludión se hunde". Este es un enunciado cualitativo que puede reformularse en términos más precisos. Consideramos un conjunto de leyes físicas que permiten dar una explicación científica del hecho modelizando la situación.

Para un primer estudio simplificado podemos considerar:

- La segunda ley de Newton
- El principio de Arquímedes
- El principio de Pascal
- La ley de Boyle y Mariotte

El enunciado matemático de estas leyes permite generar un modelo que sirve para explicar el hecho. El "comportamiento" del ludión está dado por F, que es la fuerza resultante. Si bien F es un vector, lo consideraremos un número real ya que todas las fuerzas son colineales y el signo basta para dar el sentido. Se trata de obtener una expresión de F en función de P, donde P es la presión.

Entendemos por ludión a la parte sólida (tubo + clip) y al aire que queda encerrado.

Aplicando la segunda ley de Newton al ludión:

$$F = E - mg \quad (1)$$

E es el empuje que actúa sobre el ludión y *mg* es su peso.

Según el Principio de Arquímedes el empuje está dado por:

$$E = \delta g(V_A + V_S) \quad (2)$$

Donde δ es la densidad del agua; V_A es el volumen de aire encerrado en el ludión y V_S es el volumen de la parte sólida del ludión.

Aplicando la ley de Boyle y Mariotte al aire encerrado en el ludión:

$$V_A = \frac{P_0 V_0}{P} \quad (3)$$

$P_0\, V_0$ es una constante que podría calcularse teniendo en cuenta la presión atmosférica y el volumen a esta presión del aire encerrado.

Reemplazando (2) y (3) en (1)

$$F(P) = \delta g\left(\frac{P_0 V_0}{P} + V_S\right) - mg$$

En esta expresión se ve que mientras el ludión flote, V_S se ajusta de modo que $F = 0$

A partir de un valor de *P* la fuerza *F* toma valores negativos, esto significa que el ludión se hunde.

No se presentan aquí los detalles sobre los análisis y refinamientos que pueden hacerse sobre este modelo. Mencionamos también que con un poco de esmero experimental pueden determinarse valores numéricos para los parámetros y utilizar el modelo no solo para explicar sino también para predecir, que es una característica simétrica que está implícita en el MND.

En resumen, que los alumnos trabajen en un proyecto de investigación sobre este tema consiste en que:

- Construyan un ludión.
- Estudien las características de una explicación científica, MND.
- Experimenten y enuncien el hecho a explicar.
- Encuentren el conjunto de leyes necesarias y construyan el MM.
- Redacten un informe escrito con pautas acordadas (comunicación y evaluación).
- Defiendan públicamente el proyecto (comunicación y evaluación).

Algunas experiencias

Hemos utilizado este tipo de herramientas en diferentes cursos. En materias de Matemática del Bachillerato de Bellas Artes de la Universidad Nacional de La Plata se usaron este tipo de proyectos como nexo de articulación con Física. Es destacable ver como la mirada desde el MM no solamente tuvo consecuencias positivas desde el punto de vista matemático sino también ordenó la forma de abordar la Física por parte de los alumnos. Utilizar el marco general del MND permite resolver los problemas propuestos en Física desde esta perspectiva.

En el curso de ingreso a la facultad de Ciencias Agrarias y Forestales hemos desarrollado un proyecto de este tipo a modo de taller final. El curso de ingreso se usa como nivelación de los conocimientos matemáticos adquiridos en la enseñanza media, es de carácter intensivo y de corta duración. La gran cantidad de contenidos que se repasan hacen que haya poco tiempo para ver ejemplos de aplicación. El proyecto final genera una instancia en la que la matemática aprendida se integra y utiliza como herramienta central. Este aspecto es valorado por los alumnos al reconocerse involucrados con el conocimiento matemático a partir de la necesidad de explicar un hecho.

El ejemplo desarrollado sobre el ludión es uno de los proyectos que se le proponen a los alumnos del curso de Introducción al conocimiento científico (ICC), materia del último año del Colegio Nacional "Rafael Hernández" de la Universidad Nacional de La Plata. La orientación del curso es hacia la Física, está formulado por completo en base a proyectos y muchos de estos responden al esquema que se presenta en este artículo. Este curso es de integración y articulación entre la Física, la Epistemología y la Matemática. ICC no le propone a sus alumnos ningún contenido nuevo lo novedoso es la integración y resignificación de todos los contenidos ya adquiridos, que es en definitiva el propósito fundamental del curso. En este contexto los MM utilizados en las investigaciones producen un refuerzo significativo de los conocimientos, no a modo de repaso sino a partir de la aplicación.

Conclusiones

A partir de nuestras experiencias proponiendo este tipo de proyectos podemos decir que presentar a la Matemática (MM) como soporte central de una estructura mas amplia

(MND) hace que los alumnos se involucren de una manera mas profunda con el conocimiento matemático. Cabe señalar que la elección del proyecto es fundamental para que la construcción del MM no se transforme en un obstáculo, los conocimientos matemáticos necesarios deben haber sido aprendidos por los alumnos con anterioridad, lo que se hace en esta instancia es utilizarlos de manera integrada.

Lo que hemos observado como consecuencia del desarrollo de este tipo de actividades se resume a continuación.

Se logra la resignificación, refuerzo e integración del conjunto de saberes matemáticos puestos en juego en la explicación.

Los conocimientos son reacomodados, dándose una síntesis integradora. Los alumnos logran relacionar distintos temas entre si y utilizarlos en el transcurso del proyecto.

Hay una articulación con la Física.

Se reconocen los elementos de una explicación en términos científicos.

Hay una estimulación de la creatividad referida a la solución de problemas técnicos.

De existir la Epistemología como materia previa se puede hacer más explícita la estructura del proyecto volviendo sobre temas básicos que están subyacentes en el proyecto como base empírica, matriz disciplinar (paradigma de Kuhn), teorías, leyes, etc.

La posibilidad de enfrentar con éxito problemas y aplicaciones se acentúa. Los alumnos en esta etapa (media o universitaria) tienen un grado de madurez que les permite evaluar situaciones e interpretar enunciados aparte de mejorar su pericia matemática.

El punto anterior implica como resultado un cambio de perspectiva respecto del conocimiento matemático. Se ve este último como una herramienta que puede ser aplicada en distintos contextos, y no solamente como un “juego formal”.

Referencias bibliográficas

Braithewaite, R. (1965). *La explicación científica*. Madrid: Editorial Tecnos

Hecht, E. (1987). *Física en perspectiva.* E. U. A.: Addison-Wesley Iberoamericana.

Hempel, C. (1985). *Filosofía de la Ciencia Natural.* España: Alianza Editorial.

Klimovsky, G. (1997). *Las Desventuras del Conocimiento Científico.* (3ª ed.).Buenos Aires: A-Z editora.

Klimovsky, G. y De Asua, M. (1997). *Corrientes Epistemológicas Contemporáneas.* Buenos Aires: Editores de América Latina.

Popper, K. (1967). *El Desarrollo del Conocimiento Científico.* Buenos Aires: Paidos.

Popper, K. (1973). *La Lógica de la Investigación Científica.* Madrid: Editorial Tecnos.

Worsnop, B. Flint, H. (1964). *Curso superior de física practica.* Buenos Aires: Eudeba.

UN ESTUDIO INTERPRETATIVO SOBRE ERRORES DETECTADOS EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS AL CALCULAR INTEGRALES

Raúl Katz, Natalia Sgreccia
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario Argentina
rdkatz@fceia.unr.edu.ar; sgreccia@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Gráfica y funciones Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se avanza sobre estudios exploratorios anteriores acerca de las dificultades en el aprendizaje de integrales que permiten calcular el volumen de un sólido de revolución. Se realiza a partir del análisis de producciones escritas de alumnos que han cursado Análisis Matemático II (AM II) en carreras de Ingeniería de la FCEIA de la UNR. Se complementa con lo relevado en entrevistas realizadas a algunos de los alumnos. Como marco de referencia se consideran los conceptos de visualización; situaciones didácticas; distinción entre ejercicios y problemas; obstáculos didácticos y epistemológicos. Además anteriormente se efectuó un análisis de la secuencia didáctica del libro de texto. Es un estudio interpretativo porque, luego de describir y ubicar las variables, se procede a relacionarlas, con la intención de explicar parcialmente la problemática detectada.*

Palabras clave: cálculo de volumen, sólido de revolución, dificultades, visualización

Introducción

El trabajo se focaliza en la descripción de algunos errores que aparecen en el cálculo del volumen que genera una región del plano al girar alrededor de una recta paralela a uno de los ejes coordenados. Las evaluaciones que corresponden a un primer parcial de la asignatura -que comprende la integral definida y sus aplicaciones al cálculo de áreas, longitudes y volúmenes- constituyen los únicos documentos escritos que se consideran en este estudio. Por lo general estas evaluaciones se llevan a cabo a un mes y medio de iniciado el cursado de la asignatura AMII, de régimen cuatrimestral. Los contenidos se desarrollan siguiendo los lineamientos del libro "Cálculo" de J. Stewart (1999), que se constituye en una ayuda tanto para el docente como para el alumno, resultando para este último un material didáctico de referencia, ya utilizado en Análisis Matemático I.

Los autores del presente trabajo, movilizados por la dificultad percibida en el tratamiento del tema, intentan comprenderla para idear propuestas de superación.

En relación a la metodología del estudio

El estudio combina e integra los enfoques cualitativo y cuantitativo, es de tipo mixto (Hernández Sampieri, Fernández Collado & Baptista Lucio, 2003).

La muestra está constituida por 46 resoluciones de evaluaciones parciales de alumnos que estaban cursando la asignatura AMII en la FCEIA en el segundo cuatrimestre del año 2005. Los autores no fueron los docentes de dichos alumnos.

Se describen algunos errores prototípicos de la muestra y luego se avanza hacia un alcance interpretativo co-relacional con la intención de aproximar explicaciones e interrogantes sobre la problemática detectada. Este análisis interpretativo se complementa con interacciones personales (entrevistas) con algunos de los alumnos.

Se focaliza la mirada en el ejercicio que hace referencia al cálculo del volumen de un sólido de revolución. En un principio, en su versión no estándar (cuando el eje de rotación es paralelo a uno de los ejes coordenados) y, posteriormente, en una versión estándar (cuando el eje de rotación coincide con uno de los ejes coordenados).

A continuación se presentan las propuestas (ítem i: caso estándar; ítem ii: caso no estándar) del ejercicio cuyas resoluciones constituyen la fuente de análisis del presente trabajo.

> Sea Q la región del plano limitada por el eje x y el arco de curva de ecuación $xy = 1$ con $x \in [1; 4]$. Dibuje la región Q y calcule el volumen que se obtiene al girar la región Q: **i.** alrededor del eje x; **ii.** alrededor de la recta de ecuación $x = 5$.

Marco teórico de referencia

Según Garret (1987, citado en Johsua y Dupin, 2005), a la clásica distinción entre verdaderos "problemas" y simples "ejercicios" convendría agregar la noción de problema "local", problema "para el alumno", en el límite, evolutivo, de los dos polos extremos. Los autores denominan a esta noción como *ejercicios con dificultades implícitas* y son los que a priori se aproximan a los "ejercicios tipo" adecuados al contrato, pero que provocan una tasa de fracasos inesperada debido a la presencia de un "desvío" con respecto al ejercicio tipo del profesor y que crean confusión en muchos alumnos caracterizada por el insuficiente dominio de los conceptos, la fragilidad en el procedimiento algebraico y la falta de habilidad para reencontrar la ruta indicada en el ejemplo tipo del profesor. Los autores del presente trabajo consideran al ejercicio en estudio (particularmente el ítem ii correspondiente al caso no estándar) como un ejercicio con dificultades implícitas.

En Matemática se utilizan diferentes representaciones que requieren del proceso de *visualización*, el cual se concreta en dos direcciones: por un lado, la interpretación y la comprensión de modelos visuales y, por otro, la habilidad para traducir a imagen visual una información recibida en forma simbólica. Se considera que el alumno debe aprender a ver y a interpretar. Se coincide con Zaskis, Dubinsky & Dautermann (1996, citado en Villella, 2001: pp. 105-106) al pensar que

> *La visualización es una acción en la que los individuos establecen una fuerte concesión entre construcciones internas y algo que les aportan los sentidos. La concesión puede ser hecha en una de las dos direcciones. Un acto de visualización consiste en una construcción mental de los objetos o de los procesos que un individuo asocia con objetos o con eventos percibidos en el exterior. O bien puede consistir en la construcción sobre un elemento externo como puede ser papel, pizarrón, computadora, pantalla de objetos o eventos que se identifican como propios de su mente.*

En el trabajo de elaboración científica de los procesos de aprendizaje se va superando obstáculos permanentemente. Desde la alternativa constructivista se pone al alumno en situación de producir conocimientos reformulando y hasta luchando contra conocimientos antiguos. Brousseau (1988, citado en Johsua y Dupin, 2005) insiste sobre la posible naturaleza didáctica de ciertos obstáculos, como resultado artificial de decisiones didácticas desafortunadas, los cuales deben distinguirse de los obstáculos epistemológicos, cuya existencia en el proceso histórico de producción matemática está probada. La presencia de obstáculos epistemológicos en el acto educativo es inevitable; más que pensar en ignorarlos, negarlos o destruirlos, hay que idear estrategias -encuadradas en situaciones didácticas específicas- para superarlos, porque la progresión cognitiva del alumno se logra a través de superaciones y reacomodaciones.

Algunas cantidades. De 46 alumnos, con respecto al ítem:

i	44 alumnos lo resuelven bien (96%)	2 lo hacen mal (4%)
ii	6 alumnos lo resuelven bien (13%)	40 lo hacen mal (87%)

En relación a los errores detectados. Si bien los alumnos grafican correctamente la región Q del plano, en la mayoría de sus resoluciones se observa una diversidad de errores, que se constituyen en el objeto de estudio del presente trabajo.

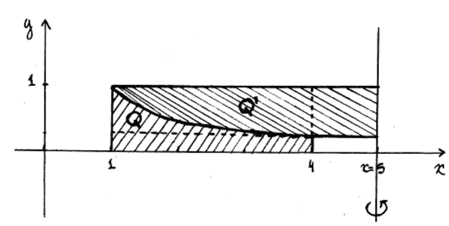
Se presenta en forma contigua tanto la resolución correcta como la resolución incorrecta de algunos alumnos, por considerar que la primera facilita la interpretación de la segunda.

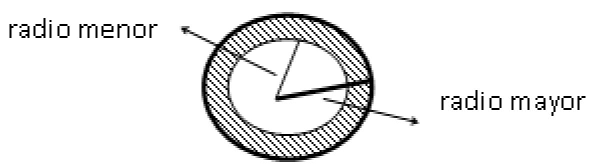
En lo que sigue se muestra el cálculo correcto del volumen del sólido de revolución cuando la región Q gira alrededor del eje x = 5.

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\left[(5-1)^2-(5-4)^2\right]dy+\pi\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[(5-1)^2-\left(5-\frac{1}{y}\right)^2\right]dy$$

En función de los errores encontrados, se establecen tres grupos de resoluciones con peculiaridades afines y se muestran ejemplos representativos de cada uno de ellos.

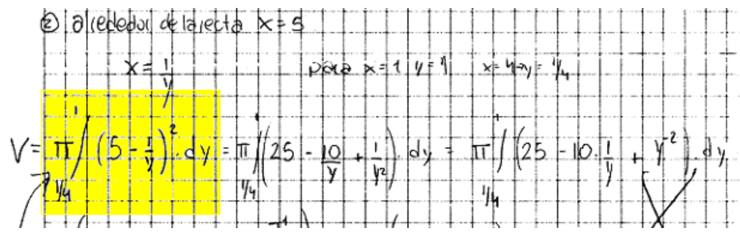
Grupo A: El volumen que calculan corresponde a un sólido que se genera a través de una región Q'. Esta región Q' es excluyente con Q y su frontera tiene contacto con el eje de rotación.





El radio de cada una de las secciones del sólido generado por Q’ coincide con el radio menor de la corona, sección del sólido cuando se considera la región Q.

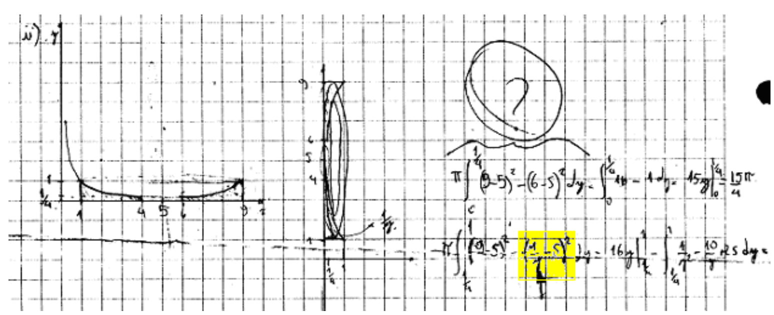
(El círculo de radio menor es la sección de considerar Q’. La corona es la sección de considerar Q). En lo que sigue se muestra una resolución incorrecta de este grupo.



En este grupo se evidencian dificultades en la visualización de la verdadera región Q.

Grupo B: En este grupo se encuentran aquellas resoluciones que buscan encuadrar el problema en un caso estándar, pero desatendiendo ciertas consideraciones que derivan en errores. Transforman el problema en otro que suponen equivalente al dado y no lo es.

Dentro de este grupo, se ha seleccionado la siguiente resolución:

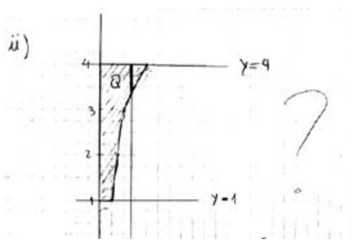


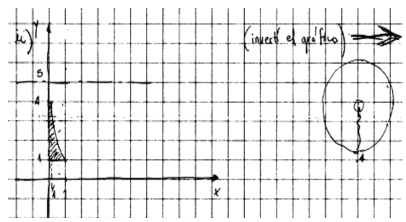
En la misma se observa que el alumno considera la región simétrica a la región Q respecto de la recta de ecuación x = 5, pero no efectúa la transformación en la ley de la función.

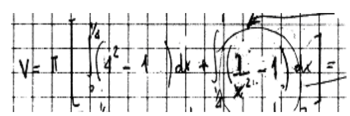
En este grupo se evidencia una falta de superación del obstáculo que supone el trabajo del caso estándar al caso no estándar.

Grupo C: En este grupo se encuentran las resoluciones de los alumnos que creen que regiones congruentes generan el mismo volumen independientemente de su posición con respecto a los ejes de rotación.

En lo que sigue se muestran dos intentos de resoluciones incorrectas de este grupo.







Este grupo no logra visualizar las diferencias de los sólidos, y por lo tanto de sus volúmenes, que se obtienen al rotar regiones planas congruentes sobre distintos ejes.

En relación a las entrevistas con alumnos. A continuación se transcriben algunas de las declaraciones de los alumnos entrevistados.

"Es lo primero que se me vino a la mente". "Tendría que haber marcado cuál era la región que tenía que girar". "Es costumbre, la mayoría de los ejercicios son girando alrededor de los ejes coordenados". "Al principio buscaba el método rápido, luego fui practicando". "Lo tomé como fórmula y luego 'a trabajar'". "Cuando empezaron a aparecer ejes distintos a los coordenados me empecé a preocupar un poco más por cómo cambiaba la fórmula". "Alguna vez supe de dónde venía esta integral, ahora no lo sé". "Estudio un poco de fundamento y me centro mucho más en la práctica, la leo, anoto lo más importante (el resultado final) y luego hago la práctica"

En general, las declaraciones de los alumnos sugieren que las dificultades no son propias de este tema, sino más bien de su actitud de estudio independientemente del tópico específico.

Algunas primeras reflexiones. Se observa que los alumnos suelen expresar el radio de la sección restando el radio mayor del radio menor de la corona. Si bien esta situación aún no se encuadra bajo un prototipo o grupo de error, abre un nuevo interrogante a tenerse en cuenta en futuras ampliaciones de este estudio: ¿por qué los alumnos expresan el radio de la sección de este modo? Cabe señalar que, como la diferencia entre los radios aparece luego elevada al cuadrado, el resultado final no se ve afectado, pero podría no corresponderse con una visualización apropiada de la sección.

Se observa, además, que en general los estudiantes resuelven bien la parte de radio constante, no así la de radio variable. ¿Cómo explicar esta dificultad de abstraer a un nivel ligeramente superior?, ¿se trata sólo de un obstáculo epistemológico?, ¿o quizá esto evidencia una falta de propuestas didácticas intencionadas que inviten a los alumnos a luchar contra sus conocimientos antiguos (vinculados más bien con el caso estándar)? En este sentido, ¿se está en presencia de obstáculos didácticos?

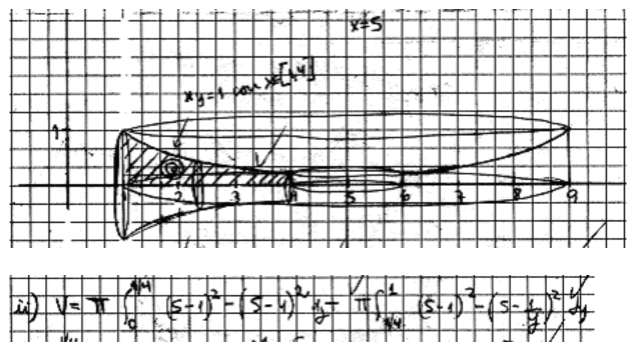
Por otro lado, una mirada holística de las resoluciones sugiere que los alumnos tienen menos dificultades al calcular el volumen cuando la región gira alrededor del eje x que cuando lo hace alrededor del eje y. Se conjetura al respecto que la costumbre de trabajar con funciones de variable independiente x, por una parte, y los ejemplos del libro que, en el caso no estándar, consideran únicamente los sólidos generados por regiones que giran alrededor de ejes paralelos al eje x, por la otra, son determinantes de nuestra sospecha.

En términos generales los alumnos se manifiestan activamente en el hacer, pero queda el interrogante de cuál es la vinculación -que ellos han construido en su red cognitiva- entre sus procedimientos y los conceptos involucrados. La información recogida a partir de lasentrevistas realizadas no ha otorgado respuestas alentadoras al respecto.

En relación a las resoluciones correctas

En cinco de las seis resoluciones correctas de la muestra, los alumnos, para efectivizar el cálculo de la integral, apoyan su razonamiento en un esquema gráfico, donde destacan la región que resulta de seccionar el sólido con planos perpendiculares al eje de rotación.

¿Puede interpretarse esta representación gráfica como una visualización de la integral como el límite de la suma de los volúmenes de cilindros? A la derecha se muestra una resolución correcta donde se utilizan representaciones gráficas



En la resolución correcta restante, donde no se observa esquema gráfico alguno, el alumno hace coincidir el eje de rotación de ecuación x = 5 con un eje coordenado de un nuevo sistema de referencia, transformando adecuadamente las ecuaciones de las curvas que delimitan la región Q. En este caso se observa la priorización de un procedimiento algebraico que convierte al problema al caso estándar.

En relación al caso estándar

A medida que se avanzó en el estudio, surgió el interrogante de cómo habían procedido los alumnos en el ítem i de la evaluación, el cual se corresponde con el caso estándar. En este apartado, salvo dos alumnos (3%), todos resuelven correctamente el problema. En cuanto a los recursos utilizados se encuentran:

- quienes sólo aplican la fórmula para el cálculo (26 alumnos, 57%);
- quienes representan el sólido generado (9 alumnos, 20%);
- quienes representan el sólido, destacando las secciones (9 alumnos, 20%).

¿Puede la omisión gráfica devenir de la simplicidad intrínseca de la situación? Es decir, en este caso, ¿no se necesitaba del soporte concreto de un gráfico para lograr la visualización?

El error que cometen los dos alumnos anteriormente señalados es no elevar al cuadrado la función integrando. Esto significa que el resultado que obtienen al integrar está en unidades al cuadrado y no cúbicas como corresponde. ¿Es sólo una omisión, una distracción?, ¿o indica que el alumno no está concibiendo el cálculo desde su fundamentación? Se considera que este tipo de error se da en aquellos alumnos que priorizan procedimientos de cálculo, algoritmos, en desmedro del desarrollo de estructuras conceptuales.

Algunos comentarios e interrogantes a modo de síntesis

Por lo general, los alumnos que se equivocan no realizan una representación gráfica pertinente del sólido de revolución, situación que, se supone, contribuiría a la visualización de la situación y al planteo correcto de la integral. Los alumnos con mejor desenvolvimiento acompañan la resolución con un soporte gráfico adecuado (que no se restringe a la región Q). Que un alumno apele al recurso gráfico, ¿es un indicador de comprensión conceptual?, ¿está dando cuenta que visualiza el volumen del sólido como límite de la suma de los volúmenes de cilindros?, ¿significa la presencia de distintos registros semióticos a disposición del alumno?, ¿o constituye quizá una mera rutina?, ¿o cierta dependencia a este tipo de representaciones?

Cabe resaltar que mientras, en una cantidad significativa de alumnos, la representación gráfica del sólido no presenta dificultades, la expresión del radio sí las presenta, lo cual da cuenta de una falta de correspondencia entre ambos registros de representación, generando interrogantes como por ejemplo, ¿cuáles aspectos de una representación estarían favoreciendo un apropiado proceso de visualización? Asimismo, la omisión del recurso gráfico frente al cálculo se interpreta como una tendencia a aplicar únicamente una fórmula, cuya validez por lo general es objeto de escasa reflexión, como se constató en las entrevistas, la cual se afianza mediante prácticas estandarizadas de ejercicios de fijación.

En el intercambio áulico, ¿cómo generar instancias que propicien la reflexión continua sobre la génesis de las fórmulas, superando una mera aplicación de las mismas? Tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, ¿se pone más énfasis en el caso estándar?, ¿se trabaja más con regiones ubicadas en el primer cuadrante?

Como casi todos los alumnos de la muestra resuelven correctamente el caso estándar e incorrectamente el caso no estándar, ¿se puede considerar al cálculo del volumen de un sólido de revolución un tema aprendido?, ¿o esto insinúa que queda una versión superficial, sin movilidad, del concepto, atado a la primera versión que el alumno vio en clase?

En la búsqueda de respuestas al interrogante: ¿cuáles estrategias didácticas específicas podrían contribuir al desarrollo conceptual que supere el mero tratamiento estándar, tipo receta?, nos preguntamos: ¿cuáles serían las situaciones didácticas que favorecerían a la conceptualización del tema?, particularmente ¿cuáles estrategias específicas estarían contribuyendo a la superación de los obstáculos que involucra el tránsito del caso estándar al no estándar?

Consideramos que la construcción de conocimiento matemático puede lograrse cuando el individuo es capaz de reconocer el mismo objeto por lo menos en dos representaciones distintas, cuando puede transitar libremente de un modo de resolución algebraico a su correspondiente representación gráfica y viceversa. Creemos que se deberían generar, desde los momentos de enseñanza en la clase, reflexiones sobre el tema ante situaciones distintas sin llegar a caer en la explicitación de todos los casos, lo cual provocaría una mecanización mediante una vinculación estímulo-respuesta. Las interpretaciones e interrogantes que se formulan constituyen un punto de partida para futuras indagaciones, tendientes a la búsqueda de situaciones didácticas que contribuyan, desde su intencionalidad, a poner el acento en aquellos aspectos en los cuales se encontraron dificultades.

Referencias bibliográficas

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3° ed.). México DF: Mc Graw Hill.

Johsua, S., Dupin, J. (2005). *Introducción a la Didáctica de las Ciencias y la Matemática.* Buenos Aires: Colihue.

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (3° ed.). México: Thomson.

Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres. Geometría otra vez.* Buenos Aires: Aique.

¿SOBRE QUE NOS ENSEÑAN LOS ERRORES DE NUESTROS ALUMNOS?. 25 AÑOS DESPUES…

Mónica Caserio, Martha Guzmán, Ana María Vozzi
Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agr. Argentina
amvozzi@fceia.unr.edu.ar; mbcaserio@yahoo.com.ar; guzmartha@yahoo.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *Quienes presentamos el trabajo integramos un proyecto de investigación "Dificultades en el aprendizaje de la matemática básica en carreras de ingeniería" (Faculta de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario) que tiene entre sus objetivos diseñar e implementar estrategias didácticas que contribuyan a: Acortar distancias entre niveles educativos, Corregir errores arraigados, Retener a los ingresantes a la Facultad, Comprometer al estudiante en su formación, incentivando su independencia y creatividad, Comprometer a los docentes en el abordaje e implementación de alternativas didácticas más eficaces.*

Palabras Clave: errores; teoremas-alumno; automatismo

Introducción

Es así, que es preocupación fundamental indagar sobre las formas que los alumnos se desenvuelven en la matemática básica, en definitiva nos interesa averiguar como "aprenden". Cuestión esta, que remite en primer lugar al conocimiento (estudio) del aprendizaje y en particular de la matemática, en segundo lugar al análisis de sus manifestaciones, en términos del "sentido" que dan al aprendizaje y en tercer lugar a la búsqueda de alternativas de enseñanza para colaborar con ese aprendizaje.

El análisis realizado en este trabajo resulta "comparativo", dado que en las lecturas vinculadas con nuestra investigación encontramos, bajo el título "En nuestras aulas" un artículo de Alain Bouvier de la Universidad de Lyon, Francia del año 1982, en éste aparece bajo el concepto de "teorema-alumno" la referencia a aquellos conocimientos previos de los alumnos que son utilizados por ellos, sin cuestionamientos, en situaciones problemáticas y que si bien pueden resultar válidos en determinados contextos, no lo son en casos más generales, no obstante el alumno se resiste a sustituirlo. Todos los docentes de matemática conocemos numerosos “teoremas-alumnos”. Ahora bien, ¿De dónde viene el Teorema-a utilizado? ¿Porqué es más económico para el alumno emplear su teorema-a que apropiarse de un teorema-profesor?

Otro emergente que surge de la indagación sobre el desempeño de nuestros alumnos en la matemática básica, son los *automatismos*, que se evidencian en respuestas relativamente rápidas sin el análisis previo elemental de la situación planteada. Nos surgen los interrogantes: ¿Porqué nuestros alumnos son autómatas?, en cuanto colaboramos nosotros, involuntariamente, a tales automatismos?

En el artículo citado de A. Bouvier se publica una evaluación de sus alumnos a través de cuestionarios de elección múltiple y preguntas abiertas, que 25 años después hemos repetido, ahora con nuestros alumnos ingresantes de la FCEIA, de la Universidad Nacional de Rosario, con el fin de comparar las respuestas obtenidas, elaborar estrategias que contemplen estos escenarios, nos alerten y estimulen hacia *elecciones didácticas* que favorezcan el aprendizaje significativo.

Basamos el estudio que presentamos en el convencimiento de que el conocimiento de los errores que cometen los alumnos muestra sus formas de aprender, el sentido que atribuyen a la actividad matemática y se convierte en valioso auxiliar para las elecciones didácticas. Así como también, puede mostrarnos como contribuyen nuestras propias estrategias didácticas, favoreciendo (sin intención) la aparición de errores.

Centramos la temática del trabajo en el análisis de los modelos de respuestas de los alumnos manifiestos en los errores que, con distinta significación presentan de manera casi previsible, sistemática y persistente en situaciones análogas, afectando de manera similar a estudiantes de diferentes ámbitos y niveles.

Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento, opinamos que en ese proceso de construcción de los conocimientos matemáticos aparecen algunas secuencias de errores y por ende el mencionado proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección y superación.

Es posible advertir, en numerosas ocasiones, que ante un problema, los conocimientos previos (en el estudiante) adquieren la forma de "reglas" o "fórmulas" a aplicar y en el intento por resolverlo pone en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas nuevos.

Denominamos automatismos a la aplicación, sin reflexión previa, de reglas o fórmulas aprendidas, para resolver problemas o cuestiones que muestren "a simple vista" algún parecido con situaciones conocidas.

Bajo el nombre de Teorema – alumno, hablamos de aquellas afirmaciones y/o negaciones que se originan en supuestos falsos, incompletos o fuera de contexto, que si bien el alumno no es capaz de explicarlo, adquiere para él, el status de "teorema".

Elaboramos una secuencia de etapas a seguir con el objeto de constatar la presencia de automatismos y teoremas – alumnos y poder reflexionar sobre ello, así como sobre las "responsabilidades" que nos compete como docentes en este aspecto.

La prueba implementada consistió en un cuestionario de diez preguntas que realizamos a los alumnos del 1º cuatrimestre de las carreras de ingeniería y los del último curso del profesorado de matemática.

En el diseño de tal cuestionario tuvimos en cuenta el realizado por A. Bouvier (1982) y lo construimos con un mix de preguntas con y sin sentido (matemáticamente hablando)

CUESTIONARIO

Elija la respuesta correcta o responda:

1) El recíproco de 2 es:

   a) -2 b)½ c)-1/2 d)4

2) ¿Es siempre válido que: $\cos^2\alpha + sen^2\beta = 1$?

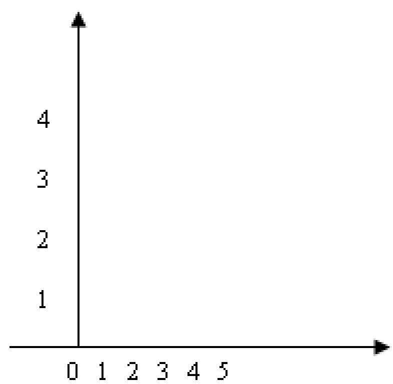
3) ¿Hacia qué tiende $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$?

4) ¿La distancia entre el vector $\vec{v}=(1,1)$ y la recta $x+y-2=0$ es cero?

5) El conjunto imagen de la función $f(x)=-3sen\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$ es:

a) [-1,1] b)[0, π/2] c)[-3,3] d)[-π/7;π/7]

6) Trazar una función contínua derivable tal que: $f(0)=4;\ f(1)=2;\ f(2)=0;\ f(3)=2;\ f(4)=4$



7) Resolver: $|2x-16|=-8$

8) El valor de *n* que verifica $\frac{5n^2+3}{n^2-4}=23$ es

a) *n*= 1 b)*n*= 2 c)*n*=-1/2 d)*n*= 3

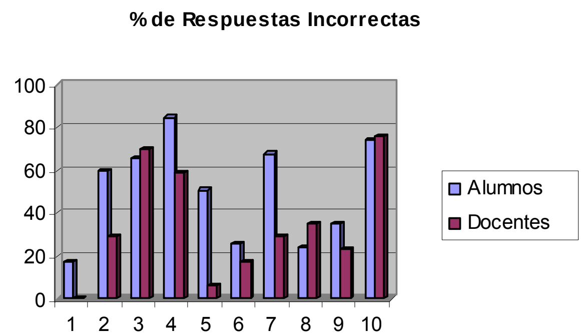
9) Resolver: $bx^2+cx+a=0$

10) La distancia entre los puntos A y B siempre es │B-A│

Este cuestionario fue propuesto a 66 alumnos de ingeniería de 1º semestre (en adelante alumnos) y 17 alumnos del último curso del profesorado de matemática (en adelante docentes). En ambas instancias constatamos que los participantes respondieron al cuestionario y a todas las preguntas en un alto porcentaje (+ 90%).

Del análisis de las respuestas obtenidas haremos algunas consideraciones generales y observaciones puntuales que creemos merecen nuestra atención:

	Alumnos	Docentes
1	17	0
2	60	29
3	66	70
4	85	59
5	51	6
6	26	17
7	68	29
8	24	35
9	35	23
10	74	76



Observaciones generales:

La mayoría de las preguntas realizadas eran absurdas, inexactas o incorrectas, no obstante, a pesar de que lo hayan detectado en alguna oportunidad, continuaron respondiendo mecánicamente a las siguientes en ambos grupos, como se puede observar en la tabla y el gráfico precedentes.

Observaciones puntuales:

Tomando algunas de las preguntas realizadas, nos encontramos ante la siguiente situación:

De un total de 83 participantes se obtuvieron los siguientes resultados globales

- A la pregunta $|2x-16|=-8$:

No responde: 4 Responde exactamente sin cálculo: 30 Responde exactamente con cálculo: 5 Responde erróneamente: 44

Entre quienes respondieron (79) sólo 30 le prestaron la debida atención al 2º miembro de la igualdad, ya que los que requirieron del cálculo no lo habían observado, y se dispusieron a resolver la ecuación planteada, sin ninguna reflexión previa. Se pone aquí de manifiesto un *automatismo* que observamos con demasiada frecuencia, es como si, ante una ecuación dada, la mente se preparara automáticamente para aplicar las reglas aprendidas en pos de su resolución, sin la evaluación previa de la pertinencia de la consigna.

- A la pregunta ¿La distancia del vector $\vec{v} = (1,1)$ a la recta $x + 2y - 2 = 0$ es cero?

No responde: 14 Responde exactamente sin cálculo: 13 Responde exactamente con cálculo: 4 Responde erróneamente: 52

Del total de respuestas emitidas (69), un porcentaje superior al 80% aplica el concepto de distancia entre un punto y una recta, sin atender el hecho de que la pregunta hace referencia clara a distancia entre “vector” y recta.

Podemos indicar que en esta circunstancia funcionó un *teorema-alumno*, cuya tesis sería “(distancia entre *algo* (m,n) y la recta $ax + by + c = 0$) = $\frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ”

Así como también se puso en evidencia que si bien varios “observaron” que se trataba de distancia entre “vector” y recta, intentaban “ajustar” el problema planteado al conocimiento que poseen sobre distancia entre puntos y lugares geométricos, sin considerar la posibilidad de lo inviable de tal cálculo.

- A la pregunta ¿hacia que tiende $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$?

No responde: 9 Responde correctamente: 27 Responde incorrectamente: 47

En este caso, la visualización del conocido cociente incremental, tan vinculado a la derivada de una función, llevó a demasiados participantes a responder erróneamente.

Otra vez, aparece la relación entre “*automatismo*” y la debida atención a la pregunta, como también, la retención de “parte” de una expresión que refiere a un concepto y no la clara comprensión de dicho concepto.

- A la pregunta : El valor de *n* que verifica $\frac{5n^2 + 3}{n^2 - 4} = 23$ es

a) *n*= 1 b) *n*= 2 c) *n*=-1/2 d) *n*= 3

No responde: 3 Responde correctamente: 61 Responde incorrectamente: 19

En esta oportunidad se observa que en las respuestas incorrectas predominó otro "*teorema-alumno*" que se podría enunciar:

"Si no se verifica para una cierta cantidad de valores, entonces no existen valores que verifiquen".

Aparece aquí, cierta tendencia a generalizaciones erróneas; esta característica se observa con mucha frecuencia.

- A la pregunta ¿Es siempre válido que: $\cos^2\alpha + sen^2\beta = 1$?

No responde: 0 Responde correctamente: 32 Responde incorrectamente: 45

Se pudo observar en este caso que todas las respuestas incorrectas tuvieron un denominador común atribuible al *automatismo* que deriva del "*teorema-alumno*": $\cos^2 + sen^2 = 1$ donde se omite el argumento como elemento indispensable para dotar de sentido a la expresión.

Respecto del análisis realizado sobre las respuestas al cuestionario, así como las entrevistas mantenidas con los participantes, hemos podido comprobar que son válidas muchas de las afirmaciones teóricas que se hacen en esta línea de investigación, a saber,

- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que dispone. Los alumnos recrean o inventan su propio método en base al método descripto por el profesor o por el texto.

El efecto que produce el tratar de repetir sistemáticamente los métodos empleados en la resolución de otros problemas o ejercicios parecidos, puede ocasionar una cierta merma en la capacidad de razonamiento, así como en la utilización de la imaginación por parte del alumno. Como consecuencia de esta limitación a la libertad de pensamiento, y acostumbrado a que su mente discurra casi siempre dentro de unos límites previamente fijados, el estudiante puede suponer, a veces, inconscientemente, que están impuestas determinadas condiciones que, no obstante, no figuran en el enunciado ni se deducen del mismo, y que reciben el nombre de supuestos implícitos

- Cuando los estudiantes advierten una contradicción en un texto, consigna, etc., suelen realizar una gran cantidad de procedimientos de adecuación para resolver el problema, utilizando metodologías erróneas, como:

- ignorar, en forma consciente, la dificultad o subsanarla de manera inapropiada mediante inferencias injustificables (Baker, 1994; Otero, 1998);
- usar pautas de pensamiento y razonamiento cotidiano en contextos científicos (Otero y Campanario, 1990), entre otras.

Baker (1994) propuso algunos criterios para interpretar correctamente una consigna, rescatamos, entre otros:

> Coherencia: Verifica que las ideas de la consigna sean verdaderas o compatibles con sus propios conocimientos.

> Cohesión estructural: Verifica que las ideas del párrafo sean temáticamente compatibles.

> Suficiencia informativa: Verifica que la consigna contenga toda la información necesaria para resolver el problema.

No es frecuente la utilización de estos criterios por parte de nuestros alumnos, hecho éste que se evidenció en las respuestas del cuestionario.

A modo de cierre:

Después de analizar las respuestas al cuestionario y los resultados de las entrevistas, y de discutir largamente sobre el tema, pudimos elaborar algunas reflexiones y muchos interrogantes.

Gran parte de los automatismos que nuestros alumnos utilizan, creemos, han sido promovidos a lo largo de las distintas etapas de formación, con actitudes que, entre otras:

- Priorizan la enseñanza programada, la pedagogía por objetivos, etc.
- Desconocen los modelos utilizados por los alumnos en la apropiación del conocimiento.
- Utilizan sistemáticamente algoritmos o técnicas rutinarias sin explicitar los fundamentos teóricos en la clase.

Nos preguntamos entonces:

¿sobre qué nos enseñan los errores de nuestros alumnos?

» ¿sobre el hecho de aprender?, ¿sobre los aprendizajes que ellos nos proponen?, ¿sobre la presencia de obstáculos de naturaleza didáctica?, ¿sobre lo implícito que reina entre los alumnos y nosotros?, ¿sobre la enseñanza de la matemática?

¿cómo tener en cuenta los errores de nuestros alumnos?

» ¿Cuáles errores nos presentan?, ¿dentro de que contexto?, ¿qué significan ellos?, ¿qué análisis nos inspiran?, ¿Qué consecuencias prácticas podemos extraer para nuestras clases?

¿Cómo seguir avanzando?

Referencias bibliográficas

Baker, L (1994) "Metacognición, lectura y educación científica" . En: Minnick Santa C. y Alvermann, D.E. (compiladores) Una didáctica de las ciencias, procesos y aplicaciones. Buenos Aires: Aique.

Bouvier, A .(1982).Dans nos classes. *Bulletin de L´association des professeurs de matehèmatiques de l`enseignement public. 335*, 657-670.

Brousseau, G. (1995).*L`einseignant dans la théorie des situations didactiques* ,en Noirfalise, R. y Perrin Glorian, M.J. (Comps.); Actes de l`ecole d`ete; IREM de Clermot-Ferrand 1996

Godino, J.D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006) *Una vision de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* RELIME, 9

Otero, J.C. (1998).*"Influence of Knowledge Activation and Context on Comprehension Monitoring of Science Texts"*. En: Hacker, D.J.; Dunlosky, J. y Graesser, A.C. *Metacognition in Educational Theory and Practice.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers

Otero, J. y Campanario J.M. (1990). "Comprehension evaluation and regulation in learning from science texts". En: *Journal of Research in Science Teaching,* vol. 27, 5, 447-460.

Sierpinska, A.(1988). *Sur un programme de recherché liè à la notion d`obstacle èpistèmologique.* Actes du colloque: Construction des savoirs: obstacles et conflits. Montreal CIRADE.

UTILIZACION DEL MODELO DE LAGRANGE PARA LA ENSEÑANZA DE EXTREMOS CONDICIONADOS

Martha Beatriz Fascella, Hugo Víctor Masía
Universidad Nacional de Rosario Argentina
mbfascella@yahoo.com, hvmasia@hotmail.com
Campo de investigación: Modelos Matemáticos Nivel: Superior

Resumen. *Existe gran cantidad de publicaciones que tratan del rol que cumple la Matemática en la Economía. Este tema, nos lleva a reflexionar sobre el papel que debe cumplir la Economía en las clases de Matemática y de qué manera debe enseñarse Matemática a estudiantes de Economía para facilitar la construcción del pensamiento lógico necesario para organizar, seleccionar, sistematizar la información que se nos suministra y para relacionar, integrar, inferir conceptos, ideas y principios matemáticos.*

En este trabajo se utiliza el Modelo de Lagrange con el objeto de motivar el aprendizaje de Extremos Condicionados para estudiantes de Economía, aunque tiene plena validez para ser aplicado en otras disciplinas.

Palabras clave: extremos condicionados, utilidad, modelos, economía

Encuadre teórico

Consideramos que la Matemática es una disciplina compleja y abstracta, características que se manifiestan en la dificultad que su aprendizaje significa para estudiantes de carreras para las cuales la Matemática es una herramienta instrumental y, como señala Hawkins (1997), muchas veces no se es consciente de lo abstracto que es el conocimiento que se considera "básico", de tal manera que lo que es sencillo para el docente puede ser inaccesible para algunos alumnos.

Según Chevallard (1997), un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse entonces, con una actividad de modelización matemática. Se caracteriza "el hacer matemática" como un trabajo de modelización. Este trabajo convierte el estudio de un sistema no matemático en el estudio de problemas matemáticos que se resuelven utilizando adecuadamente ciertos modelos.

De modo que la comprensión de conceptos se logra mediante la proposición y el análisis de problemas afines con la especialidad. Así, efectuamos las presentaciones en forma geométrica, numérica y algebraica, teniendo en cuenta que las representaciones visuales, la experimentación numérica y gráfica producen cambios en la forma de aprender el razonamiento conceptual. El uso de calculadoras y computadoras es un complemento a la hora de lograr una mejor calidad de la enseñanza pues el uso de software permite inmediatas verificaciones de propiedades, representaciones gráficas, así como resolución de problemas en situaciones reales, constituyendo una ayuda importante para la exploración inductiva del conocimiento por la inmediatez de la respuesta del procesador.

Mostramos en el trabajo una experiencia que parte del estudio de un modelo (Lagrange) generador, de otro modelo (Extremos Condicionados). Con esto queremos indicar que a partir de un problema procedente de un campo ajeno a la Matemática es posible pensar sobre las relaciones abstractas de otro campo conceptual en términos de nociones y propiedades matemáticas.

Metodología

La experiencia didáctica se enmarca en el Proyecto "*La comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas de modelización",* que se inscribe a su vez en el Programa "*Enseñanza de la Matemática para no matemáticos* ", cuyo objetivo es desarrollar formas de pensar creativas, de constante búsqueda para la toma de decisiones correctas en el ámbito profesional. Este trabajo forma parte de estudios preliminares del Proyecto PICTO: "*La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria*",que trata del diseño, seguimiento e investigación de unidades de enseñanza en tópicos específicos incluidos en los contenidos curriculares de la llamada Matemática Básica en el nivel inicial terciario .

La experiencia se realiza en el curso Matemática III de segundo año de la carrera de Licenciatura en Economía, de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, de la Universidad Nacional de Rosario, involucrando alrededor de ochenta alumnos semestralmente.

Encuadrada en una investigación aplicada, se enfoca la atención sobre la solución de problemas. En este caso el eje del desarrollo de la misma es la propuesta de un problema relativo al área de aplicaciones de la Matemática a la Economía.

Para el seguimiento y análisis se trabaja metodológicamente bajo un paradigma cualitativo con técnicas de observación participante, consignando las situaciones didácticas a que da lugar la interacción con el computador.

La observación designa la fase de la investigación consistente en familiarizarse con una situación o fenómeno determinado, en describirlo, en analizarlo con el fin de establecer una hipótesis coherente con el cuerpo de conocimientos anteriores ya establecidos y concierne a un grupo particular de individuos refiriéndose a resultados inmediatos interesando el perfeccionamiento de los implicados en el proceso, que así mismo involucra a los docentes.

El problema y el trabajo de aula

Partimos del supuesto de que un alumno de segundo año de la carrera que ya ha seguido al menos un curso de Economía, puede interesarse en problemas vinculados a su futura profesión. Elegimos el siguiente problema:

"Una empresa farmacéutica requiere para la elaboración de productos medicinales dos tipos de sustancias químicas, A y B . Llamemos con x e y a las cantidades requeridas de las sustancias A y B , respectivamente, y con $U(x,y)$ la *utilidad* obtenida al fabricar un producto cuya síntesis requiere distintas cantidades de las sustancias, según el proceso aplicado. La sustancia *A* tiene un precio de 2 u.m. (unidades monetarias) el gramo, la sustancia *B* tiene un precio de 1 u.m. el gramo, y el monto total asignado para la compra de ambas sustancias es de 400 u.m. Si la función de utilidad está dada por la fórmula $U(x, y) = xy + 2x$, la administración de la empresa desea maximizar su ganancia. Se pretende, en consecuencia:

- Hallar las cantidades de x e y que maximizan la función U, y el máximo nivel de utilidad que alcanza.
- Dibujar en un mismo gráfico la recta presupuestaria y las curvas de indiferencia correspondientes a los niveles de utilidad $U(x, y) = 18000$ y $U(x, y) = 22000$.
- Mostrar gráficamente el equilibrio del consumidor, considerando a la empresa como consumidora de las sustancias."

Presentada la situación problemática, los alumnos reconocen la necesidad de incorporar conceptos y procedimientos para responder a la misma que tiene que ver con el requerimiento de hallar valores máximos y/o mínimos de una función de dos o más variables reales que dejan de ser independientes por estar sujetas a condiciones que las vinculan.

Desarrollamos a continuación la teoría económica necesaria para su resolución.

El modelo de Lagrange permite maximizar o minimizar una función de dos variables con una restricción, y puede ser aplicado a dos situaciones: la búsqueda del equilibrio del consumidor dada una restricción presupuestaria y la minimización de costos para un nivel determinado de producción de una empresa. En nuestro caso será aplicado para determinar el *equilibrio del consumidor*.

Curvas de indiferencia: Dados dos bienes, *A* y *B*, puede representarse gráficamente la utilidad que éstos dan al consumidor a través de un mapa de curvas de indiferencia. En el eje de abscisas se representa la cantidad x del bien A, y en el de ordenadas la cantidad y

del bien B ., que el consumidor estará dispuesto a adquirir. Una curva de indiferencia es la gráfica de una relación que vincula todos los posibles valores de x e y para un determinado nivel de utilidad. Cada curva de indiferencia del mapa corresponde a un nivel de utilidad, teniendo una forma "descendente" ya que para mantener un mismo nivel de utilidad, el comprador estará dispuesto a adquirir cada vez menos del bien A por cada unidad extra de B que adquiere, y viceversa. Las curvas serán como las representadas en la Figura 1.

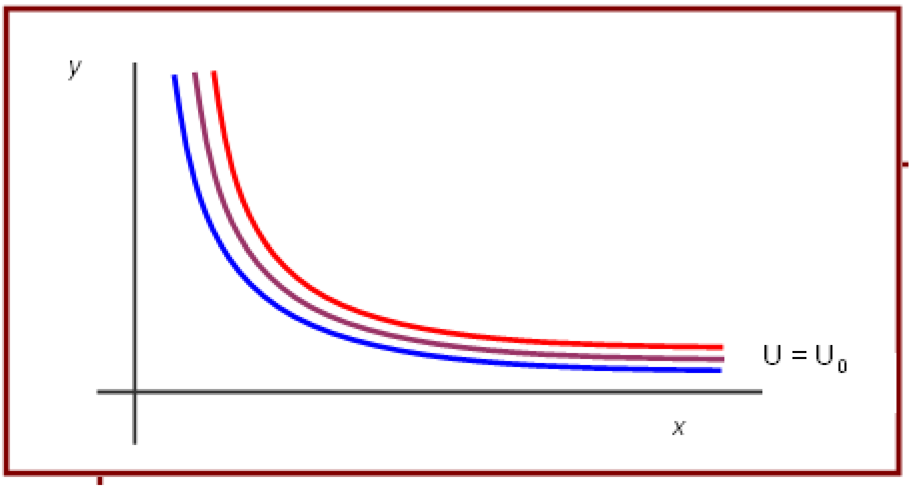


Figura 1

Las ecuaciones de las curvas son de la forma:

$$U(x, y) = U_0, \qquad (1)$$

donde x e y representan las cantidades variables de A y B , respectivamente. La ecuación (1) corresponde a la curva de indiferencia para el nivel de utilidad U_0 .

Manteniéndonos en la misma curva de indiferencia, la función $U(x, y)$ es constante, y el cambio en la utilidad total debe ser 0. Es decir debe verificarse

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy = 0 . \qquad (2)$$

donde dx y dy representan las variaciones de las cantidades de A y B, respectivamente.

Si el consumidor dispone de un monto m, para gastar en los bienes A y B, se tendrá:

$$p_A x + p_B y = m \,. \tag{3}$$

Esta ecuación, en la que p_A y p_B son los precios de A y B respectivamente, y cuya gráfica es un segmento de recta, impone una *restricción presupuestaria* que vincula todas las posibles cantidades de A y B que pueden ser compradas con el nivel de presupuesto m.

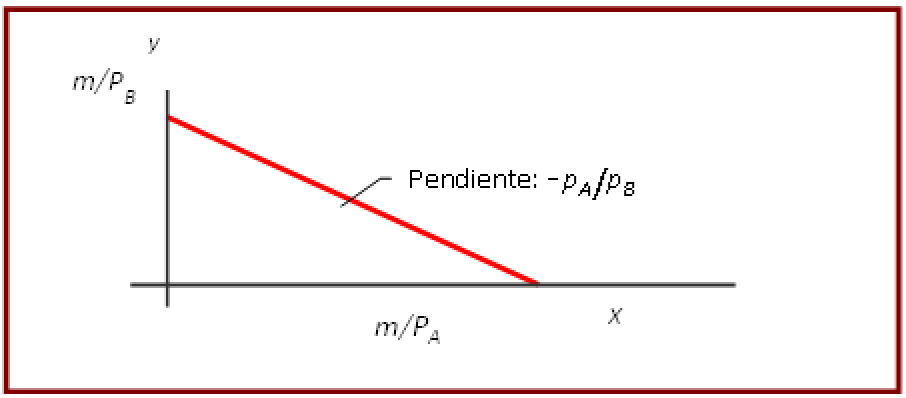


Figura 2

Equilibrio del consumidor: La condición de equilibrio del consumidor se da entonces cuando la recta presupuestaria toca en un solo punto, es decir es tangente a una curva de indiferencia, que corresponderá a las cantidades de A y de B con mayor nivel posible de utilidad con el presupuesto m. Así, en el punto de equilibrio la pendiente de la curva de indiferencia es igual a la pendiente de la recta de restricción presupuestaria. Ver Figura 3.

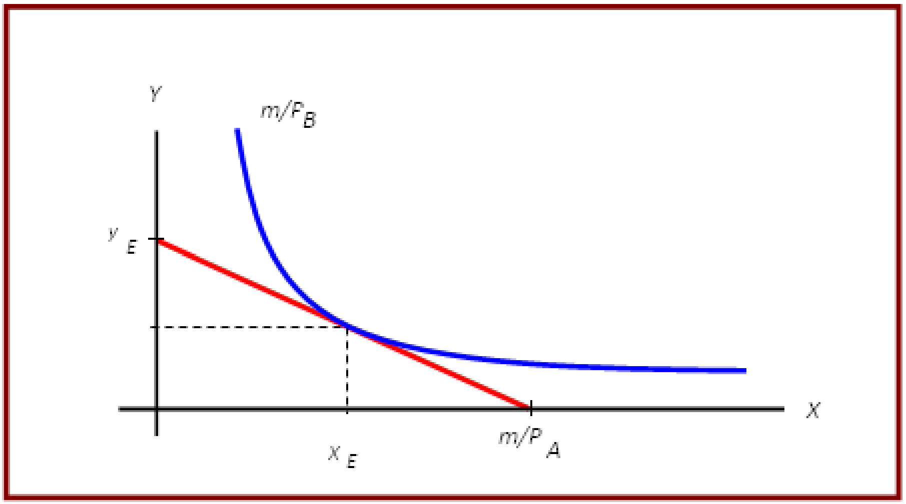


Figura 3

Maximización de utilidad: El problema consiste en hallar el valor máximo de la función de utilidad $U(x, y)$, llamada *función objetivo*, sujeta a la restricción presupuestaria

$$p_A x + p_B y - m = 0 .$$

El problema que se plantea es llamado un *problema de extremos condicionados*, y para su resolución se define la llamada *función lagrangeana* L :

$$L = U(x, y) + \lambda (p_A x + p_B y - m) .$$

El ambiente de interés provocado en el aula es aprovechado para desarrollar la teoría matemática necesaria para dar solución a problemas de esa clase, y a continuación aplicarlo a la resolución del problema planteado. Omitiremos en este trabajo el desarrollo de dicha teoría como así también la resolución numérica del problema.

Reflexiones a modo de conclusión

La experiencia en el aula nos permite concluir que los alumnos participaron activamente en el proceso de aprendizaje, relacionaron los conceptos matemáticos con los económicos. Por otra parte al utilizar un software que les permitió desviar la atención de la resolución hacia el análisis del problema, mostraron un mayor interés en los temas matemáticos y profundizaron los mismos con la finalidad de resolver problemas económicos más complejos relacionados con el problema propuesto inicialmente. Como consecuencia de ello, señalamos como un logro, la presentación de varios aspirantes para desempeñarse como ayudantes alumnos en la asignatura.

A partir de estos resultados, podemos citar a Jaim Etcheverry (1999) quien apunta que para que los alumnos aprendan, deben estar interesados en lo que aprenden ya que la razón se cultiva mejor cuando está asentada sobre una sólida base emocional; deben comprender que existe una secuencia en el aprendizaje y que el aprendizaje significativo y duradero se logra haciéndolo interesante, no divertido.

Es por ello que el carácter específico del conocimiento matemático y la importancia particular de las situaciones que se empleen en la enseñanza y la gestión de las mismas por parte del profesor, subrayadas por Brousseau (1986), hacen imprescindible centrarlas en el grupo de alumnos así como en el medio didáctico, que incluye los problemas, materiales e instrumentos que el profesor proporciona a los alumnos con el fin específico de ayudarlos a reconstruir un cierto conocimiento.

Brousseau, en su Teoría de las Situaciones Didácticas, atribuye un lugar preferencial a la resolución de problemas. En relación con el saber, la didáctica plantea que éste surge a partir de preguntas o problemas a los que el alumno se ve necesitado de dar respuesta. Además, señala que "la constitución del sentido, tal como la entendemos, implica una interacción constante del alumno con situaciones problemáticas, interacción dialéctica (porque el sujeto anticipa, finaliza sus acciones), donde él compromete conocimientos anteriores, los somete a la revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas". Sostiene también que "el interés de un problema va a depender esencialmente de lo que el alumno comprometa ahí, de lo que ahí someterá a prueba, de lo que invertirá, de la importancia para él de los rechazos que será conducido a hacer de las consecuencias previsibles de esos rechazos, de la frecuencia con la cual arriesgaría cometer esos errores rechazados y de su importancia. Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán franquear un verdadero obstáculo".

Referencias bibliográficas

Blanchard, O., Pérez Enrri, D. (2000). *Macroeconomía*. Buenos Aires: Prentice-Hall.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7, (2).* 33-115

Chevallard, I., Bosch, M., Gascon, J. (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. *Cuadernos de educación.-22*. Barcelona, España: Horsori.

Jaim Etcheverry, G. (1999). *La tragedia educativa*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Chiang, A.C., (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática (4ª Edic.)*. Madrid, España: McGraw Hill.

García, A., Martínez, A., Miñano, R. (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las Matemáticas.* Madrid, España: Síntesis.

Hawkins, A., (1997). Forward to basics! A personal view of developments in statistical education. International Statistical Review.

Jagdish, A. y Lardner, R.W. (2002). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. (4ª. Edic.)*. México, México: Pearson Educación.

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2001). *Cálculo* (8ª Edic.). México, México: Pearson Educación.

Samuelson, P.A. (2003). *Economía*. Madrid, España: McGraw Hill.

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN A PARTIR DE LA DERIVADA. ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Adriana Engler, Silvia Vrancken, María Inés Gregorini, Daniela Müller, Marcela Hecklein, Natalia Henzenn.
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio, Superior

Resumen. *La preocupación por mejorar el aprendizaje del cálculo en una carrera universitaria no matemática conduce a la reflexión sobre las metodologías empleadas para su enseñanza. Por esto, desde hace tiempo trabajamos en el proyecto de investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del cálculo en carreras no matemáticas". En el marco del mismo diseñamos una secuencia de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional y sus aplicaciones en el estudio del comportamiento de funciones. Nos propusimos afianzar la relación derivada-función-función derivada. Presentamos los resultados de su implementación y describimos los principales errores y dificultades detectadas.*

Palabras clave: función, comportamiento variacional, derivada, estudio de funciones

Introducción

No es sencillo para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Cálculo. Su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior. Artigue (1995) manifiesta:

> *"Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas" (p. 97).*

Se supone que los alumnos fracasan por no llegar con una preparación adecuada, no saben álgebra, no conocen las propiedades de los números, las características de las desigualdades y no saben geometría. Sin embargo, pueden tener todos estos conocimientos y aún fracasar o evidenciar serias dificultades. Generalmente las imágenes previas del concepto existentes en su mente interfieren inevitablemente generando obstáculos al mezclarse con las nuevas imágenes adquiridas, impidiendo el desarrollo de la comprensión completa del nuevo concepto. Cantoral & Mirón (2000 c.p. Zuñiga, 2007), señalan:

> *“la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aún siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación” (p.150).*

Es esta realidad la que nos lleva a revisar lo que hacemos desde la enseñanza considerando lo que nuestros alumnos conocen, las dificultades que enfrentan y los errores. Trabajamos desde hace tiempo en el proyecto “Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del cálculo en carreras no matemáticas”. Durante la investigación comenzamos a diseñar, poner a prueba y evaluar secuencias didácticas articuladas en torno a diferentes organizadores. En primer lugar tuvimos en cuenta los errores y dificultades en el aprendizaje así como los obstáculos que se plantean o detectan para cada concepto. En segundo lugar, las distintas representaciones de los conceptos involucrados y por último la evolución histórica y epistemológica de los mismos. Con estas secuencias buscamos que tanto docentes como alumnos profundicen su propio proceso de comprensión y entendimiento de los conceptos y procesos matemáticos en relación a los contenidos abordados.

Teniendo en cuenta que el concepto de función es unificador en matemática y uno de los que más dificultades genera a la hora de aprender, realizamos un trabajo profundo en relación al mismo. Las funciones se utilizan como modelos de situaciones del mundo real, incluyendo aquellas que son resultado del avance tecnológico, y tienen enorme aplicación a la descripción de fenómenos físicos. Farfán (1992), asegura que, entre las causas que hacen de la función uno de los conceptos matemáticos más difíciles están las diversas concepciones y múltiples representaciones de ésta, más teniendo en cuenta que la enseñanza tiende a sobrevalorar la algoritmización y los métodos analíticos por encima del desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático. Las funciones cambian de maneras muy diferentes y para entender su comportamiento se debe comprender cómo cambian y determinar cuánto cambian. La derivada está estrechamente ligada con la cuantificación de los cambios y el comportamiento de estos.

Desde la perspectiva de la Matemática Educativa este trabajo se enmarca en el "enfoque variacional", línea de investigación introducida por un grupo de investigadores de México. Cantoral (1991, c.p. Dolores, 2007) "propone rediseñar el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar a la variación física…" (p.195) y expresa además:

> *"…en el terreno de la enseñanza, tendemos hacia la reconstrucción de una Didáctica del Cálculo basada en las intuiciones y vivencias cotidianas de los sujetos, mediante acercamientos fenomenológicos, por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto per se" (p.195).*

En este artículo presentamos y analizamos una situación de aula que diseñamos y pusimos a prueba para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional y su relación con el estudio del comportamiento de funciones. Corresponde al tema "Estudio de funciones" del programa analítico de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. En la misma se favorece la utilización de diferentes sistemas de representación y el paso de uno a otro. Bajo la premisa de una enseñanza activa nos propusimos afianzar la relación derivada-función-función derivada.

Desarrollo de la propuesta

El trabajo se basa en la propuesta de Dolores (1999) que busca desarrollar ideas variacionales para la comprensión de los conceptos fundamentales y se apoya en actividades que sugieren introducciones intuitivas e informales antes de abordar el desarrollo del tema desde una perspectiva lógico-formal. El mismo Dolores (2007) recomienda “ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica”.

Los alumnos ya habían estudiado funciones y valorado la utilización de diferentes representaciones. En esta oportunidad se busca que puedan construir relaciones entre el concepto de derivada y el comportamiento de una función. Para la preparación de las diferentes actividades se tuvieron en cuenta contenidos ya trabajados: razón de cambio media, razón de cambio instantánea, la definición de derivada, la función derivada, la interpretación geométrica de la derivada, las reglas de derivación y la relación de derivabilidad y continuidad.

En los diferentes ítems propuestos se favorece el trabajo en forma verbal, tabular, numérica, analítica y grafica. La guía se propuso a todos los alumnos inscriptos en Matemática II que estaban presentes en una clase habitual, en grupos de a dos integrantes, antes de comenzar a desarrollar el tema del programa analítico “Estudio de funciones”.

Las actividades se corrigieron colocando: una tilde (✓) al correcto, una cruz (x) al incorrecto, la palabra incompleto y una marca horizontal pequeña (–) si no lo resolvían. Se hicieron algunas acotaciones y observaciones escritas en los casos que se consideró necesario. En una clase posterior se les devolvió, a cada uno de los grupos, su producción y, resolviendo en forma conjunta cada una de las actividades propuestas, se fueron desarrollando los distintos contenidos: valores extremos de una función, función creciente y decreciente, determinación de extremos relativos y concavidad.

En términos metodológicos el trabajo se desarrolló en tres momentos: el diseño de las actividades a incluir (según revisión bibliográfica realizada y, desde la práctica docente, dificultades y errores observados en trabajos recogidos de años anteriores), la resolución de las actividades y la utilización de las respuestas (con sus logros, dificultades y errores) para el desarrollo de los contenidos y la puesta en común de conclusiones. Desde el equipo docente, se analizaron y valoraron los resultados obtenidos a fin de favorecer la toma de decisiones en acciones futuras.

Presentación de algunas actividades y análisis de los resultados más importantes

Se obtuvieron un total de setenta y dos trabajos. Se enuncian a continuación algunas de las actividades propuestas (de un total de diez) y se presenta el análisis de las producciones realizadas por los alumnos.

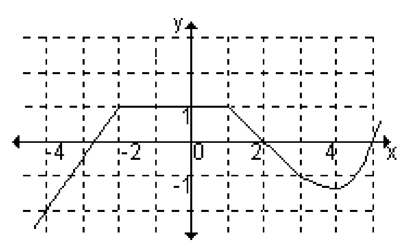
(Sólo se incluyen algunas actividades. La guía completa se puede solicitar a los autores.)

Actividad 1

La gráfica muestra el comportamiento de la función $y = f(x)$. Analice la gráfica y conteste:

a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -4 a -2?

b) ¿Cuánto cambia f si x cambia de 2 a 3?



c) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -1 a 1?

d) Si x cambia de izquierda a derecha, para qué valores de x, se cumplen las desigualdades siguientes?

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$; $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$; $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$.

En esta actividad se propicia, desde la gráfica, el análisis de los cambios que se producen tanto en la variable independiente como en la variable dependiente. En el ítem **a)** el 89% de las respuestas resultan correctas y en el ítem c) este porcentaje asciende al 96%. Al responder el ítem **b)** el 57% considera el cambio positivo, es decir +1. Con relación al ítem **d)** el 20% de los alumnos no responde ninguno de los casos solicitados.

Actividad 2

Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla.

Intervalos	Δs	Comportamiento de la función			Signo de s(t)
		Crece	Decrece	No cambia	
$0 \leq t \leq 0{,}5$					
$0{,}5 \leq t \leq 1$					
$1 \leq t \leq 1{,}5$					
$1{,}5 \leq t \leq 2$					

a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de s(t) y los cambios Δs?

b) ¿Es cierto que si $s(t) > 0$ entonces los cambios $\Delta s > 0$? Justifique.

c) ¿Es cierto que si s(t) crece entonces $\Delta s > 0$ o que si $\Delta s < 0$ entonces s(t) decrece?

En esta actividad se plantea el trabajo verbal, algebraico y numérico. Se empieza a relacionar la idea de "cómo cambian" las variables con la variación de la función y su crecimiento y decrecimiento.

Al completar la tabla, en el 47% de los trabajos consideran $s(t) < 0$ en el segundo intervalo confundiéndolo con el signo de Δs. Los alumnos no hicieron observaciones en relación a los comportamientos en los extremos de los intervalos.En las preguntas un alto porcentaje no responde: 19% en el ítem **a)** y **b)** y baja al 13% en el ítem **c)**. Las respuestas correctas fueron 68 %, 51% y 76% cada ítem respectivamente.

Actividad 4

La función que describe la altura en el instante t (medido en segundos) alcanzada por un delfín al realizar un salto está dada por $h(t) = -t^2 + 10t$ metros.

a) Obtenga la ley de la función que expresa la velocidad de desplazamiento del delfín en cualquier instante t.

b) Complete la tabla:

Tiempo t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura h(t)											
Velocidad v(t)											

c) Represente ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y compare la altura alcanzada con la velocidad observando las gráficas.

d) Complete el siguiente cuadro:

Intervalo de tiempo	Comportamiento de la función altura h(t)	Signo de la velocidad v(t)
$0 < t < 5$		
$t = 5$		
$5 < t < 10$		

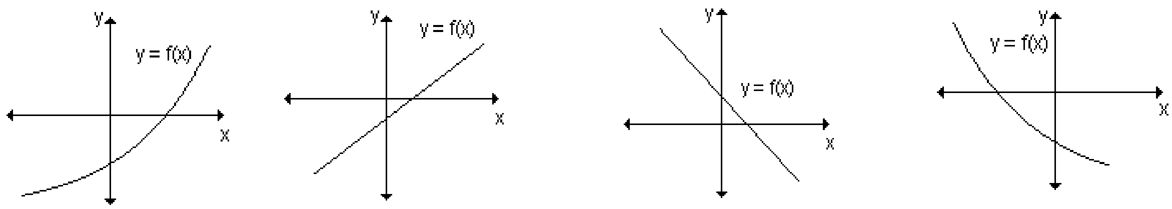
e) Relacione la función que describe la altura y la función velocidad.

En este caso, se propone un trabajo verbal, algebraico, numérico y gráfico donde se relaciona la función con la función derivada. Se debe tener en cuenta que la relación entre espacio – velocidad fue ampliamente discutida al trabajar los conceptos de razón de cambio instantánea, derivada y función derivada.

En general no se observan dificultades en el desarrollo de los diferentes ítems de la actividad. Al completar la tabla en comportamiento de la función cuando t = 5, el 61% responde que la misma “no cambia”, o “no crece ni decrece”. El 31% responde “máximo” o “25” que es el valor máximo que presenta la función. Con respecto al signo de la velocidad en ese punto, el 90% responde en forma correcta.En el ítem **e)** el 47% de las respuestas son correctas y el 24% de los trabajos no responden. Actividad 5

a) Observando la gráfica de f(x), analice el signo de f '(x) en todo su dominio. (Dada la extensión del trabajo sólo presentamos algunas de las gráficas propuestas).

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.



La actividad propone relacionar el signo de la derivada con el comportamiento de la función (crecimiento y decrecimiento).

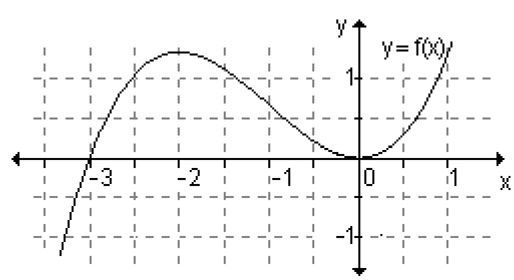
La mayoría de los alumnos respondió. Los principales inconvenientes se presentaron en el caso de las rectas a pesar de que en Matemática I la pendiente de una recta fue un tema ampliamente estudiado. El 15% analiza mal el signo de la derivada en el caso de la recta creciente y el 18% en el caso de la decreciente.

Actividad 7

Dada la gráfica de y = f(x),

a) Determine el signo de la derivada en x = –3, x = –2, x = –1 y x = 0.

b) ¿En esos valores de x, la función crece o decrece?



Para x = –2, se observa el mayor porcentaje de respuestas incorrectas, tanto para determinar el signo de f '(–2) (15%) y el comportamiento de la función en ese punto (32%). Mientras que en x = 0 se observa el menor porcentaje de respuestas incorrectas al determinar el signo de f '(0) (6%).En **b)** hablan de “máximo” o “mínimo” para x = –2 y x = 473

0. No responden alrededor del 10%.Al final se pedía que respondan algunas preguntas que se enuncian a continuación.

1) ¿Cómo reconoce los puntos en los cuales la derivada es menor que cero, igual a cero o mayor que cero?; 2)¿Qué características tiene la función en esos puntos?; 3)¿Qué relación existe entre el crecimiento de una gráfica, razón de cambio y pendiente?; 4)¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una gráfica, razón de cambio y pendiente?; 5) ¿Qué relación existe entre el crecimiento de una gráfica, la existencia de valores extremos y la primer derivada?

Solamente en veintidós trabajos se encontraron las respuestas. (Dada la extensión del trabajo no podemos incluir las respuestas obtenidas pero resultaron muy interesantes).

También se sugirió que completen las afirmaciones que enunciamos a continuación.

- Si la derivada de una función es positiva en un intervalo entonces la función es .... en ese intervalo.
- Si la derivada de una función es negativa es un intervalo entonces la función es .... en ese intervalo.

*Sólo completaron estas proposiciones en cuarenta y seis trabajos y las respuestas correctas fueron cuarenta.*Si la derivada de una función es cero en un intervalo entonces la función es .... en ese intervalo.

En este caso, sólo respondieron en cuarenta y cinco trabajos y cuarenta y tres resultaron correctas. La función puede alcanzar valores máximos o mínimos para valores de x en los que .....

- La función alcanza valores máximos o mínimos para valores de x en los que ....

De las treinta y seis respuestas a cada una de las últimas afirmaciones sólo cuatro fueron correctas.

Conclusiones

Los alumnos lograron una idea aceptable de variación. Casi todos coincidieron en que los cambios se miden por medio de restas. Los resultados fueron mejores cuando los mismos debían calcularse en el registro numérico y en el gráfico, presentando mayores dificultades en la evaluación algebraica. Según lo observado en el desarrollo de las clases y en los trabajos posteriores (parciales y evaluaciones finales) la resolución de las actividades les permitió desarrollar una idea correcta acerca de las condiciones de crecimiento y decrecimiento de una función, así como la de existencia de valores extremos, a un número considerable de alumnos.

Resultó un desafío interesante desarrollar estrategias de enseñanza basadas en la cooperación y el trabajo en grupo buscando reforzar conocimientos y compartir o disentir desde las diferentes miradas sobre las actividades matemáticas. Los alumnos manifestaron interés en trabajar, indagar qué sabían y qué eran capaces de "descubrir" y "construir".

El debate y discusión entre los docentes en todos los momentos de la puesta en marcha de esta propuesta favoreció el trabajo inmediato en el aula y el repensar acciones futuras.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P., (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* Cuadernos didácticos. Volumen 6. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En Dolores, C.; Martínez, G.; Farfán, R.M., Carrillo, C.; López, I. y

Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp.169-204). Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Farfán, R. (1992). ¿Matemática Educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe. En Cantoral, R., Farfán, R. M. & Imaz, C. (Eds.). *Publicaciones Centroamericanas, 6*(2), 236-253.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick. J., Gómez, P. y Rico, L. *Educación Matemática*. (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zuñiga, L. (2007) El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. RELIME. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *10* (1), 145-175.

IDENTIFICACIÓN DE DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO A PARTIR DE LOS RESULTADOS DE EXÁMENES COLEGIADOS

José Alvaro Encinas Bringas, Luís Ángel Contreras Niño, Ruth Elba Rivera Castellón, Maximiliano De Las Fuentes Lara, Enrique René Bastidas Puga
Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo. Facultad de Ingeniería, Mexicali Universidad Autónoma de Baja California — México
aencinasb@uabc.mx, aencinasb1834@gmail.com

Campo de investigación: Medición — Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo es continuación de un proyecto iniciado en el año 2004 para la aplicación a gran escala de exámenes elaborados de manera colegiada. Se describen dos procedimientos cuantitativos para estudiar el comportamiento estadístico de los ítems de un examen de cálculo diferencial. El primero, se basa exclusivamente en las respuestas dadas por los estudiantes. El segundo relaciona las respuestas de los examinados con características curriculares de los reactivos correspondientes. Se identifican ítems o grupos de ítems que presentan dificultades a los estudiantes, tanto en la comprensión de conceptos como en el dominio de procedimientos; se identifican dificultades para grupos de reactivos relacionados con representaciones gráfica, numérica o analítica. A partir del análisis de dichas dificultades se proponen mejoras en la enseñanza de los temas correspondientes.*

Palabras clave: dificultades en la enseñanza, aprendizaje del cálculo, exámenes colegiados

Introducción

El presente estudio es continuación de un proyecto evaluativo realizado entre 2004 y 2005 (Contreras *et al*, 2005; Encinas *et al*, 2006), mediante el cual se desarrolló de manera colegiada un examen criterial de opción múltiple alineado con el currículo de la materia de Cálculo Diferencial. Desde el semestre 2005-2 al 2007-1, el instrumento se ha aplicado a 500 estudiantes por semestre en promedio, inscritos en nueve carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería-Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California.

Para construir el examen se adaptó el modelo propuesto por Nitko (1994) para desarrollar exámenes nacionales orientados por el currículo. Dicho modelo se complementó con la metodología para la construcción de test criteriales de Popham (1990) y con aportaciones metodológicas y operativas de Contreras (1998, 2000). El examen desarrollado tiene las siguientes características: a) es criterial, pues su propósito es informar qué puede hacer o no el examinado respecto al currículo de la materia; b) está alineado con el currículo, identifica lo esencial de éste y se orienta a evaluar su dominio; c) es de opción múltiple, pues solicita al estudiante elegir la respuesta correcta o mejor opción de entre las que se ofrecen; d) es de gran escala, ya que se aplica regularmente a cientos de alumno que cursan la materia.

Una vez elaborados los reactivos se estructuraron en modelos de examen y fueron aplicados a una pequeña muestra de alumnos a fin de calibrarlos psicométricamente. Así, tras su ensayo empírico, se efectuó un análisis de reactivos para detectar los que tenían dificultad inadecuada, discriminación inapropiada y opciones no seleccionadas, entre otros errores. Posteriormente, a partir de los resultados de dicho análisis, se procedió a revisar y corregir los reactivos que presentaron fallas y a estructurar de nueva cuenta la versión definitiva de los modelos de examen que se aplicaron a gran escala. Finalmente, se obtuvieron tres modelos de examen: A, B y C, cada uno con 75 reactivos de opción múltiple. Las tres versiones de examen son paralelas. Así, en cada modelo cada uno de los ítems evalúa el dominio del mismo contenido temático del curso de cálculo, lo que permite hacer comparaciones de los resultados en los tres modelos.

Las respuestas de los estudiantes ante esos exámenes son revisadas y discutidas, mediante los procedimientos descritos a continuación.

Método

Una vez elaborados, los exámenes fueron administrados a los examinados en cuadernillos de papel con una hoja de respuestas desprendible. Después, se utilizó el software Microsoft Excel 2003 para la captura y organización de los datos, y a continuación se procedió a su análisis.

El primer procedimiento de acuerdo a Contreras et al (2004), consistió en efectuar un análisis de reactivos; para ello, se procedió a: a) calcular el *índice de dificultad* o valor **p** del reactivo, mismo que se obtuvo dividiendo el número de examinados que contestaron correctamente el ítem entre el total que lo respondieron. ¿Un reactivo con $p = .9$ es fácil? ¿Uno con $p = .2$ es difícil? En general, la interpretación de la dificultad es contextual; es decir, la facilidad o dificultad del ítem está relacionada con el estudiante, el profesor y el contenido y el método de instrucción. b) Calcular el *índice de discriminación* o valor D del reactivo. Esto se logró mediante la fórmula D = pa-pb, donde *pa* representa el 27% de estudiantes con las calificaciones más altas en el examen y *pb* el 27% de los examinados con más bajo aprovechamiento. El valor discriminativo del ítem se considera apropiado para $D \geq 0.2$. La utilidad de este índice radica en que señala los reactivos con defectos ya sea en la pregunta, en la respuesta correcta o en los distractores.

Un segundo procedimiento consistió en codificar los reactivos que conforman los exámenes, según diversos criterios relacionados con el contenido a evaluar:

a) Unidad temática del curso. Para nuestro caso: I) funciones, II) límites y continuidad, III) derivación y IV) aplicaciones.

b) Subtemas. Cada uno de estos temas fue subdividido en sus componentes, mismos que fueron representados gráficamente en una retícula o mapa curricular que puede ser consultado la página web de la Facultad de Ingeniería-Mexicali:

http://ingenieria.mxl.uabc.mx/TC/examenColegiado/matematicasI.html

c) Concepto/procedimiento. Según la naturaleza del contenido, cada uno de los reactivos se clasificó como evaluando el dominio de un concepto o de un procedimiento del curso de cálculo. (Castañeda, 1996)

d) Representación: Gráfica, Analítica o Numérica. De acuerdo con la teoría de representaciones, (Duval, 2000 y Hitt, 1998), los ítems fueron clasificados como gráfico, analítico o numérico, así como las conversiones entre ellos.

e) Eje: Antecedente/Consecuente. Con base en el mapa curricular de la materia, los reactivos fueron ubicados en líneas de formación configuradas como una cadena de antecedentes de un tema y de sus consecuentes.

Por último las dificultadas identificadas por este procedimiento fueron analizadas de acuerdo a la problemática que las origina.

Resultados y discusión

Las tres versiones del examen se han aplicado desde el semestre 2005-2 a 669 alumnos; en 2006-1 a 475; en 2006-2 a 599 estudiantes. Con el solo propósito de ilustrar la aplicación de los procedimientos antes mencionados, enseguida se presentan algunos resultados obtenidos tras la aplicación a 447 alumnos efectuada durante el semestre 2007-1.

SUBTEMA	Ítem	Dif(p)	Disc(D)	C	P	G	A	N
4.2.2 Teorema del valor medio.	68	0.13	0.06*	0	1	0	1	0
2.6.3 Razón de cambio instantáneo.	46	0.14	0.07*	1	0	0	1	0
1.3.11 La inversa de una función.	23	0.15	0.11*	1	0	1	0	0
3.1.4 La derivada numérica de una función	51	0.2	0.19*	0	1	0	0	1
2.6.3 Razón de cambio instantáneo.	45	0.21	0.21	0	1	0	1	0
3.1.3 La derivada gráfica de una función.	49	0.22	0.28	0	1	1	0	0
1.3.2 Graficación por parámetros.	15	0.24	0.45	1	0	1	0	0
2.2.1 Límite por la derecha.	34	0.25	0.31	0	1	0	1	0
4.6.3 Aproximaciones lineales.	75	0.25	0.35	0	1	0	1	0
2.1.2 Límites numéricos.	31	0.27	0.3	1	0	0	0	1
4.3.4 Criterio de la segunda derivada.	72	0.27	0.32	1	0	0	1	0
1.4.5 La función logaritmo.	27	0.28	0.41	1	0	1	0	0
2.6.1 Razón de cambio promedio.	44	0.28	0.42	0	1	1	0	0
1.4.4 La función exponencial.	26	0.29	0.21	1	0	1	0	0
2.6.1 Razón de cambio promedio.	43	0.29	0.34	1	0	0	1	0
4.3.2 Concavidad.	70	0.3	0.33	1	0	1	0	0
2.3.3 Asíntotas verticales.	39	0.34	0.42	0	1	0	1	0
3.1.5 La derivada analítica de una función.	53	0.34	0.37	0	1	0	1	0
3.4.2 Derivación de funciones implícitas.	63	0.34	0.55	0	1	0	1	0
1.3.11 La inversa de una función.	22	0.35	0.19*	0	1	0	1	0

Tabla 1. Subtemas codificados e Indicadores de ítems del examen.

La tabla 1 ilustra una parte de los datos recabados en la aplicación del semestre 2007-1. En la primer columna se tiene el nombre y código del subtema. El número del ítem, es un valor entre uno y el 75, y corresponde a su ubicación en la prueba. Cuando el nombre de un subtema está repetido, significa que se elaboraron dos reactivos diferentes para evaluar su dominio. La columna Dif. (p), registra el índice de dificultad del reactivo. La columna Disc. (D) localizada enseguida, presenta el índice de discriminación del ítem. El asterisco señala los ítems que presentaron discriminación baja, menor al estándar de calidad establecido. Las columnas posteriores significan: C, concepto; P, procedimiento; G, reactivo en contexto grafico; A, ítem en contexto analítico y N, ítem en numérico. Los valores uno o cero indican su pertenencia a uno u otro tipo.

Se observa que temas tales como razones de cambio, cálculo de límites y de derivadas, estos últimos particularmente en los contextos gráfico y numérico, encabezan la lista de contenidos que se le presentan al estudiante como difíciles. Ya sea por la complejidad propia del tema o por los métodos de enseñanza utilizados por los profesores.

En cuanto a los índices de dificultad por temas, en la tabla 2 se aprecia que la segunda unidad es la más difícil para los estudiantes. Esto puede ser por la inclusión en el examen de reactivos de cálculo de límites en forma numérica y gráfica, además de la tradicional forma analítica.

Tema	Dificultad
I) Funciones	0.50
II) Límites y cont.	0.39
III) Derivación	0.43
IV) Aplicaciones	0.44

Tabla 2. Dificultad promedio de los temas.

Tipo Representación	Dificultad
Concepto	0.44
Procedimiento	0.45
Gráfico	0.39
Analítico	0.45
Numérico	0.35

Tabla 3 Dificultad promedio según codificación.

La tabla 3 concentra los índices de dificultad en todas las cuatro unidades del examen, pero al través de considerar los atributos de los reactivos tales como si pregunta sobre un concepto o un procedimiento; o bien, si el reactivo es de tipo gráfico, numérico o analítico. Los índices más bajos corresponden a las representaciones numérica y gráfica, lo cual apoya el comentario del párrafo anterior.

A continuación se muestran y comentan los resultados específicos de dos reactivos del examen. El primero, el ítem 23, fue seleccionado por tener discriminación menor a 0.20 y por tanto se le considera como defectuoso. El segundo, el reactivo 15 se seleccionó por ser un ítem estadísticamente correcto e ilustrativo de la problemática de enseñanza.

Ítem 23.- La gráfica de la inversa de una función f(x) es simétrica respecto a:

a) el eje x b) y = x c) el eje yd) y = -x

IInciso	# de alumnos	Porcentaje
a)	154	34
b)	66	15
c)	164	37
d)	47	10
No contestó	16	4
Total	447	100

Tabla 4. Distribución de respuestas del ítem 23.

# Alumnos altos que acertaron	25
Dificultad altos	0.21
# Alumnos bajos que acertaron	12
Dificultad bajos	0.10
Discriminación (altos-bajos)	0.11
Índice de dificultad	0.15

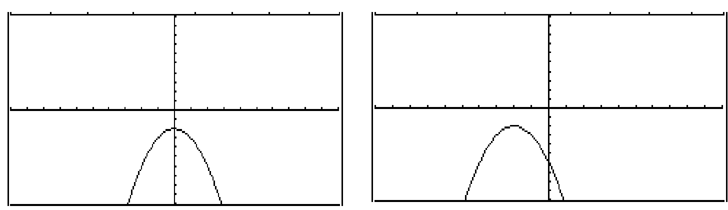
Tabla 5. Discriminación del ítem 23.

Para este reactivo, con respuesta correcta en el inciso b) y con baja discriminación, se observa en la tabla 4 una marcada tendencia a responder como opción correcta los incisos que involucran los ejes coordenados. Se considera que un reactivo es correcto desde el punto de vista técnico si es contestado correctamente por los alumnos del grupo de más alto rendimiento y mal contestado por los de abajo. La tabla 5 indica que esto no se cumplió cabalmente. En consecuencia, se propone modificar el enunciado de las opciones

b) y c) quedando por ejemplo, b) la recta y = x, d) la recta y = -x. Esto por la falta de claridad en su enunciado actual. En una aplicación futura del examen se volverán a analizar las respuestas al reactivo y de ser necesario se revisará nuevamente.

Ítem 15. Si f(x) es representada por la gráfica de abajo-izquierda, entonces la de abajo-derecha corresponde a:

a) f (x - 2)   b) f(x) + 2   c) f (x+ 2)   d) f(x) – 2



Para este reactivo con respuesta correcta en el inciso c) se presentan a continuación las tablas 6 y 7 que concentran los datos de las respuestas de los alumnos y la discriminación del ítem.

Inciso	# de alumnos	Porcentaje
a)	115	26
b)	29	6
c)	106	24
d)	180	40
No contestó	17	4
Total	447	100

Tabla 6. Distribución de respuestas del ítem 15.

# Alumnos altos que acertaron	62
Dificultad altos	0.51
# Alumnos bajos que acertaron	7
Dificultad bajos	0.06
Discriminación (altos-bajos)	0.45
Índice de dificultad	0.24

Tabla 7. Discriminación del ítem 15

Este ítem evalúa el contenido de graficación de funciones por parámetros, el cual no es complejo desde el punto de vista conceptual o procedimental. El alto número de estudiantes que seleccionaron el distractor correspondiente al primer inciso, sugiere la existencia de un obstáculo cognitivo generado en el estudio de la aritmética y el álgebra, donde se enseña que “quitar dos unidades significa que algo se desplaza a la izquierda en esas mismas dos unidades”. El desempeño sugiere que los profesores no están utilizando tecnología para su enseñanza, tal como la calculadora graficadora o algún software para computadora.

En nuestra institución, el estudio de los resultados de la aplicación a gran escala de exámenes de opción múltiple, alineados con el currículo construidos de manera colegiada, ha mostrado utilidad para identificar áreas temáticas en las que el aprovechamiento de los estudiantes puede catalogarse como bajo. En la tabla 8, se enlistan los contenidos problemáticos que se han manifestado de manera repetitiva a lo largo de los cuatro semestres de aplicación de dichos exámenes, y que se han identificado debido a nuestras condiciones escolares, profesores, estudiantes, contenidos y métodos de enseñanza.

1. Graficación de funciones por parámetros.	6. Derivada gráfica de una función.
2. Razón de cambio promedio	7. Derivada numérica de una función.
3. Razón de cambio instantáneo	8. Teorema del valor medio.
4. Límites numéricos	9. Criterio de la segunda derivada
5. Límites laterales: gráficos y numéricos	10. Aproximaciones lineales.

Tabla 8. Principales contenidos en los que se han observado dificultades.

Como puede observarse en la tabla 8, la problemática se ubica esencialmente en los contextos numérico y gráfico, no así en el algebraico donde tradicionalmente se da mayor énfasis en la enseñanza del cálculo. Con el fin de atender esta problemática, se está promoviendo una serie de acciones tendientes a disminuir su intensidad. Por ejemplo, el uso de la calculadora graficadora en la práctica cotidiana del profesor de matemáticas. Al respecto, cabe señalar que se implementó un taller con 35 calculadoras y proyector. Además, varios profesores de matemáticas están empleando como apoyo al aprendizaje de los estudiantes software de graficación. El uso de los procedimientos descritos, permitió detectar que varios profesores no alcanzan a revisar el último tema del programa: aproximaciones lineales.

Finalmente, cabe señalar que los temas conceptualmente complejos como el criterio de la segunda derivada o la noción de límite, merecen un tratamiento aparte. Por ejemplo, el rediseño de contenidos a enseñar en el cálculo, mediante el enfoque socioepistemológico, Cantoral y Farfán (2000, 2004).

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal* (pp.69-91). México: Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo Infinitesimal*. México: Thomson.

Castañeda, M. (1996). *Análisis del aprendizaje de conceptos y procedimientos*. México: Trillas.

Contreras, L. A., Encinas, J. A. y De Las Fuentes, L. M. (2005). Evaluación Colegiada del Aprendizaje en la Universidad Autónoma de Baja California: el caso del examen de Matemáticas I de la Facultad de Ingeniería Mexicali. *Memoria del VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México. COMIE.

Contreras, L. A., Backhoff, E. y Larrazolo, R. (2004). *Curso-taller para la elaboración de exámenes criteriales (módulo 3).* Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo, Universidad Autónoma de Baja California. México.

Contreras, L. A. (1998). Metodología para desarrollar y validar un examen de español, de referencia criterial y referencia normativa orientado por el curriculum, para la educación primaria en México*. Memorias del III Foro Nacional de Evaluación Educativa*. Veracruz. Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior.

Contreras, L. A. (2000). *Desarrollo y pilotaje de un examen de español para la educación primaria en Baja California.* Tesis de maestría sin publicar, obtenida en agosto 16, 2005 del sitio web de la U A B C: http://eduweb.ens.uabc.mx/egresados/index.html

Contreras, L. A., Encinas, J. A., De las Fuentes, M. y Rivera, R. E. (2005). Evaluación Colegiada del aprendizaje en la Universidad Autónoma de Baja California. Ponencia en *VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa.* Hermosillo, Sonora. México. COMIE.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático.* Obtenido en marzo 12, 2007, de:

http://www.matedu.cinvestav.mc/e-librosydoc/pme-procee.pdf

Encinas, J. A., Rivera, R. E. y De Las Fuentes, L. M. (2006). Construcción colegiada y Aplicación de un examen criterial alineado con el currículo para evaluar a gran escala un curso de cálculo diferencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 20, pp. 211-216) México: CLAME.

Hitt F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista educación Matemática*, 10 (1), 23-45.

Nitko, A. J. (1994). *A Model for Developing Curriculum-Driven Criterion-Referenced and Norm-Referenced National Examinations for Certification and Selection of Students.* Ponencia presentada en la Conferencia Internacional sobre Evaluación y Medición Educativas, de la Asociación para el Estudio de la Evaluación Educativa (ASSESA).

Popham, J. (1990). *Modern educational Measurement: a practitioner's perspective.* Englewood Cliffs, N.J., USA: Prentice-Hall.

TRANSFORMACIONES BÁSICAS DE LAS FUNCIONES

Tulio Rafael Amaya De armas
Universidad de Sucre. I.E.Madre Amalia. Sincelejo, Sucre Colombia
tuama1@hotmail.com
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Medio

Resumen. *En el desarrollo de esta actividad se discute cómo se transforma una función, de la cual se conoce su representación gráfica y no su representación algebraica. La actividad consiste en un estudio de la gráfica de una función prototipo totalmente descontextualizada. Se propone la composición de funciones, operaciones entre gráficas y su relación con algunas formas analíticas asociadas al variar algunos de sus parámetros, para mirar el comportamiento global tanto de la función compuesta, como de la familia de funciones resultantes; que permita relacionar la representación gráfica de una función compuesta con las funciones que la componen y explorar patrones en las familias de éstas y así poder predecir el comportamiento de una función cualquiera bajo este tipo de transformaciones.*

Palabras clave: transformaciones básicas, gráficas de funciones, contexto gráfico, función prototipo

Un acercamiento inicial a la problematica

Este tipo de problemas, por lo poco común, se convierten en una verdadera provocación al intelecto humano, ya que reviste gran interés para cualquier docente que ose abordarlo, entre otras cosas porque “no es común abordar cualquier concepto, sobre todo de cálculo sin hacer uso de su representación algebraica” (Amaya, 2003, p. 62); representación que con mayor frecuencia es usada como punto de partida para la enseñanza de esta rama de la matemática, y útil en el estudio de temas como el de función. En relación con este último concepto, Dolores (2004) señala que:

> *Poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional que precisa de procesos temporalmente prolongados, a juzgar por sus tiempos didácticos habituales. Supone, del dominio de la matemática básica y de los procesos de pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con los estilos del pensamiento prevariacional, como el algebraico (p. 97).*

Lo planteado por Dolores, es básico para este tipo de trabajo dado que éste requiere de la habilidad de análisis visual de la representación gráfica de una función para su análisis tanto local como global, lo que puede permitir profundizar en el entendimiento de este concepto.

En el desarrollo de esta actividad se discute cómo se transforma una función prototipo, de la cual conocemos su representación gráfica y no su representación algebraica. Esta surge en el desarrollo de un curso ordinario de cálculo en el último grado de bachillerato, tratando de indagar acerca de la familiaridad de los estudiantes con las relaciones funcionales. Como resultado de esta indagación aparecieron cosas interesantes como por ejemplo, que para los estudiantes la función valor absoluto es sólo $f(x) = |x|$, que en una función prototipo en el análisis gráfico, al tomar el valor absoluto a la variable independiente, unos confunden los valores de la función con los valores de la variable y otros cambian la posición de los valores negativos, considerándolos todos en el semieje positivo de las X; no conciben ningún análisis ni operaciones entre funciones sino es a través de su representación algebraica, entre otros; obstáculos que fueron muy comunes entre los estudiantes del grupo.

Condiciones para el aprendizaje de las matemáticas

La relación entre epistemología y didáctica en la enseñanza de las matemáticas es uno de los platos fuertes cuando se hacen consideraciones relacionadas con este tema. Piaget (1984, c.p Cordero, 1997) con su teoría de la equilibración predominante presentó una teoría coherente de la evolución del conocimiento en el cual:

> *El conocimiento pasaría de un estado a otro de equilibrio a través de un desequilibrio de transición, en el curso del cual las relaciones consideradas por el sujeto en el estado anterior estarían en contradicción, ya sea por la consideración de relaciones nuevas o por la tentativa, nueva también de coordinarlas. Esta fase de conflicto sería superada durante una fase de reorganización y de coordinación que llevaría a un nuevo estado de equilibrio" (p. 62).*

En este contexto adquieren mucha relevancia las situaciones problemas que se le presentan a los alumnos con el propósito de transformar el estado de sus representaciones y sus procedimientos y “las relaciones entre los diferentes planos de representación y los procedimientos que se derivan de estos” (Cordero, 1997, p. 57). Aunque aquí se mira la relación sólo entre el plano gráfico y el del lenguaje materno, y el transito es sólo al interior del sistema gráfico, al realizar las transformaciones solamente al interior de este último, esto podría estar generando las dificultades en los estudiantes al no estar acostumbrados a que se les presenten situaciones en este sistema de representación. Sin embargo Albert (1997), establece que “esta es, una alternativa para provocar en nuestros estudiantes ciertos obstáculos y para ayudarlos a superar” (p. 20) ; quien además considera el cálculo como “un dominio donde la actividad matemática se apoya en gran medida en las competencias algebraicas, donde se necesita de una ruptura con una cierta cantidad de prácticas algebraicas para acceder a él” (p. 23), lo que puede resultar problemático “al estar acostumbrados a razonar en lo posible por equivalencias sucesivas e intentar pasar a razonamientos por condiciones suficientes, ya provoca cierta incomodidad en los estudiantes” (Amaya, 2004, p. 197), es decir, se acostumbra trabajar haciendo equivalencias en el transito por diferentes planos de representación, y en este tipo de trabajo se presentan las gráficas de las funciones y se estudian características y tendencias apoyados en un análisis sobre todo visual, donde se tiene en cuenta el comportamiento global de estas para hacer el transito al interior de este sistema de representación y cumplir con los requerimientos que se tengan.

Así, se plantea una ruptura cognitiva en relación con ciertas prácticas algebraicas a que estamos acostumbrados; y que en cierta medida han sido consideradas necesarias para el dominio de muchos conceptos relacionados con el cálculo; se escogió el sistema gráfico por ser uno de los menos usados como medio para presentarles la información a los estudiantes en las situaciones que a menudo presentamos y además, porque según, Duval

(1999) "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación (...) y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (p. 25). El trabajo con situaciones, en un contexto gráfico, según Cordero (1997):

> *Tiene un estatus epistemológico y puede ser tratado como una categoría del conocimiento del cálculo. Y el sólo hecho de intentar resolver este tipo de problemas provoca una reflexión sobre los niveles de abstracción y sobre las bases del conocimiento del calculo (…) La dimensión epistemológica del comportamiento tendencial de las funciones, provee explicaciones sobre la naturaleza de este concepto en un contexto matemático. Lo que permite ver la función como una instrucción que organiza comportamientos, lo que permite estudiar familias de éstas y analizar el efecto de la variación en algunos de sus parámetros cuando se dejan los otros fijos o hacer un análisis al hacer una variación de varios de estos a la vez (p. 56, 58).*

Lo que lleva a pensar que aunque no se trabaja con situaciones problemas en el sentido de Brousseau, con estas se puede llegar a hacer un trabajo similar así el contexto netamente matemático obligue a hacer abstracciones mucho más fuertes, al tener menos elementos para relacionar y asignar sentido a los conceptos involucrados.

Algunas transformaciones básicas de las funciones

Al grupo de estudiantes se les planteó la siguiente situación: supóngase que de una función cualquiera se conoce su representación gráfica, pero no su representación algebraica; se les propuso realizar algunas transformaciones cuando variamos unos parámetros y dejamos fijos otros. Consideremos la función f(x), que se muestra en la figura 1, la que por razones de conveniencia llamaremos función de referencia.

1. **Realiza la gráfica de la función:** $\left| f(x) \right|$

Una transformación de esta función que conduzca a su valor absoluto, tiene que llevar a pensar que en la función valor absoluto, todos los valores son positivos, por lo que al aplicarle valor absoluto a nuestra función de referencia, se van a obtener sólo valores positivos en el rango de ésta; es como hacer una reflexión con un espejo colocado mirando hacía los valores negativos del eje Y (hacia abajo), mas el resto de la gráfica que queda por encima del eje X (que ya era positiva), o sea, que todos los valores del rango de la función van a quedar por encima del eje X, como se puede apreciar en la figura 2.

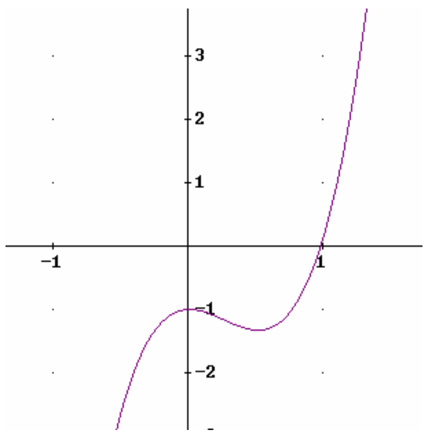


Figura 1. Función de referencia

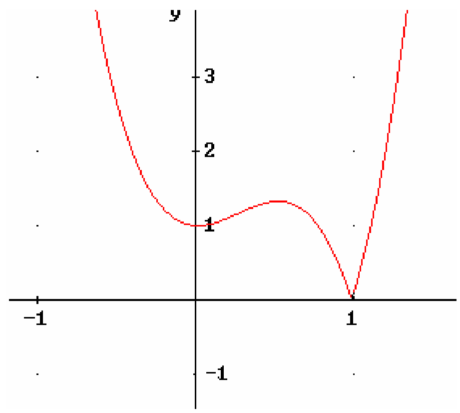


Figura 2.

A pesar de lo que pudiera esperarse a partir del análisis anterior, los estudiantes no conciben el valor absoluto de una función, y menos aún, la gráfica como representación de una función. Sin embargo algunos preguntaron ¿cuál es la función?, al indagar sobre la génesis de su pregunta, no fue difícil concluir que preguntaban por una representación algebraica de ésta. Unos pocos construyeron la gráfica de $|x|$, argumentando que esa es la función valor absoluto. Con los profesores de matemáticas en el intercambio con los compañeros de área, también se les compartió la misma actividad y realizaron la misma gráfica.

2. **Realizar la gráfica de** $f(|x|)$

El tomar el valor absoluto de los valores de la variable independiente “x” y luego encontrar los valores correspondientes de la función $f(|x|)$, requiere un nivel de abstracción mayor que en el caso anterior; Aquí tenemos que pensar en los resultados que se pueden obtener cuando todos los valores de la variable independiente son positivos, tanto los que están a la derecha como los que están a la izquierda del eje Y, entonces, la gráfica se obtiene al hacer una reflexión con un espejo, colocándolo sobre el eje Y, y mirando hacia los valores positivos del eje X, o sea, que los valores de la función van a ser imágenes de valores positivos de la variable independiente, independiente de la posición de los valores de esta, como se muestra en la figura 3.

Aquí no hubo muchas respuestas por parte de los estudiantes, pero un grupo defendió el hecho que al tomarse el valor absoluto de x, todos los valores de esta eran positivos, lo que debía llevar a una gráfica como la de la figura 4.

Cuando se compartió la solución ante el grupo, encontraron una justificación en la orientación de los valores negativos de x, que al aplicárseles el valor absoluto no cambian de posición, sólo funcionan como positivos como valores de la variable independiente, pero esto no los cambia de posición en el plano cartesiano.

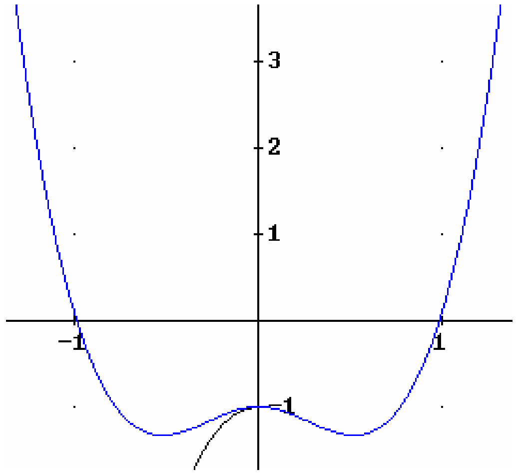


Figura 3.

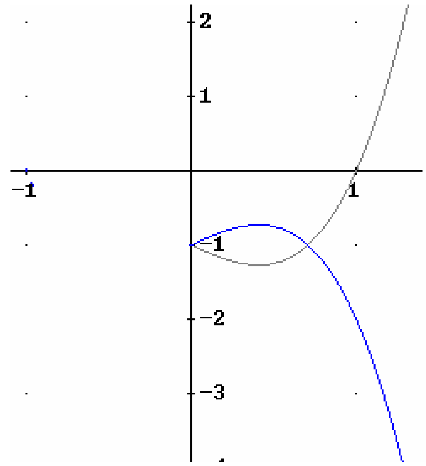


Figura 4.

3. **Realizar la gráfica de f (x) + a**

La función f **(x) + a** sugiere una familia de funciones; si **a** es un número positivo la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacía arriba y si **a** es un número negativo, la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacia abajo. En la figura 5 se pueden apreciar algunas gráficas para algunos valores de **a**.

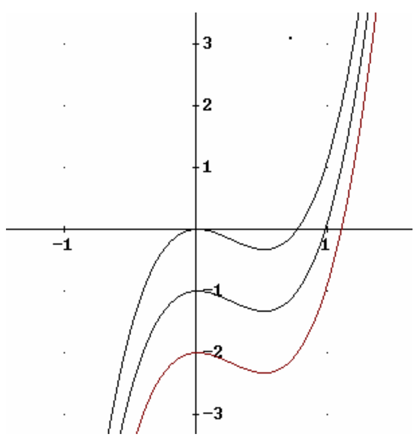


Figura 5.

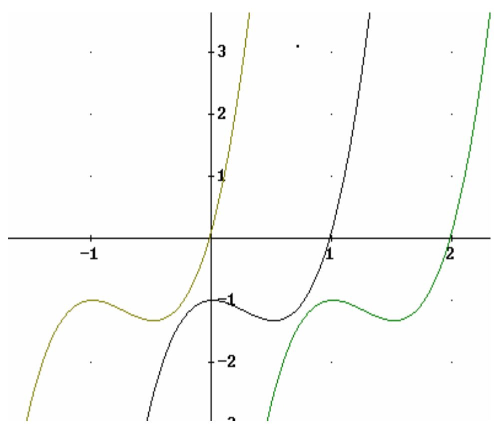


Figura 6.

En las respuestas que nos compartieron los estudiantes, no encontramos mayores dificultades, solo en un comienzo se confundieron, pero luego de varios intentos incoherentes, realizaron algunas gráficas. La mayor dificultad estuvo relacionada con el hecho de tener que asignarles arbitrariamente los valores a **a,** ahí vacilaron un rato preguntando cuales eran los valores de **a;** luego que alguno dijo que se podían tomar valores arbitrarios, los demás se siguieron por éste.

4. **Realizar la gráfica de** $f(x+a)$

La función f **(x + a)** también sugiere una familia de funciones; si **a** es un número positivo la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacía la izquierda y si **a** es un número negativo, la gráfica de f(x) se corre **a** unidades hacia la derecha. O si se quiere mirar desde otro punto de vista, si **a** es un número positivo, los ejes coordenados se corren **a** unidades hacía la derecha y si **a** es un número negativo, los ejes se corren **a** unidades hacia la izquierda, esto es, se corre el origen **a** unidades a la izquierda o a la derecha, dependiendo de si el signo de **a** es negativo o positivo. En la figura 6 se pueden apreciar algunas gráficas para algunos valores de **a**.

En el análisis realizado por los estudiantes, comenzaron asignándoles rápidamente los valores de **a,** e igual que en las gráficas anteriores consideraron, cuando le asignaron valores positivos a **a**, la gráfica la movieron para la derecha y cuando le asignaron valores negativos, movieron la gráfica hacia la izquierda. Cuando se les compartió la respuesta no admitieron que eso podía ser así y como ya se sentían con cierta autoridad para opinar sobre el tema, hubo que mostrarles un ejemplo utilizando el computador con el programa Derive. La situación con los profesores no cambió, la sesión de trabajo con estos se terminó en la sala de sistemas.

Referencias bibliográficas

Albert, A. (1997). *Introducción a la epistemología*. En Serie Antologías (pp. 1-28). México: Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados de IPN.

Amaya, T. (2003). Transformaciones básicas de las funciones: una experiencia de aula. P. R (presidente), *Memorias del quinto encuentro colombiano de matemática educativa*. (pp.62-63). Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Amaya, T. (2004). Un estudio del cambio y la variación a través de su representación gráfica*. R. F (presidente), Memorias de la décimo octava reunión latinoamericana de matemática educativa.* (pp. 197). Tuxtla: Universidad Autónoma de Chiapas.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. México: *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa*, 1 (1), 56-74.

Dolores., C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato, México: *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa, 7*(003), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Vega, M. Trad.). Cali, Colombia: Universidad del valle: grupo de educación matemática. (Trabajo original publicado en 1995).

ADQUISICIÓN DE LA NOCIÓN DE CANTIDAD: NIÑOS PREESCOLARES CON LENGUAJE LIMITADO

Ignacio Garnica y Dovala, Hilda Eneyda González Ortiz
Cinvestav. Matemática Educativa. IPN México
hgonzalez@cinvestav.mx, enegoo@yahoo.com.mx
Campo de investigación: : Percepción, cognición y/o lenguaje Nivel: Básico

Resumen. *La investigación tiene como campo de interés, la percepción, cognición y el lenguaje, de comunidades con percepción auditiva diferenciada, frente a situaciones que implican nociones matemáticas relacionadas con la cantidad. Fue preciso conocer las condiciones iniciales de los niños, establecer supuestos en relación a la producción y adquisición de nociones matemáticas, integrando a la docente en un proceso de indagación. Con estos elementos se realizaron entrevistas preclínicas y clínicas. Se puso énfasis en conteo, agregación y seriación, al tiempo que se consideraron los elementos cognitivos: memoria, atención y acciones sobre los objetos. Obteniendo resultados positivos en: el conteo de colecciones mayores a veinte objetos y menores de treinta; la relación de correspondencia entre colecciones; la agregación de dos, tres y hasta cuatro colecciones.*

Palabras clave: noción, cantidad, cognición, audición diferenciada

Antecedentes

La investigación se realizó en El Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje (IMAL); institución de carácter privado, con reconocimiento internacional en implante coclear. Nace bajo la filosofía del oralismo; siendo su objetivo fundamental generar las condiciones para la adquisición del sistema lingüístico y el desarrollo de la producción oral.

Pregunta de investigación

¿Qué caracteriza a los procesos cognitivos relacionados con las nociones de cantidad, implícitas en actividades dentro del aula, cuando la percepción auditiva no es completa?

Objetivo

Reconocer la expresión: oral y escrita; de los niños que producen conocimiento matemático, dentro del aula, ante su condición de un déficit de audición y las formas en las que se expresa el pensamiento matemático, en nociones de cantidad.

Marco teórico

Los criterios de análisis de los acontecimientos en el aula se desprenden de trabajos relativos a la estructura y evolución del pensamiento del niño. Vygotsky, (2003), mediante una serie de observaciones y experiencias convincentes mostró que los procesos psíquicos se forman durante el desarrollo del niño, bajo la influencia de su educación, gracias a su contacto con los adultos y a la asimilación de la experiencia acumulada por la humanidad. (Piaget, 1978), explica que todos los organismos nacen con la capacidad de ajustar sus estructuras mentales o conductas a las exigencias del ambiente, utilizó los términos de *asimilación y acomodación* para describir como se adapta el niño al entorno, sostuvo que los niños no adquieren un verdadero *concepto del número* antes de la etapa de las operaciones concretas, cuando comienzan a entender las relaciones seriales y jerárquicas.

Sin entrar en un análisis detallado de las formas de comunicación se estudiaron generalidades sobre el lenguaje por la importancia en la adquisición y desarrollo de los conocimientos. En general se consideran normales los niveles auditivos para el lenguaje de 0 a 25 dB. El estado que se conoce como “debilidad auditiva” comienza a los 27 dB y la “sordera” a los 93 dB. En términos de niveles de audición encontramos una zona de incertidumbre de los 70 a los 90 dB promediada sobre las frecuencias de 500, 1000 y 2000 Hz. Dentro de esta zona algunos individuos son socialmente sordos, pero la mayoría de ellos tienen sólo una pronunciada debilidad auditiva, misma que puede ser altamente superada con el uso de auxiliares auditivos.

Escenario de investigación

El problema principal al que se enfrentan las personas que padecen sordera, en el sistema educativo nacional de nuestro país, es la falta de una política de planeación educativa que resuelva a través de las instituciones de educación especial las necesidades de los ciudadanos con este problema. Para el desarrollo de esta investigación, es necesario disponer de condiciones que permitan observar el quehacer del alumno, en un ambiente escolarizado. La *investigación en curso* se desarrolla en el Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje (IMAL) institución que nace bajo la filosofía del oralismo, tiene como propósito fundamental: propiciar las condiciones para generar acciones dirigidas a la integración educativa y social frente a este déficit sensorial, y apoyar el devenir vital de niños sordos o débiles auditivos.

La investigación se realizó con cinco alumnos, del IMAL, de 3º grado de preescolar. Cada alumno presenta características propias de percepción auditiva *diferenciada* (Garnica 2006 b) en cuanto al grado de afectación de la función auditiva, las que establecen diferentes manifestaciones: del pensamiento matemático, del lenguaje, del desarrollo cognitivo y de la personalidad en general.

El método queda definido por el órgano operativo de la investigación en curso."Sistema IMAL" fig. 1. (Ojeda, 2006).

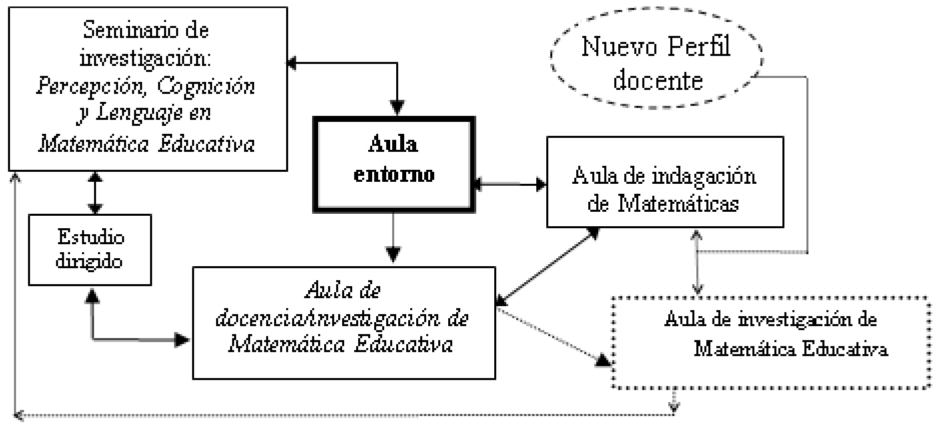


Figura 1. Órgano operativo de la *investigación en curso*. Sistema IMAL.

El espacio denominado *aula docencia/investigación,* se propone intercambiar experiencias con la docencia, la cual está inmersa en un proceso de indagación. Con este enfoque la docente planea mensualmente las tareas a desarrollar en el aula, por los alumnos, considerando el requerimiento institucional. El "*estudio dirigido*" se convierte en un órgano de reflexión conjunta pertinente al seminario que pone en juego las ideas de la indagación y la investigación en curso y que permiten el acercamiento a los objetivos planteados. De esta manera por ser en "*curso*" la "*investigación*" precisa sus términos hacia la consolidación de una respuesta a la pregunta planteada.

La investigación, dirigida por la pregunta, se incorpora al proceso de enseñanza en el aula, interviene y lo modifica a través de un proceso de indagación que inicia con la docente, estos cambios repercuten en factores que inciden en el aula: padres de familia, autoridades, personal docente de la institución y estudiantes en formación. La labor docente es compleja, las acciones realizadas en el aula reflejan la influencia de estos factores externos; para entenderla es necesario tenerlos presentes, dimensionarlos y actuar en consecuencia.

Resultados de los periodos: Preclínico y Clínico

Las entrevistas preclínicas se diseñaron con los resultados obtenidos del primer año de trabajo de investigación, en donde se precisaron las tareas a realizar por los alumnos con base en los supuestos planteados una vez analizados los resultados. Durante este periodo preclínico se entrevistó al alumno individual y colectivamente, se comentaron los resultados en el espacio de *indagación/investigación*, y se programaron las tareas propias de la entrevista clínica, donde cada respuesta dio lugar a nuevos supuestos, al planteamiento de nuevas interrogantes que dieron elementos para dar respuesta a la pregunta de investigación.

Periodo preclínico

Se intensificó el esfuerzo por reconocer las formas de conteo. Se propuso un trabajo con "colecciones" (Fuson, 1983) apoyada en las nociones de *mucho, poco, igual,* (formar colecciones de dos, tres, cuatro, cinco y hasta doce, elementos y distinguirlas a la percepción visual por la cantidad). Los alumnos reconocieron las colecciones de dos elementos y las llamaron *par*, de la misma manera la colección de doce, *docena* y la de diez, *decena*. Se sugirió un conteo de dos en dos, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco y de diez en diez. Gradualmente reconocieron una colección por la cantidad de objetos, agudizando su percepción visual.

El contenido matemático de las actividades propuestas a los alumnos en este estudio se centró en el núcleo conceptual: *Operaciones numéricas*. Se presenta el resultado de una actividad referente a noción de cantidad. La indicación fue: "tacha la colección que tiene más objetos"

2b

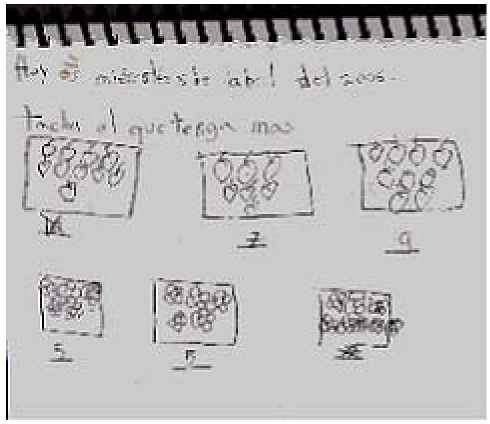


Figura 2. Noción de cantidad. Relaciones entre el numeral y los elementos de la colección.

El alumno tacha el numeral que colocó debajo de la colección. Fue necesario diseñar actividades que evidenciaran lo que representa para el alumno el numeral, los objetos de la colección y que relación establece con la cantidad.

Fueron evidentes las estrategias utilizadas por los alumnos, algunas de ellas: el orden de los objetos en una colección, el conteo por pares, la atención en la cantidad para determinar cuál de ellas tenía "más" o "menos" objetos. Estas estrategias favorecieron los procesos de clasificación (las distingue por la cantidad de elementos) y seriación (las ordena de mayor a menor o de menor a mayor).

Durante este periodo se presentaron dificultades lingüísticas como en el caso del determinante *"más",* el cual sugería al alumno agregación. Ante dos colecciones: una de tres objetos y otra de cuatro, por ejemplo, la respuesta a la pregunta ¿Dónde hay más? la respuesta fue *ocho*. Respuesta que se observó en tareas desarrolladas en el aula.

Se diseñó una entrevista preclínica donde el determinante *más* sugiriera comparación, utilizando cantidades continuas como el *peso*. Se utilizaron materiales de diferente peso y tamaño procurando que los objetos de mayor tamaño no siempre fueran los de mayor peso, y que hubiera objetos de igual peso. Se formularon preguntas con el determinante *más* procurando que éste ocupara diferente lugar en el enunciado, por ejemplo: ¿cuál pesa *más*?, ¿cuál es el *más* pesado?, ¿el *más* pesado es?, ¿éste es el *más* pesado?, dame el *más* pesado. Se compararon objetos de diferente tamaño y peso, centrando siempre la atención en el peso. Al final de la entrevista, el alumno ordenó los objetos del mayor a menor por su peso, además de distinguir aquéllos que pesaban lo mismo. El tamaño del objeto no distrajo la atención centrada en el peso, una vez que distinguió los objetos más pesado, no fue necesario tomarlos para señalar el más pesado o el menos pesado.

Periodo Clínico

La programación de tareas durante el periodo clínico, se estructuró básicamente, bajo el perfil de la entrevista, considerando aspectos conceptuales matemáticos relacionados con la noción de cantidad, vinculados con la percepción: visual táctil, auditiva, cenestésica; teniendo presentes los procesos de cognición: atención, memoria y la representación (acción sobre los objetos).

Durante la entrevista los elementos de comunicación, para obtener información, se integraron a la tarea, se variaron los objetos para evitar la fijación en cualidades propias de ellos: forma, color, tamaño. Trabajando con cantidades continuas y discretas, favoreciendo la comunicación del contenido matemático.

La comparación de la cantidad de elementos de una colección con respecto a otra y la noción de relación. “Consciente o inconsciente asociamos, comparamos, clasificamos y evaluamos, al hacerlo, pensamos o hablamos de objetos a la luz de las *relaciones* que guardan con otros objetos” Peterson, (1999) “La noción de relación es una noción absolutamente general. El conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y en organizarlas en sistemas” (Vergnaud, 1998). Al comparar dos colecciones el alumno relaciona los elementos de ambas colecciones. “La propiedad común *cuatro* de todos los conjuntos que tienen cuatro elementos se basa fundamentalmente, para el niño en la posibilidad que tiene de hacer corresponder término a término, dos conjuntos cualesquiera de cuatro elementos” (Vergnaud, 1998).

En la tarea propuesta por la enseñanza, se indica a los alumnos que relacionen una colección de niños con una de vagones de tren. Bajo el siguiente planteamiento: *Ingrid tiene un tren de cinco vagones y tiene cinco alumnos. ¿Cómo puede Ingrid subir a sus alumnos?* La *figura 3* muestra la expresión escrita de *G* como respuesta al planteamiento anterior.

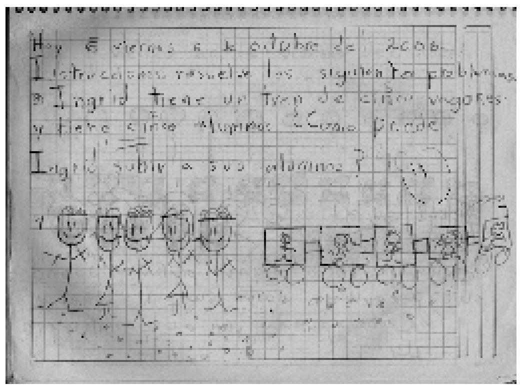


Figura 3. Noción de relación

G por medio de una secuencia de puntos, (estas sucesiones se diferencian por su color), ilustra la posible relación entre los elementos de una colección de cinco niños y otra de cinco vagones. Esta noción de relación entre objetos de diferentes colecciones, permitirá el desarrollo de nociones de equivalencia y de orden.

Esta misma actividad se modificó y ahora se propuso con cinco alumnos y cuatro vagones. Se presenta la respuesta de *M* (*véase figura 4*).

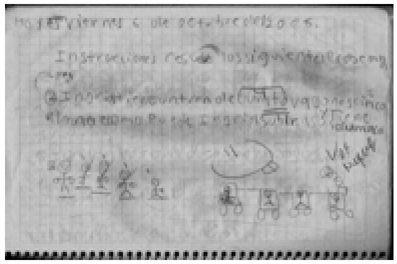
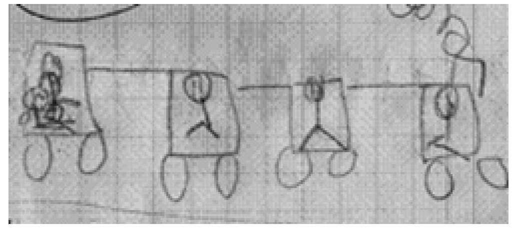
4a  *4b* 

Figura. 4. Noción de relación.

La *figura 4a* muestra unas líneas trazadas por el alumno debajo de cada uno de los dibujos que representan a los cinco alumnos de la tarea planteada, al parecer son trazos que apoyaron la *noción de relación* entre los elementos de la colección de alumnos con la de vagones, lo mismo se puede considerar al observar las líneas que trazó *M* arriba de la cabeza de cada uno de los alumnos dibujados, cabe destacar el círculo que rodea al quinto elemento de la colección de alumnos (de izquierda a derecha) mismo que sugiere representar uno de los dos alumnos que colocó en el primer vagón del tren dibujado, *(véase figura 4b).* Como se puede apreciar los alumnos dan estrategias propias, que permiten observar sus nociones de relación.

Las tareas de agregación propuestas se realizaron con materiales concretos, para formar colecciones. "Las operaciones sobre los objetos consisten esencialmente en agrupar los objetos en una misma región para formar una colección." (Vergnaud, 1998). Se entenderá por "agregación" a la acción de agrupar en una misma colección. Una operación de agregación se analiza en términos de tránsito del plano de los objetos al plano de las colecciones.

Un ejemplo de este tipo de actividades se muestra en la siguiente *figura 5.*

Figura 5. Agregación.

El planteamiento fue: *Pepe tiene cinco canicas en una bolsa. Su papá le regalo tres canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pepe ahora.* Éste se presentó dibujando los datos y además dramatizando la situación con materiales concretos, con el propósito de asegurar que el contexto planteado era claro para los alumnos. La expresión escrita de los alumnos fue diferente. *G* expresó su respuesta como se muestra en la *figura 5*; dibujó la bolsa y dentro las canicas que representan las dos colecciones separándolas por medio de una línea, la línea puede sugerir un proceso de *agregación*.

Para observar el desarrollo de nociones matemáticas, específicamente de la noción de cantidad, ante la ausencia auditiva, se implementaron tareas que permitieron ver los avances cognitivos de los alumnos. Las acciones sobre los objetos, permitieron determinar el tipo de representación que el alumno considera ante la tarea planteada. La secuencia libre de sus acciones dio información de sus procesos cognitivos. Los resultados son evidencias positivas relacionadas con los procesos cognitivos pertinentes a la adquisición de las nociones de *conteo* (colecciones de cantidad de objetos mayor de veinte); *distinción por percepción visual de colecciones de hasta doce objetos, nominación de colecciones por su cantidad de objetos* (par, decena, docena); *de la relación de correspondencia* (respuestas correctas ante la comparación de cantidades de colecciones); *de la memoria de trabajo* (retención, ante el proceso de solución de la tarea, de cantidades de objetos de dos y tres colecciones); *de la agregación de cantidades* como consecuencia del desarrollo positivo de las tareas.

Referencias bibliográficas

Fuson, K. (1983). The Development of Mathematical Thinking. *En The Acquisition of Early Number. Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review*. Compilado por Herbert P. Ginsburg.. New York. Academic Press

Garnica, I. (2006 b). *Memoria del seminario de estudios sobre el Conocimiento Matemático ante la privación auditiva y la expresión lingüística limitada.* Reunión organizada los días 21 y 28 de junio del 2006 por los colaboradores del Cinvestav en el IMAL. (En prensa).

Ojeda, A. (2006). *Estudios sobre el conocimiento matemático ante la percepción y el lenguaje* Introducción a la lógica de los programas de indagación, investigación y docencia en el aula de Matemática Educativa. En Memoria del Seminario. (IMAL-Área de Ciencias de la Cognición, DME-Cinvestav del IPN. México.

Piaget, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático* Buenos Aires. Paidos

Peterson, J. (1999). *Teoría de la Aritmética.*. México. Limusa

Vergnaud, G. (1998). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Editorial Trillas.

Vygotsky, L. (2003). *Pensamiento y Lenguaje.* Ediciones Quinto Sol. México.

DIFICULTADES PARA EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA DISCRETA

Mónica del Sastre, Erica Panella
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. UNR - Facultad Regional Rosario. UTN Argentina
delsas@fceia.unr.edu.ar, panella@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Obstáculos para el aprendizaje Nivel: Superior

Resumen. *A través de nuestra experiencia como docentes de Matemática Discreta (asignatura del primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información), entendemos que el desarrollo del curso genera, en muchos casos, dificultades que se constituyen en verdaderos obstáculos para el aprendizaje manifestándose en forma de errores. Advertir esta situación nos orientó hacia el conocimiento y análisis de los distintos tipos de errores detectados en los exámenes de la asignatura, y a la reflexión sobre las posibles causas de su aparición, con la intención de propiciar una enseñanza facilitadora del aprendizaje. En este trabajo exhibimos los datos surgidos del relevamiento realizado sobre el número de exámenes aprobados y sobre los errores detectados en las evaluaciones finales*.

Palabras claves: Dificultades en el aprendizaje, obstáculos, errores.

Introducción

Matemática Discreta corresponde al primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Facultad Regional Rosario (Universidad Tecnológica Nacional). Su dictado es anual y con una carga horaria semanal de tres horas cátedra (dos horas y cuarto reloj). Está a cargo de dos profesores por comisión. Uno de ellos se ocupa de la parte teórica y el otro de la parte práctica, en la que se aplica la metodología de aula taller (esto es posible, dado que el número de alumnos por comisión es inferior a treinta).

En el primer año hay otras tres materias anuales con mayor carga horaria y dos asignaturas cuatrimestrales.

Según datos (suministrados por Alumnado) correspondientes a los diez llamados a examen inmediato posteriores a la finalización del año lectivo, es decir las mesas de noviembre-diciembre, febrero-marzo, mayo y julio, encontramos que el porcentaje de alumnos aprobados en Matemática Discreta (48%) es significativamente menor que en algunas otras asignaturas, como por ejemplo Algoritmo y Estructura de Datos (80 %) o Análisis Matemático I (60%).

Este hecho reafirma lo que nuestra experiencia como docentes de la asignatura nos muestra a diario: Matemática Discreta genera muchas dificultades para su aprendizaje en estudiantes que recién se inician en la carrera y se enfrentan con contenidos abstractos que deben asimilar con bastante rapidez (dada la variedad de temas que abarca la asignatura) y sin poseer un entrenamiento adecuado en el del lenguaje y/o procedimientos formales y generales de la Matemática.

Advertir esta situación nos llevó a constituir un grupo de estudio dirigido al conocimiento y análisis de los distintos tipos de errores detectados en los exámenes de la asignatura y a la reflexión sobre las posibles causas de su aparición, con la intención de propiciar una enseñanza facilitadora del aprendizaje.

En este trabajo, y en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo (PID) de la Universidad Nacional de Rosario: “Dificultades en el aprendizaje de la Matemática Básica en Carreras de Ingeniería” dirigido por la Profesora Martha Guzmán, exhibimos los datos surgidos del relevamiento realizado sobre los errores detectados en las evaluaciones finales. La búsqueda estuvo orientada a descubrir “patrones de error” que nos permitieran identificar los errores más comunes y sus grados de repetición, y el análisis integral de todos estos datos fue realizado con el fin de formalizar un diagnóstico de la situación como primer paso de nuestra investigación.

Encuadre Teórico

Como afirma Socas (1997), las dificultades en el aprendizaje de la Matemática son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de la Matemática, que se manifiesta en sus simbolismos y en los procesos de pensamiento, pasando por el desarrollo cognitivo de los alumnos, así como por sus actitudes afectivas y emocionales. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculo y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

No debe entenderse al error únicamente como resultado de la falta de un conocimiento o una distracción, sino que debe ser considerado como evidencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, aún cuando sus orígenes puedan ser diferentes.

El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado, constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Es precisamente la regularidad con que aparecen ciertos errores lo que ha permitido elaborar clasificaciones de los mismos. Las categorías no son compartimentos estancos, y suelen solaparse unas con otras (ya que rara vez un error obedece a una única causa) pero permiten postular posibles razones para su aparición, y guiar, de ese modo, en la elección de actividades remediales.

Varios autores han elaborado clasificaciones de los errores en el aprendizaje de la Matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse. Entre ellos, Radatz (1980, c.p. Rico, 1995) expone la siguiente:

- *errores debidos a dificultades en el lenguaje*: se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático.
- *errores debidos a dificultades para obtener información espacial:* aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.

• *errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos:* son los cometidos por deficiencias en el manejo de algoritmos, hechos básicos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos.

• *errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento:* son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas; comprenden los errores por perseveración, los errores de asociación, los errores de interferencia, los errores de asimilación.

• *errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*: son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Además, a lo largo de los estudios de investigación en Educación Matemática podemos encontrar gran variedad de métodos para el estudio de los errores en Matemática. Mulhern (1989) los agrupa en cuatro categorías:

- Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas.
- Análisis de los tipos de errores cometidos.
- Análisis de patrones de error.
- Construcción de problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos

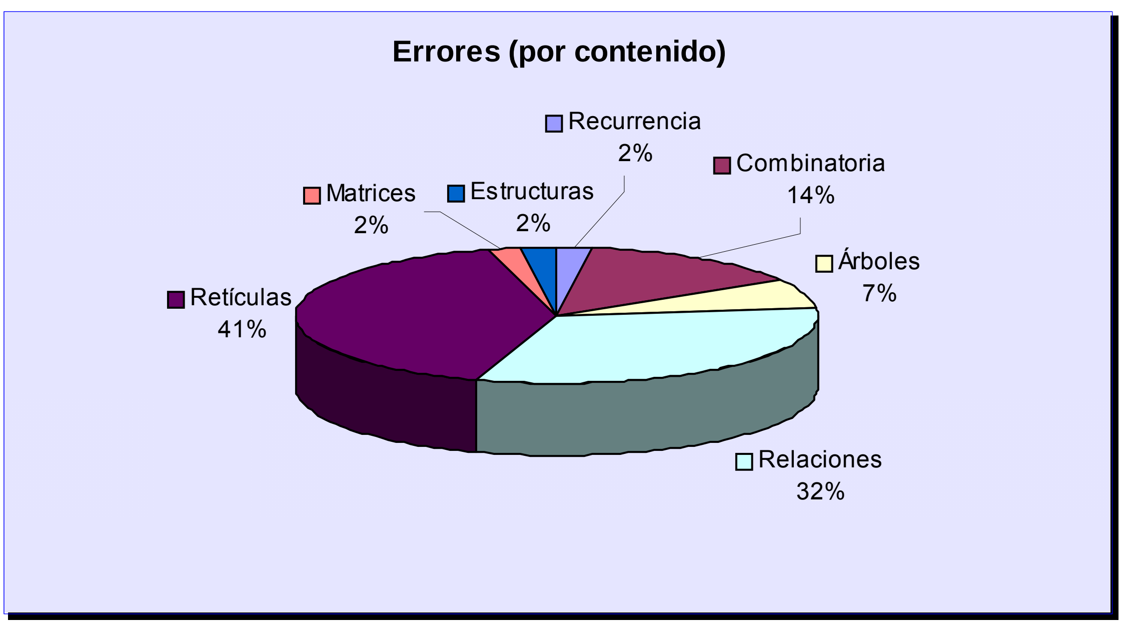
Para nuestro análisis elegimos encuadrarnos en la segunda y tercera de estas categorías, clasificando en distintos tipos los errores cometidos por los alumnos y al mismo tiempo tratando de identificar patrones de error. Además, ante la aparición de cada error nos impusimos la reflexión sobre los factores que pueden haber conducido a los mismos, en particular la incidencia de nuestra propia práctica docente.

Desarrollo

De una muestra de 80 evaluaciones finales (escritas y de carácter práctico) correspondientes a los últimos cuatro llamados a examen, resultó el siguiente conteo de errores por contenido:

Contenido	***Cantidad de errores***
Relaciones de recurrencia	5
Análisis combinatorio	31
Árboles	15
Relaciones	70
Retículas	90
Matrices	4
Estructuras algebraicas	5
Total	220

Para una mejor visualización de los resultados se muestra el gráfico de torta correspondiente:



Elegimos pormenorizar el conteo, la descripción y el análisis de los errores referidos a Retículas, Relaciones y Análisis combinatorio, por ser éstos los más frecuentes.

Retículas:

Error	***Cantidad***
Incorrecta determinación de complementos.	20
Confusión al exhibir conjuntos de cotas superiores y/o inferiores.	19
Imprecisiones en la confección de un Diagrama de Hasse.	4
Errónea identificación de subretículas.	14
Incorrecta determinación de maximales y/o minimales	8
Aplicación inadecuada de las reglas necesarias para operar en un álgebra de Boole.	17
Utilización del hecho de que la cantidad de vértices es igual a 2^n (n entero) para afirmar que una retícula es álgebra de Boole; es decir, se malinterpreta el único sentido de la implicancia en el enunciado de un teorema.	8

Relaciones:

Error	***Cantidad***
Imposibilidad de aplicar la definición de una propiedad para verificar su cumplimiento en el caso puntual de una relación dada.	31
Inadecuada manipulación de las relaciones: fallas en el cálculo de composiciones, complementos, inversas, etc.).	12
No determinación del conjunto cociente.	11
Falta de asociación entre una relación de equivalencia y una determinada partición.	2
Cálculo erróneo de matrices de nuevas relaciones a partir de las matrices de relaciones dadas.	4
Imprecisiones en la confección del dígrafo de una relación.	1
Incorrecta determinación de conjuntos relativos.	9

Análisis combinatorio:

Error	***Cantidad***
Intentos de resolución de un problema mediante la aplicación mecánica de fórmulas sin una previa interpretación del enunciado correspondiente.	26
Confusión al decidir si un subconjunto es ordenado o no, y/o si admite la repetición de sus elementos.	5

Además, en los exámenes revisados aparecen errores más generales. Encontramos que muchos de los alumnos:

- Utilizan ejemplos como demostración del cumplimiento de propiedades.
- Realizan operaciones en conjuntos en donde no han sido definidas.
- Abusan del uso de los símbolos matemáticos.
- No fundamentan, o lo hacen incorrectamente, la validez o falsedad de una proposición.

Reflexión y líneas futuras

El mayor porcentaje de errores se encuentra en relación directa con los contenidos y procedimientos matemáticos que exigen mayor abstracción y formalización por parte de los alumnos.

Así, por ejemplo en el tema *Relaciones*, notamos cómo los errores de tipo conceptual se combinan con deficiencias en el uso del lenguaje simbólico cuando se trata de verificar el cumplimiento de propiedades tales como reflexividad, irreflexividad, simetría, transitividad, asimetría o antisimetría. Esta prueba exige una gran capacidad de abstracción y generalización, manejo preciso del lenguaje simbólico y capacidad de aplicar las definiciones generales de las propiedades a las relaciones particulares. Muchos de nuestros alumnos poseen serias falencias en estos aspectos y las 2,15 hs semanales de clase durante un año no alcanzan para salvarlas. Estos estudiantes recién egresados de la escuela secundaria se enfrentan a un lenguaje formal casi por primera vez, pues en su formación anterior prácticamente se omiten las demostraciones y los profesores optan en muchos casos por "simplificar" el lenguaje restándole rigurosidad y sumándole ambigüedad. El ser Matemática Discreta una asignatura de primer año y con, creemos, insuficiente carga horaria es un obstáculo a la hora de tratar esta situación.

En el tema *Retículas* también se observan mayormente errores de tipo conceptual. En el caso en particular de este tema (correspondiente a la última unidad del programa de la asignatura) consideramos determinante el hecho de que en el 80% de los casos su estudio quede totalmente a cargo de los alumnos por insuficiencia en el tiempo de cursado.

Si bien los errores de interpretación se evidencian en el tratamiento de casi todos los contenidos, es notable su aparición en *Análisis combinatorio*, en donde se trata mayormente de resolver problemas, es decir "leer e interpretar un enunciado y diseñar y poner en práctica estrategias de solución".

Luego, teniendo en cuenta este trabajo, creemos indispensable:

- Continuar con la detección y análisis de los distintos tipos de error.
- Diseñar propuestas didácticas superadoras de la situación planteada tomando como eje el trabajo sobre los errores más frecuentes detectados en esta primera etapa.
- Revisar nuevas bibliografías considerando la posibilidad de elaborar un material de estudio propio de la cátedra.
- Evaluar oportunamente la implementación de tales propuestas.
- Mantener un espacio de diálogo entre los profesores de la cátedra que garantice la retroalimentación de estos resultados y posibilite el planteo de nuevas necesidades y la emergencia de propuestas oportunas.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1973). *Epistemología.* Barcelona: Anagrama.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et la Didactique des Mathématiques*. (vol 4, pp. 165-198). Francia.

Guzmán,M.,Pérez,M. (2006,Octubre). *Detección de dificultades en el curso de Matemática para ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-U.N.R.* En XIII Encuentro Nacional y V Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería - EMCI. Universidad Nacional de Misiones, Misiones, Argentina.

Mulhern, G. (1989). *Between the ears: Making inferences about internal processes.* En Greer, B. & Mulhern G. (Eds.). New Directions in mathematics Education. Londres: Routledge.

Radatz, H. (1980). Student's errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics 1.1*, 16-20.

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas.* En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. (cap. 5, pp. 125- 154, en Rico, L., y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Categoría 2

El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

PROGRAMA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LÍNEA DEL CICATA-IPN

Elizabeth Mariscal*, Alejandro Miguel Rosas* y Mario Sánchez*/**
*CICATA-IPN México
**Roskilde University Dinamarca
elimariscal@gmail.com
Campo de investigación: Educación a distancia, Nivel educativo Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se presenta una descripción general del origen y objetivos del Programa de Matemática Educativa en línea (PROME) del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN). El escrito describe sucintamente el perfil de los estudiantes adscritos al PROME. De manera general se enuncian los objetivos del Programa y las líneas de investigación que ahí se desarrollan. El artículo cierra con una reflexión sobre los retos que el PROME, como programa joven y en desarrollo, enfrenta y enfrentará en los próximos años.*

Palabras clave: Educación a distancia, formación de profesores en servicio, matemática educativa

Origen del programa

En enero de 2001, el Instituto Politécnico Nacional (IPN) en México, inició las actividades académicas de dos nuevos programas de postgrado en la modalidad en línea (El término "en línea" es una traducción de la expresión en inglés *online*. En este caso el término "en línea" se utiliza para denotar que la mayor parte de la comunicación e interacción que se lleva a cabo durante el desarrollo de los estudios de Maestría y Doctorado, se efectúa a través de herramientas y sistemas basados en el uso de Internet). Esos programas son la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa y el Doctorado en Matemática Educativa que se ofrecen en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA-IPN, Unidad Legaría) bajo el nombre de Programa de Matemática Educativa (PROME). Información más detallada sobre este Programa de Matemática Educativa puede ser encontrada en: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/.

En un inicio este programa fue diseñado con el propósito de atender aquel sector de la sociedad mexicana integrado por profesores de matemáticas que deseaban continuar cursando estudios superiores o de especialización relacionados con su labor como docentes de matemáticas, pero que por diferentes motivos (laborales, personales, económicos, geográficos, institucionales) no les era posible cumplir con los requerimientos para acceder a los programas de postgrado y especialización que otras Universidades y Centros de Investigación mexicanos ofrecen.

Diferente a esta perspectiva geográfica-social fue la respuesta que recibió el PROME al lanzar su primer convocatoria de ingreso al Programa: no sólo recibiendo solicitudes de ingreso de diferentes regiones de la República Mexicana, sino también de profesores residentes en otros países latinoamericanos. Así, desde su fundación a la fecha, el PROME atiende y ha atendido a profesores de matemáticas originarios de países como Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Perú, Uruguay, Venezuela e inclusive Italia (ver figura 1).

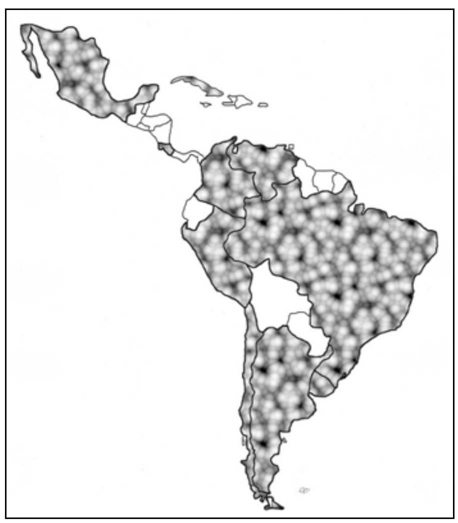


Figura 1. En el mapa se encuentran sombreados algunos de los países de origen de los estudiantes del PROME del CICATA-IPN

Estudiantes del PROME

Además de las diferencias culturales y geográficas que presentan cada uno de los profesores inscritos en el Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN, los profesores también provienen de diferentes contextos laborales, es decir, trabajan en diferentes niveles educativos (básico, medio y superior). Un requisito importante que preferentemente deben cumplir los profesores aspirantes a algún programa del PROME es ser profesores de matemáticas en activo. Este requisito nos permite garantizar, de alguna manera, que los profesores poseen un cúmulo de experiencia que les facilite identificar problemas didácticos para su posterior estudio en el contexto del PROME. La experiencia laboral de estos profesores puede ser diferente, variando de profesores “novatos” con un par de años de experiencia, a profesores con más de una década de experiencia frente a grupo.

La formación matemática previa de los profesores también fluctúa; desde profesores que poseen un entrenamiento básico en aritmética, geometría y álgebra, hasta profesores con conocimientos más amplios en áreas como análisis matemático, ecuaciones diferenciales y álgebra abstracta. Un dato no menos importante es que las edades de los profesores participantes en el PROME pueden variar entre 25 y 50 años.

En suma, todas estas características producen un interesante y único lugar de estudio, conformado por un grupo de profesores de matemáticas heterogéneo y comprometido. Hasta el momento son 82 estudiantes de maestría (33 graduados y 16 escribiendo su tesis de grado) y 51 estudiantes de doctorado (15 graduados y 20 escribiendo su tesis de grado) los que han y están realizando sus estudios en el PROME.

Aunque en México aún no están bien establecidos y generalizados los estándares para valorar la calidad de los postgrados y estudios realizados completamente en línea, una manera medianamente objetiva de medir la calidad de este tipo de estudios sería mediante la identificación y valoración de los reconocimientos y logros de sus egresados, en las áreas para las que fueron capacitados. En el caso del PROME, es relevante mencionar que algunos de sus graduados actualmente son miembros del Sistema Nacional de Investigadores de México y han realizado proyectos de investigación con fondos proporcionados por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México.

Objetivos y funcionamiento del PROME

Aunque los objetivos que persiguen el programa de Maestría y el programa de Doctorado pueden ser muy diferentes, en general, podemos afirmar que el Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN tiene los siguientes propósitos:

- Que los profesores sean conscientes de la existencia de un cuerpo de conocimiento didáctico (teorías) que pueden ser útiles para analizar, entender y eventualmente mejorar la práctica de la enseñanza de las matemáticas.
- Favorecer el análisis por parte de los profesores, de los escenarios socioculturales donde se producen los procesos de aprendizaje de las matemáticas.
- Permitir a los profesores analizar y reflexionar sobre situaciones de enseñanza de las matemáticas (incluyendo las de su propia práctica), así como analizar y prever las consecuencias de las (sus) decisiones didácticas.
- Hacer conscientes a los profesores de sus concepciones matemáticas y pedagógicas, y apoyar un adecuado desarrollo de esas concepciones.

Es posible conceptualizar los anteriores objetivos como parte de un proceso de enculturación en el que se busca introducir a los profesores al campo de la matemática educativa; una introducción a sus teorías, a sus preguntas, a sus métodos, y a sus resultados y alcances.

Con la finalidad de alcanzar los objetivos anteriormente mencionados, en el PROME se diseñan cursos con diferentes contenidos matemáticos y didácticos. Aunque algunos de los tópicos que se presentan en estos cursos son recurrentes (uso de tecnología, epistemología, estudios cognitivos, transposición didáctica, etc.), el contenido de los cursos no está fijo. El contenido cambia debido a dos razones principales:

- Primero, el diseño y el contenido del curso dependen del educador (o educadores) responsable(s) del curso. Frecuentemente los cursos están basados en la experiencia de investigación o los intereses del educador a cargo del curso.
- Segundo, los cursos están en un proceso de constante evolución; nuevas aproximaciones teóricas y nuevos resultados de investigación son tomados en cuenta cuando se diseña un curso. Por ejemplo, el contenido de un curso sobre el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas no puede ser igual hoy que hace tres años. Las condiciones de relativa libertad en el diseño y desarrollo de los cursos constituyen un fructífero milieu para los educadores matemáticos del PROME.

Herramientas y plataformas tecnológicas

La naturaleza de estos cursos basados en el uso de Internet exigen la aplicación y uso de un número de herramientas que pueden contribuir a la constitución de ambientes de aprendizaje y reflexión; por ejemplo: herramientas de comunicación sincrónicas y asincrónicas, diferentes tipos de archivos (audio, video, texto e imágenes), software matemático y no matemático, blogs, podcasts, páginas wiki, entre otros.

Los cursos junto con algunas de las herramientas previamente mencionadas son colocados en plataformas de trabajo colaborativo en Internet. Desde su fundación, el PROME había utilizado diferentes plataformas como BSCW y Blackboard; y a mediados del año 2007, debido a una decisión institucional, se inició con el uso de la plataforma Moodle (ver figura 2).

Figura 2. Página principal de uno de los cursos de Maestría del PROME en la plataforma de trabajo colaborativo Moodle

Obtención del grado y líneas de investigación

Un requisito para obtener el grado de Maestría o Doctorado es el desarrollo y defensa en forma presencial de una tesis de investigación. Los trabajos de investigación que los alumnos desarrollan se encuentran adscritos a alguna de las líneas de investigación desarrolladas por el cuerpo académico del PROME. De manera general, las líneas de investigación vigentes y que se desarrollan en el programa son:

- Pensamiento y lenguaje variacional
- Uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas
- Educación a distancia
- Construcción social de conocimiento
- Visualización y desarrollo del pensamiento matemático
- Estudios sobre reproducibilidad de situaciones de aprendizaje en el sistema didáctico

- La cognición en los procesos del aprendizaje de las matemáticas
- Estudios sobre los profesores de matemáticas, sus prácticas, su cultura, su cognición, sus creencias, su actualización profesional.
- Los procesos de convención y articulación matemática en la construcción de sistemas conceptuales matemáticos
- Socioepistemología del conocimiento matemático desde la perspectiva de las representaciones y prácticas sociales
- Procesos de modelación y ecuaciones diferenciales
- Historia y epistemología de la matemática

Retos y perspectivas del PROME

El PROME es un programa joven y en desarrollo. Dada la mediana de las edades del cuerpo académico y administrativo del PROME, y las condiciones materiales e institucionales que prevalecen alrededor de éste, es posible proyectarlo hacia el futuro como un centro académico importante en el escenario nacional e internacional de nuestra disciplina.

Sin embargo, es de vital importancia identificar los retos que el desarrollo mismo del PROME impone y con ello planear estrategias para afrontarlos. Hasta el momento hemos identificado algunos de éstos, que dividiremos en tres categorías que hemos llamado: Consolidación interna, Internacionalización y Calidad y eficiencia.

Consolidación interna. Actualmente el 75% de la planta docente cuenta con grado de Doctor; pero hasta el momento ninguno de los Doctores del PROME ha realizado un posdoctorado.

El fortalecimiento de la formación académica de los miembros del PROME sin duda contribuirá no sólo a incrementar la calidad del Programa, sino también a favorecer el reconocimiento de la calidad del cuerpo académico del PROME y la acreditación del Programa mismo por parte de las instituciones académicas locales como el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México. Un reconocimiento de este tipo además de generar un prestigio académico, contribuye a mejorar las condiciones materiales del PROME (a través de becas, proyectos de investigación y financiamiento para inversión física).

Internacionalización. De manera general, la internacionalización del PROME puede entenderse como una proyección del programa (su alcance, sus miembros, sus producciones, sus resultados, sus experiencias) hacia la arena internacional.

El mapa de la figura 1, claramente muestra que hay zonas en Latinoamérica en las que el Programa no recluta estudiantes de manera regular. Si los integrantes del PROME consideran que es importante llevar el Programa a otros países de habla hispana, habría que pensar en estrategias para incluir los países no sombreados de la figura 1.

Otro reto perteneciente a la internacionalización se refiere a la participación activa en los debates científicos de nuestra disciplina pero en un escenario internacional que vaya más allá de los límites de la figura 1. Por ejemplo, la investigación en formación de profesores de matemáticas, ha tenido un gran auge a nivel internacional en los últimos años; una muestra de ello es el quinceavo estudio ICMI titulado "*The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*" que próximamente será publicado. Sin duda el trabajo desarrollado en el PROME y particularmente las experiencias acumuladas en el área de formación de profesores en servicio, puede contribuir al entendimiento y análisis de los problemas que se están discutiendo en la arena internacional.

La internacionalización también implica colaboración. La constitución de redes académicas que faciliten la participación de investigadores extranjeros externos al cuerpo académico, en las actividades en cursos y en proyectos de investigación puede ser favorecida por el formato de instrucción en línea utilizado en el PROME. Mayores esfuerzos deben ser dirigidos para la constitución y permanencia de dichas redes.

Calidad y eficiencia. Por último, pero no por eso menos importante, se menciona la categoría de calidad y eficiencia del Programa.

La calidad del programa en general, y de los cursos y seminarios en particular, debe ser constantemente vigilada. Tanto la disciplina cultivada en la Maestría y Doctorado del PROME (la Matemática Educativa), como el escenario de instrucción donde se desarrolla el programa (basado en el uso de Internet) imponen condiciones de actualización constante al menos en los planos tecnológico y académico. Debe reflexionarse de manera continua sobre la necesidad, pertinencia, ventajas y desventajas de la inclusión de nuevas herramientas tecnológicas en la estructura de los cursos y seminarios impartidos en el PROME.

De manera similar, los contenidos y la estructura de los cursos y seminarios deben ser continuamente revisados, tratando no sólo mantener "teóricamente actualizados" los cursos de acuerdo a los avances de la disciplina, sino también, en la medida de lo posible, mantener los contenidos relevantes y significativos para los profesores que los cursan.

Es muy importante para la salud general del Programa que éste pueda cumplir satisfactoriamente con los requerimientos institucionales de *eficiencia terminal*, es decir, la proporción entre el número de alumnos que ingresan y el de graduados (por generación) en un cierto límite de tiempo. Varios esfuerzos se están dirigiendo hacia la solución de esta problemática.

Los autores agradecen a Javier Lezama por los invaluables comentarios y sugerencias que fueron de gran ayuda para la elaboración de este escrito.

Referencias bibliográficas

Acuerdo por el que se dispone la autorización del programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa que impartirá el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. (2000, 1 de septiembre) *Gaceta Politécnica*, p. 34.

Acuerdo por el que se dispone la autorización del programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa que impartirá el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. (2000, 1 de septiembre) *Gaceta Politécnica*, p. 32.

Castañeda, A.; Crespo, C.; Lezama, J.; Molina, J.G.; Montiel, G.; Martínez, G.; Sánchez, M. y Rosas, A. (2008). *Las líneas de investigación en el programa de matemática educativa*. Documento interno de trabajo. PROME, CICATA-IPN. México.

PRÁCTICAS DOCENTES Y ERRORES DE LOS ALUMNOS

Patricia Có, Mónica del Sastre, Erica Panella
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. U.N.R. Argentina
co@fceia.unr.edu.ar, delsas@fceia.unr.edu.ar, panella@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Formación de profesores, Obstáculos para el aprendizaje Nivel: Superior

Resumen. *La participación como coordinadoras del "Taller de Resolución de Problemas" correspondiente a un Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística, nos dio la oportunidad de revisar Propuestas de Clase escritas presentadas por los docentes – alumnos. Deteniéndonos en las situaciones problemáticas expuestas en dichas propuestas pudimos observar cómo los errores que detectamos en nuestros alumnos de primer año de la universidad, eran "enseñados" por algunos docentes.*

En este trabajo mostramos ejemplos de esta situación, transcribiendo fragmentos de las propuestas docentes e intentando un análisis de los errores allí presentes. Nuestro interés en estudiar el tema está dirigido al diseño de estrategias de enseñanza que ayuden a nuestros alumnos a sortear los obstáculos quizá generados por estos errores didácticos.

Palabras clave: prácticas docentes, obstáculos, errores

Introducción

Como docentes de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR), sabemos que nuestros alumnos presentan dificultades en el aprendizaje de algunos contenidos específicos de Matemática.

Centramos nuestro interés en las asignaturas de Matemática Básica correspondientes al primer cuatrimestre del primer año de estas carreras, en las que se desarrollan temas fundamentales para la formación del estudiante y cuya aplicación resulta indispensable para la comprensión de conceptos en el resto de las asignaturas.

A través de nuestra experiencia, podemos reconocer que estos alumnos presentan en su mayoría, dificultades para llevar a cabo actividades que le permitan la interpretación de las distintas representaciones, registros de representación, tratamientos y conversiones (Duval, 1993).

Estas dificultades se constituyen en verdaderos obstáculos cognitivos, haciéndose evidentes en los errores cometidos por los estudiantes.

Esta realidad presenta un panorama bastante desalentador ya que hemos podido comprobar que esta situación tiende a empeorar año a año y pareciera quedar instalada como algo natural y esperable, y frecuentemente entendida y aceptada como una consecuencia de las deficiencias de los aprendizajes anteriores.

Pudiendo abordar esta problemática desde distintas perspectivas nos pareció interesante indagar acerca de las causas de aquellos obstáculos relacionados con la adquisición de los conceptos matemáticos en los cuales detectamos la mayor cantidad de errores.

La participación como coordinadoras del "Taller de Resolución de Problemas" correspondiente al Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística, destinado a docentes en ejercicio, nos dio la oportunidad de realizar el trabajo que presentamos. Un primer paso en nuestra investigación fue la revisión de Propuestas de Clase escritas, presentadas por los docentes – alumnos como requisito final para lograr la aprobación del taller. Deteniéndonos en las situaciones problemáticas expuestas en dichas propuestas pudimos observar cómo los errores que detectamos en nuestros alumnos eran "enseñados" por algunos docentes.

En este trabajo mostramos ejemplos de esta situación, transcribiendo fragmentos de las propuestas docentes e intentando un análisis de los errores allí presentes. Nuestro interés en estudiar el tema está dirigido al diseño de estrategias de enseñanza que ayuden a nuestros alumnos a sortear los obstáculos quizá generados por estos errores didácticos.

Dificultades, obstáculos y errores

Como afirma Socas (1997), las dificultades en el aprendizaje de la Matemática son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de la Matemática que se manifiestan en sus simbolismos y en los procesos de pensamiento, pasando por el desarrollo cognitivo de los alumnos, así como por sus actitudes afectivas y emocionales. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculo y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

No debe entenderse al error únicamente como resultado de la falta de un conocimiento o una distracción, sino que debe ser considerado como evidencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, aún cuando sus orígenes puedan ser diferentes.

Varios autores han elaborado clasificaciones de los errores en el aprendizaje de la Matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse. Entre ellos, Radatz (1980, c.p. Rico, 1995) expone la siguiente:

• *errores debidos a dificultades en el lenguaje*: se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático.

• *errores debidos a dificultades para obtener información espacial:* aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.

• *errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos:* son los cometidos por deficiencias en el manejo de algoritmos, hechos básicos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos.

• *errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento:* son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas; comprenden los errores por perseveración, los errores de asociación, los errores de interferencia, los errores de asimilación.

• *errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*: son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

El concepto de obstáculo fue introducido por primera vez por Bachelard en 1938, en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de *obstáculo* *epistemológico.* Brousseau (1983) tomó las ideas de Bachelard y las desarrolló en el ámbito específico de la Didáctica de la Matemática.

En su trabajo distingue entre obstáculos de origen:

- *psicogenético u ontogénico*: sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas, entre otras) del sujeto a un momento de su desarrollo: él desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.
- *didáctico:* resultados de una opción o de un proyecto de sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.
- *epistemológicos:* relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la Matemática, en la génesis misma de los conceptos.

Análisis de las Propuestas

Transcribimos (en cursiva) algunos fragmentos de las Propuestas de Clase presentadas por los docentes que resultaron más significativos para nuestro análisis.

Propuesta 1: Introducción al tema Función Lineal (9º E.G.B)

En una primera clase se introdujo el tema con la siguiente situación problemática a fin de arribar a la fórmula de la Función Lineal:

Para ir al trabajo, todos los días, Juan toma un taxi. El taxista le cobra $ 1.80 por "bajada de bandera" y $0.90 por cada cuadra recorrida.

a) *Si recorre 2 cuadras, ¿cuál es el costo del viaje?.*
b) *Si tuviera que recorrer 5 cuadras 15 cuadras o 20 cuadras, ¿cuál sería el costo del viaje respectivamente?.*

Luego de que las docentes consideran que el problema ha sido resuelto satisfactoriamente por parte de los alumnos, les formulan la siguiente pregunta:

Si quiero presentar una expresión que me permita calcular el costo del recorrido para cualquier cantidad de cuadras, ¿cuál sería esa expresión?

Respuestas planteadas por los alumnos

1) *(cantidad de cuadras* x *0.90) + 1.80 =*
2) *0.90* x *X + 1.80 =*

Se les hizo notar que "cantidad de cuadras" es un dato que puede ir variando y que el costo del viaje es una incógnita que también irá variando y dependerá de la cantidad de cuadras recorridas.

Se realizó la generalización del problema como:

F(X)= 0.90 x *X + 1.80*

Luego se formalizó el concepto de Función Lineal:

Una función es lineal si se expresa de la forma F(x)= m x + b, donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen

El nombre de función lineal proviene de que su gráfica es una recta.

Notamos que el problema seleccionado tiene que ver con una función cuya representación gráfica no es una recta, como se asegura en la propuesta. Además se define una función sólo por su ley, sin tener en cuenta su dominio. Esto podría llevar a suponer, entre otras cuestiones, que las gráficas son siempre continuas debido a que las situaciones presentadas a los estudiantes siempre tienen esta propiedad o bien, como en este caso, son mal interpretadas. Aquí cabe preguntarse si la misma enseñanza no es la que origina esta concepción parcial de la noción de función.

Creemos que si bien en un principio se distingue una elección didáctica inadecuada en cuanto al problema seleccionado, los errores de tipo conceptual presentes en la solución del mismo y transmitidos, con la autoridad intelectual que tiene el docente, instalan en los estudiantes obstáculos cognitivos difíciles de sortear.

La propuesta continúa de la siguiente manera:

Se les presentó a los alumnos una serie de situaciones problemáticas sobre función lineal y su gráfica:

Una compañía de teléfonos celulares está equipada para equipar servicios 100000 usuarios. En 1995 tenía 70000, y su número crece alrededor de 4000 por año.

a) *Encontrar la fórmula de la función lineal que describa esta situación. Graficar la función.*
b) *Indicar, según ese modelo, a partir de qué año la empresa necesitará comprar más equipamiento.*

Volvemos a observar una mala elección del problema en cuanto a que la variable involucrada es discreta y a pesar de esto se solicita encontrar la fórmula de la función lineal que describe la situación, sin realizar ninguna aclaración acerca de la naturaleza de la variable.

Uno de los obstáculos más frecuentes que esto genera en nuestros alumnos se evidencia en la no distinción entre variable discreta y continua.

Propuesta 2: Ecuación y función cuadrática (2º Polimodal)

Se les presenta a los alumnos la siguiente situación problemática como cierre de la unidad didáctica: “Ecuación y función cuadrática”.

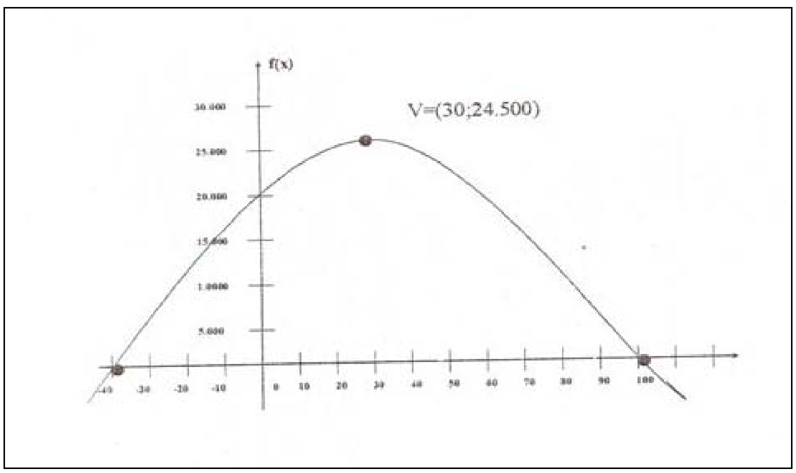
El rendimiento del cultivo de naranjas: Un productor tiene una plantación de una hectárea con 40 naranjos; cada uno de ellos produce 500 naranjas por año. Por cada planta que se incorpore, la producción de cada naranjo disminuirá en 5 unidades. ¿Con cuántas plantas incorporadas a la plantación se anularía el valor de la producción?. Determinar la cantidad de plantas que se deben agregar con el fin de maximizar el valor de producción, y el valor correspondiente de la misma?.

Planteo de la fórmula que describe la producción total de la chacra en función de la cantidad de naranjos que se agreguen: $P(X) = (40 + X)(500 – 5X)$.

Si bien se resuelve la situación planteada con distintas estrategias, en ningún caso se especifica el dominio de P y la naturaleza discreta de la variable: X = nº de árboles que se aumentan (indicada por las docentes).

A pesar de descartar “por absurdos” los valores negativos de la variable al brindar las respuestas, quedan registrados en cada una de las tablas y representaciones gráficas que se muestran. Por ejemplo:

X	F(X) = (40+ X) (500 – 5 X)	X	F(X) = (40+ X) (500 – 5 X)
-50	-7500	40	24500
-40	0	50	22500
-30	6500	60	20000
-20	12000	70	16500
-10	16500	80	12000
0	20000	90	6500
10	22500	100	0
20	24000	110	-7500



Más aún, una vez confeccionadas estas tablas y gráficas, se solicita a los alumnos: *dar respuestas al problema por medio de la observación de las mismas.*

Creemos que propuestas de este tipo inducen al alumno a pensar que el concepto de función se reduce, de algún modo, a la imagen visual que su curva genera, la que por otra parte se construye únicamente a partir de una tabla de "muchos" valores.

En este sentido coincidimos con Socas (1997) cuando afirma que para bastantes alumnos de secundaria las representaciones gráficas de las funciones parecen haber perdido su valor de representación de la función y son tomadas como si fueran a la vez significante y significado. Así, la función no sería para ellos una relación entre dos magnitudes x e y; una ordenada positiva f(x) ya no sería la longitud de un segmento que representara una magnitud y la expresión analítica y = f(x) serviría únicamente para designar a la curva.

Propuesta 3: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (9º E.G.B)

Se les propone a los alumnos el siguiente problema para formalizar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

Dos grifos han llenado un depósito de 30 m^3 corriendo uno 7 horas y el otro 2 horas. Después llenan otro depósito de 27 m^3 corriendo uno 4 horas y el otro 3 horas. ¿Cuántos litros vierte por hora cada grifo?.

Se les sugiere a los alumnos plantear las ecuaciones correspondientes, siendo X = grifo 1 e Y = grifo 2.

Completa: $\begin{cases} \ldots X + \ldots Y = 30 \\ \ldots X + \ldots Y = 27 \end{cases}$.

Se les pide luego que grafiquen el sistema y encuentren su solución. Se les sugiere pensar lo siguiente: ¿se puede establecer exactamente la solución?

Se les propondrá a los alumnos que piensen en lo siguiente, observando la gráfica de un sistema compatible determinado:

- *¿cómo se expresa la componente y(x) del punto que es solución al problema en cada una de las ecuaciones de las rectas?.*

- *¿cómo es el valor de la componente y(x) en cada expresión?.*
- *¿cómo lo expresamos?.*

Principalmente notamos una importante falta de rigor en la forma escrita en que se comunica la propuesta, hecho que creemos origina diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Ejemplos de esta situación son las "ecuaciones" *X = grifo 1 e Y = grifo 2,* o la pregunta *¿cómo se expresa la componente y(x) del punto que es solución al problema en cada una de las ecuaciones de las rectas?* (aunque no descartamos que al hablar de "punto solución" se esté evidenciando quizás un error conceptual).

Creemos que esta situación puede dificultar en los alumnos el comprender que el lenguaje de las matemáticas es más preciso que el lenguaje habitual, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos (Socas, 1997). Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión que sin duda conlleva a la formación de obstáculos cognitivos.

Reflexiones finales

Como sabemos los errores en Matemática son la manifestación externa de un proceso complejo de enseñanza y de aprendizaje, donde intervienen muchas variables: profesor, alumno, currículo, contexto socio-cultural, etc.

La reflexión sobre los análisis realizados nos permitió clarificar algunos aspectos de este proceso, encontrando nuevas posibles causas para los errores que frecuentemente detectamos en nuestros alumnos de primer año de la Universidad.

A partir de este diagnóstico y reivindicando la necesidad de revalorizar la articulación entre Escuela Media y Universidad, creemos pertinente que la solución se busque en una instancia previa al cursado del año lectivo. En principio, trabajaremos junto con el Área

Ingreso de nuestra Facultad, orientando nuestra tarea a la revisión del material didáctico y la metodología de enseñanza impartidos durante los cursos de nivelación, con miras a mejorar la propuesta para el ingreso 2009.

Referencias bibliográfícas

Bachelard, G. (1973). *Epistemología.* Barcelona, España: Anagrama.

Brousseau G (1983) *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques*. 4.2* p.164-198

Duval, R. (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa II. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Radatz, H. (1980). *Student´s Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey*. For the learning of Mathematics. (vol. 1).

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas.* En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria.* En Rico, L. y otros. (cap. 5, pp. 125- 154. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona, España: Horsori.

LA INTEGRACIÓN DE UNA COMPONENTE DIDÁCTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES UNIVERSITARIOS

Anido, M., Rubio Scola, H.
FCEIA, FCEE, CIUNR, Universidad Nacional de Rosario (UNR) Argentina
erubio@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo, como aporte a la inserción de una componente a la formación pedagógica de docentes de nivel terciario (universitario y no universitario), se describe la trayectoria de tres proyectos de investigación realizados por "docentes –investigadores" de la Universidad Nacional de Rosario, en el marco de una concepción de la Educación Matemática nominada por Wittman como "ciencia de diseño". Esta trayectoria ha culminado en la constitución de equipos de investigación colaborativa constituidos por docentes de distintas facultades, en un trabajo dirigido a la construcción de una Didáctica de la Matemática Operativa para el nivel Terciario*.

Palabras clave: ciencia de diseño, didáctica de la matemática, investigación colaborativa

El problema

La enseñanza inicial de la Matemática Básica en el nivel terciario (universitario y no universitario) enfrenta:

* Reformas curriculares que, tratando de dar respuestas al desarrollo científico - tecnológico, han comprimido algunos cursos de Matemática Básica,

* Incremento del número de alumnos en los primeros años de la Universidad y apertura de institutos en los que actualmente se cursan estudios terciarios no universitarios,

* Importantes cambios pedagógicos y curriculares en la enseñanza media,

* Dificultades generalizadas detectadas en el aprendizaje de los nuevos ingresantes.

Durante las últimas décadas, la Educación Matemática se ha desarrollado notablemente. Se la considera actualmente un área de Investigación en la que se pone en primer plano la especificidad de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje ligados a la especificidad del contenido a enseñar, en ese sentido la escuela francesa con Brousseau, Artigue, Douady; ha sido pionera y sus aportes de particular interés para el nivel universitario.

En relación a la Educación Matemática en dicho nivel coincidimos en los interrogantes básicos, que originaron nuestros trabajos, con algunos totalmente vigentes que ha formulado "The International Commission on Mathematical Instrucción" (ICMI, 1999) como un muy amplio abanico de preguntas, propuestas como semillero de investigaciones para los comienzos del siglo XXI; entre las que nos interesa destacar:

* ¿Qué es lo que sabemos sobre la enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos en, Geometría, Álgebra Lineal Cálculo, Probabilidad en la Matemática Básica? ¿Hay características que son relevantes sólo para tópicos específicos? ¿Hay características que son comunes a varios tópicos?

* ¿Puede enseñarse Matemática con el debido rigor y de modo efectivo introduciendo los conceptos cuando se necesiten, motivados por problemas? ¿Cómo realizar en esa situación la formalización teórica? ¿Y el orden lógico? ¿Cómo mantener la coherencia curricular?

* ¿Cómo debería estar reflejada la evolución en la enseñanza de matemáticas en el nivel terciario en nuestra región? ¿Debería darse más énfasis a la forma en que los matemáticos piensan y crean? ¿Cómo puede evaluarse el impacto de las clases basadas en resolución de problemas, o el uso de computadoras, o trabajos de proyectos, etc.?

* ¿Cómo ha cambiado la tecnología el contenido y la filosofía del currículum?¿Deberían darse los programas existentes de la misma forma que en el pasado, o puede la tecnología asistir en el desarrollo de habilidades superiores o más importantes? Algunas áreas temáticas de matemática están declinando mientras que otras están en ascenso. ¿Cuál es la lógica detrás de estos cambios? ¿Deberían otras áreas tomar su lugar?

* ¿Existen otras formas de enseñanza que tengan el potencial para realizar un mejor aprendizaje en los diversos temas, por ejemplo en laboratorios de matemáticas donde los estudiantes exploran familias de objetos matemáticos mediante computadoras?

* ¿De qué formas puede cambiar la enseñanza para tener en cuenta las diferencias en formación, habilidades e intereses del alumno?

En relación a la formación del profesorado, sigue vigente la misma pregunta que ha formulado Artigue (1999):

* ¿Por qué continúa siendo problemática la integración de una componente didáctica en la formación de los profesores? Cuestión a lo que nosotros añadimos, con carácter de problema esencial de este proyecto ¿Cómo incorporar esa componente didáctica desde la propia experiencia docente? ¿Qué objetos de estudio se imponen y cuál es su lógico impacto?

Dado que, no todos los conceptos matemáticos del nivel terciario, son análogos desde el punto de vista de su aprendizaje, se deberían delimitar distintos campos de análisis didáctico a nociones o unidades temáticas específicas (constitutivas de casos de estudio), contenidas en las asignaturas de la Matemática Básica inicial y en los que como consecuencia de los estudios exploratorios ya realizados y de la propia práctica docente; se desprenda su importancia y sus dificultades.

Anticipándose a muchas de estas cuestiones, un equipo de investigadores y docentes de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), esta trabajando estos temas, desde comienzas de la década del 90. En los últimos años se han desarrollado tareas debidamente consignadas en tres proyectos PID (Proyectos de Investigación y Desarrollo de carácter complementario), aprobados por evaluadores externos.

PID: “La ingeniería didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares”. PID: “La elaboración y evaluación de los materiales curriculares para la matemática básica de las carreras de ingeniería". PID: "La elaboración y evaluación de los materiales curriculares para la matemática básica de las carreras de ciencias económicas".

Los resultados preliminares y aportes del grupo al estudio de los problemas en cuestión; han sentado las bases para la articulación e integración de equipos de trabajo comprometidos en la "construcción de un marco teórico conceptual y operativo, adecuado al nivel básico terciario, que signifique un aporte al conocimiento en Didáctica la Matemática".

Hipótesis de trabajo

La hipótesis de trabajo, común a los tres proyectos que consideramos preliminares, se basa en la concepción de la Educación Matemática como "ciencia de diseño"(Wittmann, 1995).

Desde esta posición se considera posible, en el desarrollo la "construcción de unidades esenciales" en temas importantes en la formación del alumno, tanto como "objetos" en si mismos como por su carácter de "herramientas" para la comprensión de otros tópicos, y la investigación sobre su funcionamiento.

Se espera obtener así, conocimientos sobre las concepciones, aptitudes de los alumnos y los obstáculos y dificultades que intervienen en el aprendizaje, analizar las prácticas de enseñanza usuales y aportar estrategias de mejoramiento en la forma de Ingenierías Didácticas, que al jugar sobre el espacio de las restricciones reales o supuestas del sistema, deben "permitir un funcionamiento mas adecuado de la enseñanza" (Artigue, 1999).

En la realidad la calidad de esas construcciones dependerá de la estrategia constructiva de base, del ingenio de los diseñadores y de la evaluación sistemática, típicos todos, de una ciencia de diseño (Wittmann, 1995).

La denominación de Ingeniería Didáctica surge de una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico (Artigue, 1999).

Histórica y tradicionalmente ha sido tarea de las escuelas de ingeniería enseñar sobre cosas artificiales, como hacer artefactos que tengan propiedades deseadas y como enseñarlas. El diseño para la construcción, es el corazón de entrenamiento profesional y la principal marca que distingue las profesiones de las ciencias, así también las escuelas de arquitectura, negocio, educación, leyes y medicina, conciernen con procesos de diseño (Wittmann, 1995).

En la opinión de Wittmann, la responsabilidad profesional se asume completamente solo, en cuanto los que la ejercen, puedan descubrir un sólido cuerpo intelectual parcialmente formalizable, parcialmente empírico y transmisibles doctrinas sobre los procesos de diseño. Según el mismo autor, el marco de una ciencia de diseño abre a la Educación Matemática una prometedora perspectiva para el completo cumplimiento de sus objetivos.

Objetivos del trabajo

Presentar algunos lineamientos del marco teórico y resultados de tres proyectos de investigación complementarios, institucionalizados en la UNR, como aportes teóricos y experienciales preliminares a la inserción de componentes didácticas en la formación de docentes universitarios.

Fundamentos teóricos y pautas metodológicas

Los alumnos que ha comenzado a matematizar un fragmento de la realidad pasan luego a analizar su propia actividad matemática en un proceso de matematización progresiva que comprende dos formas complementarias:

- la "matematización horizontal" que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático,
- la "matematización vertical" que con lleva a la reflexión, generalización, prueba, simbolización y lo que Freudenthal (1991) llama rigorización que hace a las limitaciones y validez.

¿Es posible, en este marco, basar la metodología, para desarrollar un currículum, en la resolución y modelización de problemas?- Freudenthal, en diverso trabajos, sostiene que es posible matematizar las situaciones, logrando coherencia a través del currículum y lo que realmente importa es: si un problema se puede o no integrar a los contenidos necesarios, o si es tan aislado que finalmente no dejaría huella en la formación matemática.

Wittman (1995) llama a este tipo de estudios, de aproximación especifica a la investigación empírica: "Investigación Empírica Centrada Alrededor de Unidades de Enseñanza". Se trata de la propuesta de estrategias y modalidades de enseñanza centrada en el aprendizaje de temas de interés específicos para distintas carreras y en las formas de aprender y evaluar. Esto ha llevado, también a la consideración de los materiales didácticos en soporte papel o informático como mediadores, y a una indagación sobre las formas de elección o de desarrollo de los mismos, que los constituya en herramientas cognitivas, sobre todo en los cursos masivos donde se desarrolla la enseñanza básica y donde la formación en un aprendizaje autónomo es indispensable. La necesidad de modelos de análisis de material curricular, que oriente esta parte de la investigación, hay que entenderla en la triple dimensión de, elaboración, selección y uso de materiales curriculares.

En investigaciones en el contexto de la Educación Matemática en el College (etapa de estudios terciarios de Estados Unidos, que comprende contenidos de lo que llamamos "formación matemática básica"), Schoenfel (1988) responde a la pregunta: ¿Qué es investigación en Educación Matemática? Afirmando que "es el trabajo disciplinado, basado en teorías, sobre las formas de mejorar nuestro entendimiento en relación al pensamiento matemático, al aprendizaje y la enseñanza" pero reconociendo, por otra parte, que esta respuesta no hace justicia a la vastedad del espectro que se abre.

Precisamente en ese espectro abierto que alude Schoenfel incluimos el concepto de “Estilos de aprendizaje” como el conjunto de rasgos cognitivos y afectivos que sirven como indicadores estables de como los alumnos perciben interaccionan y responden al ambiente de aprendizaje. Surge así, en una concepción de estilos de aprendizaje como “diferentes preferencias, actitudes y comportamientos ante el aprendizaje” (Alonso, C.M.; Gallego, D.J.;Y Honey, P.; 1999) un elemento de análisis que hemos considerado en alguno de nuestros trabajos.

También interesa citar, en el nivel terciario: el Proyecto CALC (Moore and Smith, 1992), que surge en Estados Unidos como una innovación sobre los cursos de Cálculo tradicionales en los que a 500.000 alumnos de los primeros años se les exigía muchas veces, enfáticamente la memorización de procedimientos, que pueden se realizados por calculadoras y computadoras. Estas propuestas innovadoras, aún no consideradas por la mayoría de los profesores de Cálculo en nuestro país, proponen desarrollar en los estudiantes una comprensión de los conceptos del Cálculo utilizando laboratorios de computación interactivos, la constitución de pequeños equipos para investigación de problemas de cálculo del mundo real, un aprendizaje colaborativo, cuestionarios evaluativos a libro abierto y la formación en la expresión escrita. La revisión de la enseñanza del Cálculo, en su nivel inicial, es un tema pendiente en muchas universidades argentinas, en las que las falencias se detectan en las áreas de aplicación.

Otro de los temas de vigencia y desarrollo actual, clave para el estudio de los procesos de aprendizaje de la Matemática Básica, es el relativo a los elementos de significado que juegan en la comprensión de un concepto. En ese punto se han considerado los trabajos de Godino sobre un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática y sus aportes al análisis de datos, sobre todo, por los modelos de investigación que ofrece.

La Ingeniería Didáctica que se ubica en el "registro de caso" cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori, ha constituido nuestra guía fundamental. No obstante, pensamos que, de acuerdo a las características y actividades de las fases de cada ingeniería, se puede requerir y enriquecer el control, por la utilización de técnicas e instrumentos propios de una metodología cuantitativa. Esta diversidad metodológica ha surgido naturalmente de las actividades que se han desarrollado en cada una de las fases de la Ingeniería.

Análisis de resultados

Las tareas de equipo.que desarrollan los integrantes de los proyectos en el diseño de las distintas Ingenierías Didácticas han implicado:

- análisis preliminar que comprende: el análisis epistemológico de los contenidos de Temas de la Matemática Básica de Carreras de Ingeniería y Ciencias Económicas y el análisis del campo de restricciones (campos matemáticos en juego (competencias de los alumnos, medios disponibles), donde se va a situar la realización didáctica efectiva,
- selección de problemas motivadores y análisis del juego de cuadros intervinientes en los problema (Douady, 1995),

- puesta en marcha de las ingenierías diseñadas en cada tema y seguimientos de los cursos experimentales.por el análisis y categorización de situaciones didácticas,
- aanálisis de criterios y diseño de instrumentos de evaluación,
- confrontación de los análisis a priori y a posteriori realizado en cada ingeniería didáctica y propuesta de modificación de la ingeniería y para la reducción de las distorsiones que pueden invalidarlas,
- realización de cursos y talleres de formación docente para: el diseño y seguimiento de unidades de enseñanza en un proceso de revisión curricular

Se ha buscado modelizar, observar, contrastar empíricamente, y consignar, los fenómenos didácticos a partir de la problematización y cuestionamiento de un conocimiento matemático a enseñar llegándose a una transferencia en ámbitos adecuados.-En el transcurso de la investigación se realizaron caracterizaciones de las condiciones que deben implementarse en la enseñanza para facilitar un aprendizaje que reúna ciertas características fijadas a priori. Se ha logrado la detección de obstáculos que devienen en errores generalizados. Los distintos docentes investigadores han trabajado en el diseño de ingenierías didácticas en el ámbito de la Geometría Analítica (distancias en el plano y el espacio, inecuaciones lineales en dos variables, ecuación general de segundo grado, cónicas, cuádricas, supercónicas, supercuádricas), del Álgebra Lineal (vectores, independencia lineal), del Cálculo (derivada, integral definida, ecuaciones diferenciales), Estadística (temas de inferencia) y temas vinculados a la optimización lineal y modelización por poliedros; en un proceso cíclico de análisis de condicionantes, diseño, ejecución, evaluación, ajuste; repetición de la experimentación y nueva evaluación de los resultados; para la detección de regularidades y situaciones replicables. En las distintas fases de cada ingeniería la hipótesis de trabajo se ha basado en concordancia con los objetivos en la concepción de la Educación Matemática como "ciencia de diseño". Esta producción ha sido transferida en numerosas publicaciones.

A partir de la noción de “medio” (milieu) esencial en la teorización de Brosseau (1987) se ubicaron los “diferentes dispositivos” de ayuda al estudio (libro de texto, herramientas informáticas, etc.) a través de los cuales se contextualiza la matemática a enseñar. La incorporación de los materiales con soporte informático a los dispositivos disponibles en dicho “medio”, potenció la investigación de sus componentes. - Se estudiaron técnicas para el análisis de contenido de textos “manifiestos y latentes” (Fraenkel, 1996) y análisis de programas computacionales específicos. Se buscó, en el marco teórico que proporciona el modelo ontosemiótico de Godino, elementos que guíen el análisis didáctico de la producción elaborada en sus distintos soportes.

Conclusiones

El campo de estudio, de los tres proyectos complementarios a que se hace referencia, ha llevado al diseño, análisis de unidades didácticas, y producción de material didáctico como aporte a los procesos de cambio curricular de dos facultades de la Universidad Nacional de Rosario. Se ha coordinado acciones para:

- identificar, publicar y someter a críticas, nuevas estrategias de enseñanza y los usos positivos de la tecnología en unidades curriculares específicas,
- estudiar el desarrollo de materiales didácticos basados en las Tecnologías de Información y Comunicación,
- seleccionar, adaptar o crear materiales que faciliten la generación controlada de las situaciones didácticas que caracterizan un aprendizaje significativo en asignaturas de la Matemática Básica de Carreras Universitarias,
- determinar criterios de análisis, y proponer y construir instrumentos evaluación formal y sistemática de materiales didácticos en el área de la Matemática.

Consideramos que sobre todo ha implicado un llamado al trabajo colaborativo que puede ser movilizador de un análisis crítico e inducción de una reflexión sobre la propia práctica docente y generador de una actitud innovadora, y creativa.

El campo multidisciplinar y la proyección al futuro que se abre en los proyectos descriptos, en una propuesta de este tipo exige estudios y capacitación en áreas de mucho interés en la educación matemática, algunas poco transitadas aún en nuestro medio La implicación de los Profesores en el diseño de sus propios materiales, supone una formación previa y un compromiso con la utilización eficiente de esos materiales.

Perspectiva

Este trabajo forma parte de estudios preliminares del Proyecto PICTO 36464 "La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria"

Referencias bibliográficas

Alonso, C.M.; Gallego, D.J.;Y Honey, P (1999). *Los Estilos de Aprendizaje*. Bilbao: Ediciones Mensajeros.

Artigue, M.(1999) The Teaching and Learning of Mathematics at the Universitary Level: Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the American Mathematics Society, 11*, 1377-1385.

Brousseau, G. (1987) *Fondements et méthodes de la dídactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2. La Pensée Sauvage: Grenoble. pp 34-116.

Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento. En *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano. 61-97.

ICMI 1999 Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *The International Commission on Mathematical Instruction*

Fraenkel, J. Y Wallen, N. (1996) *How to Desing and Evaluate Research in Education*. New York: Mc Graw Hill Inc.

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dorcrecht: Kiuwer Academic Publishers.

Moore, L. Smith, D (1992). *Project CALC: Calculus as a Laboratory Course*, Tomek ,I. (ed.) Computer Assited Learning. Spring Verlag

Schoenfeid, A. (1988). *Problem solving in context(s)*. In R. Charles and E. Silver (Eds.), The theaching and assesing of mathematical problem solving (pp.82-92). Reston, VA: National Council of Theachers of Mathematics.

Wittmann, E.Ch. (1995). *Mathematics Education as a Desing Science*. *Educational Studies in Mathematics, 29*. 355-274.

ESTRATEGIA DE CAPACITACIÓN PARA LA PROFESIONALIDAD DEL DOCENTE DE MATEMÁTICA EN UNAPEC

Génova Féliz, Nancy Montes de Oca Recio
Universidad Camaguey. Cuba
Universidad APEC. Santo Domingo
nancy.montes@reduc.edu.cu, gfeliz@adm.unapec.edu.do
Campo de investigación: Educación continua Nivel: Superior

Resumen. *El trabajo aborda una problemática actual relacionada con la Superación de los docentes que imparten Matemática en los colegios CAFAM Y COLAPEC, asociados a la Universidad APEC, de Santo Domingo. Atendiendo a los resultados obtenidos de la caracterización de los docentes se concibió una propuesta para la superación académico-metodológica de los maestros, la cual propuso la institucionalización de un sistema de capacitación continua para los docentes que imparten Matemática.* ***La misma se orientó,*** *hacia dos modalidades convergentes: la Formación Académica de Post-grado y el Trabajo Didáctico de los docentes, como vías para elevar la profesionalidad del docente de Matemática en estos centros a largo, mediano y corto plazo.*

Palabras clave: educación continua, profesionalidad, desempeño profesional, docente matemática

Introducción

A escala mundial se han fomentado actividades tendientes a buscar soluciones al problema de la enseñanza de la Matemática en los niveles primario y secundario. Se han desarrollado Congresos, Conferencias y Simposios Internacionales, la Organización de Estados Iberoamericanos ha auspiciado actividades e investigaciones educativas a favor de la Educación, la Ciencia y la Cultura, entre otras. Todo lo anterior ha posibilitado obtener ciertas regularidades en este proceso y precisar las tendencias generales actuales en la enseñanza de esta ciencia (Gil, D, 1993, Godino, J., 1991, González, F. E., 2000).

La Universidad APEC (UNAPEC), asumiendo el rol que la define y caracteriza como una Universidad sin fines de lucro, que trabaja a favor de la educación y la cultura, desde inicios del año 2002, comenzó el desarrollo del Proyecto ***"Mejora de la Enseñanza de la Matemática"*** con la participación de la Universidad de Camagüey, Cuba.

En lo que respecta a la investigación en su primera fase, estuvo orientada a realizar un análisis del estado en que se encontraba el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha ciencia en la Educación Básica en los Colegios APEC *Fernando Arturo de Meriño* (CAFAM) y *Minetta Roques* (COLAPEC) propiedad de la Universidad APEC, enfatizando en la situación real de los componentes más dinámicos de ese proceso: los docentes y los alumnos.

En estos momentos estamos concibiendo una estrategia de formación permanente que, sustentada en un modelo sistémico, contribuya a mejorar el desempeño profesional de los docentes de matemática

Como parte del proceso de diagnóstico, se aplicó una encuesta a profesores y directivos y fueron observadas clases a un grupo de docentes seleccionados al azar. Tal información, una vez analizada, nos permitió señalar:

- *El desarrollo de ciertas capacidades pedagógicas (didácticas, comunicativas), resulta inadecuado en más de la mitad del personal docente que impartía Matemática en estos colegios. Hacían uso básicamente del método explicativo–ilustrativo caracterizado por su activa participación y una posición pasiva de la mayoría de los alumnos en la clase*
- *La mayoría señalaron que los actuales modelos de superación postgraduada no lograban una convergencia interdisciplinaria de contenidos, que les garantice adquirir un desarrollo integral, ya que unos se preparan adecuadamente en una disciplina y otros profundizan en otras ramas, resultando inevitable la dispersión de esfuerzos y recursos.*
- *Dichos cursos se centraban en el sistema de conocimientos y no en el desarrollo de competencias profesionales para: resolver problemas, trabajar en equipo, ser creativos, imaginativos, sensibles, humanos.*

- *Existió consenso sobre la ausencia de actividades metodológicas sistémicas y sistemáticas relacionadas con la Didáctica de la Matemática que satisficieran sus necesidades.*
- *La mayoría concuerdan en señalar que las actividades que se desarrollaban carecían de una concepción sistémica en el proceso de organización y desarrollo de la superación de los docentes, ya que actuaban regularmente de forma independiente, con intentos aislados de integración.*

Es de sumo interés constatar los resultados posteriores al comienzo de este proyecto de un estudio realizado por el Consorcio de Evaluación e Investigación Educativa en el año 2004 acerca de las oportunidades educativas que se ofrecen en la educación primaria de República Dominicana y su impacto en la enseñanza de la Matemática y Comprensión Lectora de 4to a 7mo grados, Por ejemplo, en este documento (Valverde, Gilbert A. et al, 2006) se expresan en sentido general insatisfacciones que nos confirman la necesidad de haber centrado nuestra atención, desde el año 2002, en una problemática de actualidad en República Dominicana.

Las exigencias planteadas a la educación, precisan de una concepción diferente en cuanto al papel que debe asumir el educador en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje. Nuestra propuesta, en consecuencia, está fuertemente orientada al mejoramiento de la educación y a la complementación, actualización y profundización de los conocimientos pedagógicos, matemáticos y metodológicos de los docentes, así como al desarrollo de competencias profesionales que le permitan dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática con una visión diferente para lograr que el estudiante sea el protagonista de su aprendizaje y el responsable de sus resultados.

Problema Científico: El desempeño profesional del docente de Matemática Básica.

Objetivo: Diseñar una estrategia de formación continua basada un modelo sistémico para mejorar el desempeño profesional del docente que imparte matemática en los colegios APEC.

En la actualidad, la formación permanente del profesional se presenta como uno de los procesos, que en su relación dialéctica con la práctica, determina la pertinencia y el impacto social que da respuesta a las necesidades sociales. Éste constituye el proceso que se desarrolla a través de las relaciones sociales que se establecen entre los sujetos participantes, con el propósito de educar, instruir y desarrollar a los docentes en ejercicio.

Desarrollo

La formación continua o permanente de los docentes comprende diferentes instancias. La actual propuesta de capacitación, se enmarca en el perfeccionamiento de los docente en actividad**,** y se define como un conjunto de acciones sistematizadas y sistémicas, (dirigidas a los docentes en actividad) que les permite adecuarse en forma permanente al ejercicio de la profesión, busca fortalecer valores y actitudes positivas hacia la docencia y la investigación y proporcionarle los espacios necesarios para desarrollar sus habilidades y proveerlos de las estrategias requeridas para su buen desempeño, logrando, de esta manera, transformar positivamente su práctica docente y aumentar así la eficacia y eficiencia de los actos educativos.

Está, en consecuencia, fuertemente orientada al mejoramiento de la educación y a la *complementación, actualización y profundización* de los conocimientos de los docentes.

La capacitación continua, se orientó, hacia dos modalidades convergentes la *Formación Académica de Post-grado y el Trabajo Didáctico*, como vías para lograr el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estos centros a largo, mediano y corto plazo. Todo ello llevo a la conclusión de que era necesario desarrollar una estrategia signada por la investigación, como eje integrador, el postgrado y el trabajo didáctico, como resultantes de ese proceso, que contribuyeran a la solución de las contradicciones detectadas.

Los procesos de capacitación docente requieren un tipo de organización capaz de llegar a los educadores en la base utilizando la estructura existente en el Sistema Educativo del cual se trate; en el caso específico fue el Programa sobre la Mejora de la Enseñanza de la Matemática de la Universidad APEC, el que dio coherencia y continuidad al proceso de Formación Permanente de los profesores de Matemática, articulándolo por medio de una adecuada planificación con las distintas instancias, garantizando su calidad e impacto real en la práctica cotidiana de los educandos.

Las necesidades de aprendizaje identificadas, las insuficiencias detectadas en la formación inicial de los docentes, los problemas de la práctica educativa y las sugerencias de los educadores, constituyeron la información requerida para el diseño y organización de la estrategia que propone el presente trabajo.

La Capacitación según la formación académica de post-grado se desarrolló teniendo como núcleo la Maestría en Ciencias de la Educación con mención en Enseñanza de la Matemática Básica o Media superior, la cual se concibió como una actividad que expresa la unidad entre docencia e investigación, bajo la rectoría de la segunda, y que debe contribuir a lograr la excelencia académica y la pertinencia social del conocimiento, la misma tributa a la actualización de los contenidos, metodologías, y estrategias de enseñanza, comprende una intensa formación en el campo de las Ciencias Pedagógicas, donde la *investigación* como proceso de búsqueda científica, constituye su eje fundamental como ya se hizo referencia.

Fue concebida en tres diplomados caracterizados por: *Diplomado I: Formación pedagógica. Diplomado II: Formación en la enseñanza de la matemática. Diplomado III: Formación para la investigación educativa.*

Se distingue porque prepara al docente en las problemáticas actuales de la educación matemática y en las técnicas de la investigación científica, permitiendo que este proceso se vincule con la formación pedagógica y el uso de las tecnologías, lográndose una estrecha relación entre la formación científica y la práctica profesional, de manera que el maestro pueda utilizar la investigación educativa como vía para el perfeccionamiento científico de su labor en particular y de la educación en general, pueda profundizar tanto en los aspectos teóricos de la investigación, como ganar experiencia práctica en la ejecución directa de la actividad científica, requiere adiestrarse en una forma de pensar analítica, profunda, flexible, que le posibilite valorar integralmente problemáticas educacionales y de su esfera especializada de actuación, poder interpretar objetivamente y con rigor la realidad en la que investiga, hacer deducciones e inferencias acertadas, generar y crear alternativas que posibiliten la solución de problemas en el campo del proceso docente educativo de esta ciencia, de allí que la metodología de investigación pedagógica se constituya en el eje transversal de la misma.

El currículo diseñado responde a esos propósitos donde se incluyen lecturas básicas y un sistema de tareas; las cuales son esenciales en el proceso, ya que, bajo la dirección y orientación del profesor, los maestrantes las ejecutan, utilizando la lógica y la metodología de la ciencia, y permiten la solución de situaciones y problemas que acontecen en el ámbito docente, laboral e investigativo relacionados con el contenido de la asignatura.

Particularmente el Diplomado II está conformado por dos currículos paralelos, el primero está integrado por 6 cursos obligatorios para la Educación Básica de cuatro (4) créditos cada uno. El segundo está diseñado para la Educación Media Superior y también cuenta con 6 asignaturas obligatorias de cuatro (4) créditos cada uno. El desarrollo de sus contenidos, al igual que los restantes, propicia las estrategias y metodologías generales y específicas de la enseñanza de la Matemática focalizadas en los diferentes objetos que permean el Plan de Estudio Nacional.

Este sistema, garantizará el estudio de problemas puntuales y específicos de estos ciclos y contribuirá a la preparación del docente para reconocer y manejar las situaciones propias del nivel que le corresponde. Se han destinado un número de horas a la ejecución de las prácticas controladas como parte de los programas de las asignaturas, las cuales persiguen como propósito general contribuir a desarrollar en los maestrantes competencias profesionales que le permitan mejorar sus prácticas con plenitud humana y académica.

En lo específico tienen como objetivos: planificar y organizar los contenidos de un tema, unidad o asignatura de un nivel de enseñanza sobre la base del trabajo con los Programas vigentes, realizar el tratamiento metodológico de problemas, conceptos, teoremas o procedimientos de los programas de la educación Básica o Media superior, caracterizar la clase de matemática, en su relación con otros elementos del proceso docente educativo, analizar la planificación de una clase, teniendo en cuenta los elementos de su estructura, diseñar y ejecutar sistemas de trabajos independientes, sistemas de evaluación y sistemas de clases donde se integren y apliquen los conocimientos adquiridos y se utilicen métodos activos, en busca de un aprendizaje desarrollador. En las mismas se desarrollarán los contenidos matemáticos en estrecho vínculo con los metodológicos, insistiendo en la necesidad de argumentar y fundamentar la importancia de dirigir el aprendizaje de los alumnos sobre la base de los conocimientos de la Metodología de la enseñanza de la Matemática.

Como una consecuencia de la investigación desarrollada, fue elaborado un modelo del Trabajo Didáctico basado en la práctica reflexiva, el mismo fue concebido como un: "sistema de actividades docentes teóricas y prácticas encaminadas al perfeccionamiento del proceso docente-educativo." a partir de las deficiencias diagnosticadas en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática.

El trabajo didáctico puede conducir a un proceso de *perfeccionamiento y de profesionalización* docente, que trae aparejado, como resultado, entre otros, una transformación del componente dinámico del currículum, el cual se produce a partir de una actuación reflexiva desde la práctica, con un carácter sistémico y sistemático.

El mismo fue *instituido* de manera tal que se constituyó en una herramienta fundamental para apoyar a los docentes en la compleja tarea de asumir los cambios en la dinámica del currículo y en sus prácticas educativas, y para abrir espacios en la necesaria actualización de los conocimientos de los programas así como de las estrategias pedagógicas.

El *trabajo didáctico* aportó los recursos necesarios para que se desarrollaran elementos de reflexión acerca de la didáctica de la Matemática Escolar lo cual permitió realizar las conexiones e interrelaciones entre los diversos contenidos, para poder dar sentido a la construcción de una didáctica específica de la materia. Indiscutiblemente, todo ese proceso condujo por necesidad a una mejoría importante de la calidad del aprendizaje de la matemática en niños y jóvenes.

Producto del impacto logrado con la primera edición del proyecto, ambas instituciones han desarrollado una propuesta para ofrecer un programa de desarrollo profesional docente para la Enseñanza de la Matemática, con niveles variados de titulación (diplomados y post-grados), que incluye el grado de *Maestría en Ciencias de la Educación Mención Enseñanza de la Matemática Básica o Media superior*, el cual ha sido financiado por la Secretaría de Educación Pública de R.D. con becas a docentes de diferentes instituciones del país y en estos momentos se ha generalizado la experiencia a todo Santo Domingo.

Esta versión se desarrolla mediante la modalidad semi-presencial, incorporando el uso de Entornos Virtuales de Aprendizaje para el desarrollo de las actividades académicas, contribuye a la formación de personal calificado para la dirección del proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática y para realizar investigaciones en esta esfera.

La selección de la infraestructura tecnológica se realizó a través de un estudio comparativo de diferentes entornos virtuales y teniendo en cuenta el contexto donde se impartirá, se seleccionó el MOODLE, ya que es un entorno concebido para privilegiar el aprendizaje a partir de la actividad del alumno, posibilita la reflexión y el intercambio de opiniones, ofreciendo varias herramientas para estos fines.

Conclusiones

El proyecto *"Mejora de la Enseñanza de la Matemática",* ha demostrado, en el tiempo que lleva ejecutándose su viabilidad para ser instrumentado con recursos asequibles y la voluntad de todos los que se han enfrascado en lograr el cambio que hoy demanda la educación dominicana.

El modelo signado por la investigación como eje integrador, la formación de post-grado y el trabajo didáctico sustentado en la práctica reflexiva docente, como modalidades que interactúan en ese proceso, enriquecen la investigación y contribuyen a la solución de las contradicciones detectadas en el proceso y a levar la profesionalidad del docente de matemática.

Referencias bibliográficas

Aguadé, J. (1993, enero, 30). La declaración de Río y el año matemático mundial. Periódico La Vanguardia. Recuperado de http://mat.uab.es/~aguade/html/wmy.html

Godino, J. D (1991) .Hacia una teoría en la enseñanza de la Matemática. Madrid. En: Gutiérrez, A. (ed). (1991). [Trad.it. en: García Blanco, M.et al. (eds.) 1990].

Gil, D. Guzmán, M. (1993) .Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Madrid: Ed. Popular

González, F. (2000), "Los nuevos roles del profesor de matemática: retos de la formación de docentes para el siglo XXI", en *Paradigma,* vol. XXI, núm. 2, pp. 139–172.

OIT (1998).*La educación permanente en el siglo XXI: nuevas funciones para el personal de educación. Informe para el debate de la reunión paritaria sobre la educación permanente* *en el siglo XXI: nuevas funciones para el personal de educación*. Recuperado de: http://www.ilo.org/public/spanish/dialogue/sector/techmeet/jmep2000/jmepr1.htm

UNAPEC (julio 2002, 2003- 2004). Informe mensual. Lidia Dalmasí. Santo Domingo. Inédito

UNAPEC (2002-2004). Informe del proyecto “Mejora de la Enseñanza de la Matemática”. Santo Domingo

UNESCO (1997). Estudio Latinoamericano de Evaluación de la calidad de la Educación sobre la Enseñanza de la Matemática y del Español para los grados 3ro. y 4to. Oficina Regional de la UNESCO, para América Latina y El Caribe (OREALC).

Valverde, G., Vaileron, J., González de Lora, S. González, S. (2006, junio) *Consorcio de Evaluación e Investigación Educativa. Un estudio de la Educación básica en República Dominicana* Boletin No. 2. Recuperado de: http://ceie.albany.edu/sp/.

CONTRIBUCIONES TEÓRICAS PARA CARACTERIZAR CLASES REFLEXIVAS DE MATEMÁTICA EN LA ESCOLARIDAD BÁSICA

Natalia Sgreccia, Marta Massa
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario — Argentina
sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mmassa@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Prácticas pedagógicas específicas — Nivel: Básico

Resumen. *Para el análisis de las clases de matemática en la escolaridad básica se establece como eje de la configuración didáctica el conjunto de las sucesivas acciones que se entretejen en la clase y que, partiendo del bagaje de conocimientos del sujeto desde su experiencia e intuición, apuntan a la formación de elaboraciones cada vez más abstractas, más próximas al saber experto. En el entramado de acciones que se dan en la gestión de la clase, resulta importante considerar el lenguaje que se utiliza y especialmente las preguntas (tipo y función) que el docente formula en la interacción con los alumnos. Estas interacciones van acompañadas de representaciones (internas y externas) que deberían ser las apropiadas para favorecer el trabajo de las habilidades que desarrolla el estudio de la geometría y de los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele.*

Palabras clave: configuración didáctica, clase reflexiva, geometría

La clase reflexiva en el análisis del conocimiento en el aula

Litwin (1997) considera la clase reflexiva como una perspectiva para reconstruir el análisis acerca del conocimiento en el aula y tiene en cuenta estudios llevados a cabo por R. Nickerson, quien plantea cinco principios para fomentar la comprensión: "comenzar a enseñar a partir de los conocimientos del estudiante; promover el pensamiento activo; usar representaciones apropiadas; utilizar simulaciones; proveer de entornos de apoyo" (Nickerson, 1995, citado en Litwin, 1997: p. 84).

Esta autora también adopta, como referencia para analizar una enseñanza orientada a generar procesos reflexivos, la postura de Collins, Brown & Newman (1989) quienes consideran seis propuestas a implementar:

> *"mostrar a los estudiantes los procesos del pensar característicos de las actuaciones expertas; favorecer el reconocimiento de los problemas que surgen cuando ellos resuelven las tareas; generar soportes o andamios para ayudarlos a resolver las situaciones; poner especial cuidado en retirar los*

> *soportes cuando ya pueden trabajar independientemente; tratar de que verbalicen sus formas de resolución, comparando entre ellos dichos procesos y con los modelos iniciales si los hubo o con la actuación experta; y, finalmente, estimular no sólo a que resuelvan problemas sino a que se los planteen"* (Collins et al., 1989, citado en Litwin, 1997: p. 85).

Además resalta la importancia de

> *"(...) una cultura de las prácticas de la enseñanza que privilegia el pensar en el aula e implica la utilización de un lenguaje de pensamiento durante la clase, expectativas puestas en la reflexión del alumno que acompañan al proceso reflexivo del docente, la generación de hábitos en relación con el interrogarse y una disposición del pensamiento en términos de actitudes y valores"* (Litwin, 1997: p. 85).

Esta pedagoga argentina se adscribe a la idea de Tishman, Perkins & Jay (1995) sobre la existencia de *disposiciones para pensar bien* (Tishman et al., 1995, citado en Litwin, 1997: p. 86), quienes reconocen a la clase como un espacio propicio para el cultivo de dichas disposiciones, las cuales se expresan mediante el pensamiento abierto y flexible, el cuestionamiento y la no limitación a lo dado. Además Litwin (1997) advierte que los alcances del pensamiento reflexivo y crítico se generan in situ, en el momento de la clase, con los sujetos implicados. Esto se condice con una *concepción de enseñanza* como proceso de construcción cooperativa, en el cual no se pueden anticipar exhaustivamente los fines, ya que los mismos son construidos cooperativamente en los contextos concretos de práctica y con los sujetos participantes (Contreras, 1994, citado en Litwin, 1997).

Otra perspectiva considerada por Litwin para la reconstrucción del análisis del conocimiento en el aula es *la comunicación didáctica en la clase reflexiva*, donde hace referencia a las explicaciones por parte del docente y afirma que

> *"son producto de su conocimiento del campo y de su experiencia como docente; otras las construye improvisadamente en función de las intervenciones de los alumnos que le van aportando datos respecto de las distorsiones, las lagunas, los estereotipos, los prejuicios, las incertidumbres, los*

vacíos, las contradicciones. En una buena explicación didáctica intervienen formas coloquiales que le permiten dar fuerza a algunas ideas, sistematizarlas y fundamentarlas, exponer sus propios puntos de vista y mostrar puntos o temas sobre los que se carece de buenas justificaciones" (Litwin, 1997: p. 89).

Enseñanza para la comprensión y educación matemática

Para enseñar para la comprensión, según Stone Wiske (2003) los docentes necesitan saber qué tópicos vale la pena comprender, qué deben comprender los alumnos sobre esos tópicos, cómo pueden fomentar la comprensión, cómo pueden averiguar qué es lo que comprenden los alumnos. Acota que para que los educadores desarrollen sus propias respuestas se hace necesaria la vinculación de las teorías pedagógicas con las prácticas y también se requiere ser conscientes de que llegar a comprender cómo enseñar para la comprensión es un proceso complejo. Perrone (2003) asocia la enseñanza para la comprensión con un proceso de internalización del conocimiento y de factibilidad de su utilización en otro contexto (dentro y fuera de las aulas). Se pretende "*una educación que les permita a los individuos ser pensadores críticos, plantear y resolver problemas, ser capaces de sortear la complejidad, ir más allá de la rutina y vivir productivamente en este mundo en rápido cambio*" (Perrone, 2003: p. 36).

En relación con el conocimiento matemático, Bressan, Reyna & Zorzoli (2003: p. 14) sostienen que "*la tarea ineludible del docente, además de preparar con antelación la secuencia y anticipar las estrategias y dificultades de sus alumnos en la realización de las mismas, es llevarlos a la reflexión*". Los autores fundamentan esta afirmación en reconocer la evolución del conocimiento matemático a partir de la reflexión de lo producido por todos en la clase, otorgando relevancia a la discusión, la conjetura, la generalización y la justificación para desarrollar la capacidad de pensar y proceder. Para ello es fundamental que el docente ayude a los alumnos a explicitar los conocimientos y procedimientos que emplean para resolver las actividades mediante el empleo de un lenguaje específico y progresivamente más riguroso.

Esta idea también es sostenida por Alsina Catalá, Burgués Flamarich & Fortuny Aymemí (1995: p. 92) quienes, en relación a la enseñanza de la Matemática, manifiestan que "*la observación libre debe ir acompañada de la observación provocada, ya sea con preguntas orales, o con fichas escritas debe orientarse las observaciones hacia aspectos que no siendo obvios o aparentes pueden tener gran interés*". Estos autores sugieren ciertos indicadores de comprensión en geometría, los cuales deben permitir decir "*qué comportamientos de percepción espacial han sido adquiridos y cuál ha sido su grado de adquisición*" (Alsina Catalá et al., 1995: p. 118). Además, para estos autores, el saber hacer preguntas, establecer el diálogo, es de vital importancia para todo el proceso educativo. Inclusive distinguen tres niveles de interrogación (1. ejercicios rutinarios de memorización; 2. cuestiones en las que se necesita algo más que recurrir a la memoria; 3. elaboración de informes de contenido espacial), los cuales indican el grado de apropiación de los conocimientos geométricos y deberían ser tenidos en cuenta por el docente en el momento de planificar las actividades de aula, de seleccionar los libros de texto y al evaluar el aprendizaje de sus alumnos.

Un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría es el propuesto por Dina y Pierre Marrie van Hiele que consiste en un modelo de estratificación del razonamiento geométrico en cinco niveles de conocimiento que permiten categorizar los distintos grados de representación del espacio y cuyo tránsito ordenado facilita una didáctica posible (Alsina Catalá et al., 1995). Los *niveles* son: 0) visualización; 1) análisis; 2) deducción informal; 3) deducción formal; 4) rigor. Debe existir una sintonía entre el nivel de razonamiento del alumno y la instrucción que recibe por parte del docente.

También se propone una serie de *fases* de aprendizaje para pasar de un nivel a otro: 1) indagación; 2) orientación dirigida; 3) explicitación; 4) orientación libre; 5) integración.

Bressan et al. (2003) destacan un conjunto de habilidades que se desarrollan y acompañan el aprendizaje de la geometría: de razonamiento lógico; visuales; de ubicación; de dibujo y construcción; de comunicación; de aplicación o transferencia.

Resulta interesante, a partir del reconocimiento de actuaciones docentes inscriptas en configuraciones didácticas específicas, estudiar cómo se promueve el desarrollo de dichas habilidades en las clases de matemática cuando se enseña geometría.

La clase reflexiva en la enseñanza de la geometría

La clase reflexiva se sostiene fuertemente sobre procesos promovidos desde la comunicación didáctica, la cual está asentada sobre el lenguaje, adoptando diferentes formas: el diálogo alumno-alumno y docente-alumno, en la exposición del profesor y en el texto escrito a través del cual un autor se expresa a sus lectores. Autores tales como Villella (2001) y Candela (2003) resaltan el valor cualitativo de una clase tradicional, donde el docente, además de trabajar en la adecuación de los contenidos de acuerdo al nivel de los alumnos, busca las mejores formas de explicación, de transmisión y de aplicación a diversas situaciones. Candela (2003) ha mostrado en una investigación en aulas que la exposición adecuada de un profesor puede ir desarrollando procesos reflexivos en sus alumnos cuando su discurso articula diferentes recursos para dar vida al saber. Desde este punto de vista la clase reflexiva está asociada con el sentido asignado no tanto a las acciones físicas que se desarrollan en el aula sino al sentido que ellas tienen para la promoción del pensamiento activo. Desde el hacer docente, tales acciones deben proveer los entornos de apoyo mencionados por Nickerson (1995, citado en Litwin, 1997).

Para orientar el análisis de una clase desde la perspectiva del hacer docente y captar sus características reflexivas se pueden adoptar los lineamientos establecidos por Fioriti (2006: p. 86) quien reconoce tres aspectos básicos: “identificar los contenidos a enseñar, seleccionar las situaciones de enseñanza y gestionar la clase para hacer que los alumnos se apropien del conocimiento y aprendan formas de estudiar matemática”.

Fioriti (2006) observa que el rigor, como exigencia interna de la actividad matemática, se va construyendo progresivamente, con sucesivas aproximaciones. Además cabe señalar que un nivel de rigor propiamente dicho (nivel 4 de van Hiele) es prácticamente inalcanzable por un estudiante de la escolaridad básica.

Bressan et al. (2003) señalan una visión de la enseñanza de la geometría desde una posición constructivista, en la cual

> "*(el sujeto aprende en interacción con el objeto de conocimiento), la necesidad de entrar al edificio matemático a partir de la experiencia (visual, táctil, motriz), aprovechando las intuiciones que poseemos las personas, en este caso nuestros alumnos, acerca del mundo que nos rodea, y la mediación del docente que proporciona el lenguaje (verbal y gráfico) necesario, enseña procedimientos (mediciones, representaciones, etc.) y presenta 'situaciones didácticas' intencionalmente buscadas, para que el alumno mediante la investigación y la experimentación y ayudado por la interacción con sus pares y el propio docente, pueda crear paulatinamente elaboraciones más abstractas, avanzando hacia el establecimiento de imágenes, relaciones y razonamientos manejables mentalmente"* (p. 5).

Se pueden encontrar puntos de contacto entre estas ideas, referidas a la enseñanza de la geometría, y los referentes que anteriormente se han considerado (Nickerson, 1995; Collins et al., 1989; Litwin, 1997) para el análisis del conocimiento en el aula, como por ejemplo:

- *"El sujeto aprende en interacción con el objeto de conocimiento" con "Utilizar simulaciones".*
- *"Aprovechar las intuiciones de las personas" con "Comenzar a enseñar a partir de los conocimientos del estudiante".*
- *"El docente proporciona el lenguaje (verbal y gráfico) necesario; enseña procedimientos" con "Usar representaciones apropiadas; mostrar a los estudiantes los procesos del pensar característicos de las actuaciones expertas".*
- *"El docente presenta situaciones didácticas intencionalmente buscadas, para que el alumno mediante la investigación y la experimentación y ayudado por la*

interacción con sus pares y el propio docente, pueda crear paulatinamente elaboraciones más abstractas" con "Proveer de entornos de apoyo; favorecer el reconocimiento de los problemas que surgen cuando los alumnos resuelven las tareas; generar soportes o andamios para ayudarlos a resolver situaciones; poner especial cuidado en retirar los soportes cuando ya pueden trabajar independientemente; tratar de que verbalicen sus formas de resolución, comparando entre ellos dichos procesos y con los modelos iniciales o con la actuación experta".

Con respecto a la enseñanza de la geometría para alumnos de 12 a 16 años de edad, Alsina Catalá, Fortuny Aymemí & Pérez Gomez (1997) manifiestan que

"se ha de valorar como fundamental el trabajo de investigación y la combinación de técnicas metodológicas diversas que fomenten actividades en las líneas siguientes: a) la relación frecuente de referentes no simbólicos con los conceptos, de forma que se promueva la multivariedad de representaciones; b) un progreso desde la intuición hasta el conocimiento matemático, con itinerarios diversos que faciliten el seguimiento de las actividades según los ritmos y capacidades personales; c) la comunicación como elemento clave que ayuda a superar dificultades individuales y que colabora en la construcción de los conceptos; d) fomento de actitudes positivas en relación con el trabajo, basado en presentaciones próximas, significativas y atractivas; e) trabajo grupal cooperativo, fomento de valores globales de aprendizaje; f) integración con la realidad cotidiana, no sólo como referente fundamental fenomenológico, sino también como forma de valorar la relación con el medio; g) fomento del trabajo con tendencia interdisciplinar, y la presentación de cuadros diversos con 'instrumentos-objeto' que enmarcan los elementos conceptuales y procedimentales" (p. 111).

Estas líneas se relacionan con lo desarrollado hasta el momento. Algunas vinculaciones, correspondiéndose con los apartados ítems a), b), ... g), son:

a) usar representaciones apropiadas (Nickerson, 1995); b) tránsito por los niveles de van Hiele, proveer de entornos de apoyo (Nickerson, 1995), generar soportes o andamios para ayudarlos a resolver las situaciones, poner especial cuidado en retirar los soportes cuando ya pueden trabajar independientemente (Collins et al., 1989), entrar al edificio matemático a partir de la experiencia [...] , aprovechando las intuiciones que poseemos las personas, en este caso nuestros alumnos, acerca del mundo que nos rodea, y la mediación del docente [...] , para que el alumno [...], pueda crear paulatinamente elaboraciones más abstractas, avanzando hacia el establecimiento de imágenes, relaciones y razonamientos manejables mentalmente (Bressan et al., 2003); c) tratar de que verbalicen sus formas de resolución, comparando entre ellos dichos procesos y con los modelos iniciales si los hubo o con la actuación experta (Collins et al., 1989); d) proveer de entornos de apoyo (Nickerson, 1995); e) concepción de enseñanza como proceso de construcción cooperativa (Litwin, 1997; Contreras, 1994); f) considerar la relación entre aquello que el sujeto aprende en las aulas con las situaciones que debe enfrentar en el mundo del trabajo (Nickerson, 1995), entrar al edificio matemático a partir de la experiencia, aprovechando las intuiciones que poseemos las personas, en este caso nuestros alumnos, acerca del mundo que nos rodea (Bressan et al., 2003); g) utilizar simulaciones (Nickerson, 1995).

En la búsqueda de una caracterización de la clase reflexiva en geometría, se rescatan aportes de Quaranta y Wolman (2005), quienes efectúan un análisis de las *discusiones en las clases de matemática* en el que recalcan la significatividad de los intercambios entre los distintos actores, ya que enriquecen actividades futuras del grupo-clase. Este reconocimiento a las interacciones que se dan en el aula es fundamental para pensar la gestión de una clase de matemática (Fioriti, 2006) donde se busca que los alumnos aprendan. También converge con la propuesta de Collins et al. (1989) acerca de la promoción de la comunicación de las formas de resolución, donde se comparan los modelos iniciales con la actuación experta del docente.

Quaranta y Wolman (2005) nos advierten que, en los momentos de discusión, el docente no se restringe a ser un mero espectador de lo que acontece, sino que es un participante activo, quien guía las discusiones, incita a los alumnos a ofrecer explicitaciones, acepta respuestas diversas, retoma lo que dice algún alumno para compartirlo con el grupo-clase, plantea contraejemplos, ayuda a que los alumnos encuentren la manera de acordar. Asimismo no desconocen los beneficios de la resolución conjunta entre alumnos, en la cual se valora y se reflexiona sobre la palabra del otro. Esta valoración se condice con lo propuesto por Collins et al. (1989) sobre la verbalización y comparación de las formas de resolución, por Litwin (1997) sobre la enseñanza como proceso de construcción cooperativo y por Alsina Catalá et al. (1997) sobre el trabajo grupal cooperativo. Además las autoras identifican interacciones productivas por parte de los alumnos, las cuales implican una actitud reflexiva en relación con los conocimientos geométricos, ya que promueven, entre otros, el pensamiento activo (Nickerson, 1995), la comunicación de los procesos de resolución (Collins et al., 1989), el pensamiento crítico y exploratorio (Thisman et al., 1995), la cooperación en los procesos constructivos de enseñar y aprender (Litwin, 1997; Contreras, 1994), la apropiación de conocimientos matemáticos (Fioriti, 2006), la comunicación para superar dificultades y construir conceptos (Alsina Catalá et al., 1997).

Síntesis conceptual

A partir de los aportes de los distintos referentes teóricos considerados, para el análisis de las clases se establece como eje de la configuración didáctica el conjunto de las sucesivas acciones que se entretejen en la clase y que, partiendo del bagaje de conocimientos del sujeto desde su experiencia e intuición, apuntan a la formación de elaboraciones cada vez más abstractas, más próximas al saber experto. En el entramado de acciones que se dan en la gestión de la clase, resulta importante considerar el lenguaje que se utiliza y especialmente las preguntas que el docente formula en la interacción con los alumnos. Estas interacciones van acompañadas de representaciones que deberían ser las apropiadas para favorecer el trabajo de las habilidades que desarrolla el estudio de la geometría y de los niveles de razonamiento geométrico. Hay dos aspectos básicos que sostienen el eje de la configuración didáctica de una clase reflexiva: 1) los recursos y entornos de apoyo que forman parte del andamio que el docente genera como soporte y que, sin llegar a generar dependencia, ayuda a los alumnos en el proceso de comprensión; 2) la invitación a las acciones, desde la verbalización, resolución y formulación, que estén pensadas para contribuir al pensamiento activo por parte de los alumnos. Esta síntesis conceptual se puede visualizar en el siguiente esquema.

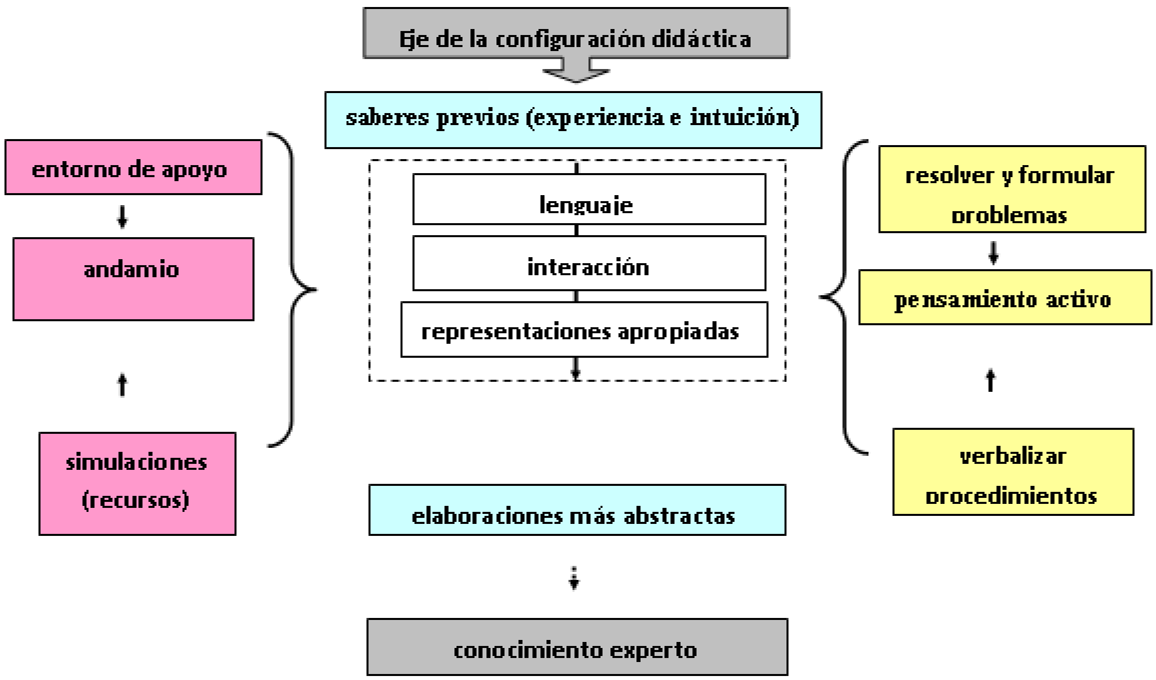


Figura 1: Componentes para la gestión de una clase de geometría en la escolaridad básica

Referencias bibliográficas

Alsina Catalá, C., Burgués Flamarich, C. & Fortuny Aymemí, J. (1995). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Síntesis.

Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J. & Pérez Gomez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Síntesis.

Bressan, A., Reyna, I. & Zorzoli, G. (2003). *Enseñar Geometría. Redescubrir una tarea posible. Actividades para grupos escolares de 6 a 12 años.* Montevideo: Styrka.

Candela, A. (2003). *Física y Físicos: Construcción Discursiva de una Identidad Cultural en Aulas Universitarias.* Conferencia en el II Encontro Internacional Linguagem Cultura e Cognição: Reflexões para o Encino, Belo Horizonte, Brasil.

Fioriti, G. (2006). La Didáctica de la Matemática como dominio de conocimiento. En G. Fioriti (Ed.), *Didácticas específicas. Reflexiones y aportes para la enseñanza* (pp. 81-97). Buenos Aires: Miño y Dávila.

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas: Una nueva agenda para la enseñanza superior.* Buenos Aires: Paidós.

Perrone, V. (2003). ¿Por qué necesitamos una pedagogía de la comprensión? En M. Stone Wiske (Ed.), *La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 35-68). Buenos Aires: Paidós.

Quaranta, M. & Wolman, S. (2005). Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute. En M. Panizza (Ed.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 189-243). (3º ed.). Bs. As.: Paidós.

Stone Wiske, M. (2003). La importancia de la comprensión. En M. Stone Wiske (Ed.), *La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 21-31). Buenos Aires: Paidós.

Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres... Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB.* Buenos Aires: Aique.

FORMACIÓN Y CAPACITACIÓN DE PROFESORES. UNA EXPERIENCIA DE FORTALECIMIENTO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Santiago Ramiro Velázquez, Oliver Texta Mongoy
Secretaría de Educación Guerrero, Universidad Autónoma de Guerrero México
sramiro@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Medio

Resumen. *En este artículo se aborda el problema referente a que el discurso matemático escolar –dme- por lo general no se mira como una práctica social generadora de saberes. Se constata este problema con argumentos teóricos que consideran a este discurso abierto, flexible, integral y vinculado con las prácticas sociales. El propósito es explorar la evolución del dme del profesor de nivel medio superior (nms) al participar en actividades de capacitación. Para lograrlo se realiza un taller con profesores y el diseño de situaciones de aprendizaje por parte de éstos, para ponerlas en escena con sus alumnos. Se presentan resultados preliminares que muestran explicaciones discursivas flexibles, pero desvinculadas de las prácticas sociales donde están inmersas las situaciones matemáticas motivo de estudio*.
Palabras clave: discurso matemático escolar, capacitación de profesores.

Introducción

Este trabajo centra su atención en la formación y capacitación de profesores de matemáticas, como actores clave en el aprendizaje de los alumnos. En una experiencia de investigación, constatamos que el desarrollo didáctico de los profesores inicia cuando toman conciencia de sus concepciones acerca de su formación matemática y didáctica, y de los requerimientos para que desempeñen con éxito su labor. A partir de este reconocimiento se disponen a participar en actividades de capacitación y actualización permanente que aseguren la evolución de sus saberes y sean usuarios inteligentes y críticos de los materiales de apoyo didáctico.

Consideramos que una de las funciones del profesor consiste en seleccionar y diseñar situaciones de aprendizaje en las que es guía y mediador. En este sentido se concibe al alumno como un constructor de sus saberes y activo luchador por el conocimiento, con el propósito de convertirse en una persona competente. Se trata de que profesores y alumnos construyan un discurso matemático escolar (Aparicio y Cantoral, 2006) amplio, considerado en sus diversas manifestaciones como práctica social. De manera que haya un entrelazamiento entre el discurso escolar y el discurso cotidiano para su enriquecimiento mutuo a favor de la generación de conocimientos. Desde esta perspectiva se rige el contrato didáctico (Chevallard et al, 1998), que sugerimos.

Nos referimos a un contrato didáctico en el que uno de los compromisos de profesores y alumnos es enriquecer el discurso matemático escolar, entendido éste como un medio para la construcción social de saberes y por ende para comunicar esos saberes en un ambiente abierto, de cooperativismo y de convivencia regido por la participación colectiva.

> *La participación es un proceso en el que las personas y los grupos desarrollan acciones estimulados por sus propias ideas y decisiones, sobre las cuales asumen el control. Mediante sus iniciativas descubren sus potencialidades, usan sus facultades y recursos, desarrollan su creatividad y crecen a nivel individual y colectivo. Desde esta perspectiva la participación es un proceso de cambio de actitud, de descubrimiento de valores, de comunicación y de desarrollo de métodos de pensamiento y acción* (Benavides 1995, p. 24).

Como ya se puede mirar en las ideas anteriores esta investigación se ubica en la socioepistemología, aproximación teórica de carácter sistémico encaminada a explicar fenómenos didácticos en el ámbito de las matemáticas a través del estudio del papel que juega la construcción social de saberes. Inscritos en esta posición teórica nos proponemos hacer una explicación de la evolución del discurso matemático escolar del profesor de nms al participar en actividades de capacitación.

Velázquez et al (2005) documentan las condiciones académicas de profesores de matemáticas de nivel medio superior en el sentido de que en lo general no comparten un discurso matemático como medio para la construcción social de saberes, en su lugar se maneja una relación entre lenguaje matemático y común. De modo similar en su práctica laboral prevalece el abordaje de los contenidos desvinculados de las condiciones en que surgen y de las prácticas donde están inmersos. Para el caso del estado de Guerrero, esta situación obedece en parte a que el 66 % de los profesores proceden de profesiones diferentes a la que ejercen, y el resto de normales superiores y muy pocos de licenciaturas en matemáticas.

Cordero (2005) identifica algunos problemas a considerar en la conformación de un modelo didáctico en el nivel superior, como el hecho de que en la matemática escolar no hay consideraciones acerca de los significados de los objetos matemáticos y sobre las actividades que favorecen su construcción y sostiene la necesidad de un rediseño del dme, para lograr que el estudio de la enseñanza de las matemáticas impacte en su enseñanza y aprendizaje. En otra de sus investigaciones sobre gráficas de funciones, sostiene que en su tratamiento ha prevalecido una representación del concepto de función y lo atribuye a las posiciones teóricas que lo sustentan. Y agrega.

> *Es necesario otro marco de referencia enfocado a lo que pudiera ser el conocimiento institucional que explique a las gráficas de las funciones como una manifestación de los usos del conocimiento en el discurso matemático escolar, donde se resignifican al debatir entre sus funcionamientos y sus formas al paso de la vivencia escolar* (Cordero y Flores, 2007, p. 11).

Dolores y Cuevas (2007) resaltan que sobre la base de esta perspectiva teórica, la socioepistemología, se reportan evidencias sobre "prácticas argumentativas gráficas en diversas situaciones" donde se debate sobre la función y la forma de la graficación.

Aparicio y Cantoral (2006) sostienen que por lo general el discurso matemático escolar y el trabajo en el aula no se consideran vinculados a las prácticas sociales como generadoras de saberes. En estos términos al conocimiento matemático en el aula se le desconecta de las prácticas en las que está inmerso, y que aseguran su resignificación por parte de los alumnos. De modo que dichos conocimientos se miran en los distintos usos que hace de ellos la sociedad.

Buendía (2006) en sus investigaciones considera que en un sistema didáctico no solo se miren los aspectos analíticos y formales, sino además las prácticas sociales que permiten darles sentido y resignificarlos. En su estudio sobre lo periódico se puede ver que éste tiene una práctica social de referencia, la predicción.

Desde esta perspectiva postulamos que el conocimiento matemático no es ni acabado ni inmutable, está en constante evolución. Trasciende las definiciones al recorrer un tramo antes y después de ellas. Incluso las propias definiciones y soluciones se miran de manera crítica, de lo contrario se puede caer en contradicciones. En este sentido si nos referimos a un problema elemental e histórico de probabilidad, como es el caso del problema de los puntos del Caballero de la Meré - Dos personas compiten en un juego hasta completar un cierto número de puntos, digamos que se trata de dos personas llamémosles A y B que juegan a los volados. Si cae águila A gana un punto, si cae sol B gana un punto. Juegan varios volados y se decide que gane el primero que complete 3 puntos. Pero cuando A lleva 2 puntos y B leva 1, el juego se interrumpe. ¿Cómo debe dividirse la apuesta?- en cuya solución participa el propio Caballero de la Meré. Quien resuelve dividiendo la apuesta en partes proporcionales a los puntos acumulados, es decir 2/3 para el que lleva dos puntos y 1/3 para el que lleva uno. En tanto que Fermat y Pascal por vías diferentes llegan al resultado de ¾ para A y ¼ para B, ambas soluciones parecen razonables ¿ Realmente lo son?.

En el mismo sentido sostenemos, Velázquez et al (2006) que estudiar temas elementales de probabilidad como eventos independientes, equiprobables y mutuamente excluyentes asociados a la práctica de juegos de azar, asegura la comprensión y la negociación de sentidos y significados por parte de los alumnos. Sobre esta base consideramos la necesidad de un discurso matemático escolar en continua evolución, que de cuenta de un sistema didáctico que considera las diversas prácticas sociales como generadoras de saberes. Por ejemplo lo periódico inmerso en las prácticas de predicción, los procesos de cambio inmersos en la promediación, la probabilidad inmersa en los juegos de azar y en otras prácticas aleatorias.

Soporte teórico

Consideramos que la socioepistemología como aproximación teórica nos ubica en un ángulo desde el que se puede mirar un discurso matemático escolar abierto, amplio e integral. Ya que como lo afirma Cantoral (2001) la socioepistemología plantea el estudio del conocimiento matemático como social, histórico y culturalmente situado, analizando sus condiciones de construcción, difusión y uso social. En este sentido Newton construye su binomio con un significado eminentemente de predicción e inicialmente lo escribe de esta manera $(P + PQ)^{m/n}$ y no como generalmente se trata en la escuela con un sentido algorítmico cuya escritura es $(a + b)^n$ desligado de las circunstancias en que fue creado. Ambas expresiones del binomio son matemáticamente equivalentes pero conceptualmente distintas. Desde esta visión sostenemos que el discurso matemático del profesor puede ser de distintas maneras, como inamovible, rígido y acabado o abierto, integral y vinculado con las prácticas y usos sociales.

Desde esta posición se mira que uno de los aspectos fundamentales en los que se basa este trabajo es la unidad de los procesos de pensamiento y lenguaje que emergen de las prácticas sociohistóricoculturales. Una arista de estos procesos es el discurso matemático que surge y se desarrolla en la construcción social de saberes. En lo referente a los procesos de pensamiento y lenguaje, se sostiene " *El significado de cada palabra es una generalización o un concepto. Si las generalizaciones y conceptos son actos del pensamiento podemos considerar al significado como inherente al pensamiento*" (Vygotsky, 1997, p. 142).

Como se puede ver estas tesis muestran la unidad entre el pensamiento y el lenguaje, por lo que la construcción de saberes matemáticos que se da a través de la interacción discursiva y la negociación de significados promueve el desarrollo del pensamiento matemático. A su vez se puede mirar que los saberes matemáticos no son inmutables, ya que están en constante evolución en dependencia de las prácticas de la sociedad y sus intencionalidades.

Compartimos las ideas de Aparicio y Cantoral (2006) acerca de que el discurso en sus diversas manifestaciones como práctica social es un medio para la construcción de saberes. De manera que es deseable que haya un entrelazamiento entre el discurso escolar y el discurso cotidiano para su enriquecimiento mutuo a favor de la generación de conocimientos. En este sentido Batanero (2005) considera que en el proceso de estudio de un contenido matemático, son relevantes tanto los significados personales y empíricos como los significados matemáticos.

En las ideas anteriores se mira la socioepistemología como una aproximación teórica cuyas componentes epistemológica, cognitiva, didáctica y social constituyen un sistema fuertemente unido. En el que al considerar alguna de ellas necesariamente consideramos las demás, en este caso para ofrecer una explicación del discurso matemático escolar como un medio para la construcción de saberes. Que a su vez refleja la práctica del profesor de matemáticas al participar en actividades de capacitación.

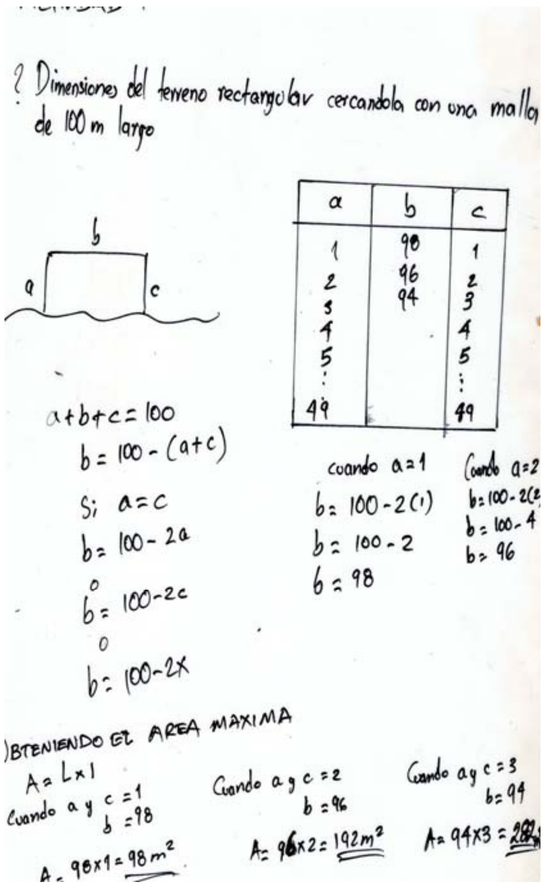
Desarrollo de la experiencia

Esta experiencia se desarrolla en dos etapas, la primera tiene como propósito que los profesores se sensibilicen sobre la importancia de participar en la capacitación y actualización y explorar su discurso matemático escolar, a través de un curso- taller denominado planeación y evaluación del aprendizaje matemático. En él participan 15 profesores del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Guerrero (CECYTEG), y se realiza en tres sesiones de cuatro horas cada una, en las instalaciones de uno de los planteles. La modalidad de trabajo es el taller en el que los profesores comparten experiencias, habilidades y estrategias en la solución de los problemas planteados. Con el apoyo de diversas fuentes, producen saberes que confrontan, validan e institucionalizan con sus compañeros y asesores.

En la segunda etapa se propone a dos de los participantes en el curso-taller diseñar una secuencia de aprendizaje para ponerla en escena con sus alumnos. Este diseño se socializa con los demás participantes a fin de analizarla, mejorarla y adecuarla a las necesidades de sus estudiantes. Estos diseños se ponen en escena en dos grupos de alumnos del tercer semestre, cada grupo se forma con dos equipos de tres integrantes, con la finalidad de observar y analizar la interacción que se genera en el aula, que da cuenta las explicaciones discursivas del profesor y de los alumnos.

Resultados

La aceptación de los profesores a participar en el taller fuera de su carga laboral, muestra que están interesados en iniciar o continuar su desarrollo didáctico a fin de ir modificando la forma de trabajar con los alumnos. En este momento tenemos resultados de la primera etapa en la que en una de las sesiones se propone este problema a los participantes: ¿Cuáles son las dimensiones del terreno rectangular de área máxima que se puede cercar con una malla ciclónica de 100 m de largo?. El terreno se encuentra a la orilla de una laguna y el lado colindante a ella no se cercaría. –Este problema se plantea con el propósito de explorar el discurso matemático escolar que utilizan los profesores, al resolver estas tareas y las maneras de interactuar. A continuación se muestran algunos de los resultados.


¿Dimensiones del terreno rectangular cercandola con una malla de 100 m largo

a	b	c
1	98	1
2	96	2
3	94	3
4		4
5		5
⋮		⋮
49		49

a+b+c=100
b = 100 - (a+c)
Si a=c
b= 100-2a
o
b= 100-2c
o
b= 100-2x

cuando a=1
b= 100-2(1)
b= 100-2
b= 98

Cuando a=2
b=100-2(2
b= 100-4
b= 96

OBTENIENDO EL AREA MAXIMA
A= Lx l
Cuando a y c =1
b =98
A. 98x1=98 m²

Cuando a y c =2
b =96
A= 96x2= 192m²

Cuando a y c =3
b= 94
A= 94x3 = 28

El equipo 1 explica su estrategia.

Al crecer A crece B.

$A = 1, B = 2$ hasta llegar a $A + B + C = 100$

$B = 100 - A + C$

$B = 100 - 2A$

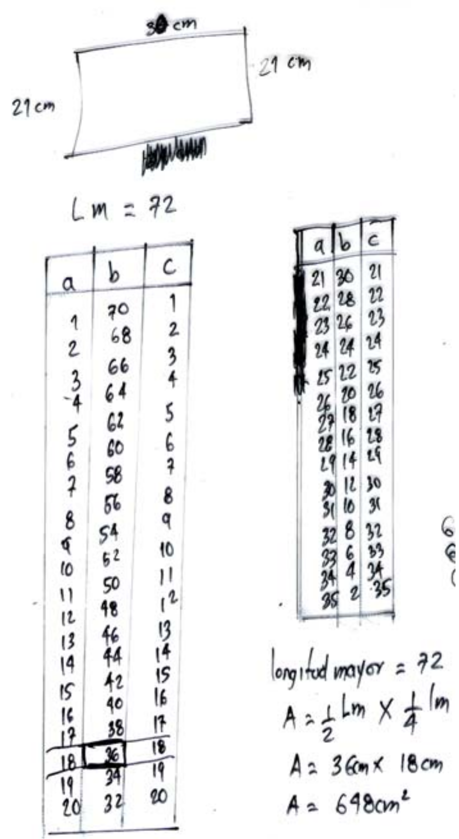
$B = 100 - 2x$

Hicimos una tabla y observamos que el punto medio es el área mayor y obtenemos la siguiente fórmula $A = \frac{1}{2}$ Lm x $\frac{1}{4}$ Lm

Lm = Longitud de la maya.

Comentario:

En esta producción del equipo predomina el marco aritmético y el algebraico, en ambos se mira la idea de solución sin llegar a ella. De la fórmula se desprende que las dimensiones buscadas son 50m y 25m, pero no la explicitan. Se mira un dme flexible.



El equipo No. 2 utiliza una forma similar a la del primer equipo, predomina el marco aritmético y el algebraico. Si bien no se nota en las anotaciones que realizan, intentan aplicar la misma idea de un problema idéntico en donde se cercan los cuatro lados del terreno, argumentan que este es un caso diferente.

Uno de los profesores afirma no tabulamos de la misma manera y encontramos que el punto medio también nos da el área máxima.

Otro dice, mira es que en este problema sólo cercamos 3 lados ya que colinda con una laguna y en el otro cercamos un terreno rectangular, no puedes aplicar la misma fórmula

En ambas producciones se mira un discurso matemático escolar flexible, no se mira algún comentario de los profesores o del asesor sobre las maneras en que proceden las personas interesadas en cercar un área máxima, cuando hay un reparto de tierras. De igual modo no se comenta la posibilidad de ver esta situación como un problema de optimización, donde se relacione el perímetro con el área del rectángulo. Además, constatar que en este caso si el rectángulo fuera cuadrado, tendría menos área que el rectángulo de 50 x 25.

Reflexiones finales

Consideramos que el desarrollo de la siguiente etapa de la investigación mostrará explicaciones discursivas que den cuentan de la evolución del dme de los profesores. Por otra parte expresamos que la problemática que se aborda en este artículo, se analiza en un grupo de discusión trabajado en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa realizada en Venezuela. Con la participación de 30 profesores de diversos países de América Latina, quienes consideran que la formación, capacitación y actualización de profesores es fundamental en la educación matemática de los alumnos. Uno de los compromisos de los asistentes a este grupo consiste en abrir un foro virtual para que la discusión en este campo sea permanente. Dicho foro está iniciando, los interesados pueden inscribirse en http://mateuag.sistemae.net/

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (1), 7-30.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (3), 247-263.

Benavides, L. (1995). La participación social como condición para la calidad educativa. *En Foro Internacional escuela, Familia y Sociedad*. México: IFE-UNESCO.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (2), 227-251.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: un estudio de la formación social de la analicidad*. México: Iberoamérica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (3), 265-286.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), 7-38.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: SEP.

Dolores, C. y Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), 69-96.

Velázquez, S., Cabañas, G., Marmolejo, E., Nolasco, H., García, G., Flores, C., Díaz, M. y García, V. (2005). *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior. Una experiencia de capacitación de profesores*. México: Santillana.

Velázquez, C., Santos, R. y Fernando, M. (2006). *Puedo aprender probabilidad jugando canicas en la feria*. Trabajo premiado en la Quinta Jornada Científico Estudiantil, no publicado, Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Vigotsky, L. (1997). *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.

LA PRAXIS DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Martín Andonegui Zabala
Universidad Pedagógica Libertador Venezuela
m_andonegui@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Medio, Superior

Resumen. *Se aborda el problema de la integración del objetivo de la formación de los educandos en el oficio de la ciudadanía, dentro de la estructura de la Didáctica de la Matemática. Para ello se procede a la elaboración de una nueva conceptualización, cuyo eje conductor radica en la consideración de la práctica disciplinar como una actividad. En este ámbito, se asume la categorización aristotélica de la actividad humana conocida como praxis, caracterizada por la búsqueda del bien ético-político y diferenciada de la poiesis, actividad regida por normas y orientada a la reproducción de modelos. El concepto de praxis se enriquece desde las perspectivas de la filosofía ético-política, de la sociología y de la psicología. Con todos estos aportes se construye y se caracteriza el concepto de praxis de la Didáctica de la Matemática, como conjunto de acciones orientadas a la formación de los educandos en el oficio de la ciudadanía.*

Palabras clave: didáctica de la matemática, praxis, formación ciudadana

La formación en el oficio de la ciudadanía

La *ciudadanía* es una categoría o concepto social referido a una dimensión del ser humano en cuanto integrante de una comunidad social estructuralmente organizada; es, también, "*una práctica histórica socialmente construida*" (Giroux, 1993, p. 21). De suyo es, pues, un concepto múltiple, abierto.

En efecto, la cultura cívica supone la adquisición de conocimientos sobre la vida política, el aprendizaje práctico del ejercicio de la ciudadanía, y la adhesión a unos valores; implica un sentimiento común de pertenencia que no puede establecerse mediante leyes. Y es que, fundamentalmente, está referida a un núcleo de prácticas de comunicación, de participación y servicio a la comunidad; prácticas de *compromiso*, que se emprenden como actividades éticamente buenas por sí mismas y no como medios para alcanzar un fin instrumentalmente definido, ya que la ciudadanía es siempre la definición de un *ejercicio moral* (Bárcena, 1997).

De este modo, la ciudadanía se concibe como una forma de vida que transforma a la persona por entero. Es un proceso que, ciertamente, exige el desarrollo de una capacidad personal de interpretación y deliberación. Pero "*este proceso es, esencialmente, una empresa colectiva, dialógica, un aprendizaje compartido. Más aún, la noción de ciudadano es ininteligible separada de la noción de bien común, y ambos términos derivan su sentido de la idea de que somos por naturaleza seres políticos*" (Bárcena, ob. cit.: 86).

El ideal a alcanzar en una sociedad es el de *vivir como ciudadanos en democracia*, en cuanto ésta valora la participación ciudadana como actividad intrínseca y consustancial al desarrollo, individual y colectivo, de las cualidades propias del ser humano.

Las características de la democracia como forma de vida cívica se refieren a:

- los *ideales* que la orientan: la libertad individual y colectiva, el desarrollo humano, y la igualdad moral intrínseca de todos los individuos;
- la *pluralidad*; la *diversidad*; la *tolerancia*;
- la *autonomía* personal y, en particular, la capacidad de *deliberación*, de emitir y sostener un *juicio político* personal;
- el *diálogo* y el *debate* público, para la *resolución de conflictos*;
- la *participación* entendida como la acción y efecto de tomar parte en los asuntos públicos, por parte de los ciudadanos;
- la *convivencia*;
- la búsqueda de un *bien común*, búsqueda plena de *sentido comunitario*, de *solidaridad y cooperación*.

Ahora bien, para la formación ciudadana de las personas –para el aprendizaje social de la ciudadanía- resulta imprescindible la constitución y preservación de un espacio o de una *esfera pública* (Arendt, 2003), en la que los individuos, en tanto que ciudadanos, interactúen por medio del habla y la persuasión; un contexto propicio en el que muestren sus genuinas identidades y decidan, mediante la deliberación colectiva, sobre asuntos de interés común. Se trata de comunidades humanas abarcables que proporcionan "*las raíces necesarias para tener un sentido de lugar y de lucha*" (Giroux, 1993, p. 31).

La escuela es una de estas esferas públicas. El fundamento de esta identificación de la escuela como espacio público para la formación y el ejercicio del oficio de la ciudadanía se halla en la *dimensión cívica, ciudadana o ético-política* que, de suyo, posee la educación. Así, pues, "en su calidad de esferas públicas democráticas, las *escuelas* pasan a ser lugares donde los estudiantes aprenden los conocimientos y las habilidades de ciudadanía dentro de formas de solidaridad que constituyen la base para construir formas emancipatorias de vida comunitaria" (Giroux, ob. cit.: 62).

Esta caracterización de la escuela tiene que ver con todos los aspectos que abarca, desde el proyecto educativo institucional, la organización escolar, los planes de estudio, los procesos de aprendizaje, enseñanza y evaluación de los contenidos disciplinares, hasta la inmersión en proyectos de desarrollo comunitario.

Ahora bien, frente al panorama de lo que representa la formación de sus educandos en el oficio de la ciudadanía, descubrimos (Andonegui, 2007) que los docentes no la asignan como objetivo de la educación matemática de los mismos, ni perciben de qué manera esta educación matemática de sus alumnos incide en su formación como ciudadanos, ni tampoco cuáles son las formas específicas de pensar y desarrollar en la práctica los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, con el fin de generar la formación de los alumnos en el oficio de la ciudadanía.

La formación en el oficio de la ciudadanía como problema para la Didáctica de la Matemática

Pero el anterior no es sólo un problema para los docentes. También lo es para la Didáctica de la Matemática, algunos de cuyos enfoques habituales desestiman que, al ser las teorías y los resultados científicos una construcción y no un desvelamiento, las disciplinas científicas tienen una historia, que esta historicidad propicia la inclusión de los factores humanos y sociales en el proceso de su formación y evolución, y que de este modo, toda disciplina científica responde a proyectos humanos. Proyectos humanos que parten de ideas preconcebidas sobre un determinado campo de indagación humana, lo que nos lleva a afirmar que "una disciplina científica está menos determinada por su objeto que por su objetivo" (Fourez, 2000: 79).

No nos vamos a detener en el análisis detallado de las diversas perspectivas de la Didáctica de la Matemática y en la manera como se plantean y proponen –o no- el objetivo de la formación ciudadana de los educandos. Pero ciertamente encontramos algunos enfoques que no consideran la formación de los alumnos en el oficio de la ciudadanía como inherente a la concepción de la disciplina, como parte de alguna de sus dimensiones, y que, por consiguiente y al igual que en el caso de los docentes, tampoco indican formas prácticas específicas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática susceptibles de generar la formación ético-política de los alumnos (Andonegui, 2007).

Una primera aproximación a la praxis de la Didáctica de la Matemática

Desde la perspectiva de la filosofía primera (González, 1997), la praxis comprende todos los actos humanos, estructurados en tres modos fundamentales de configuración funcional: acciones, actuaciones y actividades. En este marco, la praxis se nos muestra como locus y circunstancia obligada de encuentro con la alteridad radical de lo "otro" que se hace presente en nuestros actos. La praxis humana es, pues, el punto de partida de la reflexión acerca del hombre situado en el mundo.

Para nuestro estudio esto significa que –con toda legitimidad- podemos considerar la práctica de la Didáctica de la Matemática como el punto de encuentro obligado con su ser como disciplina, como una dimensión inherente a la misma. Esta aseveración se ve reforzada por el planteamiento de Toulmin (1977), para quien la praxis es un elemento inherente de toda disciplina, ya que todas ellas comprenden elementos de carácter externo o profesional, derivados de considerar que una ciencia define también una profesión. Desde esta perspectiva, pues, la práctica de una disciplina científica constituye una dimensión necesaria y complementaria de la estricta dimensión teórica.

El carácter ético-político de la praxis

Nos interesa reforzar, en primer lugar, la consideración del carácter ético presente en esta praxis. Para ello recurrimos a la visión que sobre el asunto nos muestra Aristóteles en su *Ética a Nicómaco* (Aristóteles, 2003). En esta obra se destacan las distinciones conceptuales existentes entre las diversas formas de acción.

La *theoria –acción contemplativa*- hace referencia a una forma de pensamiento que se orienta hacia el descubrimiento y contemplación de la verdad inmutable y eterna, es decir, de todo aquello que la persona no puede cambiar o someter a su influencia. Está regida por la *sophia*, sabiduría teórica que busca y alcanza el saber por el saber. La *poiesis –acción de hacer, entendida como producción o fabricación*- está orientada hacia la producción de artefactos, al estilo artesanal; hace referencia a una acción instrumental regida por normas, como la elaboración de un objeto cuyo modelo ya es conocido de antemano. La poiesis está regida por la *techné*, un conjunto de conocimientos y principios técnicos relativamente fijos para cada objeto a confeccionar.

La *praxis –acción de hacer, entendida como realización*- está orientada a alcanzar una forma de vida éticamente buena; el fin de la praxis es, pues, la consecución de un bien ético, que no puede “confeccionarse” de acuerdo a un cuerpo de conocimientos técnicos previos para la acción, sino realizarse.

Para Aristóteles, el ámbito preferente de dedicación a la praxis, de búsqueda del bien, es el de la polis. De este modo, se dota de sentido a la *política*, considerada como una faceta de actividad humana, la de la personas que buscan, por medio de su dedicación a las cosas comunes, el bien propio y el de todos. En esta consideración coincide Hannah Arendt, quien, en su obra *La condición humana* (Arendt, 2003) presenta tres categorías para las actividades fundamentales de la *vita activa* del hombre: *labor*, *trabajo* y *acción*. La acción es la actividad no sometida a las restricciones de la labor –referida a todas las ocupaciones útiles para el mantenimiento de la vida- y del trabajo –orientado a la fabricación de objetos destinados al uso y no al consumo, y realizado bajo la guía de un modelo- y se diferencia de ellas por su condición de pluralidad y de natalidad, por la posibilidad de "empezar siempre algo nuevo" (Arendt, ob. cit.: 23).

La acción, propia de seres libres, se desarrolla en el ámbito de la vida dedicada a los asuntos de la polis, mediante la participación plena en la búsqueda del bien común por la vía de la acción y del discurso. Como puede observarse, la praxis, entendida en sentido aristotélico, coincide con la actividad de la vita activa que Hannah Arendt categoriza como acción. A partir de esta confluencia podemos establecer que lo ético y lo político se funden en el bien que persigue la praxis.

Caracterización de la praxis de la Didáctica de la Matemática

Desde la perspectiva aristotélica, en la actividad práctica de la Didáctica de la Matemática podemos diferenciar las dimensiones correspondientes a la poiesis y a la praxis. A la primera pertenece la práctica inspirada en el correspondiente referente normativo proporcionado por dicha disciplina; esta práctica se restringe a la aplicación de principios, reglas y modelos didácticos que actúan como normas de carácter técnico para aprender y enseñar matemática.

En cambio, la praxis de la Didáctica de la Matemática se caracteriza por un rasgo fundamental: la búsqueda –en cada acción, actuación y actividad- de un bien ético-político. Búsqueda dirigida por la phronesis, es decir, marcada por la deliberación y la reflexión. La praxis de la Didáctica de la Matemática trasciende, pues, a la poiesis; en otras palabras, no se reduce a la "fabricación" del saber matemático en los alumnos como resultado de una acción poiética técnicamente –metodológicamente- dirigida. Pero aunque la trasciende, la toma en consideración, se apoya en ella: la techné y su saber deben considerarse como incluidos y subordinados a la phronesis y su práctica. Esto significa que en el propio acto de construcción de un conocimiento matemático –un acto deseablemente bueno y ejemplar, desde el punto de vista de la poiesis- debe hacerse presente la praxis. El paso de la primera a la segunda no implica, pues, actividades agregadas, sino más bien un "cambio" en la forma de trabajar en el aula la construcción conjunta –docente y alumnos- de los conocimientos matemáticos.

Ese cambio podemos entenderlo en el sentido de caracterizar estas acciones constructivas de conocimientos matemáticos como *acciones comunicativas* (Habermas, 2002*a*, 2002*b*), acciones sociales orientadas al entendimiento y no hacia el éxito; acciones que se constituyen cuando dos o más sujetos interactúan, es decir, entablan una relación interpersonal en la búsqueda de entendimiento acerca de una situación de acción, con el fin de alcanzar un consenso y poder coordinar así de común acuerdo sus planes de acción y, por ende, sus acciones. En este sentido y con el fin de trascender la mera poiesis, las actividades simultáneas de construir conocimientos matemáticos en el aula, fomentar la integración social y la solidaridad del grupo, y formar identidades personales, deben desarrollarse en un clima de:

1. *interacción* docente-alumnos y entre los propios alumnos, en la búsqueda de entendimiento acerca de una situación en la que se trata de construir conocimientos matemáticos;
2. *negociación* acerca de la definición de cada situación;

3. aportación y contraste de *argumentos* de cara a su interpretación;
4. resolución de disentimientos y conflictos por la vía de la búsqueda de un *consenso cooperativo*, para coordinar así de común acuerdo sus planes de acción y, por ende, sus acciones;
5. *diálogo crítico* basado en el *respeto* por las interpretaciones y argumentaciones de cada participante.

Esto significa que esos rasgos de la praxis –la interacción, el diálogo, la participación, la solidaridad, la responsabilidad, el compromiso, la transformación…- deben hacerse presentes en el propio acto de construcción de cada conocimiento matemático –un acto, como dijimos, deseablemente bueno y ejemplar desde el punto de vista de la poiesis.

Otro aspecto que conviene resaltar es el de la *interiorización* de la actividad (Leontiev, 1978; Lazarev, 2004; Mikhailov, 2006), ya que la actividad de la persona sobre su entorno natural y cultural –entendida como elemento de relación entre el individuo y la realidad, así como entre el sujeto y las demás personas- es la verdadera *fuente del desarrollo psíquico de la persona*. Y ello se debe a que la actividad está orientada hacia el desarrollo de la persona, hacia la transformación del mundo de la vida del sujeto, y hacia la construcción de relaciones sociales entre las personas.

Esta interiorización implica la de los significados ético-políticos inherentes a las actividades propias de la construcción de conocimientos matemáticos; interiorización que no puede producirse en los educandos de una manera pasiva, por la sola imposición de acciones y discursos externos; por el contrario, requiere de su participación y apropiación activa, por la vía de una permanente reestructuración interna de la imagen inicial de la situación planteada.

Además, en función de la formación ético-política de los estudiantes, es muy importante tratar de llevarlos a regular sus actividades y la formación de su personalidad mediante la utilización de una lógica basada en el significado, que tome en cuenta la importancia de cada actividad, así como las consecuencias generables a largo plazo. Esta lógica, así como la de libre elección, deben ser dominantes en la regulación de las actividades de los educandos.

En cuanto a los *contenidos matemáticos* a construir en el aula, parece conveniente dar prioridad a aquellos que más "empoderen" a los educandos, sobre todo desde los puntos de vista cultural y sociológico, o que mejor permitan la modelación matemática de las situaciones del mundo de la vida que se vayan a afrontar. Es fácil percibir que, en ambos casos, los contenidos a ser priorizados deben ser aquellos que, por su relevancia y aplicación, nos permiten trabajar con una matemática *contextualizada*, sin que esto signifique la exclusión o la minusvaloración de los momentos de trabajo con una matemática *descontextualizada*; una razón determinante para incluir los dos tipos de momentos en el trabajo de construcción de conocimientos matemáticos en el aula, radica en que en ambos son posibles las acciones de praxis.

Aclarado el punto de los contenidos matemáticos que se pueden trabajar en el aula –el qué- vamos a insistir en el cómo, resaltando un punto de vital importancia: la *diversidad en los modos de construcción de los contenidos matemáticos*. Esta invocación a la diversidad se sustenta en la distinción –con respecto a los demás- que es inherente a la persona cuando se manifiesta y actúa en la esfera pública (Arendt, 2003). Estas manifestaciones distintivas también deben hacerse presentes cuando la acción y el discurso de los educandos se producen en la actividad de construir conocimientos matemáticos en el aula.

De aquí se deriva que, cuando el docente propone un conocimiento matemático para su construcción conjunta en el aula, debe garantizar la presencia simultánea y necesaria de múltiples perspectivas. No hacerlo de esta manera sino de una sola, fomenta la conversión de los hombres en seres sociales seguidores de modelos uniformes de conducta, lo que representa uno de los peores males de nuestra sociedad moderna; en palabras de Hannah Arendt, “el fin del mundo común ha llegado cuando se ve sólo bajo un aspecto y se le permite presentarse únicamente bajo una perspectiva” (Arendt, ob. cit.: 67); sería la imposición del pensamiento único.

En esta línea se mueve también Bishop (1998) quien insiste en la *posibilidad de escoger* en el aula de matemática, posibilidad que se concreta en la existencia de alternativas, en la realización de actos de elección, en la consolidación de preferencias, y en la consistencia de tal conducta selectiva. Y contempla la posibilidad de seleccionar entre diversas representaciones de los conceptos matemáticos, diversos procedimientos y algoritmos operacionales, diversas vías de argumentación y demostración de proposiciones y teoremas, la posibilidad de escoger en el campo de los problemas a resolver, en las vías para resolver dichos problemas, en los criterios para evaluar las vías de resolución seleccionadas, y en los modelos matemáticos que se consideran apropiados para cada situación. Todo lo cual exige la diversidad en el discurso y la acción que puede presentar el docente a sus educandos.

De todo lo anterior puede inferirse que la praxis de la Didáctica de la Matemática constituye una verdadera dimensión de la disciplina, dimensión referida a la formación y al desarrollo de la vida ético-política de los alumnos y, por ende, del propio docente; en otras palabras, a la formación en el oficio de la ciudadanía.

Finalmente, queremos resaltar que la conceptualización de la Didáctica de la Matemática aquí propuesta no debe entenderse como una teoría o un enfoque adicional de la misma; pero sí pensamos que cualquier enfoque debería asumir la praxis –tal como la hemos construido aquí- como una dimensión imprescindible de la disciplina.

Referencias bibliográficas

Andonegui, M. (2007). *La praxis de la Didáctica de la Matemática*. Tesis doctoral en Educación presentada dentro del Programa Interinstitucional de Educación, UCLA, UNEXPO, UPEL. Barquisimeto: Autor.

Arendt, H. (2003). *La condición humana*. Buenos Aires: Paidós.

Aristóteles (2003). *Ética a Nicómaco*. Buenos Aires: Andrómeda.

Bárcena, F. (1997). *El oficio de la ciudadanía. Introducción a la educación política*. Barcelona: Paidós.

Bishop, A. (1998). Mathematics Teaching and Values Education – An Intersection in Need of Research. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *30*(6), 1-4.

Fourez, G. (2000). *La construcción del conocimiento científico. Sociología y ética de la ciencia*. Madrid: Narcea.

Giroux, H. A. (1993). *La escuela y la lucha por la ciudadanía. Pedagogía crítica de la época moderna*. México: Siglo XXI.

González, A. (1997). *Estructuras de la praxis. Ensayo de una filosofía primera*. Madrid: Trotta.

Habermas, J. (2002*a*). *Teoría de la acción comunicativa, I. Racionalidad de la acción y racionalidad social*. México, Taurus.

Habermas, J. (2002*b*). *Teoría de la acción comunicativa, II. Crítica de la razón funcionalista*. México, Taurus.

Lazarev, V. S. (2004). The crisis of “the Activity Approach” in Psychology and possible ways to overcome it. *Journal of Russian and East European Psychology, 42*(3), 35–58.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Mikhailov, F. T. (2006). Problems of the Method of Cultural-Historical Psychology. *Journal of Russian and East European Psychology*, *44*(1), 21–54.

Toulmin, S. (1977). La comprensión humana: I. El colectivo y la evolución de los conceptos. Madrid: Alianza.

LOS PRIMEROS PASOS DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

Nilda Etcheverry, Norma Evangelista, Estela Torroba, Marisa Reid
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam Argentina
estelat@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Las experiencias de formación de profesores que tienen relación con la estrategia metodológica de resolución de problemas, con o sin uso de tecnología, han presentado resultados positivos como elemento de apoyo al logro de aprendizajes.*

Presentamos el reporte de una investigación exploratoria basada en el análisis de las situaciones de enseñanza–aprendizaje desarrolladas por estudiantes de Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

El objetivo de este trabajo es mostrar las interacciones que se producen en esa situación de enseñanza y las dificultades que se le plantean al estudiante para profesor de matemática al gestionar la situación de enseñanza haciendo uso de la estrategia de resolución de problemas con o sin uso de tecnología.

Palabras claves: formación, reflexión, gestión

Introducción

Los distintos currículos e instituciones señalan el uso de la estrategia de resolución de problemas como una metodología didáctica que permite trabajar el logro de aprendizajes del área. La estrategia de metodología de resolución de problemas tiene numerosas bondades que las hace atractivas e interesantes, sin embargo también tienen numerosas complejidades que hacen prever la necesidad de apoyar más a los docentes y alumnos en su implementación en la sala de clases (Gaulin, 2001; Rizo & Campistrous, 2002).

Las experiencias de formación de profesores que tienen relación con la estrategia metodológica de resolución de problemas con o sin uso de tecnología han presentado resultados positivos, pero siguen siendo aún pruebas pilotos (Torroba, Reid, Evangelista, Etcheverry, Villarreal; 2004).

Es necesario integrar estrategias que permitan un aporte al área de la formación de profesores, por ello consideramos el reporte de una investigación exploratoria basada en el análisis de las situaciones de enseñanza–aprendizaje desarrolladas por estudiantes para Profesor de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

El objetivo de este trabajo es mostrar las interacciones que se producen en esa situación de enseñanza y las dificultades que se le plantean al estudiante al gestionar la situación de enseñanza haciendo uso de la estrategia de resolución de problemas con o sin uso de tecnología.

Diseño de la experiencia

Esta experiencia se desarrolló con alumnos que cursaban Práctica Educativa II, perteneciente al tercer año del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, que consta de un período de observación de la dinámica de las clases en Tercer Ciclo de la Educación General Básica o Polimodal, colaborando estrechamente con el profesor a cargo del curso para ir responsabilizándose gradualmente de la docencia en el aula y al año siguiente enfrentar las prácticas de residencia donde el alumno acredita su práctica de la enseñanza.

Para cursar la asignatura Práctica Educativa II, los alumnos necesitan poseer conocimientos del área de matemática centrados en Álgebra, Geometría Analítica Plana y Análisis Real; además de una formación pedagógica en contenidos relacionados con didáctica general y elementos de didáctica de la Matemática.

La experiencia contó con la colaboración de profesores de matemática de distintos colegios de la ciudad de Santa Rosa (La Pampa, Argentina) que aceptaron la propuesta de recibir a futuros profesores, para compartir y colaborar en el trabajo áulico, siempre bajo su cuidado académico y vigilancia epistemológica.

Transcurridas tres semanas de asistencia de los futuros profesores a los colegios asignados, se realizó una reunión con ellos, en la que se les pidió que seleccionaran un problema de un conjunto de problemas de máximos y mínimos que se pudieran resolver mediante métodos elementales, considerados adecuados para el grupo-clase y que permitieran integrar los conceptos adquiridos.

Después de la elección de los problemas (extraídos de distintos libros de Tercer Ciclo de la Educación General Básica y Polimodal de distintas editoriales y de páginas de Internet), se les planteó que:

A) Resolvieran de distintas formas el problema.

Tarea que quedó cumplida por su formación Matemática.

B) Imaginaran como podrían resolver sus alumnos dicho problema.

En este aspecto, los alumnos presentaron sus dudas acerca de cómo podían imaginar distintas estrategias siendo que no tienen experiencia concreta de enseñanza.

C) Escribieran cuáles serían sus posibles intervenciones para generar el avance de la solución del problema.

Se acordó que se fomentaría la discusión en grupo, como aspecto positivo en el proceso de resolución de problemas, siendo el papel del profesor el de gestor de la situación. Cada uno propuso distintas variables didácticas de acuerdo al problema elegido.

D) Gestión de la resolución del problema elegido.

De los problemas presentados por los futuros profesores se seleccionó para su gestión el problema elegido por Juan extraído de página de Internet

http://www.matedu.cinvestav.mx/~matedul/investigacion/pluvinage/testfinal.doc:

Determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa, de una lámina cuadrada de 13cm de lado, donde la base esté formada por una esquina de la lámina.

En este trabajo reportamos en detalle algunos aspectos de la gestión realizada por Juan.

El problema elegido puede ser resuelto por métodos elementales adecuados a la edad de los alumnos (14-15 años) que disponen de conocimientos sobre "Cuerpos poliedros y redondos. Elementos, descripción, clasificación y representación de los mismos empleando recursos diversos. Volumen de algunos cuerpos. Cálculo de Área" (Materiales Curriculares Tercer Ciclo de la Educación General Básica. Provincia de La Pampa).

Juan planteó que le gustaría contar con el apoyo de tecnología para el desarrollo de la clase. Se decidió que se planteara el problema a un pequeño grupo de alumnos (14 o 16) escogidos al azar de la clase en la que estaba desarrollando su experiencia. Esta medida fue tomada por disposición de computadoras existentes.

Desarrollo de la gestión de la experiencia

Para examinar las relaciones entre el conocimiento generado por los alumnos y las prácticas se realizaron grabaciones en audio de la clase en que planteó el problema junto con el diario de prácticas.

Una perspectiva interaccionista nos permitió realizar un análisis interpretativo, tratando de entender los sucesos durante el transcurso de la sesión de enseñanza.

La clase se desarrolló en la sala de computación que tiene cuatro mesas con cuatro sillas cada una, ubicadas en el centro de la sala y a ambos lados las computadoras (8 funcionando correctamente).

Mostramos a continuación algunos aspectos que nos resultaron de interés en relación a la gestión del desarrollo de la clase.

- *Primer momento*

Presentación del problema: Juan entrega una fotocopia a cada alumno e indica que se agrupen de a tres, quedando conformado cinco grupos, y que cada uno lea detenidamente el enunciado del problema.

Los alumnos actúan como si fuese una propuesta cotidiana, no preguntan nada.

Juan acota: *"Todo lo que se les ocurra sobre la forma de resolver la situación, lo anotan después analizamos las distintas soluciones. Las hojas donde realicen sus trabajos tienen que entregarlas"*.

Los alumnos comienzan a hablar y no todos de la situación planteada.

- *Segundo momento*

Los alumnos dibujan cajas y le asignan valores a las aristas pero no logran transferir correctamente los datos o incógnitas.

Juan: *¿Qué hicieron o de dónde partieron para hacer la caja cúbica la semana pasada?*

Agustín: *Ahh, con el desarrollo.*

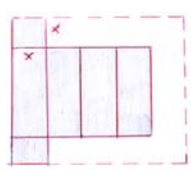
Los grupos empiezan a dibujar los desarrollos de una caja como había realizado para buscar las fórmulas del área y volumen de los cuerpos.

Después de varios intentos:

Agustín : ¿Puede sobrar parte de la lámina?

Juan: Sí

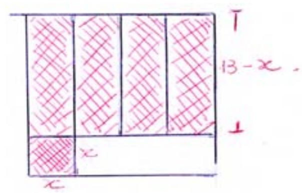
Agustín presentó el siguiente esquema:



Juan: Fijate la altura que le queda a la caja. Tené en cuenta los datos del problema

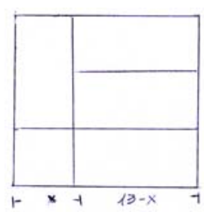
Agustín: ahhh!!!!!!!, ya sé, me falta sacar la tapa

En otro cuadrado de 13 cm. de lado, corrigió la presentación anterior, mostrado este nuevo esquema:



Matías: *A mí no me sobra nada*.

Presenta un diseño diferente utilizando toda la lámina.



Fernando: El volumen puedo escribirlo así $v = x^2\ (13 - x)$.

Juan: Sii., por supuesto…. qué valores puede tomar x (dirigiéndose a Fernando).

Algunos comentarios que hacían estos alumnos, que eran casi los únicos que trabajaban sobre el final del módulo de clase: *"la caja puede ser de base chiquitita y alta"*, *"puede ser de base grande y petisa"*

Agustín: "la base puede ser de cero coma y pico hasta casi trece"

Juan: ¿Seguro? ¿Cualquier valor comprendido entre esos dos? Escribí esa conclusión en símbolos y analizá los valores posibles teniendo en cuenta el enunciado.

Agustín: puedo darle distintos valores

Juan: Mirá tu figura de análisis y fijate cuanto mide cada tira.

Matías y Fernando, a pesar de ser de distintos grupos, son los que interrelacionan entre si y ambos piden a sus compañeros de grupo que los ayuden con las cuentas para hacer una tabla usando la fórmula escrita por Fernando, y les indican qué cálculos quieren que les hagan. Este es el único momento en que los demás integrantes del grupo 1 y 3 trabajan. Los demás grupos no trabajan en la situación.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	12	44	90	144	200	252	194	320	324	300	242	144

Tabla elaborada por los grupos 1 y 3

Matías: *el resultado está entre 8 y 10*

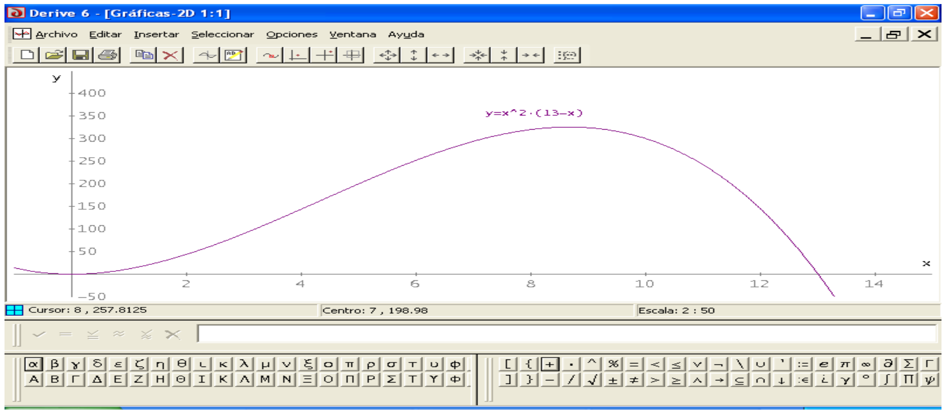
Juan: *Fijense bien, si lo piensan al revés, es decir si x vale por ejemplo 8 ¿qué tamaño debe tener el papel para hacer la caja?*

Un integrante del grupo de Matías: *buscamos con números decimales entre 8 y 10*

Fernando: *¿y si graficamos la función volumen?*

Juan: *Bien, comiencen a trabajar entonces con el Derive*

El grupo de Matías, liderado por Fernando, quienes no tienen dificultades en el manejo del software obtienen la siguiente gráfica en sus pantallas:



Matías: *lo más alto de la gráfica es el resultado?*

Fernando: *entonces el resultado es justamente 9.*

Juan: *No me contestaron si por ejemplo x es igual a 8 qué medidas tiene que tener el papel para hacer la caja? No están considerando bien los datos del problema.*

Juan vuelve a Agustín que escribe la siguiente conclusión *" x debe valer trece cuartos" para armar la caja máxima desperdiciando una tira del papel*

Juan mira su reloj y resuelve el problema comenzando por leer detenidamente su enunciado a la vez que dibujaba y anotaba los datos y las incógnitas para toda la clase.

Los grupos anotan todo lo que hace y dice Juan.

Juan: *les quedó claro ahora.* Hubo algunos *sii*, tres *noo* y los demás *ni.*

Tocó el timbre y todos salieron al recreo dando por finalizada la situación. Ni los tres alumnos que habían interactuado bien durante la situación manifiestan algo sobre la situación ni siquiera cuales habían sido sus errores.

Aspectos que intervinieron en las situaciones de aprendizaje

La situación presenta a un estudiante para profesor interrelacionando con alumnos con los que no hay establecido un contrato didáctico para este tipo de tarea. Es decir, no existe un conjunto de reglas que aunque no enunciadas explícitamente organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase.

Juan lo percibe como:

- Una excesiva dependencia de las explicaciones.
- Los alumnos no podían explicitar en las figuras los datos y las incógnitas
- No les interesó el problema. No les gusta pensar. No todos se concentran.
- No pude manejar el grupo.

Desde nuestra interpretación el problema se genera por la falta de contrato didáctico previo, incluso algo que puede parecer tan trivial como la posición en que deben situar el nombre o la forma en que deben escribir lo que van haciendo, no lo es para los alumnos, ya que forma parte de ese intercambio de indicadores de información que se establece en las relaciones entre profesor-alumno que en este caso faltó (situación que se presenta en casos de suplencias cortas).

El desarrollo del caso muestra la desidia que se origina entre él y parte del grupo cuando trata de llevar a cabo algo que no corresponde exactamente con lo que es habitual en la clase de Matemática con su profesor.

En las grabaciones se aprecia que la interacción entre muchos de los alumnos está centrada en aspectos que podríamos denominar sociales, evidenciándose que el simple hecho de estar sentados en grupo no implica en absoluto cooperar en el proceso de aprendizaje.

Usan el software como una herramienta sin analizar que es lo que quieren ver, pero el estudiante para profesor tampoco analiza la utilidad del uso del software para la solución de este problema. No gestionó el error al que conducía usar esa fórmula ni tampoco siguió la gestión de la solución donde no sobraba papel.

La resolución previa del problema y la estrategia elegida por Juan como la más adecuada condicionó notablemente el desarrollo de la experiencia que dio lugar a una falta de comunicación en el proceso de enseñanza aprendizaje, esto fue condicionante a la hora de desarrollar la gestión de la situación de enseñanza.

En el desarrollo de la experiencia se puso de manifiesto la dificultad en gestionar la discusión en grupo y las dificultades que presenta el contexto para llevar a cabo las intenciones iniciales.

En las intervenciones de Juan aparece el reconocimiento de lo individual, de una forma implícita. Así cuando en ocasiones percibe que algunos alumnos no intervienen en el diálogo, y que permanecen al margen, intenta solucionarlo planteando una intervención directa con el alumno, corrigiendo su trabajo sin tratar de involucrarlo en una situación colectiva.

También se observa que cuando Juan percibe la falta de comprensión por parte de los alumnos del problema planteado, trata de solucionarlo repitiendo una y otra vez el enunciado. Intenta de ese modo clarificar él mismo el problema en vez de potenciar la interacción entre los alumnos para aumentar la comprensión del problema.

Esto puede ser una influencia tanto de la cultura escolar como de la falta de práctica por parte de Juan. La falta de experiencia práctica sobre la forma de favorecer el trabajo cooperativo dificultó su labor. Pero hay que considerar que ésta fue la primera vez que se enfrentaba a una situación de este estilo.

Si las primeras experiencias deben ayudar a fundamentar y dotar de significado a una práctica posterior, seguiremos reflexionando sobre la necesidad de implementar procedimientos que permitan al estudiante para profesor establecer la nueva cultura matemática escolar que se pretende en sus prácticas futuras

Referencia bibliográfica

Gaulin, C. (2001, septiembre), *Tendencias actuales de la resolución de problemas***.** Sigma, *19,* 51-63. Obtenido en diciembre de 2006 http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_19/7_Tendencias_Actuales.pdf.

Ministerio de Cultura y Educación, Provincia de La Pampa. (1999). *Materiales Curriculares para la implementación del Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Argentina.

Rizo, C. y Campistrous, L. (2002). *Didáctica y solución de problemas*. Obtenido en diciembre de 2006 de

http://www.unesco.cl/paginaciencia_02/Documento/didactica_y_solucion_de_problemas.doc

Torroba, E.; Reid, M.; Evangelista, N.; Etcheverry, N.; Villarreal, M. (2004, junio) *Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización*. *Revista Zetetiké de la Universidad Estadual de Campinas*, 12 (21) (pp.57-81), Sao Paulo. Brasil.

LA OBSERVACIÓN EN EL AULA, COMO INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN. UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

Lidia B Esper, Lidia Bénitez, Marta Torres, Sonia Benítez
Cátedra de Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales e I.M.Lillo. Universidad Nacional de Tucumán — Argentina
liesper@yahoo.com.ar, lidiabenitez@hotmail.com
Campo de investigación: Evaluación de Aprendizajes — Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo reporta cómo se llevó a cabo el proceso de evaluación durante el aprendizaje de la Geometría Fractal. El sistema de tareas consistió en un conjunto de ejercicios y/o problemas, dirigidas a mejorar ciertas habilidades y actitudes que los estudiantes pondrían en juego en la resolución de las actividades. Se apuntó, en el desarrollo de la ejercitación, la observación y análisis de las interacciones que se producen en el contexto del trabajo colaborativo, pretendiendo revalorizar la participación activa del alumno en forma individual y grupal. Da la posibilidad de que sea el alumno el que construya su conocimiento y tiene la intención de ser una contribución para los docentes, en su tarea de preparar actividades de evaluación reflexionando sobre la idea y el papel de la observación en el aula.*

Palabras Claves: evaluación, observación, geometría fractal, trabajo colaborativo

Introducción

Cualquier esfuerzo por progresar en la calidad de la enseñanza pasa necesariamente por una mejora de los métodos de evaluación. Aunque la sociedad tiende a percibir de la evaluación que se realiza en cualquier institución educativa únicamente la acreditación o la calificación que refleja la evolución escolar del alumno, los docentes saben bien que evaluar es mucho más que "poner notas". Al respecto, más que determinar una nota, "los estándares de evaluación del National Council of Teachers of Matemáticas" (NCTM, 1989) proponen determinar: a) cuánto es capaz de aprender un alumno, b) la capacidad para resolver problemas, c) la capacidad para comunicar lo aprendido, d) cómo razonan acerca de los temas de estudio, qué aspectos correctos tiene esa forma de pensar, e) los conceptos y procedimientos y f) la actitud.

Así también las nuevas propuestas curriculares de la actual Transformación Educativa Argentina, conceden una especial importancia a la evaluación e insisten en que debe ser personalizada, continua y formativa. Sólo así se convertirá en un elemento más de la enseñanza, el cual permitirá a los docentes conocer el resultado de sus acciones didácticas y mejorarlas, de manera que cambien las prácticas cotidianas en una dirección innovadora que revierta en un aumento de la calidad de la enseñanza.

Dentro de la tarea evaluadora, y especialmente en lo que se refiere a la evaluación formativa, la observación ocupa un lugar fundamental.

Las prácticas de la observación no pueden concebirse, de una manera ajena a una determinada concepción de la evaluación y de la enseñanza-aprendizaje. Actualmente, es necesario pensar cómo debe ser la observación para que responda a la concepción constructivista de la enseñanza y al papel que se otorga a la evaluación en los procesos de mejora de la calidad educativa (Anguera, 1988; Gobierno de Navarra, 1996).

La evaluación debe contribuir al desarrollo de las capacidades de los alumnos, de esta forma se convierte en una herramienta pedagógica, en un elemento del currículo que mejora la calidad de la enseñanza y el aprendizaje del alumnado. Para el estudiante, las actividades de observación le permiten ser consciente de cuál es su progreso y conocer el resultado de su actividad. De considerar las actividades de evaluación como algo amenazante, pasa a verlas como unas actividades que le permiten regular su proceso de enseñanza, resituarse en él y, en definitiva, percibir qué está aprendiendo y qué quiere y necesita saber (Miras y Solé, 1990).

La experiencia que se relata, es parte de una tesis de maestría de una de las autoras, cuyo objetivo principal fue el diseño y aplicación de una Estrategia Metodológica, para incorporar conocimientos básicos de la Geometría Fractal y sus aplicaciones, a alumnos que cursaron Matemática II de la carrera de Geología de la FCN e IML-UNT (Esper, 2005). En este trabajo se presenta el modelo de un instrumento que fue utilizado para evaluar una actividad grupal y se comentan algunos resultados.

Marco Teórico

El proyecto de tesis tuvo como marco teórico de referencia los aportes de diversas disciplinas, fundamentalmente de las Ciencias de la Educación, de la Epistemología e Historia de la Ciencia, la Psicología Cognitiva, así como de modelos constructivistas desarrollados en los últimos 25 años (Piaget (1978), Vigotsky (1978), Ausubel, Novak y Hanesian (1987), Moreira (1999), Gil Pérez y Ozamiz (1993), etc), contextualizados en el aprendizaje de las Ciencias Exactas y Naturales. También se construyó con los planteos teóricos y prácticos, hechos por investigadores nacionales e internacionales que trabajaron sobre la temática de la enseñanza de los fractales (Marín Rodríguez, 1994; Morán Cabre, 1995; Ibáñez y Egüez, 1996)

Esta integración permitió formular un modelo que concibe el aprendizaje como un cambio que no se limita a los aspectos conceptuales sino que incorpora los cambios metodológicos axiológicos, epistemológicos y ontológicos. Tendiendo al logro de la autonomía del estudiante y que permite visualizar el proceso en su dimensión socio-cultural.

Enmarcados en este enfoque, es innegable entonces que considerar al estudiante como protagonista de su propio aprendizaje en un proceso de elaboración colectiva en donde tenga la oportunidad de participar, colaborar, discutir y defender sus propias ideas, como darles la oportunidad de producir en correspondencia con sus posibilidades; permitiéndoles identificar, formular y resolver sus propios problemas, constituye una parte muy importante del aprendizaje.

Para proponer una nueva estrategia de enseñanza se debe dejar de lado el modelo que considera al alumno como un elemento pasivo, espectador o caja negra, que no cumple con la mayoría de las expectativas de logros de los profesores.

Se hace imprescindible un nuevo enfoque en el proceso de enseñanza - aprendizaje cuya finalidad sea lograr un proceso de construcción de conocimientos donde los aprendizajes sean cuantitativamente y cualitativamente significativos.

Metodología

La metodología de la investigación si bien se seleccionó de acuerdo al problema que se encara, integra tanto las técnicas de investigación cualitativas como cuantitativas, en función de los objetivos propuestos y de las particularidades de los grupos de análisis y control que se consideraron. Ambos enfoques se complementaron y los resultados se triangularizaron de modo de dar más validez y precisión a la convalidación de las hipótesis y a la interpretación de los resultados.

Recuérdese que este trabajo es parte de una indagación más amplia.

La experiencia que se reporta se realizó con 30 alumnos que cursaron la asignatura Matemática II de la carrera de Geología de la Facultad de Ciencias Naturales-UNT, en el período lectivo 2003 y fueron cuatro docentes los que registraron las observaciones realizadas en el aula y/o laboratorio.

A este grupo se aplicó el método experimental, que consistió en implementar el diseño de una nueva estrategia metodológica para incorporar temas de la geometría fractal. Se dictaron en diez clases, con un total de veinte horas, distribuidas en dos semanas entre conferencias (clases teóricas), prácticas, actividades en la Sala de Informática (Laboratorio) y Seminario, con el objetivo de que el alumno desarrolle diversas habilidades y cualidades.

En el proceso de producción de conocimientos se trabajó con cuestionarios a alumnos y planillas de evaluación que se diseñaron para el análisis de las producciones de los alumnos.

Las actividades de enseñanza-aprendizaje crearon situaciones idóneas de observación contextualizadas. El método de observación permitió llevar a cabo una evaluación personalizada, ya que facilita información sobre los contextos, las estrategias personales, las dificultades que presenta, la motivación, los conocimientos previos, etc.

El diseño de la metodología aplicada tuvo en cuenta que las habilidades (acciones) y destrezas de los alumnos, se formen y desarrollen en las actividades a través de la ejercitación. Por lo tanto, en cada trabajo práctico, las guías se elaboraron con actividades que involucraban los distintos tipos de niveles del proceso de asimilación: familiarización, reproducción, producción y creación. Algunas actividades se diseñaron para introducir el tema, otras para lograr la fijación de conceptos y métodos de trabajo, otras para desarrollar la capacidad de reflexión, razonamiento y de alguna forma muy modesta el desarrollo de la creatividad. Con esto se aseguraría la participación-acción del alumno, y con el fin de afianzar habilidades, se tuvieron en cuenta las etapas: material o materializada, verbal y mental (Leontiev, 1978; Galperin, 1983), y se favoreció el trabajo cooperativo a través del empleo de técnicas grupales especialmente dirigidas a lograr aprendizajes más significativos.

Una síntesis de la propuesta metodológica fue la siguiente:

Fase 1: Conferencia Orientadora y motivadora (2 hrs. reloj)

Métodos Participativos: Conversación heurística, situación problémica, lluvia de ideas y dinámica grupal.

Evaluación: Se observó la participación del alumno.

Fase 2: Guía N º 1, Clase práctica (2 hrs. reloj)

Métodos Participativos: Situación problémica, discusión en pequeños grupos, discusión plenaria.

Evaluación: Observación del trabajo en clase. *Corrección de actividades individuales*.

Fase 3: Guía Nº 2, Clase teórica-práctica (4 hrs. reloj)

Métodos Participativos: Situación problémica, conflicto cognitivo, discusión en pequeños grupos, discusión plenaria.

Evaluación: Observación del trabajo en clase. *Corrección de actividades individuales.*

Fase 4: Guía Nº 3, Clase teórica-práctica y Laboratorio (4 hrs. reloj)

Métodos Participativos: Conferencia, técnica de la rejilla, situación ejercicio

Evaluación: Observación del trabajo en clase.

Fase 5: Guía Nº 4, Clase teórica-práctica y Laboratorio (4 hrs. reloj)

Métodos Participativos: Situación ejercicio.

Evaluación: Observación del trabajo en clase. *Corrección de actividades por grupo*.

Fase 6: Seminario (4 hrs. reloj)

	Comportamiento	Equipo A		Equipo E
HABILIDADES	**H_1:** Manejan los conceptos de regresión y correlación			
	H_2: Reconocen la pendiente de la recta de regresión			
	H_3: Realizan el diagrama de dispersión			
	H_4: Expresan correctamente, por escrito, la solución			
ACTITUDES	**A_1:** Finalizan la tarea			
	A_2: Participan todos los integrantes del grupo.			
	A_3: Los integrantes del grupo definen roles.			
	A_4: Se genera discusión en el interior del grupo.			

Métodos Participativos: Búsqueda parcial, conflicto cognitivo, discusión plenaria

Evaluación: Exposición grupal, técnica P.N.I.(de Bono, 1989)

Para la corrección de las actividades individuales y grupales, se elaboraron pautas de observación para medir el desempeño de los alumnos teniendo en cuenta conocimientos, habilidades y actitudes que debían poner en juego al resolver las situaciones problemáticas asignadas. Para lograr mayor rigor científico y credibilidad a los resultados de esta investigación, se comparó y contrastó los datos obtenidos, con las percepciones e interpretaciones, de la misma situación con otros docentes.

A modo de ejemplo, se presenta una planilla de evaluación con los indicadores considerados para la evaluación de una determinada actividad grupal; actividad que fue considerada del tipo de nivel de producción, pues en esta instancia del aprendizaje el alumno debía estar en condiciones de transitar por la etapa verbal y mental de acuerdo a la Teoría de Asimilación.

Se formaron y evaluaron cinco grupos: A, B C, D y E que resultaron de la aplicación de la técnica de la rejilla.

Con esta planilla se pudo hacer dos lecturas de la información:

- La lectura en forma vertical, que permitió valorar el desempeño de cada alumno en particular y resultó útil para analizar el proceso de aprendizaje personal, como así también tener una idea general de todos los alumnos en forma conjunta.
- La lectura en forma horizontal, que permitió reflejar el grado de dominio de cada habilidad en el equipo. Esto posibilitó al docente reflexionar sobre la eficacia de sus estrategias de enseñanza e indagar en algunos factores que le permitan interpretar las causas por las cuales ciertos aprendizajes se dan con más facilidad que otros.

Los indicadores, en la planilla, son afirmaciones con direcciones positivas que se evaluaron según los niveles alcanzados:

"2" para indicar la Presencia del Comportamiento (P.C.),

"1" para indicar la Presencia Parcial del Comportamiento (P.P.C.), "0" si No Presenta el Comportamiento (N.P.C.).

Además se analizó el orden de importancia de los distintos comportamientos, asignándose ponderaciones que van de 1 a 8, obteniéndose así una variable cuantitativa para el **desempeño**, el cual se lo definió como:

$$d = 8 \cdot H_1 + 6 \cdot H_2 + 7 \cdot H_3 + 5 \cdot H_4 + 2 \cdot A_1 + 4 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4 .$$

Esto permitió formar cuatro clases según el desempeño obtenido: [0; 23), [23; 33), [33; 46), [46; 65), (65; 72] las que se identificaron con las categorías de Deficiente (D), Regular (R), Bueno (B), Muy Bueno (MB) y Excelente (Exc) respectivamente.

Análisis de los resultados

En la actividad grupal que resultó evaluada, cada docente anotaba los comportamientos observados en los integrantes de cada equipo, a fin de completar los datos extraídos e interpretar los resultados tratando de optimizar las lecturas.

Se registró que: dos equipos lograron un desempeño Excelente (A y E) y el resto un desempeño Muy Bueno, lo que significa que la mayoría alcanzó un dominio parcial en todos los comportamientos evaluados.

Se observó que en dos equipos (A, E), todos los integrantes cooperaban con la actividad asignada y tenían bien definidos sus roles. En cambio en otros dos equipos (C y D) prácticamente no se daban las discusiones. En ellos se observó que toda la responsabilidad de la tarea caía en dos integrantes que trataban de hacer aportes; el resto reflejaba en sus acciones una gran inseguridad, y en varias ocasiones buscaban la ayuda y la aprobación del docente.

Se observó, en el equipo B, la misma problemática que cuando trabajaban individualmente, no superaron la habilidad de expresarse correctamente por escrito, por tal motivo como sus integrantes no tienen completo este proceso, el equipo solo presenta parcialmente este comportamiento.

En un equipo (C) se notó que no dominaban los *conceptos de regresión y correlación* (H_1) por lo que presentan dificultades para *reconocer la pendiente de la recta de regresión* (H_2).

En tres equipos (B, C y D) se observó que tenían dificultades para *expresar correctamente por escrito, la solución* (H_4), y que en los equipos B, D y E **no** *participaron todos los integrantes* (A_2) para resolver dicha actividad. Sólo en un equipo (C), se observó que **no** *estaban bien definidos los roles en los integrantes* (A_3).

Los integrantes de los equipos C y D logran *finalizar la tarea* porque dos de sus integrantes los motivan y presionan para cumplir con la tarea asignada.

Solamente un grupo de los cinco (el equipo A), presentaron correctamente el 100% de los comportamientos (habilidades y actitudes) esperados, en la solución de la actividad asignada.

Conclusiones

En todo el proceso, el sistema de evaluación continua permitió al estudiante que su esfuerzo, le proporcionara una mejor preparación, confianza y seguridad en las evaluaciones.

Los resultados de esta y otras evaluaciones (que por falta de espacio no se presenta) fueron altamente satisfactorias, donde los aspectos más relevantes fueron que los alumnos sentían que habían trabajado más y mejor.

Al fortalecer el trabajo cooperativo en pequeños grupos y fomentar la interacción, se logró el razonamiento de cada participante y el discernimiento de los problemas propuestos. Todo esto propició responsabilidad individual, para lo cual se debió evaluar el desempeño de cada individuo y devolver resultados tanto a la persona como al grupo. Desde una perspectiva vigotskiana se puede decir, que la interacción social durante el desarrollo de las actividades de enseñanza y aprendizaje, ha sido una oportunidad para que los alumnos orienten y regulen sus propias acciones, para que se sientan guiados y respeten las ideas de sus pares. La interacción social, ayudó a los miembros del grupo, a aprender a dominar las posibles situaciones de aprendizaje que enfrentaron, mucho mejor de lo que podrían haberlo hecho estando solos, puesto que les ayudó a construir las herramientas intelectuales (representación, anticipación, planificación) que necesitan para tomar decisiones sobre la resolución de las actividades.

Referencias bibliográficas

Anguera, M.T.(1988). *Observación en la escuela.* Barcelona: Graó.

Ausubel, D.P., Novak, J.D., Hanesian, H. (1987). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* (2a ed.) México: Trillas.

Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación.* Madrid: Ediciones Morata, S.A.

de Bono, E. (1989). *El pensamiento lateral.* Argentina: Paidos.

Esper, L.B.(2005). Fractales en las Ciencias. Geológicas. Tesis inédita de maestría. Facultad de Arquitectura y Urbanismo-UNT, Argentina.

Galperín, P. Ya (1983). *Sobre la formación de los conceptos y de las acciones mentales.* La Habana, Cuba: Lecturas de Psicología y Pedagogía.

Gil Pérez, D. y Ozamiz, M (1993). "*Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*". Editorial Popular S.A. Madrid, España.

Gobierno de Navarra/MEC (1996). *Observación y Evaluación. Educación Primaria*

Ibáñez, M. y Egüez, R.(1996): Los Fractales y algo sobre sus aplicaciones. Memorias de la III Reunión de Matemática del Cono Sur: 397-405. Salta, Argentina.

Leontiev, A.N.(1978). *Actividad, conciencia y personalidad.* Bs.As., Argentina: Ciencias del Hombre.

Marín Rodríguez, M.(1994). *La Enseñanza de los Fractales*. Números, vol. 25, 17-24. La Laguna, Tenerife. España.

Miras, M. y Solé, I.(1990). *La evaluación del aprendizaje y la evaluación en el proceso de enseñanza y aprendizaje*. En Coll, C., Palacios, J. y Marchersi, A. (comps.): *Desarrollo psicológico y educación II. Psicología de la Educación,* Madrid: Alianza.

Morán Cabre, M.(1995). *Teoría del caos y renovación matemática*. Actas de la VIIª JAEM, pp. 15-17. España.

Moreira, M. (1999). *Teorías de aprendizagem.* Sâo Paulo- Brasil. Editora Pedagógica Universitaria.

NCTM. (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. SAEM Thales. España

Piaget, J.(1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Madrid: Alianza.

Vigotsky, L.(1978). *El desarrollo de los procesos psicológicas superiores*. España: Crítica.

RECONOCIMIENTO DE ALGUNAS DIFICULTADES EN LA PRÁCTICA DOCENTE SOBRE LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES: ESTUDIO DE CASO

Marta Elena Valdemoros Álvarez, Elena Fabiola Ruiz Ledezma
CINVESTAV-IPN México
mvaldemo@cinvestav.mx
Campo de investigación: Números racionales y proporcionalidad Nivel: Superior

Resumen. *El presente reporte muestra un estudio de casos, de los tres que hemos realizado con profesores de educación básica, quienes dieron continuidad a su educación formal al incorporarse a una maestría en la que fortalecen su práctica como maestros de matemáticas. El caso que aquí mostramos es el de Melquíades, un profesor de sexto grado de educación primaria, quien por decisión personal se incorporó a un proyecto de desarrollo dedicado al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Este estudio de caso se centra en reconocer las dificultades de enseñanza vividas por Melquíades en relación a los números mencionados. Los instrumentos metodológicos empleados fueron la observación y la entrevista.*

Palabras clave: fracciones, práctica docente, dificultades de enseñanza

Introducción

De forma reciente, en la Ciudad de México se desarrolla una maestría dirigida a profesores que imparten clases en el nivel básico (preescolar, primaria y secundaria). El programa de esta maestría está referido a la enseñanza de las matemáticas de la educación básica, debido a que la actividad docente es una tarea compleja que exige del profesor una formación sólida tanto en matemáticas como en otros campos, así como capacidades diversas para tomar decisiones de índole pedagógica, didáctica, de comunicación de contenidos, entre otras.

Como parte de las actividades de la maestría, los profesores eligieron trabajar en un proyecto de desarrollo. El profesor que aquí nos ocupa decidió incorporarse al proyecto “Los Números racionales y la medición” del cual somos responsables y donde atendemos a seis estudiantes, incluyendo a Melquíades. En este marco se desarrolla un seminario en el que todos realizan lecturas referidas a la gran diversidad semántica de las fracciones;

además, se reflexiona allí acerca de las bases estructurales que brindan a dichos números las relaciones parte-todo y parte-parte, así como en torno a la reconstrucción de distintos procesos de enseñanza de fracciones.

De manera casi paralela a la formación de los maestros, nosotros consideramos relevante realizar investigación con respecto a sus propias experiencias docentes, contando para ello con una permanencia de tres años de los sujetos de investigación en la maestría, lo cual nos brinda la oportunidad de disponer de un escenario rico para dar continuidad y proyección a esta indagación, compuesta por tres fases diferenciadas.

Marco teórico

a) La enseñanza de las fracciones tomando en cuenta el punto de vista de algunos investigadores

El objeto matemático que en esta investigación se aborda es el de *fracción***.** Freudenthal (1983) afirma que la fracción es el recurso fenomenológico del número racional, de tal forma que se constituye en la elaboración precursora de este último.

Freudenthal (1983) propone modelos didácticos propios para la enseñanza de las fracciones, en particular, enfatizando los modelos de área y longitud como medios naturales para visualizar magnitudes y aconsejando que su uso se dé de manera manipulable. El mencionado investigador considera que la riqueza didáctica con la que sean abordadas las fracciones proporciona la clave fundamental del aprendizaje que realicen los estudiantes.

Freudenthal (1983) muestra una secuencia instruccional para la aritmética de las fracciones, formada por una serie de actividades cuya diversidad evoluciona a partir del uso de la fracción como "fracturador" (expresión de la relación parte-todo), progresando luego hacia el "comparador" (portador de la idea de magnitud), para concluir en el reconocimiento del "operador multiplicativo" (el número que permite dilatar o contraer cierta cantidad original).

Otro investigador cuyo trabajo de fracciones es de interés para el presente artículo es Streefland (1991), ya que a través del diseño de un curso fortalece la didáctica de las fracciones mediante la aplicación de modelos novedosos de enseñanza. Uno de sus objetivos es lograr un manejo constructivo y productivo de materiales concretos significativos. Las actividades de dicho curso se centran en situaciones reales. Por ejemplo, se utilizan elementos variables de los escenarios reales, como el caso de los arreglos que se dan en un restaurante: la forma como se disponen los asientos, la manera de presentar los platillos, las variaciones en el servicio, el número de clientes, la rapidez con la que se trabaja en la cocina; todas estas situaciones propician un rico uso de las fracciones.

b) La enseñanza de las fracciones en la práctica escolar

Realizamos una revisión de los distintos materiales que son empleados por los profesores en México para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, en sexto grado, debido a que Melquíades se encuentra laborando en ese grado y éstos son su auxiliares didácticos.

El Plan y Programas de Estudios de Primaria (Secretaría de Educación Pública, 1993) presenta los contenidos de matemáticas articulados en seis ejes temáticos. Las fracciones pertenecen al eje denominado "Los números, sus relaciones y sus operaciones", cuyo objetivo principal es que los alumnos, a partir de los conocimientos con que llegan a la escuela, comprendan el significado de los números y de los símbolos que los representan y puedan utilizarlos como herramientas para solucionar diversas situaciones problemáticas. Los contenidos curriculares de sexto grado son: ubicación de las fracciones en la recta numérica; equivalencia y orden entre las fracciones; planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones mixtas; conversión de fracciones mixtas a impropias y viceversa; simplificación de fracciones; planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones con denominadores distintos, mediante el cálculo del denominador común.

El Libro para el Maestro, Matemáticas, sexto grado (Secretaría de Educación Pública, 2002), es un recurso muy valioso para los profesores ya que les proporciona diversas estrategias didácticas para abordar cada lección del Libro del alumno, al mismo tiempo que las vincula con actividades complementarias que se encuentran en el Fichero de Matemáticas correspondiente a sexto grado (Secretaría de Educación Pública, 2002).

En el Libro de Texto para el alumno, Matemáticas, sexto grado (Secretaría de Educación Pública, 2002), las lecciones referidas a los números fraccionarios se encuentran intercaladas con lecciones que corresponden a otros eje temáticos, como el de geometría o el de tratamiento de la información, entre otros. Estas actividades abordan los contenidos señalados en el Plan y Programas de Estudios y se presentan con títulos de situaciones llamativas para el estudiante y enfocadas a su realidad escolar.

El caso de Melquíades

El maestro al que nos referimos está a cargo de un grupo de sexto grado, en una escuela primaria pública perteneciente a la zona rural del Estado de México, cuyos habitantes se dedican, en mayor medida, a la agricultura, aunque también a la apicultura. Al momento de ingresar a la maestría, este profesor tenía catorce años de experiencia en educación primaria. En su formación previa, después de la conclusión del bachillerato, cursó la licenciatura en primaria en la Universidad Pedagógica Nacional e luego finalizó la licenciatura en Matemáticas, en la Escuela Normal Superior.

Los motivos de la selección de Melquíades, en este estudio, fueron el interés mostrado por él en relación a su práctica profesional, así como su actitud crítica hacia la misma, siendo además conciente de las dificultades experimentadas en torno a la comprensión de las lecturas realizadas en el seminario de la maestría. Otro rasgo destacado de Melquíades ha sido su esfuerzo por lograr un creciente dominio semántico y conceptual de las fracciones y poderlo transmitir a sus alumnos.

El problema de investigación abordado

Partimos de los motivos mostrados por Melquíades para su incorporación al proyecto de desarrollo acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, cuando expresó que las situaciones difíciles a las que se ha enfrentado en el terreno de la instrucción se refieren a dos aspectos fundamentales; primero a la carencia que él reconoce tener, así como sus alumnos, en relación al dominio conceptual de las fracciones y por otro lado, al tratamiento didáctico de estos números.

Es indudable el interés que Melquíades ha mostrado en el seminario de la maestría por mejorar algunos aspectos sobre la enseñanza de las fracciones, resultando reflejado esto en el desempeño de sus alumnos.

Por lo que acabamos de mencionar, nos formulamos como pregunta de investigación: ¿Qué dificultades enfrenta Melquíades cuando aborda la enseñanza de fracciones?

Instrumentos metodológicos

Para la realización de este estudio de caso nos apoyamos en una primera fase de indagación acerca de su práctica de enseñanza previa, en la observación y consecutivamente, en dos entrevistas efectuadas a Melquíades.

La observación del caso se efectuó en el seminario que hemos descrito con anterioridad, donde Melquíades y los demás integrantes del grupo revisaron literatura especializada sobre fracciones, realizaron una exploración profunda de los planes y programas de educación básica en lo que corresponde a dichos números y presentaron informes sobre las distintas experiencias de enseñanza que habían tenido en sus respectivos salones de clase. Tuvimos un fuerte apoyo en estos procesos de observación (en particular, en los reportes de la instrucción a cargo de Melquíades, dentro del aula), para validar el estudio de caso, mediante triangulaciones y comparaciones entre pasajes destacados de estas experiencias y momentos relevantes de las entrevistas.

Las entrevistas individuales fueron semiestructuradas debido a que nos brindaron la flexibilidad requerida para el enriquecimiento del diálogo, aprovechando las circunstancias que para nuestro fin se dieran en su desarrollo. La información que reunimos mediante estos instrumentos fue respecto a los siguientes tópicos: 1) La forma en que Melquíades ha llevado a cabo la enseñanza de las fracciones a lo largo de sus catorce años de experiencia profesional previa y el tipo de problemas aritméticos que ha empleado. 2) El reconocimiento de las dificultades de enseñanza que ha enfrentado en su labor diaria como docente. 3) Los cambios que produjo en su práctica como maestro, el haber cursado un año en la maestría.

Análisis de los resultados obtenidos

A continuación abordamos cada inciso expuesto en el párrafo previo, a partir de la información obtenida mediante la observación y las entrevistas hechas a Melquíades, así como también efectuamos una interpretación de estos puntos.

1) En relación a la forma en que realizó la enseñanza de fracciones a lo largo de sus catorce años de práctica profesional previa a su incorporación a la maestría, Melquíades señaló que la mayoría de las veces estuvo a cargo de quinto y sexto grados; al respecto, dijo que él era expositivo y enseñaba la suma y resta de fracciones de manera mecánica, es decir, se centraba en el algoritmo respectivo y les decía a sus alumnos que buscaran un denominador común, para despúés efectuar los pasos requeridos. Su trabajo se apoyaba fuertemente en el Libro de Texto para el niño (Secretaría de Educación Pública, 2002) ya que de éste sacaba alguna actividad que resultara interesante al estudiante; así, al final de

la clase planteaba un problema, ya fuera del Libro de Texto del alumno o extraído de una guía que él usaba, con la finalidad de retroalimentar el algoritmo tratado. A veces hacía modificaciones a los problemas porque consideraba que éstos debían estar relacionados con la vida diaria de los alumnos. Melquíades agregó: "*los problemas que les he puesto son de tipo muy básico; pero deben tener un texto claro para que los estudiantes puedan identificar qué es lo que se les requiere, de modo que puedan resolverlo sin muchas complicaciones".*

El entrevistado siempre ha realizado sus planeaciones basándose en el Libro del Maestro (Secretaría de Educación Pública, 2002) y ahora que está a cargo de sexto grado, con mayor razón, porque en contrapartida con éste, él considera que el Libro de Texto del alumno es abstracto. Al respecto, señaló lo siguiente: "*El Libro de Texto de sexto es un poco abstracto en el trabajo de las fracciones. Siempre que lo trabajaba con los niños, de manera previa usaba un material anexo que estuviese al alcance de los alumnos, por ejemplo, las actividades propuestas en el Fichero, las que son muy enriquecedoras del aprendizaje".* Melquíades enfatizó que se percataba de que, con este tratamiento, el algoritmo quedaba aislado del problema. El entrevistado reconoció que ha prevalecido en su trabajo docente un abordaje mecánico de las fracciones porque él mismo no ha tenido un aprendizaje significativo de dichos números.

En todo ello, puede advertirse en Melquíades un tratamiento didáctico de las fracciones fuertemente apoyado en el desarrollo mecánico de los algoritmos, lo cual estuvo complementado con un uso parcial y fragmentario de los libros oficiales de enseñanza. Los problemas aritméticos propuestos por nuestro entrevistado fueron tomados de la mencionada literatura y correspondieron a un momento de resolución final, *a posteriori* del desarrollo de los respectivos algoritmos.

2) Con respecto a las dificultades de enseñanza que ha enfrentado al abordar las fracciones en su práctica profesional previa, Melquíades señaló el trabajo con fracciones equivalentes como una gran fuente de obstáculos; el tratamiento de las equivalencias sólo

lo realizaba mecánicamente, proporcionando al estudiante el algoritmo correspondiente (multiplicar al numerador y al denominador de la fracción por el mismo número natural), ya que desconocía tratamientos que le permitieran dar sentido a dicho procedimiento y esclarecer las relaciones de equivalencia involucradas.

El entrevistado enfatizó el reconocimiento de que "*dentro de las grandes dificultades en la enseñanza, el profesor carece de herramientas para trabajar las fracciones de manera significativa, desde las que pueda brindar al estudiante conocimientos más accesibles".* Tal carencia de recursos didácticos que doten de sentido el tratamiento de las fracciones explicaría, desde su punto de vista, su fuerte apego a la mecanización de los algoritmos.

Aunado a lo anterior se encuentra el hecho de que, para compensar dichas carencias, Melquíades se apoya tanto como puede en el Libro para el Maestro, a pesar de que sus estrategias le resultan ajenas a nuestro entrevistado porque no llega a comprender plenamente el sentido de las mismas.

Otra dificultad a la que se ha enfrentado en la enseñanza de fracciones es el que los alumnos tienden a comparar a las fracciones como si fueran números naturales. Así nos dice Melquíades lo siguiente: "*Por ejemplo si los alumnos deben establecer qué es mayor ½ ó ¼, la mayoría se apoya en los números naturales y dice es $^1/_4$ es mayor porque el 4 es mayor que el 2".* Él atribuye este hecho a que a lo largo de muchos años los estudiantes han trabajado con números naturales, lo cual les dificulta realizar el salto para trabajar con números fraccionarios, aunque también reconoce que la instrucción ha influido para que se dé esta confusión en los estudiantes.

Otras dificultades que el entrevistado ha encontrado al abordar las fracciones desde el enfoque de resolución de problemas corresponden a la lectura y a la comprensión de los mismos, de tal forma que muchas veces los alumnos obtienen resultados diferentes que no necesariamente son incorrectos, sino que derivan de una interpretación distinta del problema, de manera que es labor del maestro averiguar cómo dan sentido los estudiantes a las indicaciones que reciben por escrito.

Melquíades considera que otra dificultad es la falta de tiempo para concluir las actividades propuestas, ya que si él llevara a cabo el enfoque didáctico en el que se propone que los niños resuelvan problemas por sus propios medios, discutiendo y analizando los procedimientos, no llegaría a concluir el programa de estudios. Con este argumento, nuestro entrevistado regresa al rol tradicional de conducir a los estudiantes mediante intervenciones muy directrices, para que los niños accedan a lo que, a los ojos de Melquíades, es un aprendizaje eficiente.

En general, nuestro entrevistado muestra una clara convicción de que su escaso dominio semántico y conceptual de las fracciones se ha correspondido con el consiguiente fortalecimiento de muchos obstáculos en su enseñanza, a lo largo de toda su práctica docente.

3) En cuanto a los cambios que produjo en su experiencia como maestro, el haber cursado un año en la maestría, Melquíades mencionó que ha modificado la forma de trabajar las fracciones, pues señala la conveniencia de usar material manipulativo antes de introducir el algoritmo. Al respecto dice: *"ya no trabajo tan mecánicamente, ahora introduzco el algoritmo a través de la utilización de diversos pictogramas y materiales concretos".*

Nuestro entrevistado tiene pensado abordar las relaciones de equivalencia mediante la resolución de problemas de reparto, en situaciones de medición de longitudes y capacidades, a nivel del proyecto de desarrollo que llevará adelante en la maestría. Lo anterior muestra una forma de trabajo diferente de su práctica docente previa, ya que ahora se percata de que debe plantearse un seguimiento progresivo y concreto de contenidos didácticos, en un marco realista, para que los estudiantes accedan a un dominio semántico pleno que promueva la ulterior construcción del concepto de equivalencia.

A pesar de que Melquíades ha evidenciado dificultades en el proceso de interpretación del contenido de algunas lecturas involucradas en el primer año del seminario, efectuó reflexiones profundas de las mismas, a través del análisis colectivo realizado entre los seis estudiantes que participaron del seminario, con quienes también sometió a una reconstrucción crítica algunos pasajes de su propia práctica docente. Así, Melquíades comentó que antes de ingresar a la maestría él no había considerado la complejidad que representa para el niño lo que tanto él como muchos compañeros maestros consideraban simple de resolver, debido a que no habían tenido la oportunidad de analizar la complejidad cognitiva que supone para el alumno. Él nos comenta: *"A mí se me hacía muy sencillo pedirles que sumaran ½ más ¼, pero después de realizar las lecturas del seminario, trato de que al llegar al aula los alumnos no se limiten a aplicar el algoritmo sino que encuentren el porqué se suma de esa forma, apoyándome en el uso de dibujos para lograr ese propósito. Ahora tengo otra visión en torno a cómo trabajar las fracciones".* Además, Melquíades está convencido de que si los alumnos no cuentan con las bases conceptuales y no dilucidan los porqués de lo que deben realizar respecto a las fracciones, el material didáctico que se use no es relevante por sí mismo.

Conclusiones

En los catorce años de práctica docente previa a su incorporación a la maestría, Melquíades ha desarrollado una enseñanza de fracciones claramente regida por el desarrollo mecánico de algoritmos, con una fragmentaria complementación de los libros oficiales de instrucción y con un pobre dominio semántico y conceptual de dichos números. La resolución de problemas ha emergido en esta modalidad de tratamiento como un recurso final de las correspondientes estrategias y, al mismo tiempo, aislado de la mecanización previa.

A partir de la revisión de la literatura especializada y de la reconstrucción crítica de algunos pasajes de su propia experiencia de enseñanza, logrados en el seminario de la maestría, ha procurado desarrollar una práctica docente menos mecanicista, mediante la introducción del sentido susceptible de ser construido a través del uso de dibujos que ilustran la consecución de los algoritmos, así como también, de diversos materiales concretos y de una amplia resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. 7-64.

Secretaría de Educación Pública, (1993). *Plan y Programas de Estudios. Educación Básica. Primaria.*

Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Secretaría de Educación Pública, (2002). *Libro para el Maestro. Matemáticas sexto grado.* Primaria. México.

Secretaría de Educación Pública, (2002). *Libro de Texto. Matemáticas, sexto grado.* Primaria. México.

Secretaría de Educación Pública, (2002). *Fichero. Actividades Didácticas.* Primaria. México.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education.* Tesis doctoral publicada por Kluwer Academic Publishers. 46-136.

UN ESTUDIO CUALITATIVO SOBRE LAS PRÁCTICAS DOCENTES EN LAS AULAS DE MATEMÁTICAS EN EL NIVEL MEDIO

Martha Imelda Jarero Kumul, Mayra Anaharely Sarai Báez Melendres, Cristy Arely Cantú Interián, Karla Margarita Gómez Osalde
Universidad Autónoma de Yucatán México
jarerok@uady.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo presentamos los resultados de una investigación que pretende caracterizar la práctica de los profesores al interior de las aulas de matemáticas en un sistema educativo específico del estado de Yucatán, México. Apoyados en la etnografía como método cualitativo de la investigación y en los indicadores propuestos por Contreras (1998), rescatamos que las concepciones de los profesores los ubican en una tendencia investigativa; sin embargo sus creencias los encadenan en la tendencia tradicionalista.*

Palabras clave: Creencias, concepciones, práctica, tendencia didáctica

Problema de investigación

Desde siempre las matemáticas han sido importantes y útiles en la sociedad, viéndola por si misma o bien, por su relación con diversas disciplinas como la física, astronomía, medicina, etc. Por tanto la educación matemática necesita formar individuos capaces de desenvolverse en esta sociedad, dotándolos de los conocimientos, habilidades y actitudes, necesarios para lograrlo; y un medio que facilitará que esto suceda, es el profesor.

Siendo el aula el espacio por excelencia para comunicar y dar vida a los conocimientos por medio de las propuestas del profesor, este trabajo se propone mostrar un panorama sobre cómo se comunican los saberes matemáticos desde la perspectiva de la práctica docente, la cual se encuentra normada por diferentes factores, la experiencia, la formación inicial, el entorno, las creencias y las concepciones son algunos ejemplos de ello; es sumamente importante realizar una reflexión profunda sobre dichas prácticas ya que éstas influyen de sobre manera en el aprendizaje.

En el estado de Yucatán, México, los Colegios de Bachilleres (COBAY) resultan ser el sistema educativo de nivel medio que atiende al 33% de los alumnos de dicho nivel y desde hace poco más de un año, el modelo constructivista de enseñanza se ha llevado a dicho sistema. Lo cual sugiere el cambio de los métodos de enseñanza y en este sentido, se ha capacitado a los docentes para aplicar dicho modelo, sin embargo, Medina (2005) reporta la poca aceptación de nuevos modelos educativos por parte de los profesores.

Objetivos

Este trabajo se inscribe dentro de un proyecto de investigación interesado en estudiar el discurso matemático escolar (DME), entendido éste como la forma de socializar e institucionalizar los saberes matemáticos, citando a Cordero y Flores (2007), *"normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática"* (p.14). Se reconocen a los libros de texto en los que se apoya la enseñanza y el tipo de explicaciones que usa el docente en clase Buendía (2004, citado por Castañeda, 2006), como dos elementos que definen el DME.

En particular, nos centramos en la práctica del profesor de matemáticas del nivel medio superior al interior del aula, en específico del sistema COBAY, para responder a cuestiones como: ¿cuál es la situación que se vive en las aulas de esta institución?, es decir, por un lado ¿qué prácticas docentes prevalecen en las aulas de matemáticas del NMS?, ¿existe alguna relación entre la formación inicial y las prácticas?; por otro, ¿cuáles son las creencias y concepciones que mantienen los profesores?, sin precisar todo el conjunto, sino más bien resaltando aquellas que más se hacen notar.

Marco teórico

Para García, Azcárate y Moreno (2006); *las creencias del profesor* **"***son ideas poco elaboradas, generales o especificas, las cuales forman parte del conocimiento que posee el docente – pero carecen de rigor para mantenerlas- e influyen de manera directa en su desempeño*" (p. 87). Funcionan como filtro en aspectos concernientes al proceso enseñanza-aprendizaje. Mientras que *las concepciones del profesor* corresponden a "*la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes*" (p. 88). La principal diferencia entre creencias y concepciones es que las primeras se basan más en lo empírico mientras que las segundas son mas concientes y razonadas.

Las consideraciones del profesor respecto a la manera de enseñar y aprender matemáticas obedece a las creencias que el mismo profesor tenga acerca de las matemáticas y al reflexionar sobre dichas creencias podría cambias sus concepciones y consecuentemente su práctica (Gómez y Valero, 1997). Consecuentemente, deja de lado los aprendizajes sobre la forma en que debe enseñar y salen a relucir sus creencias y enseña bajo estas ideas, lo cual deriva seguramente en enseñar conforme el mismo fue enseñado.

Contreras (1998) propone un modelo teórico que describe cuatro tendencias didácticas: tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa, aunque para él no existe diferencia entre creencias y concepciones. Cada tendencia se subdivide en seis categorías: el papel del profesor, papel del alumno, metodología, sentido de la asignatura, evaluación y concepción del aprendizaje. Las cuales se subdividen determinando un total de 35 indicadores que permitan el análisis de las tendencias.

Es importante hacer mención que las tendencias tecnológicas y espontaneísta surgen como un intento por abordar los problemas del currículum tradicional, pero al enfocarse en solo un aspecto generan nuevos problemas por no atender a otro. Por ejemplo, la tendencia tecnológica se centra en la planificación y dirección del aprendizaje pero olvida la interacción de los alumnos en todo el proceso; la segunda tendencia, por el contrario, pretende que cada estudiante sea el que construya su conocimiento, pero deja a un lado la importancia de la orientación que ofrece el profesor. En este sentido, se considera que el profesor puede vivir ajustes en sus creencias respecto a la enseñanza de las matemáticas de tal forma que evolucione de una tendencia hacia otra.

En relación a la tendencia investigativa, se puede decir que esta se caracteriza principalmente en proponer un proceso que conducirá al alumno hacia la adquisición de los conocimientos por medio de la investigación.

Por otro lado, se reconoce que un docente no necesariamente se puede encontrar totalmente definido en una tendencia, por lo tanto puede reportar características de diferentes tendencias, pero se considerará aquella donde se reportan la mayoría de los indicadores. Bajo las consideraciones establecidas, ¿en qué tendencia se ubican la mayoría de los docentes del COBAY?

Recabación de datos

Se realizó una investigación cualitativa bajo el paradigma del pensamiento del profesor, en dicho paradigma se tiene por objeto de estudio los procesos de razonamiento, creencias y concepciones de los profesores, lo cual nos permitió ir en dirección del estudio que se pretendía realizar. La metodología consistió en un estudio de carácter etnográfico y pretendiendo abarcar el mayor número de indicadores posibles que caracterizan las tendencias didácticas, se emplearon diversos instrumentos y procedimientos. Se diseñó y aplicó una encuesta, se realizaron observaciones de clase en la modalidad no participante –con el apoyo de sistemas de video y registro en hojas de trabajo- y por último se entrevistó a los profesores observados.

Por medio de la encuesta se rescata la información de más del 93% de la planta docente del COBAY, entre los cuales consideramos como No normalistas a los profesores con carrera universitaria y aquellos con preparación tecnológica, quienes tienen la misma preparación en cuanto al dominio de las matemáticas; y el Normalista con mejor formación pedagógica. De tal forma que:

- El 33% de los profesores son Normalistas y el 67% son No normalistas

- La edad de los profesores oscila entre los 23 y 63 años, siendo 28 años la de mayor frecuencia.
- El 67% de la planta de profesores son hombres
- Encontramos profesores que tienen 1 mes de servicio en el sistema hasta aquellos que han laborado 20 años. El número de años de servicio con mayor frecuencia es de 2 años en este sistema.
- No se alcanza el 1% de profesores con estudios de postgrado

En cuanto a la determinación de la tendencia didáctica que reportan los profesores, considerando la clasificación de éstos en Normalistas y No normalistas; pudimos identificar con base en los indicadores, que la tendencia donde más se ubican los profesores es la Investigativa, como se muestra en la Tabla 1.

Formación inicial	Tradicional	Tecnológica	Espontaneista	Investigativa	**Total**
Normalista	4	4	8	19	**35**
No normalista	8	21	16	27	**72**
Total	**12**	**25**	**24**	**46**	**107**

Tabla 1. Formación inicial – Tendencia didáctica

La observación no participante y la entrevista de tres profesores, se contrasta con las respuestas que éstos dieron en la encuesta. Esta información se concentra en la Tabla 2.

Profesor	**Encuesta**	**Observación**	**Entrevista**	**Tendencia**
Profesor A	Investigativa	Tradicional	Tradicional	Tradicional
Profesor B	Investigativo	Tecnológico	Tecnológico	Tecnológico
Profesor C	Tecnológico	Tradicional	Tecnológico	Tecnológico

Tabla 2. Tendencia didáctica según procedimientos

Observemos que los tres profesores reportan en la encuesta una tendencia distinta a la reportada por medio de la observación no participante. Esta situación la interpretamos bajo el hecho de que los profesores responden en la encuesta en función de lo que se espera realicen en el aula, esto está; basado en sus concepciones, mismas que derivan del proceso de formación; sea ésta inicial o de actualización. Sin embargo, sus creencias los atan en la tendencia tradicional o en el mejor de los casos en la tecnológica; lo cual se hace evidente en la puesta en escena.

Para explicar lo anterior, nos apoyaremos en un caso particular, por ejemplo: el Profesor A en la encuesta refiere que la enseñanza de las matemáticas deben ser de manera constructiva y bajo los intereses de los alumnos, tal como se discute en las reformas educativas en el COBAY. Sin embargo, en la observación se identifica que la metodología empleada habitualmente corresponde a la exposición magistral e inclusive al pedirle en la entrevista explicar respecto a la dinámica de la clase comenta:

> PA-2: *Normalmente yo, estén / siempre trabajo así con ellos. Les muestro el tema, les marco una serie de ejercicios y ellos van resolviendo, así y así, generalmente así trabajo.*

Otro aspecto que se rescata es que existe bastante proximidad entre lo reportado por medio de la observación no participante y la entrevista. Solo en el caso de un profesor (profesor C), se observa similitud en las tendencias reportadas tanto en la encuesta y la entrevista.

Por otro lado, nos interesó mirar si la formación inicial y/o los años de servicio están relacionados con la tendencia didáctica que reportan los profesores, para ello consideremos la información presentada en la Tabla 3.

Profesor	Tendencia	Formación Inicial	Años de Servicio
Profesor A	Tradicional	Normalista	10 años
Profesor B	Tecnológico	No Normalista	15 años
Profesor C	Tecnológico	No Normalista	1 año

Tabla 3. Tendencia didáctica – Formación inicial y Años de servicio

Pareciera que los profesores No normalistas se caracterizan por la Tendencia Tecnológica. Los años de servicio no parecen ser un factor determinante, ya que los profesores B y C, con diferencia considerable de años de servicio, reportan la misma Tendencia Tecnológica. Consideramos que ambos reportan esta tendencia como producto de la formación inicial (en el caso del profesor C) y los cursos de actualización (profesor B), que son los que los moviliza hacia la Tendencia Tecnológica. Entonces la pregunta sería ¿porqué el profesor normalista (con un número de años de servicio considerable) no se ha movilizado?

Conclusiones y reflexiones

Al parecer las concepciones de los profesores del sistema educativo COBAY respecto a la matemática misma y a su enseñanza, se encuentran bajo la *tendencia investigativa*. Aunque sus creencias, independientemente de su formación inicial, no los dejan actuar de acuerdo a sus concepciones, determinando una práctica con *tendencia tradicionalista*.

Las creencias de los profesores acerca de la manera de enseñar y aprender matemáticas son: la exposición es una buena herramienta para enseñar los contenidos matemáticos, se comparte la idea de que el alumno debe poner mucha atención y reproducir ejercicios para lograr su aprendizaje. Se asume que la asignatura está orientada hacia la adquisición de conceptos y reglas cuya finalidad es exclusivamente informativa, es decir, poner en conocimiento de los alumnos lo que se espera aprendan. Consideran que el contenido matemático no es diferente en estructura, aunque sí en nivel de abstracción, del conocimiento matemático formal.

Aunque se reconoce que gracias a los cursos de actualización algunos de los profesores modifican sus prácticas, pero la gran mayoría, sus *creencias* no los dejan actuar de acuerdo a sus concepciones. Nos preguntamos, ¿hasta qué punto se debe llegar en estos cursos para modificar estas creencias?, de manera mas general, ¿cuáles serían esos factores que logran modificar las creencias de los profesores?

Los resultados reportados nos llevaron a obtener una caracterización de las prácticas docentes en las aulas del nivel medio superior y concluir lo siguiente*:* "la formación inicial influye en las concepciones de los profesores (aunque no es lo único), sin embargo éstos tienden a superponer sus creencias por encima de sus concepciones, por tanto dichas creencias caracterizan la práctica docente". Por lo tanto debemos pensar en procesos de formación que permitan orientar las creencias hacia enfoques de construcción del conocimiento advirtiendo los roles que ha de desempeñar el profesor de matemáticas y se deje de *preparar para la escuela* y que siga mejor *formar para la vida*, como se plantea en González (2000).

La metodología empleada, permitió interpretar y diferenciar las ideas de creencias y concepciones, aunque Contreras (1998) las consideraba de forma indistinta. La encuesta nos permitió identificar las concepciones de los profesores, donde se observó que éstos poseen los conocimientos de las nuevas perspectivas didácticas, mientras que la observación y la entrevista nos dan información acerca a las creencias, fuertemente influenciadas por la misma experiencia como alumno a lo largo de su vida escolar.

Cuando se trabaja sobre el estudio de las creencias de los profesores, hay que tener claro que éste debe moverse en tres niveles: el nivel sobre lo que el profesor piensa, lo que hace y lo que dice, ya que, lo que el profesor piensa no es algo que se pueda observar directamente. A través de lo que el profesor dice y hace, hacer interpretaciones sobre lo que piensa y así, concluir respecto sus creencias.

Referencias bibliográficas

Castañeda, A. (2006). *Formación de un discurso escolar*: El caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Educación en Matemática Educativa*, Julio, 9 (002), pp. 253-265.

Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Huelva. España. Recuperado el 01 de Abril de 2007, de

http://www.uhu.es/luis.contreras/tesistexto/contenid.htm

Cordero, F.; Flores, R. (2007). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar.* Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Educación en Matemática Educativa,* Marzo, 10 (001), pp. 7-38.

García, L.; Azcárate, C.; Moreno, M. (2006). *Creencias, concepciones y conocimiento personal de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Marzo, 9(1), 85-116.

Gómez, C.; Valero, P. (1997). *Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor*. Bogotá, Colombia. Recuperado el 01 de abril de 2007 de

http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/libros/libroaportes/creencias.html

González, F. (2000). *Los nuevos roles del profesor de matemática*: retos de la formación de docentes para el siglo XXI. *Paradigma,* XXI (2), 139–172.

Medina, M. (2005). *Actitudes de los docentes de COBAY hacia el modelo constructivista*. Consultado el 01 de marzo de 2007 en http://www.uaslp.mx/PDF/2228_286.pdf

CRITERIOS DE IDONEIDAD Y ARGUMENTACIÓN EN LA EVALUACIÓN DE LOS CAMBIOS DENTRO DE UNA COMUNIDAD DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Vicenç Font, Ana B. Ramos
Universitat de Barcelona España
Universidad de Carabobo Venezuela
vfont@ub.edu
Campo de investigación: Formación de Profesores Nivel: Superior

Resumen. *La investigación que se presenta se enmarca dentro del enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática y tiene como objetivo investigar el papel que juegan los criterios de idoneidad en la argumentación que hace el profesorado cuando valora la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones. La investigación se divide en dos fases claramente diferenciadas, La primera tiene como objetivo conseguir la problematización de una práctica que no era considerada como tal en la institución (la ausencia de problemas contextualizados) y la segunda la reflexión para el cambio a partir de dicha problematización. Se concluye que los "criterios de idoneidad" son herramientas que pueden ser muy útiles para organizar y analizar las prácticas discursivas del profesorado cuando valora la posibilidad de incorporar cambios al proceso de instrucción.*

Palabras clave*:* funciones; contexto; cambio institucional; argumentación; criterios de idoneidad de un proceso de instrucción

Introducción

Este reporte de investigación está estructurado en cinco apartados además de esta introducción. En el apartado 2 se explicitan los objetivos de la investigación. En el tercer apartado se explicita la metodología utilizada y se explica que la investigación se diseñó y desarrolló en dos fases claramente diferenciadas, la primera tuvo como objetivo problematizar la falta de contextualización de las funciones en la institución investigada y la segunda la reflexión sobre la posibilidad de cambiar dicha práctica. En el cuarto apartado se presenta el marco teórico utilizado: el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática y la Teoría de la Acción Comunicativa y se explica el tipo de análisis de datos realizado. En el quinto apartado se exponen las conclusiones obtenidas para cada uno de los objetivos y en el sexto se termina con una reflexión final.

Objetivos de la investigación

El objetivo general de la investigación se formuló de la manera siguiente: Analizar el papel que juegan los criterios de idoneidad en la argumentación que hace el profesorado cuando valora la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de Venezuela. Este objetivo se concretó en los siguientes objetivos más específicos:

Objetivo 1: Estudio del significado pretendido para el objeto función en la institución investigada.

Objetivo 2: Analizar la competencia de los docentes en la resolución de situaciones contextualizadas en las que intervienen las funciones.

Objetivo 3: Analizar la competencia de los alumnos en la resolución de situaciones contextualizadas en las que intervienen las funciones.

Objetivo 4: Identificar las opiniones de los profesores sobre las matemáticas.

Objetivo 5: Analizar qué criterios de idoneidad expresan en sus prácticas discursivas los profesores para valorar la posibilidad (o no) de cambiar el significado pretendido, incorporando prácticas en las que se contextualiza el objeto función.

Objetivo 6: Estudiar puntos de consenso en la institución FaCES para la introducción de la matemática contextualizada y/o modelizada en el currículo de la asignatura con relación al objeto función.

Objetivo 7: Conocer las prácticas actuativas y discursivas del profesorado que forman parte del significado de los siguientes objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado: función, contexto, matemáticas, enseñanza, aprendizaje y evaluación.

Metodología

Los sujetos investigados fueron un grupo de 14 profesores(as) pertenecientes a la Cátedra de "Introducción a la Matemática" de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo (Venezuela). Se trata, por tanto, de un estudio instrumental de casos grupal o colectivo (Stake, 1998), que se plantea alcanzar una mayor comprensión de un caso particular. La intención es describir e interpretar la función que tienen los objetos, matemáticos y didácticos, de los profesores y profesoras de esta institución escolar cuando se les plantea la posible incorporación de la contextualización en la enseñanza de las funciones.

Para conseguir el objetivo general de esta investigación era necesario, en primer lugar, conseguir problematizar una práctica cotidiana de la institución (la ausencia de problemas contextualizados en el tema de funciones) que hasta el momento no se había considerado como tal en la institución. Una vez conseguida esta problematización, tendría sentido introducir la reflexión para el posible cambio (o no) de dicha práctica problemática. Este hecho nos llevó a dividir la investigación en dos fases claramente diferenciadas. La investigación que se describe se divide en dos fases claramente diferenciadas. La primera tendría como objetivo conseguir la problematización de una práctica que no era considerada como tal en la institución (la ausencia de problemas contextualizados) y la segunda la reflexión para el cambio a partir de dicha problematización.

Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) se tomó como el principal referente teórico de la investigación que se presenta. En diferentes trabajos, Godino y colaboradores (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico del conocimiento e instrucción matemática. De los constructos propuestos en el EOS, en esta investigación se utilizaron fundamentalmente tres: los significados de los objetos personales (del profesorado), las configuraciones epistémicas/cognitivas y los criterios de idoneidad.

Algunos de los constructos teóricos citados (prácticas discursivas, criterios de idoneidad, etc.) necesitaban ser completados con una perspectiva más general sobre la argumentación. Por este motivo se optó por ampliar el marco teórico con la perspectiva dialógica de la Teoría de la Acción Comunicativa de Habermas (1987). Dicha teoría hace aportaciones sobre el proceso de toma de decisiones que nos parecen válidas para optimizar los procesos educativos.

Para realizar el análisis (coral) de las prácticas discursivas del profesorado se han considerado tres niveles de análisis:

1) *Un primer nivel más general* donde se utiliza la Teoría de la Acción Comunicativa (TAC). En concreto, los tres aspectos que considera Habermas en su excurso sobre la teoría de la argumentación: proceso, procedimiento y producto.

2) *Un segundo nivel más detallado* donde se vuelve a utilizar básicamente la TAC para el estudio de los consensos conseguidos en los segmentos argumentativos analizados. Se utilizan constructos como: proponente, oponente, omisión argumentativa, pretensiones de validez, fuerza argumentativa, consenso racionalmente motivado, consenso por omisión, etc.

3) *Un tercer nivel (intermedio)* donde, para organizar las prácticas discursivas del profesorado, se utilizan, sobre todo, los criterios de idoneidad (epistémico, cognitivo, semiótico, mediacional y emocional) y el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado, propuestos por el EOS !en el momento de realizar la investigación se habían propuesto estos cinco criterios de

idoneidad, posteriormente en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmí (2006) se añadió un sexto criterio, el ecológico y el semiótico pasó a llamarse interaccional.

Conclusiones

Objetivo 1

El vigente significado institucional pretendido para el objeto "función" se correspondía con una enseñanza de las funciones descontextualizada y más cercana al modelo formalista que al modelo constructivista. Si bien había perdido la coherencia del modelo formalista mantenía la mayoría de sus características.

Objetivo 2

El significado del objeto personal "función" de los profesores no incorporaba prácticas que permitan resolver problemas contextualizados de funciones no rutinarios. La falta de competencia se produjo, sobre todo, cuando el profesorado tuvo que interpretar gráficas contextualizadas o realizar conversiones desde una forma de representación de las funciones (que no fuese la fórmula) a otra.

Objetivo 3

El significado global del objeto "función" de los alumnos que ya habían cursado la asignatura Introducción a la Matemática no incorporaba prácticas que permitiesen resolver la mayoría de problemas contextualizados no rutinarios en los que intervenían funciones.

Objetivo 4

Los docentes no tienen opiniones claras sobre la naturaleza de las matemáticas. Presentan una mezcla implícita de diferentes posiciones con un cierto predominio de una mezcla de platonismo y formalismo, aunque este predominio convive con argumentaciones más propias de otros puntos de vista, las cuales pueden dar lugar a un posible cambio en sus prácticas docentes. La modulación de la enseñanza de las matemáticas que se realiza en la institución (primero las matemáticas y después las aplicaciones en cursos posteriores) no es el resultado de una posición meditada y reflexionada sobre lo que son las matemáticas.

Objetivo 5

En general se observa que: 1) El criterio de idoneidad epistémico sólo se utiliza para argumentar a favor de la introducción del enfoque contextualizado. No hay ningún profesor que argumente en contra de que los alumnos deban aplicar sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas contextualizados (lo cual es lógico si se tiene en cuenta de que se trata de una Facultad de Ciencias Económicas). 2) El criterio de idoneidad mediacional, sobre todo el tiempo, sólo se utiliza para argumentar en contra de la introducción del enfoque contextualizado. No hay ningún profesor que argumente que el enfoque contextualizado consume menos tiempo que el enfoque descontextualizado. 3) El criterio de idoneidad emocional se utiliza, casi siempre, para argumentar a favor de la introducción del enfoque contextualizado. Sin embargo, en algún momento se utiliza para argumentar en contra (la falta de éxito puede frustrar al alumnado). 4) El criterio de idoneidad cognitivo, cuando se aplica a los alumnos, se utiliza más en contra que a favor. En contra cuando se dice que los alumnos no están preparados y a favor cuando se dice que el conocimiento del contexto puede facilitar la resolución del problema. 5) El criterio de idoneidad semiótico se utiliza tanto en contra como a favor. En contra, cuando se dice que los alumnos van a tener dificultades por la complejidad que implica el proceso de descontextualización. A favor cuando se dice que el conocimiento del contexto y el hecho de encontrar sentido a la situación pueden facilitar el proceso de descontextualización.

De manera metafórica, se puede decir que, en la batalla para impedir el éxito del enfoque contextualizado, los profesores que no son partidarios de su implementación se sitúan fundamentalmente en posiciones “mediacionales” y “semióticas” y, en menor medida, en posiciones “cognitivas”. En cambio, los partidarios de su implementación se sitúan, básicamente, en posiciones “epistémicas”, “emocionales” y “semióticas”.

Objetivo 6

Los docentes rechazaron, por unanimidad, continuar con el actual significado pretendido e implementado para el objeto función. Además, manifestaron que la introducción del enfoque contextualizado necesitaba: 1) Que el significado de sus objetos personales incorporase prácticas que permitan resolver problemas contextualizados y realizar una enseñanza contextualizada. 2) Una modificación consensuada del currículo de la asignatura, de su cronograma y de sus planes de evaluación. 3) Un proceso de preparación del alumnado en cuanto al uso de contextos.

No se obtuvo consenso en cuanto a cómo tenía que ser la secuencia didáctica contextualizada alternativa ya que hubo dos posturas: 1) Una que propuso una metodología de enseñanza donde se le presenten inicialmente a los alumnos los objetos matemáticos previamente construidos, para luego al final colocar problemas de aplicación contextualizados. 2) Otra que propuso un modelo mixto: primero la enseñanza habitual a fin de introducir el objeto "función" seguido de problemas contextualizados de aplicación y, en segundo lugar, proponer primero problemas contextualizados para la construcción de los diferentes tipos de funciones, para luego ir incrementado el nivel de dificultad.

Objetivo 7

Con relación a la determinación de las prácticas actuativas y discursivas del profesorado que forman parte del significado de los siguientes objetos personales: función, contexto, matemáticas, enseñanza, aprendizaje, evaluación, matemáticas y cambio, aquí nos limitaremos, por cuestiones de espacio a sólo dos de ellos: función y contexto.

El significado del objeto personal "función" no incorpora prácticas matemáticas que permitan resolver problemas contextualizados no rutinarios en los que tenga que intervenir dicho objeto. Sobre todo, cuando tienen que interpretar gráficas contextualizadas o realizar conversiones desde una forma de representación de las funciones (que no sea la fórmula) a otra forma de representación. Los profesores manifiestan que es un problema matemático complejo y difícil el paso de la gráfica a la expresión analítica. En cambio, sí que incorpora prácticas en las que el objeto función es definido en términos conjuntistas. También Incorpora prácticas en las que las funciones se presentan descontextualizadas y con una sola forma de representación.

Las prácticas de enseñanza y aprendizaje que hacen son bastante coherentes con el significado institucional pretendido y son, entre otras, las siguientes: 1) Las funciones se presentan en términos conjuntistas como un caso particular de relación. 2) Inicialmente los conjuntos de salida y de llegada son conjuntos finitos que se representan por diagramas sagitales, después se pasa a conjuntos infinitos que se representan, sobre todo, mediante gráficos cartesianos y, en menor medida, una expresión analítica. 3) Se presentan, sobre todo, situaciones descontextualizadas. 4) El objeto personal "función" de los alumnos no es producto de una construcción, el docente primero lo define y luego lo ilustra con varios ejemplos. 5) No se proponen actividades cuyo objetivo sea la conversión enunciado-tabla, enunciado-gráfica, gráfica-tabla. 6) Algunos profesores utilizan ejemplos contextualizados, de manera marginal, para resolver las dificultades de los alumnos. 7) Consideran que a los alumnos les resulta muy difícil resolver problemas contextualizados en los que se tenga que convertir una representación de la función a su expresión simbólica. 8) Sobre "lo que se debería hacer" son partidarios de incorporar, a sus significados personales, prácticas matemáticas que permitan resolver problemas contextualizados y conversiones entre representaciones de las funciones y, también, prácticas que permitan realizar una enseñanza contextualizada de las funciones.

El significado del objeto personal "contexto" de los profesores incorpora, entre otras, prácticas discursivas en las que los docentes: 1) Manifiestan que la relación entre las matemáticas y los contextos extra-matemáticos es compleja. Si bien se manifiestan muy de acuerdo con el uso de contextos, afirman que conseguir un buen contexto no es tarea fácil. 2) Consideran que los contextos deben ser bien precisos, no deben expresar ambigüedades. Para que un problema contextualizado sea realmente idóneo debe darse entre el contexto y el objeto matemático que representa una correspondencia biunívoca. 3) Consideran que hay una brecha entre las matemáticas informales de la vida cotidiana y las escolares. 4) Consideran, además, que los contextos deben ser, en su caso, adaptados a las Ciencias Económicas y Sociales y manifiestan la necesidad de formación sobre este tipo de contextos. 5) No se consideran del todo competentes para aplicar las matemáticas a situaciones contextualizadas - en el caso concreto de las funciones sus respuestas a los cuestionarios demuestran que efectivamente no son todo lo competentes que cabría esperar. 6) Consideran que los modelos matemáticos son una representación idealizada de la realidad, lo que quiere decir que, en la mayoría de las ocasiones, no se ajustan exactamente a la misma.

Consideración final

Los profesores en sus reuniones de trabajo, en sus conversaciones informales, etc. cuando valoran los procesos de instrucción que realizan o bien, por ejemplo, cuando valoran un posible cambio juegan a un determinado juego de lenguaje, dicho en términos de Wittgenstein (1953). Cuando los profesores entran en un juego de lenguaje en el que no se limitan a la mera descripción que lo deja todo como esta y aspiran a la mejora de este estado de cosas, utilizan de manera explícita o implícita criterios de “idoneidad” – entendidos como reglas de corrección que establecen cómo ha de realizarse un proceso de instrucción y emanadas del discurso argumentativo de la comunidad (sea esta científica o profesional), cuando éste está orientado a conseguir un consenso sobre “lo que se puede considerar como mejor” – que permiten valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora. Se trata de realizar una acción o meta-acción para ser más precisos (el valorar) que recae sobre otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). Se trata de una racionalidad axiológica que permite el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.

Si se considera que el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado es el conjunto de prácticas, operativas y discursivas, que realiza el profesor relacionadas con el objeto matemático en cuestión y con su enseñanza y aprendizaje, es necesario desarrollar instrumentos metodológicos y teóricos que permitan analizar la argumentación del profesor. En esta dirección, los "criterios de idoneidad" son herramientas que pueden ser muy útiles, tanto para organizar y analizar las prácticas discursivas del profesorado sobre cómo debería ser el proceso de instrucción, como para valorar las prácticas que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado.

Referencias bibliográficas

Godino. J. D. (2002). *Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática.* Recherches en Didactique des Mathématiques *22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. Wilhemi, M. R. (2006). *Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas*. *Paradigma XXVII* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática*, Recherches en *Didactique des Mathématiques 26 (1), 39-88.*

Habermas, J. (1987). *Teoría de la Acción Comunicativa I. Racionalidad de acción y racionalización social*. Madrid: Taurus.

Stake, R. (1998). *Estudio de casos. Madrid: Morata*. Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* N. York: Macmillan.

EL DIÁLOGO ASÍNCRONO DOCENTE- INVESTIGADOR, COMO PROCESO DE CONSTRUCCIÓN COLABORATIVA DEL CONOCIMIENTO

María Eugenia Ramírez Solís, Liliana Suárez Téllez, Pedro Ortega Cuenca
CECyT 14 Instituto Politécnico Nacional México
meramire@ipn.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Medio Superior

Resumen. *Para asumir responsablemente los cambios educativos que demanda la Reforma Académica, es preciso que los profesores adopten un modelo profesional de la docencia. En la mayoría de los casos, los profesores del IPN, son profesionales de la disciplina que imparten pero van construyendo su concepción de la docencia a partir de su propia práctica y de algunos cursos generales sobre didáctica; sin embargo, esto no suele convertirlos en profesionales de la docencia. Según Romberg (1988), los profesionales se distinguen por usar un conocimiento específico; en el caso de la docencia hay por lo menos 4 tipos de conocimientos que el docente debe poseer: el conocimiento de su propia disciplina; el conocimiento de la pedagogía; el conocimiento del contenido desde una perspectiva pedagógica y el conocimiento sobre cómo administrar una situación educativa. En el caso de matemáticas, estos conocimientos se integran en una disciplina: la matemática educativa. Para acercar a los profesores a este conocimiento especializado, en particular a los resultados de las investigaciones, se diseñó el Seminario Repensar las Matemáticas (SRM). En el SRM, uno de los medios de comunicación es un foro-e de discusión que permite establecer un diálogo entre el investigador y el docente a partir de sus resultados de investigación, El foro constituye un espacio de profesionalización, donde se construye un conocimiento profesional y se fortalecen los procesos de colegialidad. Más que atender al análisis cuantitativo de las participaciones, este trabajo resalta la importancia de la calidad del diálogo que se establece entre el profesor y el investigador a través de diferentes categorías de análisis que dan cuenta del tipo de intervención y de los niveles y las fases de la discusión. Del análisis realizado se desprende que los foros de discusión asíncronos constituyen un medio que permite describir la evolución de la calidad de la interacción docente-investigador en la construcción colaborativa de conocimiento. Además, la participación de los profesores en los foros-e contribuye a la construcción del conocimiento que requiere para su profesionalización.*

Palabras clave: modelo docente, diálogo docente-alumno

Introducción

En las reuniones que se llevan a cabo en el IPN para la planeación y la evaluación del quehacer docente, pocas veces se recurre a los tipos de conocimientos que caracterizan el ejercicio profesional de la docencia. En particular, muy lejos se encuentran los profesores de considerar el conocimiento generado a partir de los resultados de las investigaciones en Matemática Educativa.

La problemática generada alrededor del estudio (enseñanza y aprendizaje) de las matemáticas es un foco de atención en muchas instituciones. Anteriormente se pensaba que el aprendizaje de los alumnos dependía sólo del grado en que el profesor dominase la materia y del interés, voluntad y capacidad de los propios alumnos, pero hoy se sabe que no es tan sencillo. La complejidad del estudio de las matemáticas ha dado lugar a una disciplina que genera conocimiento, con bases científicas, sobre estos procesos: la Matemática Educativa. Si para contratar a un profesor antes era suficiente confirmar su conocimiento sobre la materia y por ello se le exigía sólo una formación en el área de ingeniería o ciencias físico-matemáticas, ahora también se requiere que tenga conocimientos en matemática educativa, pues finalmente se le contrata como profesor, no como matemático. En este momento se tiene el desafío de fortalecer una cultura en matemática educativa entre los profesores y que así sea habitual discutir la problemática que se enfrenta y acostumbrar apoyarse en la investigación (en matemática educativa) que se ha hecho, especialmente la realizada en nuestro país.

Para conocer mejor el problema de la falta de vinculación entre la investigación educativa y la docencia, y, por supuesto, para contribuir a resolverlo, se diseñó el Proyecto 'Uso de los Resultados de la Investigación en Matemática Educativa para el Mejoramiento de la Práctica Docente' (Proyecto URI), que forma parte del Programa 'Mejoramiento del Estudio de las Matemáticas en el IPN'. La pregunta de investigación del Proyecto URI: *¿Qué principios orientan las decisiones de los profesores de Matemáticas del IPN en su práctica docente?,* o más específicamente, *¿qué papel tienen los resultados de la investigación en Educación Matemática en las decisiones que toman los profesores de Matemáticas del IPN en su práctica docente?*

Con el propósito de fomentar el uso de los resultados de la investigación educativa en la práctica docente, era preciso acercar este conocimiento especializado a los profesores, por lo cual se diseñó el Seminario Repensar las Matemáticas (SRM). En él, se trata de propiciar la reflexión y la discusión informadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, en consecuencia, mejorar la calidad de los aprendizajes mediante el uso de los resultados de la investigación educativa en la práctica docente.

El Seminario está diseñado en la modalidad de videoconferencia, en la primera parte de cada sesión se realiza un diálogo entre un profesor y un investigador reconocido, generalmente en Matemática Educativa, alrededor de una problemática concreta en la que el investigador ha obtenido resultados publicados en artículos o tesis de posgrado. En la segunda parte, se responden preguntas de los participantes (ya sea en forma presencial, vía internet, videoconferencia o teléfono) en torno a la temática en cuestión. Todas las participaciones quedan registradas en un foro-e que permanece abierto para la continuación asincrónica de las discusiones, ya que, poco tiempo después de realizada la sesión presencial por videoconferencia, se pone a disposición de los interesados el video del diálogo en la modalidad bajo demanda.

En el portal del SRM http://www.comunidades.ipn.mx/riieeme (comunidad virutal a través del cual se comunica la red académica) se encuentran organizadas por cada sesión del SRM las ligas para la videoconferencia en vivo, y en la modalidad bajo demanda algunos días después de la sesión; los materiales de cada sesión (artículos, tesis de maestría o de doctorado y en general, un documento que reporte una investigación); información diversa como enlaces a las instituciones a donde pertenecen los investigadores; y un foro de discusión para cada sesión lo que propicia la interacción sincrónica y asincrónica de los participantes , extendiendo las intervenciones sin barreras de tiempo y espacio. El contar con este espacio posibilita la conformación de una comunidad de aprendizaje virtual coordinada e integrada a partir de las temáticas del seminario. (Ramírez, M. E., Torres, J. L., Suárez, L. y Ortega, P. 2007)

El foro virtual es un espacio de comunicación donde es posible crear y desarrollar vínculos entre individuos (Domínguez, 2004), que permite consolidar la participación de los mismos, lograr la interacción, mantener una discusión orientada y reflexiva, así como dar seguimiento en relación con las aportaciones, dudas o comentarios, para de esta manera ir integrando a cada miembro y sus participaciones en una comunidad de aprendizaje.

Chabannes, citado por Rodríguez, considera que *«ya que las formaciones más prestigiosas de innovación son aquellas que se organizan como un intercambio entre profesores comprometidos en un mismo proceso de innovación e investigación, lo ideal sería poder asegurar el seguimiento de las formaciones por medio de redes de información y de intercambios que permitan la comunicación de herramientas y procedimientos pedagógicos»* (1997: 47-48) El intercambio de mensajes permite una gran variedad de relaciones: comunicación entre personas y tipos de vínculos (cadena de mensajes).

Planteamiento del problema

Reconociendo la incipiente cultura matemática en los profesores del nivel medio superior y de la necesidad de aproximar los resultados de la investigación en matemática educativa a la práctica docente, el SRM constituye un proyecto que aplica los criterios y sigue las fases de la innovación educativa, además de generar información precisa que permita evaluar el proyecto.

Para el análisis de los datos se usan varias categorías, que, en conjunto, permitan responder la pregunta ¿Cómo ocurre el diálogo asíncrono docente-investigador, como proceso de construcción colaborativa del conocimiento?

Marco teórico

La construcción colaborativa del conocimiento

Las teorías actuales de la educación consideran la importancia de interacciones sociales entre las personas actuando en un mundo social. Según la teoría sociocultural de Vygotsky el individuo se apropia de la cultura en el ambiente social donde vive y mediante las herramientas que utiliza para acercarse a esa realidad social. Las herramientas psicológicas como el lenguaje, los sistemas para contar etcétera, eran sociales y "los individuos tienen acceso a las herramientas psicológicas por el hecho de formar parte de un medio sociocultural", (Wertsch,1995:96).

La socialización del conocimiento está basada en un proceso complejo de influencias, ambientes culturales, condiciones positivas y negativas, etcétera, en medio de esa complejidad el individuo en su interacción social construye su propio conocimiento y lo comparte con otros individuos en la colectividad. Sin embargo, para que surja "[.] un conocimiento, idea o pensamiento nuevo siempre se constituye bien sea contra la presión social (imprinting / normalización), bien sea en una zona de baja presión social, bien sea en un punto de encuentros / agitaciones de reglas o imperativos contradictorios: lo nuevo precisa condiciones socioculturales inmediatamente no represivas para no ser destruido [.].Se explica a continuación el concepto de netepistemología como parte del estudio. (Salcido, 2003:2). La *netepistemología,* está fundada en la inteligencia colectiva y compartida en la red Internet, la netepistemología tiene su fundamento en varios teóricos que explican la inteligencia colectiva como Pierre Lévy, en los siguientes términos: "El punto común de las nuevas formas de inteligencia es la estructura de comunicación *todos con todos.* Según sus modalidades aún primitivas, [.] el ciberespacio ofrece instrumentos de construcción cooperativa en un contexto común en grupos numerosos y geográficamente dispersos. [.] Un ser viviente subjetivo envía una objetivación dinámica. El objeto común suscita dialécticamente un sujeto colectivo". Derrick de Kerckhove, en su libro *Inteligencias en conexión,* aporta lo siguiente sobre la inteligencia compartida y comunicada: "La propiedad de la *Webness* (reticularidad) reside en la interconexión de inteligencias humanas mediante interfaces conectadas, con el propósito de innovar y descubrir".

Foros virtuales

Reconocemos al foro como un espacio y momento para la discusión, que soportada en una plataforma electrónica nos permite acceder a tal espacio y momento. Este espacio (virtual) de encuentro, de ninguna manera se limita a ser un simple contenedor de mensajes; en él se lleva a acabo una serie de relaciones que permiten estructurar una micro sociedad, auto concentrada y auto organizada al margen de cualquier contexto que no sea el que ella misma genera (Núñez, Galvez y Vayreda, 2007). La idiosincrasia y los rasgos constituyentes (compromiso mutuo, empresa conjunta, repertorio compartido, etc.) de las comunidades virtuales forman parte del análisis del comportamiento.

En el diálogo y la discusión electrónica se pueden analizar la colaboración de los participantes y los roles que asumen con respecto a la colaboración. De acuerdo con Curran, Kirby, Parsons y Lockyer, (2003), citado por Urdiales (2005) se proponen algunas categorías para analizar y evaluar los diálogos y discusiones de los foros, así como los roles que desempeñan cada uno de los participantes con relación a la colaboración, siendo estas: declaraciones, argumentaciones, negociaciones y explicaciones entre otras.

El foro y la participación

La condición mínima de apertura del foro es la participación; con ella se inicia la relación social. Foro y entramados sociales forman una suerte de *continuum* indiferenciado: el foro proporciona normas, recursos, potencialidades implicadas en la participación y, a su vez, ésta reproduce las propiedades del foro, mantiene sus normas, fortalece sus recursos y amplía sus potencialidades. El foro es así, medio y resultado, proceso y producto. Indiscutiblemente, la participación está limitada por la dimensión estructural del foro, pero son las participaciones concretas las que generan las propiedades estructurales y definitorias. En suma, la participación es al mismo tiempo la producción y la reproducción del foro.

Metodología

Con base en las 28 sesiones de los 3 ciclos del SRM se realizó un análisis de los foros en tres fases. En la primera se analizaron las características generales de todas las sesiones: la participación, las temáticas y la interacción. En la segunda se realiza el análisis de 3 foros de discusión, uno de cada ciclo, para analizar con más detalle el tipo de participación en el proceso de construcción de conocimientos y, en una tercera, se analizarán las intervenciones de un participante habitual y se describirá la evolución del lenguaje para crear conocimiento, así como los tipos de orientación cognitiva que adopta hacia los demás A continuación mostramos los primeros avances.

La participación en el foro:

El Seminario Repensar las Matemáticas si bien está dirigido a todos los educadores, se espera que tenga un mayor impacto dentro de la comunidad politécnica. A pesar de ello, todavía no se ha logrado cubrir la totalidad de escuelas del Nivel Medio Superior del IPN formada por 15 CECyT y 1 CET. Se cuenta con la participación frecuente de siete CECyT en los foros de discusión, y se ha detectado que 4 escuelas no se han integrado al proyecto, y los 5 centros restantes siguen las videoconferencias aunque no han participado habitualmente con preguntas hacia los investigadores (Servin,et al, 2005)

Del análisis realizado tenemos que el 33% de los planteles participantes identificados en el foro, presentan un alto nivel de contribuciones, reconociéndose que éstas pueden tener un número indeterminado de profesores. Se tiene un alto número de participaciones de personas que no dan su nombre, ni institución a la que pertenecen, por lo que es posible que la participación de los profesores del IPN sea mayor, e incluso de otras instituciones que no se hayan identificado todavía.

En cuanto a los niveles de participación encontramos que de los 41 participantes, 18 de ellos (43%) son participantes habituales, ya que producen el mayor número de mensajes y han seguido en términos generales los tres ciclos del seminario (entre 10 y 25 participaciones). Junto a este grupo se encuentran 16 profesores (39%) que se han interesado por alguna sesión particular y que hemos identificado como frecuentes, ya que emiten mensajes ocasionales en función del tema o de su disponibilidad de tiempo. Presuponemos que como en todos los foros virtuales, hay un número amplio de participantes que se conectan al mismo y se limitan a leer los mensajes. Lamentablemente en el foro estudiado no se cuenta con el historial del mensaje que permita saber el número de personas que han abierto o leído los mensajes y en qué momento lo han hecho.

La temática

Cada una de las sesiones del SRM tiene un eje temático específico que se da a conocer a los profesores con anticipación a fin de que sea consultada, estudiada, comentada y para apoyar una participación más comprometida, se proporcionan en el sitio de la comunidad diversos documentos científicos producidos por los investigadores. Entre los datos encontrados se identificó que sobre la temática de participación en los foros de discusión, además de preguntar sobre el tema propio de la videoconferencia, se observa un creciente interés en los temas que se pueden clasificar, de manera general, en las categorías que se listan a continuación: 1) Tema de la videoconferencia, 2) Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). 3) Diseño curricular, 4) Profesionalización docente, 5) Proceso de enseñanza-aprendizaje, especialmente sobre la Resolución de Problemas, 6) Implementación y práctica docente (¿cómo diseñar actividades basadas en los resultados de investigación?), 7) Problemáticas institucionales, propias del IPN y 8) Artículos de referencia para la videoconferencia.

La interacción en el foro

El nivel de participación también ha sufrido transformaciones durante el desarrollo del Seminario. En los primeros foros de discusión, las preguntas estaban dirigidas sólo al especialista y se referían, casi en su totalidad, a lo mencionado durante la videoconferencia, mientras que en las participaciones más recientes ya se hace mención a los contenidos de los materiales de referencia. Es importante destacar que en el foro del SRM algunas participaciones no fueron respondidas por escrito por el investigador sino durante la transmisión en vivo de la entrevista. Por otra parte, en los foros del segundo y tercer ciclo, se nota una interacción más intensa entre todos los participantes, no solamente del especialista con los profesores, sino de los profesores con otros profesores. Las interacciones principales que se han dado son: a) cuestionamientos directos, b) planteamientos contextualizados, c) comentarios, d) declaraciones, e) explicaciones y f) ejemplos.

Discusión y conclusiones

Los foros de discusión constituyen un espacio para el fortalecimiento del pensamiento crítico; en ellos se generan actitudes de autonomía, responsabilidad e iniciativa, y se desarrollan habilidades de solución de problemas y se construye conocimiento. Los participantes que se benefician más de una situación de aprendizaje colaborativo son los que cuestionan, elaboran, clarifican o justifican sus argumentos, conformando un fluido en la interacción de los mensajes. La falta de consideración de las participaciones fragmenta la intervención. El impacto del 'Seminario RMNMS' ha trascendido a otras instituciones, tal es el caso de la participación activa de docentes pertenecientes al ITESM en el Campus Monterrey, así como de estudiantes de postgrado en países como Francia y Argentina. También han participado profesores del CONALEP, del CCH y de escuelas particulares, entre otras. Contar con estas participaciones permite socialmente hablando integrar otras formas de relaciones e ideologías derivadas de sus contextos de trabajo, las cuales enriquecen la microsociedad que se integra en el foro. Del análisis realizado se desprende que los foros de discusión asíncronos constituyen un medio que permite describir la evolución de la calidad de la interacción docente-investigador en la construcción colaborativa de conocimiento. Además, la participación de los profesores en los foros-e contribuye a la construcción del conocimiento que requiere para su profesionalización.

Referencias bibliográficas

Domínguez, D; Alonso, L.(2004) *Metodología para el análisis didáctico de foros de discusión*. Disponible en http://edutec2004.lmi.ub.es/pdf/46.pdf .

Ramírez, M. E., Torres, J. L., Suárez, L. y Ortega, P. (2007). *La profesionalización docente en matemáticas: trabajo de una red académica*. Revista Electrónica de Nuevas Modalidades Educativas*, No. 2.* [Publicación en línea]. Disponible en http://www.dinme.ipn.mx:8080/dinme/renme/revista.htm

Romberg, T. (1988) *Can teachers be professionals? En Grouws & Cooney* (Eds.). Effective Mathematics Teaching. Hillsdale NJ: LEA & NCTM, 224 – 244.

Salcido,G (2003). *La socialización del conocimiento educativo en Internet*. Disponible en http://www.somece.org.mx/virtual2003/ponencias/gestion/socializacion/socializacion.htm

Servín,C., Téllez, J., Ortega, P., Ramírez, M.E.,Suárez, L y Torres, J. (2005) . *Uso de los resultados de la investigación en matemática educativa para el mejoramiento de la práctica docente.* Disponible en http://www.virtualeduca2005.unam.mx/memorais/programave05.pdf

APROXIMACIÓN A LA DIMENSIÓN NORMATIVA EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS DESDE UN ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Juan D. Godino, Vicenç Font, Miguel R. Wilhelmi, Carlos de Castro
Universidad de Granada, España
Universidad de Barcelona,
Universidad Pública de Navarra y
Universidad Complutense de Madrid
jgodino@ugr.es, vicencfont@menta.net, miguelr.wilhelmi@unavarra.es, carlos.decastro@edu.ucm.es
Campo de investigación: Didáctica de las Matemáticas, Socioepistemología
Nivel: Básico, medio y superior

Resumen. *Las nociones de contrato didáctico, norma social y sociomatemática son claves en distintas teorías didácticas, siendo diversas su conceptualización y ámbito de aplicación. En este trabajo presentamos una perspectiva que integra estas nociones como parte de una "dimensión normativa de los procesos de estudio". La consideración de esta perspectiva, desde un enfoque ontosemiótico, da lugar a una categorización de las normas según la faceta de los procesos de estudio a la que se refieren las normas: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. Finalmente, mostramos cómo la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica de un proceso de estudio, se integran junto a las normas matemáticas, sociales y sociomatemáticas en la dimensión normativa, incorporando una racionalidad axiológica en el análisis didáctico.*

Palabras clave: norma, dimensiones de procesos de estudio, teoría de situaciones didácticas, interaccionismo simbólico, enfoque ontosemiótico

Introducción

Los procesos de estudio de las matemáticas están regulados por normas, convenciones, hábitos, costumbres y tradiciones. Dichos elementos conforman lo que denominamos "dimensión normativa de los procesos de estudio". Las normas influyen desde un segundo plano en los procesos de estudio, lo que hace que rara vez se cuestionen. Esto dificulta las iniciativas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Las normas han sido objeto de investigación por diversas perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas. Yackel y Cobb (1996) introducen los patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas en el interaccionismo simbólico. La noción afín de contrato didáctico es clave en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1988, 1997). En ambos casos, se consideran las normas, generalmente implícitas, que regulan el funcionamiento de la clase, centrándose especialmente en las interacciones profesor - estudiantes al abordar tópicos matemáticos.

En este trabajo, adoptamos un Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006) para abordar el estudio sistemático y global de la dimensión normativa de los procesos de estudio.

Presupuestos de partida

La perspectiva global sobre la *dimensión normativa* de los procesos de estudio de las matemáticas que desarrollamos en este trabajo, se basa en los siguientes supuestos:

1) La descripción de un proceso de instrucción precisa de la comprensión del sistema de normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estas normas, explícitas o implícitas son establecidas por diversos agentes, dependen del contexto institucional, y afectan a todas las dimensiones del proceso de estudio.

2) La Didáctica de la Matemática debe aspirar a mejorar el funcionamiento de los sistemas didácticos, incorporando una racionalidad axiológica que permita establecer criterios de “idoneidad” para valorar los procesos de instrucción y guiar su mejora.

3) Los criterios de idoneidad deben considerarse como reglas de corrección, emanadas del discurso argumentativo de la comunidad científica, dentro de la búsqueda compartida de un consenso sobre cómo deben ser los procesos de instrucción.

4) La asunción de unos criterios de idoneidad didáctica supone, implícitamente, una propuesta de principios para la Didáctica de las Matemáticas análoga a los Principios y Estándares del NCTM (2000).

Contratos en educación matemática

La noción de "contrato", heredada del mundo jurídico, se ha aplicado a las instituciones escolares considerando diversos contratos: *social, educativo, institucional, pedagógico* o *didáctico*, según sea su ámbito de aplicación y agentes intervinientes (la sociedad, el conjunto de personas y de grupos interesados en la creación y comunicación de saberes de un cierto campo, la institución, la clase, o la clase de matemáticas).

Presentamos una visión integradora de la dimensión normativa que abarque los cinco contratos mencionados. Comenzaremos revisando la noción de contrato didáctico según la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la distinción entre normas matemáticas, sociomatemáticas y sociales **(**Voigt, 1994; Yackel y Cobb, 1996**)** para dar cuenta de la relevancia de la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas.

El contrato didáctico en la Teoría de Situaciones Didácticas

La noción de contrato didáctico (Brousseau, 1988, 1997) está vinculada a supuestos constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas. El aprendizaje se produce cuando el alumno acepta la responsabilidad en la resolución de un problema matemático, buscando la estrategia óptima —más eficaz y económica— para el control de un juego formal (*situación didáctica*). La aceptación de la responsabilidad lleva consigo la desvinculación de la intención didáctica original y, por tanto, de la relación escolar con el profesor y con el saber. Son las restricciones y necesidades del medio las que determinan respuestas que exigen al alumno la adaptación de sus conocimientos.

Cuando no tiene lugar la *devolución* (Brousseau, 1997), se produce una ruptura de una cláusula del contrato didáctico según la cual el alumno tiene la obligación de resolver los problemas asignados por el profesor. Sin embargo, es precisamente esta ruptura condición necesaria para el aprendizaje. "La intervención del profesor modifica las condiciones de funcionamiento del saber, condiciones que también forman parte de lo que el alumno debe aprender. El objeto final del aprendizaje es que el alumno pueda hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente" (Brousseau, 1988, p. 322).

Normas matemáticas, sociomatemáticas y sociales

Las interacciones entre profesor y alumnos están con frecuencia regidas por "obligaciones" o normas no explícitas: normas sociales y sociomatemáticas.

Las *normas sociales* son convenciones que describen cómo: 1) colaborar unos con otros, 2) reaccionar socialmente ante un error o una indicación y 3) asumir la responsabilidad que la acción cooperativa conlleva. Las normas sociales son independientes de la disciplina. Entre ellas podemos citar: la adopción de una actitud crítica, el apoyo al propio discurso en conocimientos aprendidos a través de la explicación, justificación y argumentación, o tratar de rebatir las justificaciones de los compañeros.

También existen aspectos normativos específicos de la actividad matemática. Por ejemplo, la comprensión de lo que en el aula se puede considerar "matemáticamente diferente, sofisticado, eficiente o elegante", así como lo que se puede considerar como una explicación "matemáticamente aceptable". En este caso, hablamos de *normas sociomatemáticas* (Yackel y Cobb, 1996) y no únicamente "matemáticas", puesto que son específicas de la actividad matemática de los estudiantes y, a su vez, la determinación, descripción y valoración de una norma sólo es posible dentro de un contexto social (clase, nivel, institución, etc.).

Tanto las normas sociales como las sociomatemáticas se infieren al identificar regularidades en los patrones de interacción social. La distinción entre normas sociales y sociomatemáticas es sutil, porque en los procesos de cognición e instrucción matemática están determinados por una cantidad de dimensiones o facetas. En la siguiente sección abordamos esta complejidad.

Facetas de la dimensión normativa de los procesos de estudio matemático

En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) la *dimensión normativa* está constituida por el sistema de normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en un contexto institucional determinado. Estas normas, explícitas o implícitas, pueden ser establecidas por agentes externos al ámbito escolar, o por el profesor, y afectan a las diversas dimensiones del proceso de estudio. El EOS propone tener en cuenta las siguientes dimensiones: epistémica, cognitiva, mediacional, instruccional, afectiva y ecológica.

Normas epistémicos

La *faceta epistémica de la dimensión normativa* es el conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una institución. Dichas normas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para cada contenido. Dicho en la terminología del EOS, las normas epistémicas determinan las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan.

En el EOS se considera necesario contemplar una ontología formada por: lenguajes; situaciones; conceptos; procedimientos, propiedades y argumentos. Estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* cuyo análisis nos informa de la “anatomía de la actividad matemática”. El par <configuración epistémica, prácticas que posibilita> permite un análisis más fino que las “normas matemáticas” de las perspectivas socioculturales. De hecho, cada componente de una configuración epistémica esta vinculado a normas metaepistémicas (consideradas como normas sociomatemáticas). Por ejemplo, en las situaciones es necesario que el alumno pueda responder a preguntas del tipo: ¿qué es un problema?, ¿cuándo se ha resuelto?, ¿qué reglas conviene seguir para resolverlo?, etc.

Normas cognitivas

En el EOS se considera que la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

Los significados son entendidos como sistemas de prácticas potencialmente realizables por el sujeto relativas a un objeto matemático (significado global), expresadas en pruebas de evaluación, ya sean correctas o incorrectas (significado declarado) o manifestadas y acordes a una pauta institucional (significado logrado).

Al analizar el cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*. De acuerdo con este punto de vista, consideramos que las normas cognitivas regulan el ámbito de lo personal (en contraposición a lo institucional) dentro del proceso de estudio de las matemáticas. Esta faceta normativa, entre otros aspectos, establece que el alumno debe aprender y que la institución debe asegurarse de, (1) que el alumno tiene los conocimientos previos necesarios, (2) que lo que se le va a enseñar está dentro de la zona de desarrollo próximo del alumno y (3) que la institución se adaptará a la diversidad del alumnado.

Normas interactivas

La *faceta interaccional de la dimensión normativa* es el sistema de normas que regulan las interacciones entre personas implicadas en procesos de estudio matemático. Las interacciones en el aula se sujetan a reglas y también generan nuevas pautas de actuación. Los patrones de interacción en el aula están con frecuencia condicionados (normados) por agentes externos al propio sistema didáctico, como ocurre con los dispositivos “clase de teoría”, “clase de prácticas”, “sesiones de tutoría”, etc.

En el aula, el "paradigma educativo" asumido por el profesor produce normas que determinan el tipo de interacción posible. En un modelo constructivista social, el profesor debe buscar buenas situaciones y crear un medio en que los alumnos construyan el conocimiento trabajando cooperativamente. En un modelo expositivo, el profesor asume el papel de presentar los contenidos y los estudiantes de retenerlos.

Normas mediacionales

El sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales es lo que designamos como *faceta mediacional de la dimensión normativa*. Muchos medios, como la calculadora, tienen un uso restringido en el aula debido al contrato mediacional. Los apuntes y los libros de texto no pueden utilizarse en situaciones de evaluación. Los materiales manipulativos suelen "prohibirse" en las etapas educativas superiores. Todas éstas son normas mediacionales que condicionan los procesos de estudio. Asimismo, el uso de los artefactos (manipulativos concretos o virtuales, programas de cálculo o graficación) requiere la apropiación por los estudiantes de configuraciones epistémicas (normas matemáticas) específicas de los tipos de problemas abordables con los mismos.

También forman parte de la faceta mediacional de la dimensión normativa aquellas normas que regulan la gestión del tiempo de estudio (responsabilidad compartida por profesor y alumnos) y las que fijan los usos de los espacios de un centro educativo.

Normas afectivas

La *faceta afectiva de la dimensión normativa* se refiere al conjunto de normas que regulan el ámbito de la afectividad y las emociones en los procesos de estudio de las matemáticas. Entre estas normas, citaríamos las "obligaciones" del profesor de motivar a los alumnos, crear un clima afectivo que evite la aparición de fobias hacia las matemáticas, elegir contenidos y tareas "atractivos" tomando en cuenta los intereses de los alumnos, y fomentar la autoestima de los alumnos como matemáticos y su confianza en las propias capacidades. Por su parte, el alumno debe asumir su responsabilidad y un compromiso ético con el estudio. Al esfuerzo del profesor por favorecer la motivación intrínseca hacia el estudio, a través de situaciones matemáticas pertenecientes al campo de intereses de los estudiantes, éstos deben responder implicándose en tareas que para la adquisición de conocimientos instrumentales a los que, en principio, no ven utilidad.

Para enfatizar el aspecto específicamente matemático de las normas afectivas, vemos cómo, la *devolución* del problema (Brousseau, 1997) muestra la interdependencia establecida entre las características matemáticas del problema y la actitud afectiva de aceptación o rechazo de la responsabilidad matemática por parte del alumno.

Normas ecológicas

Las normas ecológicas son las referidas al entorno social, político y económico donde se ubica la escuela, ya que éste influye sobre el tipo de prácticas matemáticas que se van a realizar en el aula. Dentro de la faceta normativa-ecológica, hay normas orientadas a que los alumnos se comprometan con la sociedad, asumiendo los valores de una sociedad democrática y garantizando los derechos y fomentando los deberes cívicos. También hay normas cuyo objetivo es proporcionar una formación inicial que asegure la competencia en un futuro ejercicio profesional.

Desde la asunción del proyecto curricular del centro y la obligación de cumplir las programaciones de las asignaturas, hasta la evaluación sumativa, entendida como compromiso de la escuela de informar a los padres y a la sociedad, la enseñanza de las matemáticas está condicionada por cláusulas "ecológicas" de la dimensión normativa. Otros ejemplos serían las reglas que gobiernan el uso de las TIC o las que determinan la implicación de los centros en proyectos de innovación. En ambos casos tienen gran influencia sobre estos elementos los cambios sociales y profesionales del entorno.

Valoración del efecto o eficacia de las normas

La introducción en el marco del EOS de la noción de significado de referencia y la adopción de postulados socio-constructivistas para el aprendizaje, permiten formular criterios de idoneidad/adecuación para las distintas dimensiones (epistémico, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional, ecológica) implicadas en un proceso de estudio matemático (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). La aplicación de criterios de idoneidad a las normas que regulan los procesos de estudio supone la consideración de aspectos axiológicos o valorativos de las normas.

Los criterios de idoneidad didáctica, junto con los componentes e indicadores empíricos que los desarrollan (Godino et al, 2007), constituyen una propuesta que incluye a los "Principios" para las matemáticas escolares del NCTM (2000), al tiempo que tratan de hacer operativos tales principios. Este marco conformado por los criterios de idoneidad y su desarrollo permite orientar el análisis didáctico en las fases de diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática. En concreto, los criterios son útiles para valorar las diversas facetas que intervienen en la dimensión normativa de los procesos de estudio implementados, y orientar su mejora.

Reflexiones finales

En este trabajo iniciamos el análisis de la dimensión normativa de los procesos de estudio de las matemáticas desde un "enfoque ontosemiótico" (Godino, Batanero y Font, 2007). Partiendo de las limitaciones observadas en el contrato didáctico en la TSD (Brousseau, 1997) y el "contrato interaccionista" (Coob y Bauersfeld, 1995), aplicamos nociones teóricas del EOS para identificar y categorizar la malla invisible (y visible) de normas que soportan y restringen los procesos de estudio de las matemáticas.

La principal implicación de este trabajo es la toma de conciencia, de investigadores y docentes, de la naturaleza normativa de los objetos matemáticos y didácticos y del conglomerado de normas que condicionan la actividad de estudio de las matemáticas.

Identificar facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite: 1) Valorar la pertinencia de intervenciones de profesores y alumnos y, 2) Sugerir cambios en las normas que faciliten la evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

A veces las normas son impuestas explícitamente; otras, emergen de las prácticas escolares. El profesor debe advertir que dispone de estas dos vías de actuación sobre las normas e, indirectamente, sobre el aprendizaje de sus alumnos. La toma de conciencia de las normas revela al mismo tiempo los *grados de libertad* que tiene el profesor, lo que hace tan complejo, creativo y apasionante su trabajo.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*. Dordrecht: Kluwer.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2): 127-135. [Versión ampliada en español, disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm]

Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2007). Análisis y Valoración de laIdoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma, XXVII*(2), 221–252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

NCTM (2000). Principios y estándares en educación matemática. Granada: Thales.Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275-298.Yackel, E. y Cobb, P. (1996). *Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics*. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

METÁFORAS Y ONTOSEMIÓTICA. EL CASO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES EN EL DISCURSO ESCOLAR

Vicenç Font, Jorge I. Acevedo, Marina Castells, Janete Bolite
Universitat de Barcelona España
UNIBAN Brasil
vfont@ub.edu
Campo de investigación: Gráficas y Funciones Nivel: Superior

Resumen. *En la investigación que presentamos hemos intentado responder primero a las cinco preguntas siguientes: 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones? 2) ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato? 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas? 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos? 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados? A continuación abordamos una reflexión teórica cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico.*

Palabras clave: Metáforas, gráficas, funciones, discurso.

Relevancia del problema de investigación

En Sriraman y English (2005) se hace un estudio global sobre las diferentes agendas de investigación en Educación Matemática. En este trabajo se considera que una de las principales cuestiones a considerar es la reciente aparición en el área de la "Embodied Cognition" y proponen como pregunta de investigación la siguiente cuestión: ¿Cuáles son las implicaciones de este punto de vista para la investigación en educación matemática y para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

La cuestión que proponen investigar Sriraman y English (2005) está tomada del forum sobre investigación del PME del 2005 de Melbourne, lo cual no resulta sorprendente, sobre todo si tenemos en cuenta que, con alguna variante, esta pregunta ha sido uno de los temas debatidos en muchos de los congresos que recientemente se han celebrado en nuestra área de investigación. Por ejemplo, en la CIEAEM 54 (celebrada en España, en julio de 2002) se plantearon, entre otras, las siguientes preguntas: 1) Si los conceptos abstractos son metafóricos, ¿cuáles son las metáforas usadas en la producción, sistematización y comunicación del pensamiento matemático? 2) Las nuevas tecnologías permiten la posibilidad de nuevas y diferentes experiencias. ¿Pueden éstas ayudar al desarrollo de poderosas metáforas que faciliten la construcción, organización y comunicación del pensamiento matemático?

Desde que Lakoff y Johnson pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido (Lakoff y Johnson, 1991), el papel del pensamiento metafórico en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia para la investigación en didáctica de las matemáticas (Presmeg, 1992; English 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Font y Acevedo, 2003; Bolite, Acevedo y Font, 2005, entre otros).

Objetivos y preguntas del proyecto de investigación

Esta investigación se enmarca en la pregunta de investigación que proponen Sriraman y English (2005) pero restringida a un cierto tipo de objeto matemático: las funciones, y, más en concreto, su representación gráfica. La investigación que presentamos tiene como *primer objetivo* intentar responder a las cinco preguntas siguientes: 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones? 2) ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato? 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas? 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos? 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?

La investigación en didáctica de las matemáticas ha permitido resaltar, por una parte, la importancia que tienen las metáforas en el proceso de instrucción y, por otra, han puesto de manifiesto que cualquier reflexión sobre las metáforas tiene que tener presente la gran complejidad de factores relacionados con ellas. Por tanto, si por una parte es cierto que estamos interesados de entrada en la metáfora, también es cierto que somos plenamente conscientes de que dicha reflexión obliga a considerar conjuntamente, como mínimo, cuatro de los aspectos más característicos de la actividad matemática y de la emergencia de sus objetos: la dualidad extensivo-intensivo (particular-general), la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización, los cuales son, en nuestra opinión, *instrumentos de conocimiento* que comparten un mismo aire de familia (en el sentido de que, de alguna manera, hacen intervenir la relación *A* es *B*).

Partimos de la hipótesis de que muchas de las dificultades observadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con el hecho de que los objetos matemáticos institucionales presentan una complejidad de naturaleza intrínsecamente matemática, la cual está íntimamente relacionada con esta "familia de instrumentos de conocimiento". También partimos de la hipótesis de que dicha complejidad se puede describir en términos "ontosemióticos". Es decir, en términos de las entidades intervinientes y de las relaciones que se establecen entre ellas. Por tanto, y de acuerdo con este punto de vista, en esta investigación se pretende como *segundo objetivo* afrontar la complejidad que la investigación sobre las metáforas requiere mediante los constructos elaborados por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007).

De acuerdo con este segundo objetivo nos formulamos las siguientes preguntas (utilizando como contexto de reflexión las gráficas de las funciones): 6) ¿Cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en el Enfoque Ontosemiótico. 7) ¿Cómo se relaciona la metáfora con los elementos constituyentes de los constructos Configuraciones Epistémicas/Cognitivas propuestos en dicho enfoque?

Si el primer objetivo nos lleva a considerar como primer marco teórico de referencia la "Embodied Cognition" de Lakoff y Núñez, el segundo nos lleva a considerar como segundo marco teórico de referencia el Enfoque Ontosemiótico.

Metodología

Las preguntas que nos hemos formulado en esta investigación se puedan clasificar en dos grupos: teóricas y empíricas. Para responder a las preguntas teóricas la metodología consistió, básicamente, en un análisis de fuentes documentales de tipo epistemológico, histórico, cognitivo, semiótico y didáctico, adoptando una posición propia sobre las diferentes fuentes. La metodología para responder a las preguntas de tipo "empírico" ha sido de tipo interpretativo y cualitativo. Los sujetos investigados han sido profesores de bachillerato del Estado español y algunos de sus alumnos. Se trata, por tanto, de un estudio de casos.

Los profesores participantes lo hicieron de manera voluntaria y consintieron de forma consciente la intromisión en sus tareas docentes (observación de sus clases, grabación en vídeo, análisis de materiales de trabajo, etc.). Los alumnos participaron a petición de su profesor. La elección de los profesores y de los alumnos que fueron grabados en vídeo no se realizó bajo ningún criterio estadístico, simplemente se tuvo en cuenta su disponibilidad a colaborar y a ser grabados.

Se realizaron tres tipos de grabaciones de video: 1) grabaciones en video de las clases de los profesores, 2) grabaciones en video de entrevistas a profesores y 3) grabaciones en video de entrevistas a alumnos. También se realizó una triangulación de datos y una triangulación de expertos.

Respuesta a la segunda pregunta de investigación

Por cuestiones de espacio en este trabajo nos limitaremos a responder, de manera parcial, a la segunda pregunta de investigación: ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato? Las metáforas observadas se pueden agrupar en las siguientes categorías: 1) Metáforas fosilizada, 2)

Metáforas orientacionales, 3) Metáforas ontológicas (contenedor, parte- todo y objetual), 4) Metáforas dinámicas. Movimiento ficticio, 5) Fusiones conceptuales (p.e. las antropomórficas o zoomórficas) y 6) Otras. A continuación, por cuestiones de espacio, comentaremos brevemente las metáforas fosilizadas, las orientacionales y las dinámicas.

Metáforas fosilizadas

Se trata de expresiones metafóricas que se corresponden con metáforas fosilizadas, en el sentido de que la institución matemática las considera como expresiones literales y no suele ser consciente de su origen metafórico. Es más, dichas expresiones no tiene expresiones alternativas si no se quiere utilizar un lenguaje "impreciso". Este origen metafórico se puede observar en la simbología utilizada (por ejemplo la flecha del símbolo de límite) y en la lectura de dicha simbología (por ejemplo, límite de $f(x)$ cuando x tiene a más infinito). Expresiones como, *"x tiende", "límite lateral por la izquierda", etc.* son consideradas literales, no obstante tienen origen metafórico.

Metáforas orientacionales

El uso de metáforas orientacionales se observa, por ejemplo, cuando el profesor utiliza el término "horizontal" en lugar de utilizar la expresión "paralela al eje de abscisas", "eje horizontal" en lugar de "eje de abscisas" y el término "eje vertical" en lugar de "eje de ordenadas".

Profesor: … en x = 0 presenta un mínimo y la derivada en x = 0 es 0, como cabía esperar, porque ahora esta tangente es horizontal,…….[Mientras dice esto, El profesor hace el gesto de poner la mano indicando la posición horizontal de la recta tangente en la gráfica de la pizarra]

La metáfora conceptual "paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical" utilizada por el profesor es una metáfora de tipo grounding[6] cuyo dominio de partida es el esquema de imagen "orientacional".

En términos generales, se observa que el profesor explica a sus alumnos la representación gráfica de funciones mediante diferentes expresiones metafóricas que son casos individuales de la siguiente metáfora conceptual:

Metáfora orientacional:

"Paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical"

Dominio de partida **Esquema orientacional**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Punto de corte de los ejes vertical y horizontal	Origen de coordenadas
Eje Horizontal	Eje x
Eje Vertical	Eje y
Recta Horizontal	Paralela al eje x
Recta Vertical	Paralela al eje y
Arriba	Valores de y > 0
Subir	Función creciente
Abajo	Valores de y < 0
Bajar	Función decreciente
Derecha	Valores de x > 0
Izquierda	Valores de x > 0
Algo está a la izquierda de otra cosa que está a su derecha	$x_1 < x_2$
Algo está más abajo de otra cosa que está más arriba	$y_1 < y_2$

Tabla 1. Proyección metafórica del esquema orientacional

[6] En Lakoff y Núñez (2000) se distinguen dos tipos de metáforas conceptuales: 1) "Conectadas a tierra" (grounding): Son las que relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas. Por ejemplo: "Las clases son contenedores", "los puntos son objetos", "una función es una máquina", etc. Estas metáforas sirven para organizar un dominio de llegada matemático (por ejemplo las clases) a partir de lo que sabemos sobre un dominio de partida que está fuera de ellas (lo que sabemos sobre los contenedores) y 2) De enlace (linking): Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, "los números reales son los puntos de una recta", las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc. Las metáforas de enlace proyectan un campo de conocimientos matemáticos sobre otro distinto.

Metáforas dinámicas. Movimiento ficticio

El uso de metáforas que facilitan que los alumnos entiendan que "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino" se observa en párrafos como el siguiente:

> *Profesor:*…. Si antes del cero es creciente, si después de cero es creciente, si antes del cero y después del cero es creciente tenemos un punto de inflexión. Si antes del cero es creciente y después del cero es decreciente, un máximo. Si antes del cero es decreciente y después de cero es creciente, un mínimo. [Acompaña este comentario con gestos sobre las gráficas dibujadas en la pizarra].

La metáfora "La gráfica es un camino" es una metáfora de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen "camino". Este esquema de imagen, en nuestra opinión es subsidiario del esquema orientacional egocéntrico. Se puede ilustrar por la figura siguiente:

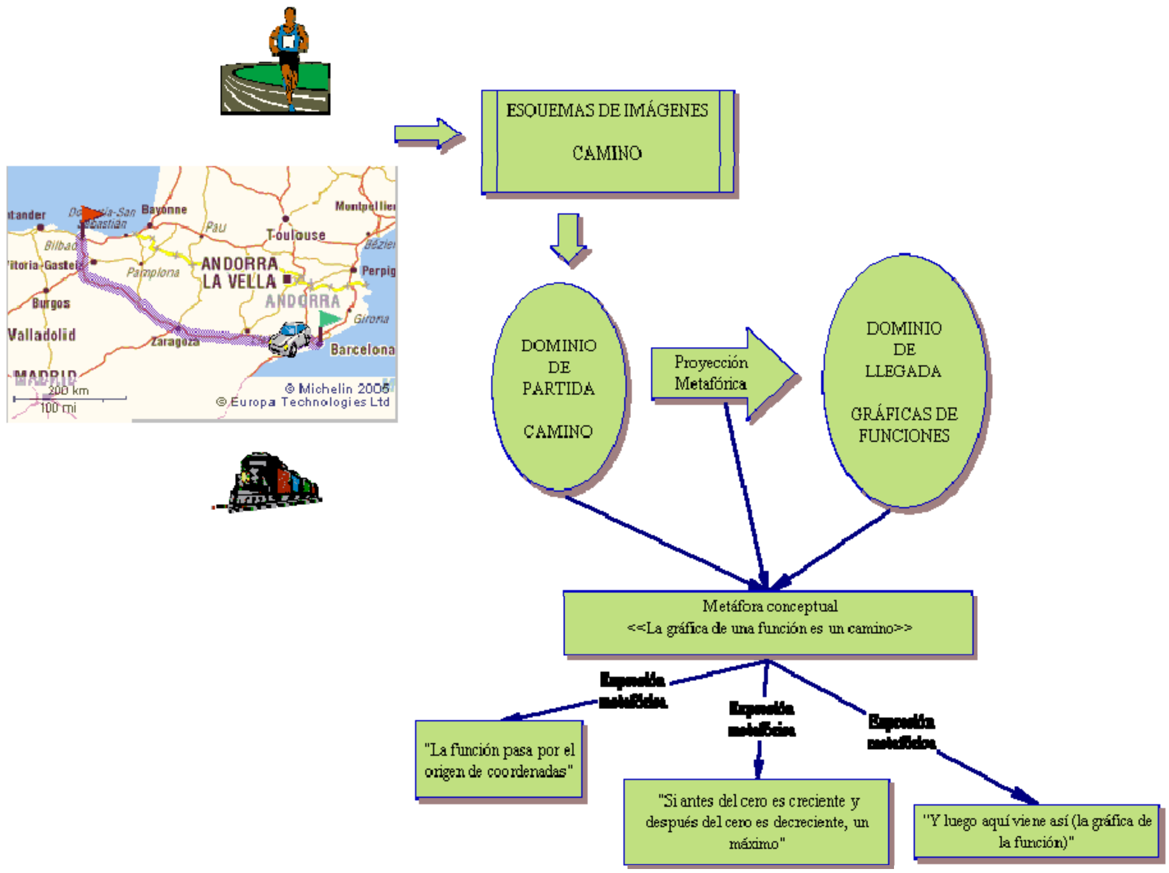


Figura 1. Proyección metafórica del esquema "camino"

Metáfora dinámica: "La gráfica es un camino"

Dominio de partida **Esquema del camino**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Camino	Gráfica
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Tabla 2. Proyección metafórica del esquema camino

Una variante de esta metáfora conceptual es "La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones". La diferencia con la anterior es que, en este caso, el camino no está dado previamente, sino que es la traza que resulta del movimiento del punto. Esta última se pone en funcionamiento cuando se traza la gráfica de una función, mientras que en la primera la gráfica ya está dada previamente.

Consideraciones finales

En esta investigación hemos aportado, por una parte, datos empíricos que permiten un mejor conocimiento del uso de las metáforas en el proceso de instrucción de las gráficas de funciones en el bachillerato y su efecto en la comprensión de los alumnos. Por otra parte, hemos contribuido al desarrollo de la teoría sobre las metáforas, gracias a la visión ontológica semiótica que sobre ellas permite el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. También hemos contribuido al desarrollo del Enfoque Ontosemiótico ya que nuestra investigación permite el "encaje" de la metáfora en el actual desarrollo de dicho enfoque.

Referencias bibliográficas

Bolite Frant, J., Acevedo, J. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41-54.

English, L.D. (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, N. J.: Erlbaum.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21, 3, 405-418.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 23 (6), 595-610.

Sriraman, B. y English, L. D. (2005) Theories of Mathematics Education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)* 37(6), 450-456.

INTERPRETACIÓN DE LOS PROFESORES DEL SABER A ENSEÑAR. REPORTE DE UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES UNIVERSITARIOS DE ÁLGEBRA EN FACULTADES DE INGENIERÍA

Silvia Elena Ibarra Olmos, Ramiro Ávila Godoy
Universidad de Sonora México
sibarra@gauss.mat.uson.mx; ravilag@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Pensamiento del profesor Nivel: Superior

Resumen. *En México, al igual que en muchos países de Latinoamérica, las exigencias del mundo globalizado han impactado las estrategias que las diferentes universidades públicas tienen para la formación de nuevos profesionales; tal impacto se ha traducido en la formulación de nuevos modelos curriculares que tienen entre sus planteamientos principales la necesidad de contar con profesores diferentes, esto es, profesores con nuevos roles en el aula, nuevas actitudes, nuevas formas de pensar y actuar. En este contexto, se realizó una investigación cuyo objetivo general era caracterizar el fenómeno de transposición didáctica del álgebra en ingeniería. Los resultados que aquí se reportan, que constituyen una fase del proyecto original, describen la interpretación del llamado "saber a enseñar" de un grupo de profesores mexicanos universitarios de álgebra.*

Palabras clave: concepciones de los profesores, transposición didáctica, enseñar y aprender álgebra

Introducción

Presionadas por las exigencias de una sociedad en donde la palabra calidad es el status por alcanzar, las instituciones de educación superior mexicanas modifican sus estrategias de formación de egresados, con la expectativa de lograr los parámetros y calificaciones necesarios para ser considerados como "escuelas de calidad" y tener, en consecuencia, acceso a un número mayor de estudiantes y/o recursos económicos.

Dichas certificaciones están relacionadas con los requerimientos de un mercado profesional exigente, en constante cambio, debido a las también constantes y vertiginosas innovaciones en ciencia y tecnología que impactan en mayor o menor medida los sistemas de producción del país. En este contexto, donde confluyen exigencias sociales, económicas, científicas y tecnológicas, por citar las más influyentes, es donde se llevan a cabo los cambios curriculares que impactarán de manera inmediata y directa a profesores y estudiantes del nivel superior.

Por otro lado, en México, considerada como una nación en vías de desarrollo, resulta importante para el progreso nacional la formación de profesionales en ciencias básicas y en las llamadas ciencias de la transferencia. En estas últimas, en donde están incluidas las diversas ingenierías, se considera clave la generación de egresados que coadyuven a lograr el avance del país.

Dado que como áreas de conocimiento la matemática y la ingeniería han mantenido desde siempre una relación muy estrecha, hay consenso respecto a que es fundamental que un ingeniero tenga una buena formación matemática. Pero, ¿qué significa tener "una buena formación matemática", ¿cómo las instituciones (escuelas, colegios de profesionistas, profesores, etc.), dan concreción a esa premisa?, ¿cómo se manifiestan en términos curriculares esas decisiones?

Este tipo de inquietudes fueron las que nos llevaron a diseñar un proyecto de investigación, que desde la Matemática Educativa abordara la problemática señalada.

El problema de investigación

Conscientes de las limitaciones que tiene el afrontar ese problema de manera individual, decidimos restringir nuestro estudio al currículo algebraico, formulando entonces la pregunta general que guía esta investigación así:

Una vez establecido el plan general de formación de un ingeniero, ¿Cuáles son los efectos de la transposición didáctica en el currículo algebraico?

De donde se desprende el siguiente objetivo general:

Describir el proceso de transformación del conocimiento algebraico, desde su inclusión en una propuesta curricular institucional para ingeniería, hasta su puesta en escena en el aula.

Y los siguientes objetivos específicos:

O1) Identificar los elementos que entran en juego para decidir la inclusión de un contenido algebraico en una propuesta curricular institucional para ingeniería.

O2) Describir cuáles son las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que el profesor hace de dichas propuestas institucionales como resultado del trabajo colegiado.

O3) Describir el proceso de concreción de las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que hace un profesor cuando pone en escena un conocimiento algebraico.

Este documento contiene el reporte de los resultados obtenidos a partir de las actividades que se hicieron para alcanzar el segundo de los objetivos.

Consideraciones teóricas

Tomamos la noción de transposición didáctica, construida por Chevallard (1991), para identificar con él a la serie de cambios y transformaciones que sufre un conocimiento matemático cuando es trasplantado de la institución que le dio origen a otra, con la finalidad de que sea enseñado.

En la situación que estamos estudiando, ubicamos al menos tres fases en el proceso de transposición didáctica:

a) La que se realiza cuando un conocimiento es seleccionado del campo de la matemática para pasar a formar parte del cuerpo de conocimientos integrados que formarán a un ingeniero.

b) Aquella que sucede cuando ese conocimiento matemático previamente seleccionado es tomado por un colegiado de profesores de matemáticas, con la intención de construir la "versión homogénea" que ese conglomerado llevará al aula.

c) Y, finalmente, la puesta en escena de esa versión homogénea previamente construida.

Lo expresado en el inciso b), es la fase que se corresponde con el objetivo 2 que aquí reportamos.

Contexto y sujetos

La investigación se llevó a cabo en una universidad pública del noroeste de México, en la cual se efectuó un cambio de modelo curricular; dicho cambio, como era natural, llevó a modificar los planes de estudio de todas las carreras ofrecidas por la institución, siendo las carreras de ingeniería las primeras que entraron en ese proceso de modificación.

Establecido el nuevo plan de estudios para los ingenieros, las instancias responsables convocan a los encargados de impartir los cursos de matemáticas para que conozcan la nueva propuesta curricular y hagan las adaptaciones pertinentes. Esta última instancia convoca a sus profesores de álgebra, dándoles instrucciones para que, de manera colegiada, discutan la iniciativa oficial y hagan las modificaciones de su práctica docente así como el diseño de materiales de apoyo y los instrumentos de evaluación en el curso que a ellos compete.

En los nuevos planes de estudio de ingeniería, el álgebra se reduce de dos cursos a uno; los temas a tratar en él son números complejos, teoría de polinomios y elementos de álgebra lineal.

El conjunto de profesores sujetos de investigación fueron inicialmente quince, aunque el número estuvo variando; los que se mantuvieron constantes a lo largo de todo el proceso fueron diez. La característica común en el grupo es que todos son licenciados en matemáticas egresados de la misma universidad, con una experiencia docente en álgebra que varía entre dos y treinta y cinco años.

De los quince miembros originales, ocho tienen posgrado en matemática educativa, dos han cursado diplomados en docencia y uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas y cinco tienen posgrados en otras áreas de la matemática y ningún tipo de estudio formal en cuestiones de docencia.

Consideraciones metodológicas

Esta es una investigación realizada bajo el paradigma de investigación cualitativo, el cual se seleccionó porque el foco de atención de una investigación cualitativa está puesto en la realización de: *"descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresados por ellos mismos".* (Sandín, 2003)

La estrategia metodológica que se siguió consistió en el acompañamiento al trabajo efectuado durante tres semestres por el grupo de profesores de álgebra que ya se mencionó. De esas reuniones, realizadas semanalmente, surgieron una serie de decisiones, recomendaciones metodológicas, de evaluación y producción de materiales didácticos, todo lo cual, en teoría, debía ponerse en práctica en las aulas. Colateralmente salieron a flote las concepciones que los profesores tenían respecto a su práctica docente y las modificaciones que el trabajo colegiado tuvo en ellas.

La información se consiguió vía la observación participante, auxiliándonos con notas de campo, pues una condición que los maestros pusieron para permitir el acceso a la investigadora, fue el que ésta se involucrase a la par que ellos en las discusiones y tareas que surgieran. Esta decisión tuvo sus ventajas, pues dio oportunidad a la investigadora de profundizar en algunas de las reflexiones que los profesores hacían, al mismo tiempo que oscureció la incomodidad que los maestros pudiesen haber tenido al sentirse observados.

En algún momento se consideró pertinente realizar entrevistas con algunos de los profesores, para conocer sus versiones particulares de los acuerdos tomados colectivamente. Estas entrevistas fueron semiestructuradas, es decir, si bien se preparó una serie de preguntas, se contaba con la flexibilidad suficiente para modificar aquéllas que fuesen necesarias o para incluir otras dependiendo de la profundización buscada. Las entrevistas fueron grabadas, para no distraer al entrevistado y para contar con información fiel.

Resultados y conclusiones

Para organizar la información agrupamos a los participantes en tres subgrupos atendiendo a su formación en matemática educativa y su experiencia en proyectos de docencia; el cuadro siguiente resume tal información:

SUBGRUPO	FORMACIÓN EN MAT. EDUCATIVA	PARTICIPACIÓN EN PROYECTOS DE DOCENCIA
A	Posgrado	Amplia
B	Ninguna	Ninguna
C	Diplomados	Poca, como colaboradores

Las categorías que nos sirvieron para estructurar la interpretación que cada grupo de profesores desarrolló respecto al saber algebraico a enseñar a un ingeniero, fueron:

a) qué es el álgebra;

b) el significado de saber álgebra;

c) el significado de enseñar álgebra;

d) el papel de los problemas en la enseñanza del álgebra;

e) el uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra y

f) el papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.

En las tablas siguientes se concentró la información por subgrupo:

PROFESORES DEL SUBGRUPO A	
Qué es el álgebra	Más que hablar de álgebra, de conceptos, reglas y fórmulas, se habla de la necesidad de concebir y desarrollar un pensamiento algebraico.
Significado de saber álgebra	Que un alumno sepa álgebra significa que se ha podido desarrollar en él una forma de pensar, un tipo de pensamiento que les permita, al verse enfrentados a una situación problemática, construir modelos matemáticos que resuelvan dicha situación, que los puedan operar, y que interpreten los resultados en el contexto del problema original.
Significado de enseñar álgebra	Diseñar un proceso de conducción que lleve a alcanzar el que los alumnos sepan álgebra, en el sentido explicado en el rubro anterior.
Papel de los problemas en la enseñanza del álgebra	Fundamental. A partir del planteamiento de situaciones problemáticas se pueden generar los conocimientos algebraicos que marca el programa. Lo ideal es encontrar contextos adecuados de la ingeniería para el diseño de los problemas.
Uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra	Fundamental. Amplia la gama de significados que los estudiantes pueden construir.
Papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.	Los emplean porque son muy útiles, especialmente para potenciar la construcción del conocimiento en juego. Se menciona básicamente el uso de calculadoras y computadoras.

PROFESORES DEL SUBGRUPO B	
Qué es el álgebra	El lenguaje de la matemática
Significado de saber álgebra	No lo habían pensado, pero debe ser que los estudiantes conozcan las reglas y algoritmos y que sepan identificar cuándo los van a emplear
Significado de enseñar álgebra	Explicar cuidadosamente los temas, con paciencia, auxiliándose de ejemplos de la ingeniería. Asegurarse de que los estudiantes practican lo que se les ha enseñado.
Papel de los problemas en la enseñanza del álgebra	Fundamental. Los alumnos deben conocer las aplicaciones del álgebra en la ingeniería. Siempre se buscan problemas de aplicación los cuales se trabajan generalmente al final de la teoría, aunque a raíz de lo que se ha discutido en el grupo de trabajo, vale la pena experimentar con los ejemplos que han expuesto algunos compañeros. Les preocupa el factor tiempo, pues un cambio así hace muy lenta la clase.
Uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra	Suena interesante, pero no siempre se puede. Cuando es posible, usan las gráficas para ilustrar, aunque con la calculadora graficadora esto se puede mejorar.
Papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.	Antes sólo los usaban para agilizar cálculos, pero con las experiencias que se han compartido en las reuniones del grupo, creen que vale la pena intentarlo. Algunos manifiestan haberlo hecho tomando los ejemplos que se trabajaron en las reuniones. Expresan mucho interés en actualizarse en este rubro.

PROFESORES DEL SUBGRUPO C	
Qué es el álgebra	Un lenguaje que permite modelar problemas de la ingeniería
Significado de saber álgebra	Cuando dado un problema los alumnos sepan identificar los recursos algebraicos para resolverlo
Significado de enseñar álgebra	Enseñar a los estudiantes a comprender y resolver problemas de ingeniería en donde utilicen los recursos del álgebra, pero no con los recursos tradicionales de "yo te hago un ejemplo y tú tienes que hacer muchos similares"
Papel de los problemas en la enseñanza del álgebra	Fundamental. Las experiencias que se han compartido en el grupo de trabajo son de mucha utilidad. Ya se encuentran experimentando con algunos de los diseños propuestos.
Uso de diferentes sistemas de representación en la enseñanza del álgebra	Han leído sobre ellos y comparten su utilidad, aunque a en ocasiones no tienen mucha claridad sobre como explotarlos.
Papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.	Ya las emplean, pues han participado en proyectos relacionados.

Como conclusiones de lo anteriormente expuesto, tenemos que la versión personal de los participantes en el grupo de trabajo está fuertemente permeada por su formación profesional y por su práctica docente. La noción que los maestros tienen de lo que es álgebra influye de manera determinante en su accionar con los aspectos contemplados en el resto de las categorías. Por otro lado también observamos que el trabajo colegiado contribuyó a modificar posturas restringidas que de inicio sostuvieron algunos participantes, sobre todo en lo relativo a los posibles usos de los problemas, la tecnología y las representaciones matemáticas. Sin embargo, todo lo que se ha expuesto surge de las declaraciones y observación de los maestros cuando se encontraban en un conglomerado de iguales. Queda pendiente su contrastación con lo que los profesores realmente hicieron cuando llegaron a sus salones de clase. Esto constituye la última fase de la investigación y sus resultados están en proceso de elaboración.

Desde nuestro punto de vista, en el contexto del problema originalmente expuesto, el proceso que observamos y analizamos resulta alentador en tanto provoca cambios, al menos en el discurso, de los profesores, los cuales juegan un papel clave en el proceso de transposición didáctica.

Como un comentario al margen, percibimos la necesidad de utilizar un lenguaje accesible que facilite la comprensión y la comunicación entre quienes en un momento dado son solo usuarios de los resultados de matemática educativa y los expertos en la disciplina. Esto fue muy evidente en las reuniones del colegiado; los matemáticos educativos tienen ya un lenguaje especializado que no es entendible por otras comunidades con las cuales es imprescindible establecer una comunicación fluida, principalmente el profesorado.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Sandín, Esteban M.P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid, España: Mc Graw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.

SIGNIFICADOS PERSONALES DEL PARALELISMO Y GEOMETRÍA DE LOS CUADRILÁTEROS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Mary Arrieche, Mario Arrieche, Belén Arrieche
Universidad Pedagógica Libertador- Maracay Venezuela
maryarrieche@hotmail.com, marioarrieche@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores, pensamiento geométrico Nivel: Superior

Resumen. *El presente trabajo está centrado en la caracterización de los significados personales del paralelismo y la geometría de los cuadriláteros, consistente en un estudio cognitivo realizado a un grupo de profesores de matemática en formación inicial, de la Universidad Pedagógica-Maracay-Venezuela, con la finalidad de explicar las interpretaciones personales, los errores cometidos y las dificultades de comprensión de los estudiantes en el estudio del tema en cuestión. Para tal fin, se adopta el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Arrieche, 2002). La metodología empleada aborda un enfoque mixto de análisis cuantitativo y cualitativo. Los resultados obtenidos revelan que estos sujetos presentan una deficiente preparación del paralelismo y la geometría de los cuadriláteros al abordar su aprendizaje.*

Palabras clave: significado personal, paralelismo, geometría de los cuadriláteros, formación de profesores de matemática

Introducción

En este trabajo presentamos algunos resultados de un estudio cognitivo realizado en un grupo de profesores de matemática en formación con la finalidad de caracterizar sus significados personales (interpretaciones personales, errores, dificultades de comprensión, etc.) con respecto al paralelismo y geometría de los cuadriláteros. Usamos la noción de significado en el sentido dado por Godino y Batanero (1994) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Estas manifestaciones indicarán los aprendizajes logrados, así como las respuestas erróneas, juzgadas desde el punto de vista institucional, y que son indicativas de las dificultades y conflictos cognitivos de los sujetos en el estudio del tema.

En uno de los estudios revisados se afirma: "*Un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los* *alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta*" (Socas, 1997, p. 143). En nuestro caso las tareas que vamos a proponer involucran las nociones de rectas paralelas, rectas alabeadas, rectas secantes, paralelogramo, cuadrilátero, trapecio y rectángulo. Es de hacer notar que en este informe se describen de una manera sucinta el planteamiento del problema, la metodología, la población y la muestra, los instrumentos de evaluación, análisis e interpretación de los datos, las conclusiones y las referencias bibliográficas

Planteamiento del problema

Actualmente Venezuela está confrontando una de la crisis social y política que está afectando gravemente nuestro sistema educativo. Esta problemática se observa con mayor intensidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles educativos existentes, muy especialmente en la educación básica, media, diversificada y profesional. Uno de los ejemplos más resaltantes donde se muestra éste fenómeno, se encuentra en los estudiantes que ingresan a la educación diversificada, profesional y superior (González, 1990; Arrieche, 1996) con una alta deficiencia en los conocimientos matemáticos básicos requeridos para estudiar los temas propuestos en el programa de matemática en estos niveles educativos.

El Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador núcleo Maracay (UPEL-Maracay), Institución formadora de profesores de Matemática, no se escapa de los efectos negativos de esta problemática, ya que la mayoría de sus estudiantes que ingresan al primer semestre confrontan serias dificultades para aprobar la asignatura Geometría I, probablemente por poseer deficiencias en los contenidos de matemática de los años anteriores. Es así como surge la inquietud de proponer un tema de investigación que estudie la comprensión de los conocimientos matemáticos básicos de los estudiantes de Geometría II de la UPEL-Maracay de tal manera que sus resultados puedan dar algún aporte a la institución, que vaya en vía de mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje de ésta asignatura.

Como esta problemática es muy amplia se centrará el estudio en el tema del Paralelismo y la Geometría de los Cuadriláteros, debido a que este contenido se ha estudiado prácticamente en todos los niveles de educación básica y está involucrado implícita o explícitamente en todos los temas básicos de Geometría I y II. La pregunta inicial que motivó esta investigación fue: ¿Cuáles son los significados que los profesores de matemática en formación inicial le atribuyen al Paralelismo y la Geometría de los Cuadriláteros? En general la problemática de la enseñanza y aprendizaje del paralelismo y la geometría de los cuadriláteros se orienta hacia la comprensión de los diferentes significados que se le atribuyen. Así surge la necesidad de dar respuesta fundada a las interrogantes que describimos a continuación y que clasificamos en dos categorías, (Godino 1999; Arrieche 2002).

Problemática Cognitiva:

1) ¿Qué dificultades de comprensión tienen para los estudiantes de Geometría II de la UPEL-Maracay los distintos aspectos que conforman el paralelismo y la geometría de los cuadriláteros?
2) ¿Cuáles son los errores más comunes cometidos por estos estudiantes?

Problemática Instruccional:

1) ¿Como se enseña el paralelismo y la geometría de los cuadriláteros en el nivel y contexto institucional fijado?
2) ¿Los profesores de matemática donde se enseña paralelismo y geometría de los cuadriláteros están acorde con la manera en que se debería impartir ese conocimiento?

Metodología

Enfoque metodológico

Para investigar los significados personales de los futuros profesores de matemática con respecto al paralelismo y geometría de los cuadriláteros utilizamos principalmente el enfoque cuantitativo, determinando los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas a las preguntas de un cuestionario. Por otro lado, y puesto que el enfoque cuantitativo nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, ni explica el por qué de la misma, vamos a complementar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Este estudio incluye el análisis de los errores de las respuestas al cuestionario y un estudio de casos mediante entrevista clínica, que nos va a permitir caracterizar con más rigor las dificultades y grado de comprensión logrado por los estudiantes de nuestra muestra.

Población y muestra

La población objeto de estudio, han sido los estudiantes de segundo año del programa formación de profesores de matemática. La muestra ha sido tomada del Instituto Pedagógico de Maracay de la Universidad pedagógica Experimental Libertador-Venezuela. El estudio se realizó con un grupo de estudiantes de la asignatura Geometría II formado aproximadamente por 40 alumnos del mencionado programa.

Instrumentos de evaluación

Los instrumentos utilizados para recolectar los datos utilizados en esta investigación fueron el cuestionario y un guión de entrevista clínica. El cuestionario estaba conformado por 3 ítems, conteniendo un total de 16 subítems, con la finalidad de determinar los errores y las dificultades presentadas por los estudiantes en las respuestas de las preguntas propuestas. Cabe destacar que, entre los contenidos considerados se mencionan: definición de rectas paralelas, definición de cuadriláteros, tipos de cuadriláteros, características principales para reconocerlas. Por otro lado, la entrevista fue realizada a un profesor que dicta la asignatura de Geometría II en la UPEL-Maracay con la finalidad de profundizar en los problemas observados por éste y que son presentados por los estudiantes al ingresar a esta casa de estudio.

Análisis e interpretación de los datos

Hemos clasificado las respuestas elaboradas en correctas, parcialmente correctas, incorrectas y respuestas en blanco (cuando el alumno no responde o su respuesta es insuficiente para entender su significado). Presentamos los propósitos y el análisis de contenido de cada ítem del cuestionario considerando los tipos de respuesta correcta, parcialmente correctas e incorrectas. A manera de ilustración en este trabajo sólo describiremos el análisis realizado al ítem Nº 1. Sin embargo, en Rodríguez y Arrieche (2006) se puede ver el tratamiento completo que se le hace a cada uno de los ítems del cuestionario.

Ítem Nº 1

Defina las siguientes nociones: a) Rectas Paralelas:, b) Rectas Alabeadas, c) Rectas Secantes, d) Paralelogramo, e) Cuadrilátero, f) Trapecio, h) Rectángulo.

El propósito de este ítem es evaluar en el alumno, el significado que atribuyen a los conceptos de: Rectas paralelas, rectas alabeadas, rectas secantes, paralelogramo, cuadrilátero, trapecio y rectángulo. Consideramos que la respuesta es correcta cuando el estudiante utiliza adecuadamente, al menos los términos claves del concepto correspondiente. La respuesta parcialmente correcta cuando el estudiante utiliza un término inadecuado o escribe enunciados incompletos, como en el siguiente ejemplo:

Alumno 6 (ítem 1.a) Rectas paralelas *"Son aquellas que no se intersecan"*. Es parcialmente correcta porque las rectas paralelas no se intersecan y están en un mismo plano.

Las respuestas incorrectas se producen cuando se presenta errores conceptuales, es decir los estudiantes muestran total desconocimiento del concepto de la noción que están definiendo. Como por ejemplo:

Alumno 7 (ítem 1.b) Rectas alabeadas: "*Es la recta perpendicular o una recta paralela a un punto"* Es incorrecta porque**,** ya que el estudiante no tiene ni idea del concepto de esta noción.

Entre algunos de los resultados en este ítem se tienen:

En el ítem **1a** sólo un 25 % de los estudiantes respondieron en forma correcta, aunque hay un 58,33% que respondieron de manera parcialmente correcta, es decir, que conceptualmente su respuesta es correcta pero se expresan incorrectamente. También es notorio que el 16,67% respondieron en forma incorrecta. Esto parece demostrar la dificultad de los sujetos para describir adecuadamente el concepto de rectas paralelas.

En el Ítem **1b** se refleja una grave situación ya que el índice de preguntas sin respuestas representa un 66.67%, las repuestas incorrectas representan un 25%, las repuestas correctas representa un 8.33%, y 0% las parcialmente correctas, esto quiere decir que de 12 estudiantes evaluados 8 no respondieron.

En el Ítem **1c** ningún estudiante respondió correctamente y sólo 4 estudiantes respondieron parcialmente correctas representando un 33.33%. Sin embargo la situación sigue siendo grave ya que 8 estudiantes tuvieron las respuestas incorrectas lo que corresponde al 66.67% de la muestra y un 16.67% no contestó. Comportamiento muy similar presentó el Ítem **1e** donde ningún estudiante respondió correctamente y solamente 1 respondió parcialmente correcta representando un 8.33%, pero el restante de los evaluados (8) presentaron errores conceptuales representando un 66.67% y 3 de los evaluados no respondió representando un 25%.

Conclusiones

En este apartado presentamos los resultados más relevantes obtenidos en el cuestionario y en la entrevista personal realizada a un profesor, y las principales conclusiones del estudio.

La prueba en general ha sido difícil para los alumnos, ya que en algunos ítems ninguno de los 12 sujetos que presentaron respondió correctamente. Las mayores dificultades se han presentado en las definiciones de los conceptos y en la demostración. El mayor número de errores conceptuales están en la definición de rectas alabeadas y paralelogramo.

Ha sido en general bastante difícil para los alumnos resolver la demostración planteada y el dominio de distinguir la veracidad o falsedad de un enunciado o teorema.

Entre los principales errores detectados mencionamos los siguientes:

a. Imprecisión de las definiciones de los conceptos, que indican una compresión insuficiente.
b. Confusión entre conceptos, como por ejemplo entre paralelogramo y cuadrilátero.
c. Aplicación incorrecta de los teoremas para resolver la demostración.

En relación a la entrevista realizada al profesor podemos concluir que esta problemática es muy amplia, ya que es una situación que pasa de unos a otros. Es algo que se tiene que tratar principalmente en las personas que se están preparando como docentes de matemática puesto que de estos estudiantes depende la buena o mala formación de lo futuros bachilleres del país.

Como principales aportes destacamos:

El modelo teórico adoptado para la realización de nuestra investigación nos lleva a distinguir como constituyentes esenciales de cualquier contenido matemático y en particular el del paralelismo y la geometría de los cuadriláteros una componente práctica y una teórica. Es decir, en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en los niveles educativos existentes, se deben tener en cuenta las notaciones, los tipos de problemas, los procedimientos, las operaciones, las definiciones, propiedades y argumentaciones.

La descripción sistemática de los errores y dificultades que manifestaron los estudiantes de geometría II al resolver el cuestionario sobre el paralelismo y geometría de los cuadriláteros. Esta faceta de la investigación nos ha aportado información sobre los aspectos que requieren una mayor atención por parte del docente y de los dicentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos contenidos.

Referencias bibliográficas

Arrieche, M. (1996, julio): *Reflexiones sobre algunos factores que afectan el rendimiento* académico de los estudiantes de matemática de la UPEL-Maracay en los primeros cursos de la Especialidad. Ponencia presentada las terceras Jornadas de Enseñanza de la matemática en la región central, organizada por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

Arrieche, M. (2002): *La teoría de Conjuntos en la formación de Maestros. Facetas y Factores Condicionantes en el Estudio de una Teoría Matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.

Godino, J. (1999, septiembre*): Implicaciones Metodológicas de un Enfoque Semiótico-Antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática.* Ponencia presentada en el Seminario sobre Marcos Teóricos y Metodológicos para la Investigación en

Educación Matemática en el Tercer Simposio de la SEIEM, Valladolid.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de funciones semióticas: Un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. y Batanero, C. (1994): *Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3) , 325-355.

González, F. (1990, octubre): *El rendimiento académico de los estudiantes Universitarios y la preparación Matemática que ellos reciben a nivel de educación secundaria*. Ponencia presentada en las primeras jornadas de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la región central, organizadas por la universidad de Carabobo, Valencia.

Rodriguez, S. y Arrieche, M. (2006). *Significados personales de los paralelogramos y la geometría de los cuadriláteros de estudiantes de matemática de la UPEL-Maracay*. Ponencia presentada en la décima primera jornada Institucional de Investigación de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. En L. Rico (Coord.), *La Educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE Universidad de Barcelona y Horsori.

¿QUÉ SE INVESTIGA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA? PERSPECTIVAS DE UN INVESTIGADOR EN DESARROLLO

Mario José Arrieche Alvarado
Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay Venezuela
marioarrieche@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Básico, Medio y Superior

Resumen. *La Educación Matemática en Venezuela se encuentra en pleno proceso de desarrollo y de consolidación como disciplina científica. Uno los indicadores que más han contribuido con este logro lo constituyen los eventos relacionados con esta disciplina; entre ellos se hace especial énfasis la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa que se realizó del 22 al 26 de julio del 2007 en la Facultad de Humanidades de la Universidad del Zulia, por ser el principal motivo y estímulo que nos llevó a la elaboración de este trabajo, que consistió en la presentación de una conferencia especial en el marco de la Reunión sobre "¿Qué se investiga en Educación Matemática?: Desde la perspectiva de un investigador en desarrollo". La presentación se hizo tratando de darle respuesta a las interrogantes siguientes: ¿Qué se ha investigado en Educación Matemática?, ¿Qué se está investigando actualmente en Educación Matemática? y ¿Qué se podría seguir investigando en Educación Matemática en el futuro?*

Palabras clave: Educación Matemática, Investigador en desarrollo, disciplina científica

Introducción

La Educación Matemática en Venezuela se encuentra en pleno proceso de desarrollo y de consolidación como disciplina científica, el cual ha sido impulsado por la conformación de Asociaciones, tanto a nivel regional como nacional, integradas por todos los profesionales que laboran en la enseñanza de la Matemática en los niveles educativos del Sistema Educativo y que se encargan de organizar, coordinar y realizar Simposios, Congresos, Jornadas y toda clase de eventos correspondientes a esta ciencia; constituyéndose estos últimos en escenarios propicios para divulgar y valorar la producción científica generada de los grupos de investigación que coordinan las líneas de investigación, adheridas a los núcleos y centros de investigación existentes en nuestro país.

Entre estos eventos resaltamos la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, realizada en Maracaibo-Venezuela del 22 al 26 de julio del 2007 en la sede de la Facultad de Humanidades de la Universidad del Zulia, por ser el principal motivo y estímulo que nos llevó a la elaboración de este trabajo, que consiste en la Conferencia que su autor dictó en el marco de esta Reunión, sobre "¿Qué se investiga en Educación Matemática? Perspectivas de un investigador en desarrollo".

La presentación se hizo en los tres apartados siguientes. 1) ¿Qué se ha investigado en Educación Matemática?, 2) ¿Qué se está investigando actualmente en Educación Matemática? y 3) ¿Qué se podría seguir investigando en Educación Matemática en el futuro? Para su elaboración hemos tomado como base la experiencia de investigación, adquirida por el autor como estudiante de Maestría y de doctorado, como profesor de Matemática en los niveles de Educación Básica y educación Media, Diversificada y Profesional, Superior en Pregrado y Postgrado, como profesor de cursos de Didáctica de la Matemática en los Programas de Maestría y de doctorado en Enseñanza de la Matemática y Educación, respectivamente, como coordinador de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la UPEL-Maracay, y su participación como conferencista, ponente, tallerista y forista en eventos enmarcados en la Educación Matemática, tanto a nivel nacional como internacional; además de la revisión de diversas fuentes relacionadas con el tema en referencia, obtenidas de las bases de datos del Centro de Información y Documentación y la Biblioteca Central del Instituto Pedagógico de Maracay; Biblioteca del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, los archivos de algunos programas de Maestría y Doctorado relacionados con la enseñanza de la Matemática.

Cabe destacar que entre los aspectos más relevantes en la conferencia se consideran los productos generados de la línea de investigación "perspectivas del enfoque semiótico-antropológico de la matemática" (Arrieche, 2003), desarrolladas por el autor del trabajo, cuyos fundamentos teóricos se basan en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003).

¿Qué se ha investigado en educación matemática?

Para ser lo más explícito y objetivo posible, en este apartado tomaremos como referencia, al contexto o los contextos donde el autor ha convivido o ha participado en actividades de investigación en Educación Matemática, al menos en los últimos 25 años. En ese sentido, destacaremos el énfasis que se hacía de la actividad de investigación, que se realizaba en el Programa de Maestría en enseñanza de la Matemática de la UPEL-Maracay en la década de los ‘80.

Es de hacer notar, que en aquel entonces, el Pensum del Programa de la mencionada Maestría estaba conformado casi en su totalidad por asignaturas de Matemática pura, tales como álgebra abstracta, álgebra lineal, teoría combinatoria, análisis matemático, topología, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial, etc; por lo que parte de la investigación que se desarrollaba tenía como objeto la Matemática como ciencia, realizándose de esta manera, sobre todo en los 10 primeros años, por ejemplo trabajos, en Ecuaciones diferenciales: “Focalidad de ecuaciones diferenciales de segundo orden” (Rojas, 1988), “Puntos conjugados de sistemas diferenciales de segundo orden” (Ruíz, 1988), en álgebra y teoría combinatoria: “Matrices de Hadamard y diseños” (Arrieche, 1988), “Construcción de grupos transitivos múltiples” (Czwienczek, 1990), “Construcción de un diseño de bloques con parámetros 5- (28, 7,1)”) (Setas, 1988).

A pesar de la rigidez Matemática con la que eran formados los Magíster en aquella época, se les permitía a los estudiantes realizar su tesis orientada hacia la Educación Matemática. Es a partir de los 90 que se logra realizar algunos trabajos en esta línea, tomando como contexto a la Educación Básica, Media, diversificada y profesional y en algunos casos en la Educación Superior, centrados en su mayoría en el rendimiento académico relacionados con habilidades matemáticas básicas, nociones de geometría, actitud hacia la Matemática, resolución de problemas con diversos enfoques y algunos trabajos donde se hacían propuestas didácticas, en los que se involucraban utilización de Software educativos como estrategias didáctica.

Cabe destacar que con la incorporación de nuevos especialistas, profesionales interesados en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en todos los niveles educativos y el cambio de orientación del Programa de Maestría de la UPEL Maracay, al introducir cursos obligatorios de Educación Matemática y de investigación en esta área de conocimiento, se incrementa el número de trabajos orientados a la enseñanza de la Matemática, como por ejemplo, se realiza, una serie de trabajos consistentes en propuestas didácticas para la enseñanza de la Matemática sobre el uso de Software educativos.

A continuación describiremos brevemente la Investigación que se ha realizado en España, específicamente en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, información obtenida por el autor de este trabajo en su estancia en Granada cuando estaba como alumno del Doctorado en Didáctica de la *Matemática ofertado* por esta Universidad. La investigación que se realiza en este Departamento está sustentada o enmarcada en los fundamentos teóricos y filosóficos, que desarrollan los grupos de investigación conformados en el Departamento, como por ejemplo: los organizadores del currículo de Rico (1997) y el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática de (Godino, 2001; 2003).

Por otra parte, tenemos que los grupos de investigación en referencia son los de Pensamiento numérico, Formación de profesores de Matemática, Diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemática, Educación Estadística y el de teoría y métodos de investigación en Educación Matemática. Entre los trabajos realizados, desde la década de los 90 en adelante, se destacan los contextos de la Educación secundaria obligatoria (E.S.O), Educación secundaria, Formación de profesores de Matemática y formación de maestros de Educación primaria centrados principalmente en nociones estadísticas, campos numéricos, la resolución de problemas, concepciones y creencias de los profesores y de los alumnos sobre algunos tópicos matemáticos, modelización y representaciones, significados personales e institucionales de un objeto matemático, facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática, análisis de actitudes, el aprendizaje de conceptos, etc.

¿Qué se está investigando actualmente en educación matemática?

El incremento actual en el país del número de especialistas en el área de la Didáctica de la Matemática ha permitido que se utilicen tendencias actuales de investigación en Didáctica de la Matemática; logrando mayor claridad al plantear el problema, redactar los objetivos, seleccionar la metodología de investigación e interpretar los resultados en las investigaciones emprendidas. En este sentido, existen propuestas concretas de algunos especialistas, como por ejemplo la teoría de los Significados Institucionales y Personales de un Objeto Matemático de Godino y Batanero (1994), Godino (2001 y 2003), la de los Campos Conceptuales de Vernaud (1990), la Teoría Antropológica de la Didáctica de la Matemática de Chevallard (1991), la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), la socioepistemología de Cantoral (2004), etc.

Cabe destacar que la creación y consolidación del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina", a partir del año 2003, y del Centro de Investigación Enseñanza de la Matemática utilizando Nuevas Tecnologías de la UPEL-Maracay, nos ha permitido orientar a nuestros estudiantes de los Programas de la Maestría Enseñanza de la Matemática, e inclusive del Doctorado en Educación, con criterios fundados en las líneas adheridas a estas unidades de investigación. Entre las líneas de investigación con la que contamos tenemos, las que constituyen el Núcleo referido, Pensamiento numérico y algebraico (Ortiz, 2003), Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la Didáctica de la Matemática (Arrieche, 2003), Educación Matemática (González, 2003), La Matemática como fuente generadora de proposiciones didácticas (Viviano, 2003), Perspectivas de la neurociencia en la Educación Matemática (Rojas, (2003) y la línea enseñanza de la Geometría correspondiente al Centro de Enseñanza de la Matemática utilizando Nuevas Tecnologías.

En relación a la investigación que se está haciendo actualmente, bajo la dirección de los miembros de los grupos mencionados, se destacan los contextos de la Educación Básica, Media, Diversificado y profesional, formación de ingenieros, formación de técnicos superiores y la formación inicial de profesores de matemática, investigándose con mayor intensidad en la Educación Básica; predominando en estos trabajos la investigación de campo de tipo descriptivo, exploratorio, evaluativo, etnográfico, estudio de casos, evaluación de programas y con menor intensidad los proyectos factibles. En cuanto a los temas investigados se tienen a la ecuación lineal de primer grado con una incógnita, inecuaciones lineales de primer grado, resolución de problemas, Evaluación del aprendizaje matemático, utilización de software educativos, utilización calculadora graficadora, nociones aritméticas, trigonometría, vectores del plano, nociones de geometría, números irracionales, estadística, fracciones, cálculo y álgebra lineal. Con respecto a los fundamentos teóricos utilizados se resaltan los de modelización matemática, representaciones, organizadores del currículo, la cognición y la metacognición en la resolución de problemas, Programación neurolingüística, metaprogramas e inteligencia artificial, modelo de razonamiento Van Hiele, teoría antropológica de la Didáctica de la matemática y el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Es de hacer notar que el autor de esta ponencia es el coordinador de la línea de investigación "Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico de la investigación en Didáctica de la Matemática" (Arrieche, 2003), y sustenta las investigaciones que realiza y en las que funge como tutor en sus fundamentos teóricos. Esta línea de investigación tiene su base en las nociones teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, el cual adopta la noción de significado como clave para analizar la actividad matemática y los procesos del conocimiento matemático cuya idea impulsora consiste en tratar de articular dentro de un sistema coherente las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adoptando nociones semióticas como enfoque integrador. Se remite al lector interesado en este marco teórico a Godino (2003).

Entre las investigaciones realizadas, y en proceso, bajo este enfoque citamos las siguientes:

Trabajos concluidos: a) Arrieche, M. (2002). La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de La Universidad de Granada. b) Arrieche, M; Pirela, M, Rodríguez, C, y Carmona, A. (2004). Significados personales de las fracciones en estudiantes del primer año de ciencias en el Liceo Nacional José Félix Ribas del Municipio Ribas. Trabajo de investigación como requisito para optar al titulo de bachiller en ciencias. La Victoria: Liceo José Félix Ribas. c) Albéniz, M. (2005). Significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería. Tesis de Maestría. San Juan de los Morros: Universidad Rómulo Gallegos. d) González, Y. (2005). Significados institucionales y personales de las fracciones en la Educación Básica. Tesis de Maestría. Maracay: UPEL. e) Figueroa, T. (2005). La resolución de problemas como herramienta de diagnóstico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la Educación diversificada y profesional. Tesis de Maestría. Maracay: UPEL. f) Mayma, M. (2005). Papel de la aritmética en la formación matemática de los estudiantes de los estudiantes de la Educación Básica. Tesis de Maestría. Maracay: UPEL. g) Briceño, S. (2005). Loe vectores del plano en la formación matemática de los estudiantes de la Educación Básica. Tesis de Maestría. Maracay: UPEL. h) Urdaneta, J. (2006). Significados institucionales de la parábola en Educación diversificada y profesional. Tesis de Maestría. San Juan de los Morros: Universidad Rómulo Gallegos. i) Díaz, L. (2006). Uso de los modelos dinámicos en la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el Plano a nivel de Educación Básica. Tesis de Maestría por defender. Maracay: UPEL.

Trabajos en proceso: a) Capace, L. (2006). La integral en la formación del técnico superior universitario. Dimensiones presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Proyecto de tesis doctoral. Maracay: UPEL. b) Álvarez, J. (2006). Análisis cognitivo y didáctico de los polinomios en la Educación Básica. Proyecto de Tesis de Maestría. Maracay: UPEL. c) Romero, J. (2006). Significados personales de las funciones en Educación Básica. Proyecto de Tesis de Maestría. Maracay: UPEL d) Significados institucionales de las figuras planas en la Educación Básica. Proyecto de Tesis de Maestría. Maracay: UPEL.

¿Qué se podría seguir investigando en educación matemática?

Después de haber analizado, en los apartados anteriores, la investigación en Educación Matemática que se realizaba y que se realiza actualmente en cuanto a los contextos investigados, los sustentos teóricos utilizados, la metodología empleada y la temática elegida, presentamos ahora, una serie de posibles problemas que podrían ser abordados en investigaciones futuras.

En relación a los contextos investigados pensamos que se debería abordar con mayor intensidad problemas que surgen de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la I y II Etapa de Educación Básica, Educación diversificada y profesional, Formación inicial y continuada de profesores de Matemática, Formación de ingenieros y técnicos superiores, otras áreas de conocimiento donde la Matemática desempeñe un papel esencial. Con respecto a los sustentos teóricos es recomendable incrementar los trabajos donde se pongan en funcionamiento las nociones teóricas de las tendencias actuales de investigación en Didáctica de la Matemática que hemos citado y cualquier otra que haya sido propuesta por especialistas reconocidos en la comunidad de Educadores matemáticos, lográndose de esta manera el uso de una variedad de metodologías, sugeridas por los marcos teóricos adoptados, como por ejemplo, los enfoques cualitativo y cuantitativo, enfoque mixto, que conllevan a su vez a utilizar la investigación experimental, cuasiexperimental, estudio de casos, etnográfica, descriptivos, evaluativo, exploratorios, evaluación de programa, entre otros.

Para ser más precisos, a continuación presentamos una lista de posibles temas que podrían ser investigados desde la Educación Matemática, siguiendo las pautas anteriores.

1) Aspectos epistemológicos de los objetos matemáticos puestos en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática
2) Conocimiento matemático y didáctico del profesor
3) Análisis cognitivo y didáctico de los objetos matemáticos
4) Currículo de Matemática
5) Evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática
6) Uso de los software educativos y la calculadora graficadora en la enseñanza de la Matemática
7) Análisis semiótico y didáctico de los procesos de estudio de la Matemática
8) Análisis semiótico y didáctico de los libros de textos

Referencias bibliográficas

Arrieche, M. (1988). *Matrices de Hadamard y diseños*. Trabajo de Grado de Maestría. UPEL : Maracay

Arrieche, M. (2003). Perspectivas *del enfoque semiótico-antropológico de la investigación en Didáctica de la Matemática*. Comunicación presentada en la I Jornadas de Investigación en Educación Matemática de la UPEL-Maracay.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2): 33-115

Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica*. Acta Latinoamericana 17:1-9

Chevallard, Y. (1991). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. IREM d'Aix de Marseille.

Czwienczek, F. (1990). *Construcción de grupos transitivos múltiples.* Trabajo de Grado de Maestría. UPEL: Maracay.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matematicos*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. (2001). *Un enfoque semiótico de la cognición matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de funciones semióticas*: *Un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

González, F. (2003). *Educación Matemática.* Comunicación presentada en la I Jornadas de Investigación en Educación Matemática de la UPEL-Maracay.

Ortiz, J. (2003). *Pensamiento numérico y algebraico Comunicación presentada en la I Jornadas de Investigación en Educación Matemática* de la UPEL-Maracay.

Setas, J. (1988). *Construcción de un diseño de bloques con parámetros* 5- (28, 7,1). Trabajo de Grado de Maestría. UPEL: Maracay.

Rico, L. (1997). *Investigación, diseño y desarrollo curricular*. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación matemática* (pp.265-317). Madrid: Síntesis.

Rojas, J. (2003). *Perspectivas de la neurociencia en la Educación Matemática*. Comunicación presentada en la I Jornadas de Investigación en Educación Matemática de la UPEL-Maracay.

Rojas, J. (1988). *Focalidad de ecuaciones diferenciales de segundo orden*. Trabajo de Grado de Maestría. UPEL: Maracay.

Ruiz, R. (1988). *Puntos conjugados de sistemas diferenciales de segundo orden*. Trabajo de Grado de Maestría. UPEL: Maracay.

Viviano, A (2003). *La matemática como fuente generadora de proposiciones didácticas*. Comunicación presentada en la I Jornadas de Investigación en Educación Matemática de la UPEL-Maracay.

Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en Didáctiques, 10 (2): 133-170.

PROCESOS EN MATEMÁTICAS. UNA PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA[7]

Vicenç Font, Norma Rubio, Ángel Contreras
Universitat de Barcelona — España
Pontificia Universidad Católica del Perú — Perú
Universidad de Jaén — España
vfont@ub.edu
Campo de investigación: Enfoque Ontosemiótico — Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se presenta un desarrollo del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática afrontando la problemática del encaje de los "procesos" dentro de dicho marco teórico. Primero se ilustran con ejemplos los procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales considerados en el Enfoque Ontosemiótico. A continuación se propone considerar a la resolución de problemas o a la modelización como megaprocesos y se reflexiona sobre la relación entre estos últimos y el grupo de procesos considerado inicialmente.*

Palabras clave: procesos, enfoque ontosemiótico

Introducción

En diversos trabajos Godino y colaboradores han desarrollado el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007) a partir de ahora utilizaremos el acrónimo EOS para referirnos a dicho enfoque. En Godino, Batanero y Font[8] (2006) se presenta una síntesis del desarrollo actual de dicho enfoque, en ella destaca la incorporación de determinados "procesos matemáticos" al marco teórico.

El objetivo de este trabajo es explicar como se entienden en el EOS los 16 procesos directamente considerados en dicho enfoque. La estructura de este trabajo es la siguiente, en la sección 2 se comenta muy brevemente el marco teórico del EOS. En la sección 3 se ilustran con ejemplos los 16 procesos directamente considerados en el EOS,

---

[7] Este trabajo se ha elaborado en el marco del proyecto I+D: MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC.

[8] Versión ampliada del artículo: Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. (en prensa)

mientras que en la sección 4 se comenta el encaje en el EOS de otros procesos. El trabajo termina con unas consideraciones finales.

Marco teórico

Tal como se ha dicho anteriormente, en este trabajo vamos a tomar como marco de referencia teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática. En Godino, Batanero y Font (2006)[9] se presenta una síntesis del estado de desarrollo actual de dicho enfoque, en ella destaca la incorporación de determinados "procesos matemáticos" al marco teórico.

En la figura 1 se sintetizan una parte de las diferentes nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones epistémicas (hexágono). Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono). Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos que se recogen en la figura 1.

[9] Para una profundización en la síntesis del marco teórico remitimos al lector a la lectura directa del documento (recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)

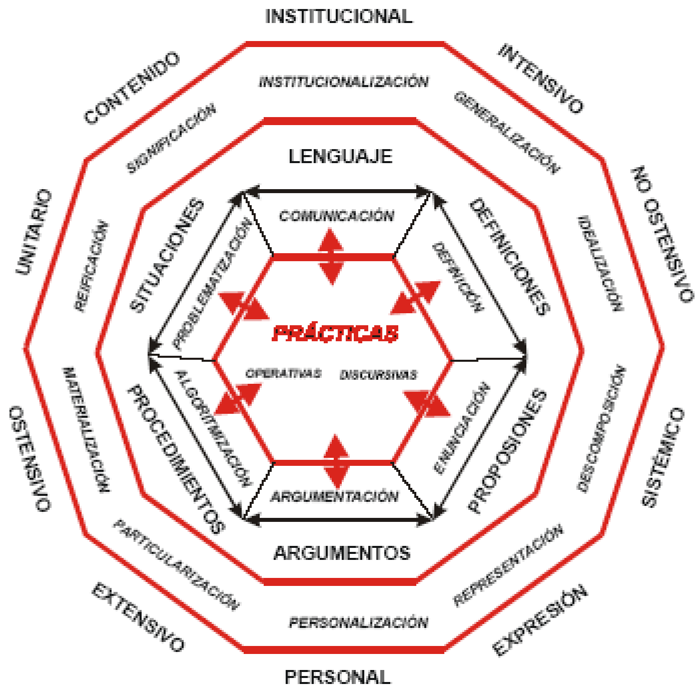


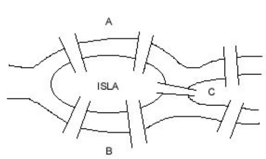
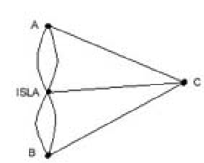
Figura 1. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos

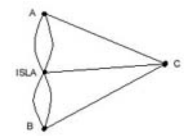
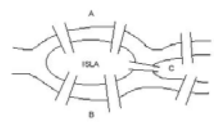
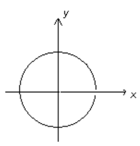
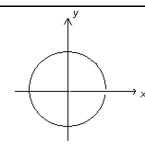
En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de “proceso” ya que hay muchas clases diferentes de procesos, se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. Por tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los de la figura 1), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a todos los más importantes, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de comprensión o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos:

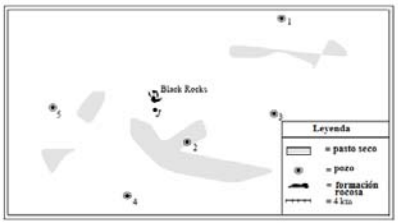
> La *resolución de problemas*, y de manera más general, la *modelización* debe ser considerada más bien como "hiper-procesos" matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (*supervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos. (Godino, Batanero y Font, 2006, p. 9)

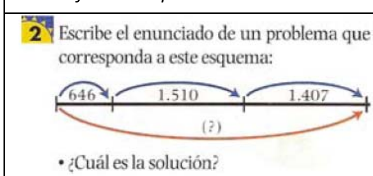
Procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales.

En este apartado ilustraremos con ejemplos los 16 procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales. En una única secuencia diáctica se podrían hallar la mayoría de los 16 procesos, pero por cuestiones de espacio hemos optado por presentar diferentes actividades y priorizar en cada una de ella un solo proceso. Por tanto, si bien en una misma tarea se puede inferir que intervienen muchos procesos y objetos, consideramos que según el contexto se puede priorizar un solo proceso y un solo objeto.

	Procesos		**Objetos**
Puentes de Königsberg Dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con la tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida? 	**Esquematización / idealización**	El problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas? 	Concepto (Grafo)

Idea de Grafo	**Materialización**	 	Lenguaje ostensivo (represntación geométrica)
 $x^2 + y^2 = r^2$	**Significación**	Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	Concepto (circumferencia)
Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	**Representación**	 $x^2 + y^2 = r^2$	Lenguaje (representación gráfica y algebraica)
Definición de límite	**Encapsulación/ Reificación/ cosificación/ síntesis**	$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Concepto (de límite)
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	**Desencapsulación / Descomposición / Análisis**	Interpretamos el límite como el valor al cual se aproximan las tasas medias de variación $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h\to 0$, y después focalizamos nuestra atención en esta clase.	Concepto (de límite)

1. *En el desierto*. *En la figura de abajo, se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas esta mapa contigo.*  a)*¿A cuál de los pozos irías a tomar agua*? *No es difícil responder, por supuesto irías al pozo 2* *b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro*. c) *Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte corresponde a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de un pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos*. d) *¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos diferentes dominios*? e) *¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos? 0*: *trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos*. f) *En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)*? g) *La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras*? h) *¿Qué clase de líneas son las fronteras*? *¿Rectas o curvas*?	**Personalización**		Propiedad (*principio del Vecino más próximo*)
En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del Vecino más próximo (…)	**Institucionalización**		*Propiedad (principio del Vecino más próximo)*

En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es d(A_1 , A_2)= $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$	**Particularización / Ejemplificación**	En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x-y)^2}$ En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$	Concepto (distancia en $\mathbb{R}$)
En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x-y)^2}$ En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$	**Generalización**	En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es d(A_1 , A_2)= $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots}$	Concepto (distancia en $\mathbb{R}^n$)
¿Es cierto que si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$? Justifica tu respuesta.	**Argumentación**	No es cierto, basta tomar $x = -5$ e $y = -2$	Concepto (Desigualdad)
Calcula la derivada de la función: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3x-4}$	**Algoritmización**	$f(x)=\dfrac{(2x-3)\cdot(3x-}{(3}$	*Procedimiento (regla de la derivación de un cociente)*
(…) En los problemas anteriores has encontrado una relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Cuál?	**Enunciación**	*La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*	*Propiedad (teorema)*
La mediatriz de un segmento es la perpendicualr que pasa por el punto medio de dicho segmento. ¿Halla una definición equivalente?	**Definición**	*Todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento*	*Concepto (mediatriz)*
	**Problematización**	*María ha podido ahorrar en los meses de abril, mayo y junio 646; 1,510 y 1407 soles, respectivamente. ¿Cuánto ha ahorrado en total en estos tres meses?* *(solución: 3563)*	*Concepto (suma)*

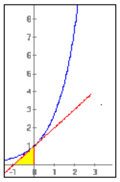
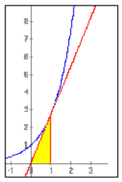
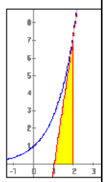
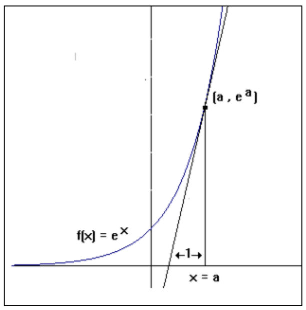
Cuestionario En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad: a) Calcula $f\,'(0)$, $f\,'(1)$ y $f\,'(2)$    b) Calcula $f\,'(a)$  c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f\,'(x) = e^x$.	**Comunicación** **(Entiende y expresa)**	*Respuesta de Víctor al apartado c* La función derivada de $f(x) = e^x$ es $f\,'(x) = e^x$ porque la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en este punto. La pendiente se consigue dividiendo $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, en esta función $x_2 - x_1$ siempre da 1, y al dividir el aumento vertical, que es e^x por el aumento horizontal que es 1, nos da e^x	*Concepto emergente (derivada de la función $f(x) = e^x$)*

Tabla 1: Ejemplos de los 16 procesos directamente considerados en el EOS

Otros procesos

En el EOS se consideran megaprocesos (por ejemplo resolución de problemas o modelización) y procesos. En el caso de estos últimos se distingue entre los 16 de la figura 1 y otros procesos (por ejemplo, los procesos metafóricos).

Por cuestiones de espacio en este trabajo no hemos profundizado en los 16 procesos de la figura 1. En Font y Contreras (2008) se profundiza en 4 de ellos: los procesos de materialización-idealización y los de particularización-generalización.

En el EOS, tanto el estudio de la relación entre algunos de los 16 procesos de la figura 1, como el estudio de otros procesos no considerados directamente en dicho marco, consiste es situar el proceso que nos interesa en el centro de la figura 1 para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización / personalización; generalización / particularización; descomposición / reificación; materialización / idealización; representación / significación). En Font (2007) se aplica dicha técnica a los procesos metafóricos.

En el caso de megaprocesos como son la resolución de problemas o la modelización también se descomponen en un conjunto de procesos más elementales y se intenta contestar a preguntas como las siguientes: ¿cuáles son estos procesos?, ¿cómo se relacionan entre ellos?, ¿cómo se desarrollan en el aula?, etc.

Consideracion final

El trabajo que se presenta pretende ser un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo del EOS. También queremos destacar que las diferentes miradas que posibilita la figura 1 son una buena manera de analizar la problemática de la relación entre procesos y megaprocesos.

Referencias bibliográficas

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2): 151-186.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. Educación Matemática, *19*(2), 95-128.

Font, V. y Contreras A. (2008) The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* (en prensa)

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in

Mathematics Education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en internet: url: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Categoría 3

Consideración de aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

INTUICIÓN Y RAZÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Buenos Aires — Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN — México
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento lógico, Socioepistemología — Nivel: Superior

Resumen. *La construcción del conocimiento matemático se lleva sobre la base de dos modos de comprensión y expresión: la intuición y la razón. Ambos, aunque poseen naturaleza distinta, se complementan y resultan indispensables en la matemática y su enseñanza, combinándose en el proceso mediante el cual se describen los objetos matemáticos, sus relaciones y la manera en la que es posible operar o interactuar con ellos. La intuición por sí sola no da certeza para comprobar las afirmaciones matemáticas; la razón actúa controlando a la intuición espontánea. Si bien la intuición también juega un papel esencial en los razonamientos, es importante que los estudiantes comprendan que en algunas oportunidades puede distorsionar representaciones y conducir a errores. La fertilidad de la intuición depende de su refinamiento y relación con la razón y la experiencia.*

Palabras clave: intuición, socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural

Intuición y lógica en el aula

El conocimiento matemático se construye y se sustenta básicamente en dos modos de comprensión y expresión: la intuición y la razón. Estos modos de conocimiento, aunque de naturaleza distinta, son complementarios e indispensables en la matemática. El primero es creativo, subjetivo y directo, el segundo es analítico, objetivo y reflexivo. En la enseñanza de la matemática no se debe descartar ninguna forma de razonamiento: inductivo o deductivo. No se puede, ni se debe pretender, sin embargo, que los alumnos, sobre todo en los primeros niveles de la enseñanza, se muevan dentro de un marco axiomático riguroso y formal. Sin embargo, ya desde edades tempranas, es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, aunque sin exigencia de formalización. En ciertos niveles y momentos del aprendizaje, la forma de razonar puede tener tanto interés como los propios contenidos conceptuales.

La intuición, entendida como la captación primera de conceptos que permite comprender lo que nos rodea, surge desde la niñez y constituye el punto de partida en la investigación y el aprendizaje. Ante un problema matemático, debe despertarse el interés, basado en la aceptación de la incertidumbre inicial como parte del proceso de aprendizaje. La intuición, por momentos saltea escalones del razonamiento lógico. Es cierto que puede conducirnos por caminos falsos, por ello es necesario extremar el cuidado, pero debe aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje. Debemos recordar que en los niveles básico y medio, no se están formando matemáticos, se está enseñando a usar la matemática y educando en la comprensión y el manejo del método de esta ciencia. Se está enseñando a pensar lógicamente. Hace falta educar a la intuición y al razonamiento (Crespo Crespo, 2005).

El término intuición ha sido utilizado a través de la historia de la humanidad con diversos significados y en diversos contextos. La *intuición sensible* ha sido caracterizada como una facultad prerracional; la *intuición pura o mística* se refirió a una aptitud suprarracional; la *intuición intelectual*, a una variedad de la razón. Para distintos filósofos, la intuición ha constituido una facultad mental que caracteriza un modo de razonamiento autónomo. Para los científicos, el conocimiento adquirido por medio de la intuición, ha sido considerado parcial e inexacto y debe ser sometido a posterior validación. Pero en ambos casos, la intuición es comprendida como una fuente de progreso que debe ser sometida a prueba. El tipo de prueba necesaria, depende de las características de la ciencia correspondiente.

La intuición en la historia de la matemática

Aristóteles sienta las bases de la utilización de la intuición en la ciencia, al afirmar que toda ciencia tiene punto de partida en ideas y verdades absolutas, evidentes e indiscutibles, posteriormente se llega a nuevas verdades por medio de la razón. La intuición es, entonces, la fuente primaria del conocimiento. Los postulados y nociones comunes, muestran su evidencia por medio de la intuición.

René Descartes entiende a la intuición como la *"concepción de un espíritu atento, tan claro y distinto que no se le quede duda alguna acerca de lo que entiende, o lo que es lo mismo, la concepción de un espíritu sano y atento, una concepción nacida a la luz de la sola razón y que es tanto más cierta cuanto más simple que la deducción misma"* (Descartes, citado por Bunge, 1965, 11). Sin embargo, para Descartes, el único modo de alcanzar el conocimiento es por medio de la intuición evidente y la demostración. La intuición es, como para Aristóteles, una operación racional. Descartes hizo explícito lo que se aceptaba implícitamente de cada actividad de razonamiento: que cada uno tiende a aceptar algunos argumentos como esencialmente ciertos mediante un criterio tácito de autoevidencia.

Por su parte, Baruch Spinoza, identifica como intuición, cierto tipo de inferencia rápida que puede hacerse mentalmente que identifica como conocimiento intuitivo y que generalmente se realiza con el auxilio de signos que representan los conceptos más complicados. Ni él, ni Gottfried Leibniz reconocieron que este tipo de conocimiento fuera suficiente para establecer nuevos principios de las ciencias.

Immanuel Kant, reconoce, además de la intuición sensible y el entendimiento, la intuición pura. La intuición sensible, está puesta de manifiesto a través de dos formas puras: espacio y tiempo, que actúan de principios de conocimiento a priori. La intuición pura, fuente de juicios sintéticos a priori presentes en geometría y aritmética, es una mezcla de razón y conciencia de la experiencia interna. El intuicionismo matemático se basa en ideas kantianas. El tiempo, como forma a priori de la intuición y, sostiene que los conceptos matemáticos son esencialmente construibles, entendiendo por construibles que exista un mecanismo finito para obtenerlos. Sólo acepta parte de la matemática clásica, descartando aquellos conceptos que no poseen esta propiedad. La única estrategia de demostración de existencia admisible es la construcción efectiva. Estas ideas fueron sustentadas por Leopold Krönecker y Henri Poincaré. Por su parte, Hermann Weyl sostuvo que afirmar la posibilidad de una construcción no significaba una prueba de la misma, ya que tal construcción podía ser irrealizable. De esta manera, por su parte, Luitzen Brouwer sostuvo que un teorema no expresa una verdad, sino el éxito de una construcción sistemática.

Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, al referirse a la intuición, afirman que sirve de guía en las demostraciones indicando cuál es el camino a seguir para alcanzar el rigor, pero sostienen que la intuición por sí misma es insuficiente y conduce a conclusiones erróneas (Rey Pastor & Puig Adam, 1948).

El ideal de la matemática actual ha sido la creación de una disciplina en la que los conceptos se relacionan de manera coherente a través de reglas formales explícitas. Entre las propiedades deseables para este sistema, podemos citar la certidumbre, coherencia, consistencia, independencia y necesidad. La intuición aporta bases evidentes, pero cabe preguntarse si todo conocimiento se construye sobre evidencias.

La intuición y evidencia

La intuición es subjetiva, depende de a qué esté habituado cada uno, el tipo de intuición que posee. La evidencia depende asimismo de la práctica y la familiaridad que se tenga con ciertos objetos y procesos. Por ejemplo, la transitividad en las relaciones de equivalencia era considerada por Descartes una intuición, pero para Piaget era adquirida por medio de la organización lógica del pensamiento. Piaget utiliza los términos intuición y pensamiento intuitivo frecuentemente, pero no profundiza en el entendimiento del mecanismo intuitivo.

Un ejemplo en el que se evidencian los obstáculos a los que puede conducir la intuición en la enseñanza se relaciona con el aprendizaje del concepto de infinito. Desde tiempos remotos, se asumió una de las nociones comunes enunciadas por Euclides: *"El todo es mayor que las partes".* Se trata indudablemente de un enunciado de fuerte contenido intuitivo, parece evidente lo afirmado. Sin embargo, Galileo identificó la existencia de una biyección entre los números naturales y sus cuadrados; se trata de un ejemplo en el que el todo tiene la misma cantidad que una de sus partes. Este problema se presentó al querer extender propiedades de conjuntos finitos a conjuntos infinitos, desde el punto de vista didáctico, se pone en evidencia un obstáculo epistemológico en el que la naturaleza de los conceptos involucrados es radicalmente distinta y la intuición no puede dar una respuesta.

En el siglo XX, a partir de los trabajos de David Hilbert, la evidencia no fue considerada necesaria para sentar los puntos de partida de la matemática. La intuición se tornó entonces un papel más secundario en la matemática.

No significa que la intuición sea necesariamente insegura o perjudicial, combina la experiencia, ofrece representaciones globales compactas de datos, ayuda a inferir de informaciones incompletas y confiere a la actividad mental posibilidad de continuidad y tiene gran importancia en el aula. No debe confundirse intuición con percepción. Una intuición excede lo que se percibe, va más allá de la información que se presenta de manera directa. La percepción no requiere intuición, pero de la percepción de casos, puede realizarse una generalización de una propiedad que sea aceptada por medio de la intuición. Por ejemplo, luego de percibir que varios cuerpos que se sueltan caen hacia abajo, puede enunciarse que "*Todo cuerpo que se suelte cae*" y esta generalización que es en realidad una inducción se realiza mediante la intuición.

Concepciones de la intuición

En la literatura contemporánea, existen diversas identificaciones de usos y apariciones de la intuición que la amplitud de fenómenos y actividades que se vinculan con la intuición.

a) *Identificación rápida de una cosa o acontecimiento:* Se refiere a la intuición sensible que unida a la percepción, memoria, experiencia e información del sujeto permite aprehender el objeto de manera rápida. Tiene un papel importante en el trabajo del científico, pero el conocimiento científico no consiste sólo en la percepción, sino en la elaboración. Por ejemplo, puede mencionarse la afirmación: "*La recta es la línea más corta entre dos puntos*". Se trata de una intuición sensible basada en percepción y experiencia, que permite concluir en esta aseveración, que es verdadera en la geometría euclidiana.

b) *Comprensión del significado de un conjunto de signos:* Se evidencia en la comprensión rápida de relaciones, como por ejemplo en cadenas deductivas, aunque escapen detalles y pasos. Depende de la experiencia previa y de la familiaridad con las estructuras correspondientes. Se relaciona con lo obvio. Un ejemplo de esta actividad de la intuición lo constituye la unicidad del cero. Este resultado resulta evidente y parece no necesitar prueba para los estudiantes del primer curso de álgebra.

c) *Capacidad de interpretación:* Se refiere no sólo a la asociación de fórmulas con sus significados, sino también a relacionar asuntos aparentemente inconexos. Por ejemplo, la potenciación se define inicialmente para bases y exponentes naturales no nulos. Posteriormente se extiende esta operación a diversos tipos de exponentes, como si la intuición fuera capaz de realizar esa extensión. Este proceso, debe ser comprendido lejos de la intuición y asumiendo que se trata de una convención de la comunidad matemática (Martínez, 2005).

d) *Capacidad de representación o intuición geométrica:* Se refiere a representar o imaginar objetos ausentes, de construir, imágenes o diagramas. La intuición geométrica espacial es importante en la enseñanza. La matemática se apoya en la intuición visual y geométrica, apoya su razonamiento en ellas, pero no puede ser reemplazada por ellas. Por ejemplo, podemos pensar en el concepto de punto como una “mancha” tan pequeña como se quiera. Esto nos lleva a tener un significado intuitivo y subjetivo que se corresponde con la representación que se realiza de un punto, pudiendo incluso manipular estos objetos y trabajar con ellos.

e) *Capacidad de forjar metáforas o habilidad para señalar identidades parciales entre objetos en distintos aspectos:* Se refiere a reconocer analogías, como por ejemplo entre la disyunción y la suma booleana. La metáfora es un recurso didáctico que ilustra.

f) *Imaginación creadora:* Permite inventar, generar nuevas ideas. Este proceso, generalmente es borrado al final de la teoría. No se presentan en ese momento las conjeturas previas al resultado obtenido. La imaginación creadora no puede existir si no se sustenta en conocimientos previos en los que ya actuó la razón. En oportunidades se hace referencia a la intuición como “corazonada científica”.

g) *Sentido común:* Se limita a etapas pasadas del conocimiento científico. Son numerosos los ejemplos en los que el sentido común engaña y permite llegar a resultados incorrectos. El sentido común no es estático, evoluciona enriqueciéndose con el estudio de la ciencia. La propiedad transitiva de la relación de igualdad, parece ser una revelación del sentido común, si bien Piaget opinó que no era innata, sino construida.

Estos ejemplos de la intuición muestran que es usual referirse como intuición a habilidades y usos muy diversos, lo que dificulta lograr una definición de la misma. “*La intuición es el cajón de sastre donde colocamos todos los mecanismos intelectuales que no sabemos analizar o nombrar con precisión, o no tenemos interés de hacerlo*” (Bunge, 1965, 88).

La intuición en el avance de las ciencias

Muchos matemáticos han sostenido y sostienen el rol fundamental de la intuición en el avance del razonamiento en esta ciencia, enfatizando que la validez de las afirmaciones matemáticas se sustenta en la evidencia y la intuición. La intuición no es una fuerza primaria de verdadera cognición, pero parece serlo porque ese es justamente el rol que desempeña: crear cierta apariencia de certidumbre (Fishbein, 1987). Entre esos ejemplos de matemáticos en los que la intuición jugó un papel primordial (Hadamard, 1947), podemos citar a Pierre Fermat, con el enunciado del teorema que tardó más de tres siglos en lograr ser demostrado. Otro ejemplo es Bertrand Riemann, que modificó la concepción de la distribución de los números primos, trabajó con funciones de imágenes reales y complejas, enunciando propiedades de las mismas sin demostración hasta nuestros días.

El progreso de las ciencias se ha apoyado en refinar, justificar y eliminar los elementos intuitivos que figuran en el desarrollo de las teorías previamente a su formalización. Como ejemplo, el surgimiento y formalización del análisis matemático, en cuyo nacimiento las ideas se sustentaron en la geometría y la visualización, puestas de manifiesto en el tratamiento de curvas y movimientos. En sus etapas posteriores, caracterizadas por la aritmetización, estos elementos se fueron abandonando hasta llegar a la estructura formal con la que hoy es presentada en las aulas de los cursos universitarios.

Cuando la intuición necesita de la razón

Existen ejemplos en los que la intuición lleva a dar respuestas incorrectas en nuestras aulas.

- √ Supongamos que a alguien le decimos que $a_1=1$, $a_2=1/2$, $a_3=1/4$, $a_4=1/8$ y le preguntamos cuánto valdrá la suma de los a_n, la mayoría asumirá que se trata de la sucesión $1/2^n$, y responderá que el resultado es 2. La intuición nos lleva a inferir cuál es la sucesión, por analogía a otras sucesiones vistas previamente.

- √ Los estudiantes tienden a afirmar: "*El producto de dos números es mayor que cada uno de los factores*". Sin embargo al multiplicar 0,25x0,5 obtienen 0,125. Esta generalización proviene de extender propiedades de números naturales.
- √ "*La división achica, la multiplicación agranda*". Como en el caso anterior, la intuición generaliza a partir de las propiedades de los números naturales.
- √ Si pensamos que hay tanto números en el (0,1) como números reales, indudablemente la intuición nos llevará a afirmar que no es cierto. Pero George Cantor dio herramientas necesarias para comprobar la verdad de esta propiedad a pesar de que muestre que el todo puede tener el mismo cardinal que una de sus partes propias.
- √ También parece intuitivo, al menos inicialmente, el significado del cero, sin embargo, se trata de un objeto matemático cuya construcción involucra concepciones filosóficas, epistemológicas y cognitivas muy complejas.

Estos son ejemplos en los que la intuición juega una mala pasada, produciéndose un conflicto entre lo que se responde intuitivamente y lo que la matemática muestra. Algunos estudiantes ante estos hechos, afirman que la matemática es difícil, contradictoria, y pueden perder su interés por ella al pensar que no podrán superar estos obstáculos.

La socioepistemología ante la razón y la intuición

En una visión socioepistemológica, podríamos pensar que la comunidad científica matemática, como sociedad, tiene entre sus atribuciones cuidar las formas de validación del conocimiento de esta ciencia, determinando su legitimidad para esa sociedad. La ***actividad humana*** correspondiente sería hacer matemática (investigar y enseñarla), su ***práctica de referencia***, la validación de resultados. Consideraramos, a la demostración como una ***práctica social*** de la comunidad matemática que se lleva a cabo para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. La demostración es, entonces, una práctica social característica de la comunidad matemática (Crespo Crespo, 2007). Esta práctica social, es distinta de una comunidad a otra, se ha modificado y evolucionado de una cultura a otra; la normativa no es la misma para distintas comunidades matemáticas. Esto es claramente comprensible desde la socioepistemología, ya que en cada ***escenario sociocultural***, refleja las características de éste, pero su finalidad básica ha sido la legitimación del saber matemático, aunque no es esta su única función. Sabemos en el ejercicio de prácticas sociales, los actores construyen sus conocimientos como ***herramienta*** para su intervención. Esa herramienta sería el lenguaje lógico. Pero, ¿cuál es el conocimiento matemático que se construye por medio de esta práctica social? En las actividades humanas de investigar y enseñar matemática, en la práctica social de demostrar, ¿qué hace que se demuestre como se demuestra? Es la argumentación, la que se construye en el escenario sociocultural y que se manifiesta en la práctica social de la demostración. La argumentación matemática, se refleja en la práctica social de la demostración. La presencia de comunidades matemáticas en escenarios distintos, hace comprender la existencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Esto también permite comprender la posibilidad de aceptar como válidas unas y no otras según características básicas de los escenarios en los que ocurren.

La intuición por sí sola no da certeza para comprobar afirmaciones matemáticas. La caracterizan dos propiedades fundamentales: inmediatez y certidumbre. La primera se une a la evidencia intrínseca y la segunda no se relaciona con la certidumbre como forma convencional, sino como un significado práctico de la misma (Fischbein, 1987). La razón actúa controlando a la intuición espontánea. La intuición también juega un papel esencial en los razonamientos, pero es importante comprender que en algunas oportunidades puede distorsionar representaciones y conducir a errores. En la intuición tiene gran influencia la subjetividad. Algo puede ser intuitivamente comprendido por alguien y no por otro. Depende de la experiencia, de conocimientos previos, pero también de cualidades personales. Pueden discutirse razonamientos, pero no intuiciones, compartirse resultados, pero no evidencias. No puede hablarse de la intuición como una práctica social, ya que no es posible compartirla y que no existe normativa en ella. La argumentación se construye para convencer al otro de que lo que decimos es cierto, para demostrarle que lo que afirmamos es verdad. La intuición en matemática, combina la intuición sensible y la razón evidenciada a través de la intuición intelectual, y participa de ambas. La fertilidad de la intuición depende de su refinamiento y relación con la razón y la experiencia.

Referencias bibliográficas

Bunge, M. (1965). *Intuición y ciencia.* Buenos Aires: EUDEBA.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada, CICATA, IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado sin publicar. CICATA-IPN, México.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: Reidel.

Hadamard, J. (1944). Psicología de la invención en el campo matemático. Buenos Aires: Espasa Calpe.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(2), 195-218.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1948). *Metodología de la Matemática Elemental*. Buenos Aires: Ibero-Americana.

EL CONCEPTO DE SIGNIFICADO EN LA RECONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II México
camachoalberto@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Superior

Resumen. *El escrito muestra cómo la introducción en la enseñanza de nuevos significados del conocimiento matemático, contribuyen en la reconstrucción de los propios conocimientos que se transmiten en el aula. Para ello planteo la incorporación del significado de «variabilidad» como una categoría de la «predicción» (Cantoral, 2001, 8), cuya práctica escolar, en el nivel de ingeniería, lleva a la reconstrucción o redefinición del concepto de función como una dependencia entre variables. El objetivo se mueve a través de cuatro ejes, que son: 1. La búsqueda de nuevos significados de la matemática que puedan ser llevados a la enseñanza, 2. La coherencia de estos últimos respecto de los conocimientos ya existentes, 3. El rediseño del discurso matemático, y 4. Los debates que propician la aceptación del rediseño.*

Palabras clave: variabilidad, significado, construcción del conocimiento

Introducción

Una de las formulaciones más comunicadas, y quizá poco comprendidas, a la que las instituciones educativas son hoy en día confrontadas, es dar sentido a las matemáticas, en tanto su enseñanza, por un lado, y su aprendizaje, por otro, (Chevallard, 2004). La preocupación no nos es ajena y se puede resumir en la siguiente pregunta: ¿Cómo hacer para que los conocimientos matemáticos que difundimos en el salón de clase, sean «conocimientos significativos»? Diversos acercamientos se colocan en el problema de llevar a los estudiantes a la construcción de conocimientos matemáticos haciendo uso de significados del conocimiento; de manera autónoma, casi autodidacta, como en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) francesa; a partir del conocimiento científico o de "referencia", como en la Teoría Antropológica de la Didáctica (TTD) (Chevallard, 1999); o bien colocando a los estudiantes en sólo procesos de construcción de conocimiento a través de las prácticas sociales que así lo permiten, tal como se plantea en la Socioepistemología (SE) (Cantoral & Farfán, 2004). Con todo, los resultados que se observan en estas aproximaciones no se traducen, todavía, en principios o métodos de enseñanza precisos de los contenidos matemáticos que se mueven bajo la perspectiva del conocimiento significativo.

Me parece que estas aproximaciones han dejado de lado una parte inherente al discurso cual es la "experiencia del profesor", del lado de sus asignaturas, y sobre todo su interacción con los estudiantes, práctica en la cual los significados del conocimiento matemático son el eje central. En ocasiones nos basta con interactuar por vez primera con un grupo de tal o cual asignatura, durante dos o tres días, incluso una semana, para dar razón del nivel de conocimientos con que cuenta y con ello planear el curso, así como establecer el nivel de conocimientos que el propio grupo será capaz de alcanzar. Si atendemos con más detalle ese accionar de nuestra actividad, las más de las veces poco deliberado y además cotidiano, incluso puede ser imperceptible, volviéndose normativo, estaremos de acuerdo en que así violamos el "contrato" que tenemos con el plan de estudios y el propio libro de texto, en el sentido de enseñar a nuestros alumnos el conocimiento matemático en la forma que ahí es convenida. Ese conocimiento es actualmente llamado por los eruditos "conocimiento de referencia" y se entiende como aquel conocimiento deseable para ser enseñado, en tanto límite de otros "conocimientos asociados" al mismo. Al "bajar" o "subir" el nivel académico, la trasgresión nos obliga a un cambio en la forma del discurso matemático escolar (DME), haciendo interactuar esos conocimientos asociados para dejar en tal o cual nivel el proceso de enseñanza. En ambos casos, subir o bajar el nivel académico, los conocimientos asociados suelen ser significados conocidos, o bien nuevos significados producto de la investigación, que al ser llevados al salón de clase son colocados por el profesor a cierta «distancia» del conocimiento de referencia. A partir de este punto de vista los significados asociados aparecen en diferentes contextos, apuntaré dos de ellos: a) En los textos de matemáticas en uso, y b) En la historia, donde se verifica la construcción del conocimiento matemático.

Hablaré del primer caso, dejando el segundo para los siguientes apartados. En los libros de texto, los profesores tomamos como premisa que los conocimientos suelen ser organizados o estructurados en cierto orden secuencial para que los lectores les comprendan. No obstante es más común el caso contrario, es decir, que los significados no se encuentren lo suficientemente organizados, de manera que entre ellos no haya coherencia o un orden secuencial que lleve al aprendizaje. O bien ocurre que la organización en la que se han colocado no satisface la escala que el profesor desea dar a los conocimientos en la clase. A partir de esto último se hace necesaria su reorganización. Más ello puede ejercer que el profesor, o bien el investigador, incluya en el discurso nuevas formas asociadas al conocimiento de referencia. Seguiré esta última circunstancia.

Marco teórico

En su origen, Cantoral & Farfán (1990) plantearon la «reconstrucción de los significados» como la posibilidad de "reorganizar el conocimiento matemático escolar". Para estos autores, la "reconstrucción de los significados» resulta indispensable debido a que la «fenomenología intrínseca", es decir, aquellos elementos que caracterizan las nociones en su génesis, así como los "constructos asociados", procesos heurísticos que llevan a edificar los distintos "estilos" de hacer matemáticas: *"están impregnados de la época cultural en la que se construyeron*" De ahí la necesidad de la reconstrucción, puesto que: *"no es posible su adaptación inmediata a nuestro contexto cultural"* (Cantoral, & Farfán, 1990, 26-27). Citan este proceso usando la palabra *"re-significar*". Re-significar es darle vida académica a un concepto que no la tiene, o no la ha tenido por ser desconocido, o bien encontrarse en desuso respecto del conocimiento de referencia. Una manera de re-significar el conocimiento matemático, es haciéndole interactuar en el salón de clase, más ello es solamente una primera condición.

Metodología

La elección de nuevo conocimiento para la enseñanza hace necesaria la reconstrucción del currículo. La reconstrucción, por sí misma, se sujeta a los acuerdos y desacuerdos entre los núcleos de investigadores, así como a los debates que propician su aceptación. Esta apreciación es marcada por cuatro niveles de búsqueda; en primer lugar, la elección del nuevo significado, en segundo, la cuestión de su coherencia respecto del conocimiento de referencia, tercero, la reconstrucción, y cuarto, la gestión para la aceptación del currículo. En el primero de estos, la elección del nuevo conocimiento conlleva necesariamente al reconocimiento de los significados asociados al conocimiento de referencia. Para el concepto de función, que plantearé más adelante, en Sánchez & Camacho (2007) se muestran por lo menos veinte significados asociados para su enseñanza en el nivel de ingeniería. No obstante, los autores de textos de cálculo diferencial, inician su propuesta a partir del concepto de función. En estos últimos, aparece dominante la definición del concepto en términos de una correspondencia entre variables "*que asocia a cada objeto x en un conjunto, denominado dominio, un solo valor* $f(x)$" (Purcel, 2000, 37).Con ello, podemos decir que el conocimiento de referencia, que llamaremos E_n está por encima de los conocimientos asociados $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$. Purcel sugiere iniciar la enseñanza con esa definición para con ello continuar e intentar dar significado al propio concepto, haciendo uso de los registros conocidos de fórmula, variable y tabla de valores. Es decir plantea un discurso que no necesariamente lleva el siguiente orden:

$$\underbrace{E_n}_{\text{Conocimiento de referencia}} \rightarrow \underbrace{E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow \ldots}_{\text{Conocimientos asociados}}$$

Para el caso que expondré, realicé un estudio epistemológico que involucra el análisis de obras elementales de los siglos XVIII y XIX, donde aparece la noción de «variabilidad». La asociación de este significado con los ya conocidos, así como con la definición de función, permite establecer una "base de significados" o bien la unión de múltiples significados asociados, con los cuales es posible mejorar los diseños de clase. En esta dirección, para M. Artigue el “análisis a priori” que se realiza para el diseño de una situación didáctica, en el contexto de la (TSD), es concebido como: “*un análisis del control de los significados del conocimiento”* (Artigue, 1992, 51). Los significados aparecen en las tres dimensiones de estudio del análisis preliminar en la (TSD) con lo cual el investigador tiene un primer control de los mismos. Un segundo control de los significados se tendrá durante el diseño de la situación. De esta manera, cuando hablo de reconstruir el conocimiento matemático, lo hago en el sentido de controlar a través suyo los significados que surgen del análisis preliminar, lo cual no es previsto por la (TSD) y si se destaca en la (SE). En esta dirección, la (RCM) es posible a partir de “encadenar” los significados contenidos en las bases, viéndoles como eslabones consecutivos uno del otro, de suerte que el significado del primero lleva a la comprensión del segundo, etc. El método consiste en describir los nuevos significados, apoyando su definición en la vecindad de los significados asociados y del propio conocimiento de referencia, pasando así de una concepción a otra, lo cual conlleva al transito de diferentes niveles de abstracción. Para el caso del ejemplo que menciono, la noción de variabilidad es encadenada por los significados asociados y el propio conocimiento de referencia, de la siguiente manera:

$$\underbrace{\underbrace{\text{Variable} \Rightarrow \text{Variación} \Rightarrow \underbrace{\text{Variabilidad}}_{\text{Nuevo significado}}}_{\text{Significados asociados}} \Rightarrow \underbrace{\text{Función}}_{\text{Conocimiento de referencia}}}_{\text{Base de saignificados}}$$

En este caso se hace interactuar el nuevo conocimiento encontrado con los significados ya existentes, de manera que el primero “*tape los huecos*” que existían entre cada uno de ellos. Creándose así una red o cadena de argumentos de un mismo conocimiento que se consolidan en un modelo didáctico, toda vez que reconstrucción del conocimiento aludido, (RCM). Con esta idea se irrumpe con nuevo conocimiento en la dirección del conocimiento de referencia, transformándole, toda vez que, en la práctica educativa, se intentarán transformar, también, los conocimientos de los estudiantes. La recursividad que pongo en evidencia es semejante al siguiente encadenamiento, más diferente de aquella que se propone en los libros de texto: $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow ... \rightarrow E_k \rightarrow ... \rightarrow E_n$, donde E_0 es el conocimiento o significado con el que se inicia una enseñanza, para el ejemplo que expondré este representa la noción de «variable», E_1 la "transformación" del conocimiento inicial, o sea la "variación". Siendo E_k el «nuevo significado», es decir la «variabilidad», vista como una transformación de la noción de variación, continuando así hasta llegar a la última de las transformaciones, que supondremos E_n, o bien como ya mencioné conocimiento de referencia. Así, las diversas modificaciones $E_1, E_2, E_3, ..., E_k ...$, se asumen como los diferentes significados que va adquiriendo el conocimiento inicial E_0 a lo largo de la enseñanza, o bien aprendizaje, para así llegar al conocimiento de referencia, E_n.

La noción de variabilidad

Puesto que la noción de variabilidad no ha sido, sencillamente, utilizada en los modelos de enseñanza actual, es que enseguida examinamos su origen a partir de una breve exploración histórica. En México, en el año de 1873, el ingeniero Francisco Díaz Covarrubias suponía en su libro de texto de "Análisis Trascendente", al estilo de Newton, que: "Toda curva puede verse originada por el movimiento de un punto (…)" Al punto que describe la curva dio el nombre de "generador". Esto último le permitió inferir que los diferentes cambios de dirección del punto generador son diversos entre las curvas, teniéndose todas ellas por propiedad común la "variabilidad". En esa reflexión, Díaz Covarrubias estableció la curvatura de las curvas en un modelo del todo geométrico tomándole como: *"la representación de la variabilidad de las direcciones"* (Díaz Covarrubias, 1873, 21). O bien los diferentes «cambios» del punto generador sobre la curva. Destacando que esos cambios se producen al imaginar la curvatura como un proceso que se produce al pasar de un estado rectilíneo a otro curvilíneo, o bien de la constante a la variable.

En tal sentido la variabilidad asume dos posibilidades: la primera es que puede concebirse en un estado de "constancia" del todo rectilíneo y, la segunda, más compleja, cual es la continuidad de la curva. De estas ideas arrogaremos enseguida.

La reconstrucción del conocimiento

El siguiente es un modelo didáctico del concepto de función basado en argumentos de simulaciones geométricas y algebraicas que amplían sus significados asociados ya conocidos. Se prevé que al final del modelo se siga con los argumentos asociados a la función, de gráfica, tabla de valores, etc. En cuanto a la utilidad de los significados vistos como objetos matemáticos, he recurrido a aquellos de "variable", "variación" y "funciones algebraicas elementales", incluyendo la noción de "intervalo". Otros significados asociados útiles, fueron el uso de representaciones gráficas y fórmulas comunes. Como ya apunté, el conocimiento de referencia es el concepto de función, conocido a partir de la dependencia entre variables. La reconstrucción, obviamente, va dirigida a profesores y estudiantes interesados en el cálculo diferencial, que forma parte del campo del pensamiento variacional.

Iniciare dando una definición de variable en los siguientes términos: "*Una variable x es una cantidad medible que aumenta o disminuye*". La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudian a través del cálculo diferencial. No obstante, las variables adoptan el movimiento desde diferentes contextos de la matemática, como son el aritmético, geométrico, algebraico y variacional.

Plantearé enseguida algunos ejemplos para mejor entender cada caso, sólo te pido que des oportunidad a tu imaginación para concebirles.

Figura 1

EJEMPLO 1 Imagina enseguida un triángulo rectángulo en el cual nos permitiremos dejar fija, y además conocida, una de las distancias, el cateto adyacente *a*, $a \geq 0$, (*a* es un número real positivo) y moviéndose el otro, el opuesto, el cual designamos como *y*, según se aprecia en la figura 1.

Desarrolla las actividades que enseguida se piden:

a) Realiza sobre el triángulo, a mano y con lápiz, una descripción geométrica de la distancia variable *y,* considerando que aumenta con el movimiento.

b) En esta simulación ¿qué otra distancia se puede considerar variable? asígnale una literal como por ejemplo *z*.

c) ¿Cuáles ángulos del triángulo permanecen constantes y cuáles se pueden considerar variables, asigna literales mayúsculas como *A* y *B* a los ángulos que cambian?

EJEMPLO 2 Imagina ahora el mismo problema geométrico anterior, sólo que debes considerar que sobre la variable *y* se mueve un cohete que ha sido lanzado desde la superficie de la tierra, o sea desde la base del triángulo, y hay una persona observando el lanzamiento a una distancia *a* de su inicio, como se aprecia en las figuras 3 y 4. ¿Qué cambia respecto del ejemplo 1? Es obvio que no cambia nada, solamente el contexto del problema. La imagen de la figura 2 es una “variación” o “instantánea” del movimiento del cohete, tal como se expone en la figura 3. Una instantánea es como una fotografía tomada en determinado momento de una de las diversas “variaciones” del suceso, estas se aprecian con más detalle en la imagen de la figura 3. Lo interesante de la última figura, es que deja ver cómo las diversas posiciones o variaciones, permanecen simultáneamente constantes para cada una de las posiciones interme-dias de la simulación, verifica con más detalle qué magnitudes cambian y cuáles no lo hacen.

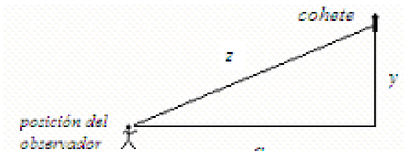


Figura 2

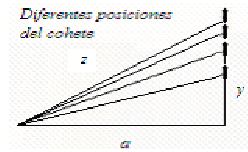


Figura 3

A partir de lo anterior definiremos la noción de variación de la siguiente manera: "Una variación es el cambio de posición o estado de una cantidad". En el ejemplo 2 cambiaron de magnitud, o bien de posición, las variables en movimiento: las longitudes *y* y *z*, el área del triángulo, etc. No obstante, lo valioso del reconocimiento geométrico que podemos hacer de las variaciones, es que más adelante, dentro del curso de cálculo diferencial, nos permitirán el "estudio analítico" del propio movimiento, es decir no nos conformaremos solamente con "ver" cómo varían las magnitudes, sino que podremos hacer un análisis de ellas.

Otra forma en la que suele representarse la idea de variable se da en un lenguaje simbólico como el que proveen el álgebra y la geometría. Por ejemplo la fórmula: $A = \frac{a}{2}y$, representa el área del triángulo rectángulo fijo del ejemplo 2, anterior, en el cual *a* e *y* pueden ser constantes. Sin embargo, puesto que declaramos inicialmente a *y* como variable, la fórmula indica la presencia de por lo menos otra variable más como puede ser el área *A.* De manera que tanto *A* como *y*, están en mutua relación, debido a que para un valor dado de la variable *y* podemos determinar un valor del área *A.* Se acostumbra llamar a la variable *A* "variable dependiente" (pues depende de *y*) escribiéndole como $A(y)$, mientras que a *y* se le llama la "variable independiente". Geométricamente la expresión: $A(y) = \frac{a}{2}y$, es representada por el sinnúmero de variaciones, tal como se muestran en la figura 3. La cantidad de variaciones que se pueden establecer a partir de la expresión $A(y) = \frac{a}{2}y$ es llamada «variabilidad». Expresaremos este concepto de la siguiente manera: *"La variabilidad es el conjunto de todas las variaciones del movimiento de un fenómeno, contenida en la expresión $A(y)=\frac{a}{2}y$, que en general se escribe como: $f(x)$".* 736

Como puedes ver, la expresión $A(y)=\frac{a}{2}y$ indica con más claridad la dependencia entre las dos cantidades, toda vez que representa totalmente la variabilidad producida por el fenómeno. Dicha expresión es llamada "función". En el caso de la fórmula $A=\frac{a}{2}y$, esta modela el caso particular de una de las variaciones producidas por el fenómeno, toda vez que permite considerar al movimiento en un estado fijo o de "constancia".

Conclusiones

La variabilidad debe ser observada desde dos puntos de vista; primero, en el cuerpo de la socioepistemología, la variabilidad se refiere a una "práctica social" que llevó a Díaz Covarrubias a la construcción de conocimiento matemático escolar, plasmado en su libro de texto; segundo, la noción de variabilidad articula la parte de análisis que es propio de los cursos de matemáticas en el nivel de ingeniería, que a su vez es sujeta a los cursos de física en ese nivel (Cantoral, 2001, 8). Dicho de otra manera, la variabilidad hace posible la predicción a través de conectarle con las nociones elementales del cálculo, como son aquellas de función y variable. Visto así, el discurso favorece la caracterización geométrica y algebraica que hacen más accesible en la enseñanza el paso al modelo analítico, en el cual la variabilidad se desprende de la función incrementada. Véase el siguiente modelo:

$$\underbrace{x:\text{Variable},\quad x+\Delta x:\text{Variación}}_{\text{Elementos del cálculo}},\ \underbrace{f(x+\Delta x)}_{\textit{Variabilidad}}=\underbrace{f(x)+f'(x)\Delta x+B(\Delta x)^2+\ldots}_{\text{Predicción}}$$

De esto último podemos suponer que la base de significados, propuesta anteriormente como: $E_0\to E_1\to E_2\to\ldots\to E_k\to\ldots\to E_n$, origina un primer paso en la cuestión de la coherencia del nuevo significado E_k, respecto del resto de los conocimientos colocados en la cadena. En el emplazamiento anterior, E_k es "potencialmente" útil para el entendimiento de E_n y da mayor significado a E_1, o sea la noción de variación, lo cual habla del compromiso de incorporarle en la base de significados. En este sentido, me he esforzado por conservar en el encadenamiento aquello que Chevallard (2004) ha llamado, un “principio de simetría” entre los significados ya conocidos: $E_1, E_2, ..., E_n$, y el nuevo conocimiento involucrado, E_k. La simetría entre los significados contiguos a E_k, en este caso representado por la noción de variabilidad, como son aquellos de variación y el propio concepto de función, se preserva por la coherencia y unificación que adquiere el propio discurso. Como un todo, la construcción de la base de significados: $E_0 \to E_1 \to E_2 \to ... \to E_k \to ... \to E_n$ se reduce a ser una “síntesis” del conocimiento (Camacho, 2007), debido a que unifica a E_k. En tal sentido cada elemento debe, además, considerarse potencialmente conocimiento de referencia. En su conjunto, los elemen-tos $E_0, E_1, E_2, ... E_k, ... E_n$, que integran la base, establecen un discurso que se consolida en (RCM).

Referencias bibliográficas

Artigue, M (1992). Didactic engineering. En: Régine Douady and Alain Mercier *Research in Didactique of Mathematics*. Selected Papers.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Revista de EDUCACIÓN MATEMÁTICA*., Vol. 18, Núm. 1, pp. 133-160. México: Santillana Editores

Camacho, A. (2007). Sistemas Sintéticos. Síntesis de Conocimiento en los Manuales para la Enseñanza. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 471-492). México DF: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. M. (1990). Elementos Metodológicos para la reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el nivel superior. Primer Simposio Internacional sobre

Investigación en Educación Matemática. *Cuadernos de Investigación. 4*(13), 2ª parte, 19-26. PNFAPM – SEP, México.

Cantoral, R., Farfán, R. M (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes des nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 24, Núm. 2.3, 137.

Díaz Covarrubias, F. (1873). *Elementos de análisis trascendente o cálculo infinitesimal*. 1ª edición,. México: F. R Castañeda y L. G Rodríguez, Impresores

Chevallard, Y. (1999) L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

Chevallard, Y (2004) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3e Université d'été Animath, Saint-Flour* (Cantal), 22-27 août. IUFM d'Aix-Marseille & UMR ADEF.

Purcel, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2000). *Cálculo*. México: Pearson Educación

SOCIOEPISTEMOLOGÍA Y MATEMÁTICAS

Ricardo Cantoral, Rosa María Farfán
Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. IPN. México
DME – Cinvestav, IPN; Dirección de Educación, Ciencia y Sociedad del ICyT DF. México
rcantor@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. En esta ponencia se discutió el estado que guarda la investigación en Matemática Educativa en distintos planos y con el empleo de ejemplos, se puso especial énfasis en las Tesis de base de la teoría y en el papel que juega la noción de *práctica social* en la construcción y difusión institucional del conocimiento matemático. Ahora ampliamos esto con un par de ejemplos.[10]

Palabras clave: socioepistemología, práctica social, matemática

Introducción

En un sentido amplio, digamos que tradicional, la teoría del conocimiento ha considerado a la Representación como una imagen, una idea, una noción o más ampliamente, un pensamiento expresado, formado al nivel mental y que está presente de modo consciente. En este sentido la representación precisa de aquello que habrá de ser re-presentado – es decir, vuelto a presentar –, requiere por tanto de un Objeto con existencia previa cuya captación intelectual reproduzca mentalmente a través de traer al presente las situaciones vividas, o de anticipar eventos por venir que condensen la experiencia adquirida. Kant empleó el término *representación* para hacer referencia a un acto de experiencia mental de carácter epistemológico. En un sentido más radical, Platón asumió que los objetos matemáticos son anteriores a la experiencia humana pues existen en el mundo de las ideas.

Bajo este enfoque, la actividad semiótica no puede crear al objeto, pues sólo lo re-presenta, es por ello que algunos autores han señalado críticas a este enfoque. Radford, (2004),

[10] Artículo extraído del artículo: Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors) 27 – 46.

citando a Peirce, decía que el signo no crea al objeto: aquél es solamente afectado por éste. En pocas palabras, en las diferentes escuelas de pensamiento que adoptan una perspectiva trascendental respecto a los objetos matemáticos (que sea el caso del idealismo o del realismo), los signos constituyen el puente de acceso a esos objetos conceptuales vistos como situados más allá de las peripecias de la acción humana y la cultura. Para Radford, es la actividad humana la que produce al objeto. El signo y la forma en que éste es usado (esto es, su sintaxis) – forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en Sistemas Semióticos Culturales de significación– son considerados como constitutivos del objeto conceptual: éstos objetivan al objeto. (*op. Cit.*, p. 14).

El enfoque socioepistemológico comparte la tesis, de la semiótica cultural, que confiere a la actividad humana la función de producción del objeto, aunque el énfasis socioepistemológico no es puesto ni en el objeto – preexistente o construido, ni en su representación – producida o innata; sino más bien se interesa y se ocupa de modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento con la intención de extraer de ello diseños para la intervención didáctica. Claramente ello exige de un posicionamiento sobre el sentido que adquiere la expresión: práctica social en este enfoque.

Se asume como tesis fundamental que existe una profunda diferencia entre "la realidad del objeto" – la llamada realidad implicada – y "la realidad descrita" que producen los seres humanos en su acción deliberada para construir su "realidad explicada". La socioepistemología ha tratado el problema de la representación de un modo singular, pues no busca discurrir teóricamente sobre la acción de representar al objeto mediante artefactos, herramientas o signos, sino que se ubica "a ras" de las *prácticas* y de la forma en que éstas se norman por *prácticas sociales*.

En primer término es importante distinguir la noción de *práctica* en un sentido llano, de aquella que usamos en este enfoque. La *práctica social* la entendemos como <u>normativa</u> de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica; o aun como se señala en (Radford, 2004) *"interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas"*. Ahí radica una de las principales distinciones teóricas de este enfoque: *"la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen"* (Covián, 2005). De este modo, se intenta explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en prácticas sociales. En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber.

Según este encuadre teórico, es preciso modificar el centro "pasar de los objetos a las prácticas". Los enfoques *reificacionistas* centrados en objetos, buscan explicar el proceso mediante el cual se llega a la construcción del objeto y minimizan el papel que desempeña la triada: herramientas, contextos y prácticas. El cambio de centración producirá un deslizamiento de orden mayor hacia explicaciones sistémicas, holísticas, complejas y transdisciplinarias, todo ello en virtud de que la acción cognitiva no busca la apropiación de objetos a través de sus partes, sino que asume que éstos no existen objetiva y previamente, "ahí afuera", previos a la experiencia, sino que –más bien– los objetos son "creados" en el ejercicio de prácticas normadas (tesis compartida con la semiótica cultural). En consecuencia, se cuestiona la idea de que la cognición se reduzca a la acción de recobrar los rasgos extrínsecos del entorno local a través de un proceso de representación. La cognición es entonces entendida como la capacidad de "hacer emerger" el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre el humano y su medio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de una interacción "dialéctica" entre protagonistas. Esta interacción, es socialmente normada y en tal sentido, la práctica es de hecho, inevitablemente, una práctica social. El conocimiento entonces, como se ha señalado en (Varela et al., 1997) depende de las experiencias vividas que, a su vez, modifica las propias percepciones y creencias.

La socioepistemología

De partida habremos de señalar que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, no sólo discute el asunto de la semiosis o el de la cognición de manera aislada, sino que busca intervenir en el sistema didáctico en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, Farfán, 2003).

En este enfoque se enfatiza el hecho de que las aproximaciones epistemológicas tradicionales, han asumido que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, en algún sentido, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral, Farfán, 2004).

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. Dado que este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. Bajo este enfoque se han producido una gran cantidad de investigaciones empíricas y de las cuales citamos algunas (Alanís et al, 2000; Arrieta, 2003; Cantoral, 1990, 1997, 1999;

Cantoral y Farfán, 1998; Cordero, 2001; Covián, 2005; Lezama, 2003; López, 2005; Martínez – Sierra, G, 2003; Montiel, 2005).

En su intento por difundir estos saberes, la socioepistemología sostiene que se forman *discursos* que facilitan la representación en matemáticas alcanzando consensos entre los actores sociales. Nombramos a estos discursos con el término genérico de *discurso matemático escolar* (Cantoral, 1990). Cabe aclarar que su estructuración no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos, la construcción de significados compartidos, en este sentido se trata más bien de una unidad cultural (Minguer, 2004).

Para mostrar lo anterior, considérese el siguiente hecho. El tratamiento didáctico de las distintas clases de funciones a través de sus representaciones gráficas enfrenta dificultades serias la momento de evaluar los logros al nivel de la comprensión por parte de los estudiantes. Si bien la mera clasificación visual de sus representaciones puede ser un elemento de partida para distinguirlas en una explicación didáctica, habrá que explorar más profundamente aquellos elementos que les permitan aproximarse a la naturaleza de las distintas clases de funciones. Veamos a continuación el escenario en que aparece por vez primera el empleo de la noción de práctica de referencia en el que las gráficas, las clases de funciones y la realidad física se articulan con base en la noción de práctica social.

Teoría analítica del calor

El ejemplo de la propagación del calor resulta útil para mostrar de que manera, antes que el objeto y su representación, está la *praxis*, y con esta la significación cultural. La propagación del calor resulta en si mismo un asunto desafiante, pues no trata de un *objeto* matemático como tal, sino de un *contexto* en que habrían de ejercer ciertas prácticas los científicos e ingenieros de una época y de una circunstancia específicas. Fue una cuestión a la que tanto la Mecánica Racional como el Análisis Matemático del siglo XVIII no dieron respuesta cabal, y de ello da cuenta la histórica controversia suscitada a raíz de la cuerda vibrante. Al lado de este desarrollo, encontramos el surgimiento de la ingeniería matemática sobre la práctica tradicional y el papel sustantivo que una institución de educación superior, la École Polytechnique, tuvo para su posterior consolidación. Así pues, el asunto matemático que estaremos ejemplificando, el del estudio de la convergencia de series infinitas se inscribe en el ambiente fenomenológico de la conducción del calor, en estrecha relación con la ingeniería, dio a luz, gracias a la conjunción de, por supuesto, innumerables variables, de entre las cuales destacamos como antecedentes al cálculo algebraico y al surgimiento de la ingeniería en el siglo XVIII. Es decir, una práctica social que normaba el quehacer de los científicos y tecnólogos de la época: Predecir el comportamiento de lo que fluye, fuese el calor, el movimiento o los flujos eléctricos, la intención última de este programa renovador era el de mostrar el papel del saber como la pieza clave de la vida futura de esa sociedad. Es importante ubicar que esto se da en el marco de la profesionalización de una *práctica de referencia*, la práctica de la ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica. La cuestión entonces no se reducía a conocer un objeto matemático, sino el mostrar que la práctica de la ingeniería podría ser científica. La función normativa de la práctica social haría su aparición en forma de discurso matemático y enseguida, casi al mismo tiempo, como una forma de discurso matemático escolar.

El surgimiento del concepto de convergencia, que data del siglo XIX se da en un ambiente fenomenológico de singular relevancia para la Ingeniería Matemática; la propagación del calor en donde la variación está presente y la ecuación en la que tal variación se significa, es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

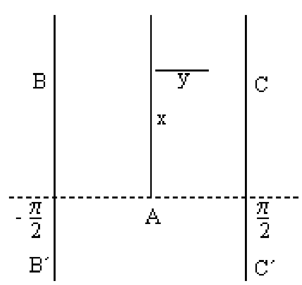
En los inicios del desarrollo de la humanidad, cuando las diversas experiencias se examinan por vez primera, se recurre de entrada a la intuición reinante del fenómeno, ya sea de lo calórico para el caso que nos ocupa, del ímpetu o del éter, en otros. De este modo, es con lo calórico que se realiza mejor la conducción, o con el ímpetu que se da el movimiento. Se precisó de una revolución del conocimiento científico para agrupar en una unidad fundamental al conocimiento y la manera de percibirlo.

Con la obra de Biot la experiencia se dirige hacia la medida y el cálculo desechando la explicación del fenómeno mediante el calórico, valiéndose de las indicaciones suministradas por termómetros, obteniéndose así la primera ecuación diferencial que rige al fenómeno. Sin embargo, los coeficientes constantes no fueron analizados, no se distinguió entre lo que es propio del cuerpo específico, de aquello que persiste independientemente. En especial, los parámetros de conductibilidad, de densidad, de calor específico, permanecen en un solo coeficiente empírico. La tarea constructiva culmina con la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822) de Fourier, en donde se analiza el problema de la propagación del calor en los sólidos, que consiste en describir el comportamiento del fenómeno de propagación buscando aquello estable y permanente, que se conserva inalterable con el fluir del tiempo. Esto es, la ecuación que gobierna el comportamiento del sistema.

Como Fourier llega finalmente a la ecuación diferencial de Biot, que ha recibido la sanción de la experiencia, se puede decir que el método de Fourier ha logrado la construcción matemática completa del fenómeno. De paso se rompen o, mejor aún, se niegan, los conceptos fundamentales del análisis matemático del siglo XVIII, como son: el de función, el papel del álgebra, el continuo real, así como la interpretación física de las soluciones, y se inicia el estudio de la convergencia de series infinitas, pilar fundamental del Análisis Matemático moderno. Salta a la vista la importancia singular de la obra de Fourier, tanto para la ingeniería como para el análisis matemático mismo. De suerte tal, que determinar el estado estacionario del sistema conduce, necesariamente, a un estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita. La búsqueda de la predicción y la predicción como una práctica, antecede al proceso de significación y de representación de objetos. Es decir, son las prácticas y no sus representaciones las que forman el saber matemático.

En este ejemplo, ¿qué objeto matemático se representa?, no hay objeto preestablecido, ni preexistente, estos son construidos por los actores con el ejercicio de sus prácticas y normados por su búsqueda de la predicción. Se pasa del oficio a la profesión gracias al logro de la función normativa de la práctica social. El problema particular con el que Fourier inicia este estudio es el siguiente:

> *Suponemos que una masa sólida homogénea está contenida entre dos planos verticales B y C paralelos e infinitos, y que se ha dividido en dos partes por un plano A perpendicular a los otros dos (ver figura); consideraremos las temperaturas de la masa BAC comprendida entre los tres planos infinitos A, B, C. Se supone que la otra parte B'AC' del sólido infinito es una fuente constante de calor, es decir, que todos esos puntos permanecen con temperatura 1, la cual no puede llegar a ser jamás menor ni mayor. En cuanto a los dos sólidos laterales, uno comprendido entre el plano C y el plano A prolongado y el otro entre el plano B y el A prolongado, todos los puntos de ambos tienen una temperatura constante 0, y una causa exterior los conserva siempre a la misma temperatura; en fin, las moléculas del sólido comprendido entre A, B y C tienen la temperatura inicial 0. El calor pasará sucesivamente de la fuente A al sólido BAC; él se propagará en el sentido de la longitud infinita y, al mismo tiempo, se desviará hacia las masas frías B y C, quienes absorberán una gran cantidad. Las temperaturas del sólido BAC se elevarán más y más; pero ellas no podrán pasar ni aun alcanzar un máximo de temperatura, que es diferente para los distintos puntos de la masa. Tratamos de conocer el estado final y constante al cual se aproxima el estado variable.*



Temperatura constante = 1

Así, el problema consiste en determinar las temperaturas permanentes de un sólido rectangular infinito comprendido entre dos masas de hielo B y C y una masa de agua hirviendo A; la consideración de los problemas simples y primordiales es uno de los medios más seguros para el descubrimiento de leyes de fenómenos naturales, y nosotros vemos, por la historia de la ciencia, que todas las teorías se han formado siguiendo este método.

Para el caso particular propuesto, la ecuación general se reduce a $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$, pues se omite tanto la coordenada *z* como su correspondiente derivada parcial (el grosor se considera infinitesimal). Dado que se trata de determinar el estado estacionario, independiente del tiempo (es decir, constante respecto del tiempo), deberá tenerse que $\frac{\partial v}{\partial t}=0$.

Así que la ecuación por resolver es $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. Si una función satisface la ecuación, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

- Anularse en - $\pi/2$ ó $\pi/2$ en lugar de *y*, cualquiera que sea, por otro lado, el valor de *x*.
- Ser igual a la unidad si se supone *x*=0 y si se le atribuye a *y* un valor cualquiera comprendido entre - $\pi/2$ y $+\pi/2$.

Es necesario añadir que esta función debe llegar a ser extremadamente pequeña cuando se da a x un valor muy grande, ya que todo el calor surge de una sola fuente A. Condiciones que hoy nombramos de frontera. La solución la encuentra por un método de separación de variables, considerando que la temperatura *v* se puede expresar como el producto de una función de *x* por una función de *y*, *v* = *F*(*x*) *f*(*y*)

Sustituyendo en la ecuación anterior se tendrá: $\frac{F''(x)}{F(x)}+\frac{f''(y)}{f(y)}=0$ y suponiendo que el primer sumando es igual a m^2, donde *m* es constante, una solución es *F*(*x*) = e^{-mx}, *f*(*y*) = cos *my*.

El valor para la constante *m* no puede ser negativo, pues se tendría que el valor e^{-mx} sería infinito cuando *x* es infinitamente grande, hecho que no concuerda con la situación física, ya que a medida que se aleje de la fuente de calor, la función disminuye. Para determinar el exponente *m* recordaremos que la función *v* se anula en - $\pi/2$ ó $\pi/2$. Luego como $e^{m\pi/2}\neq 0$, para cualquier *m*, debe tenerse que $\cos\left(-\frac{m\pi}{2}\right)=0$ y, por tanto, $m = 2n +1$, *n* natural.

Las soluciones correspondientes a cada valor serán entonces: $e^{-x}\cos y$, $e^{-3x}\cos 3y$, $e^{-5x}\cos 5y$, ... y cualquier combinación lineal de éstas también es solución,

$v = a\, e^{-x}\cos y + b\, e^{-3x}\cos 3y + c\, e^{-5x}\cos 5y +...$ (b)

…en este punto Fourier hace notar: "... No se puede inferir nada para los valores que tomaría la función si se pone en lugar de una cantidad que no esté comprendida entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$ ..."

Así la ecuación b) se convierte en $1=a\cos y+b\cos 3y+c\cos 5y+d\cos 7y+...$ para - $\pi/2 \leq y \leq \pi/2$; ahora sólo resta calcular la infinidad de coeficientes *a*, *b*, *c*, *d*,... . A nuestros ojos, la solución ya está dada (salvo por dicho cálculo); para Fourier, en cambio, es necesario justificar la solución físicamente[11] antes de realizar tal cálculo y añade:

> *Supongamos que la temperatura fija de la base A, en lugar de ser igual a la unidad para todos los puntos, sea tanto menor entre más alejado esté el punto 0 de la recta A, y que sea proporcional al coseno de esta distancia; se conocerá fácilmente, en ese caso, la naturaleza de la superficie curva cuya ordenada vertical expresa la temperatura u, o f(x,y). Si se corta esta superficie por el origen con un plano perpendicular al eje de las x, la curva que determina la sección tendrá por ecuación*
>
> $$v = a\cos y\,;$$

[11] Pero, a diferencia de Bernoulli que presenta argumentos físicos para la demostración del problema, aquí Fourier nos muestra que la solución matemática es coherente con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma, sin alusión a argumentos que no pertenecen a ella. Así, se inicia la separación entre la física y las Matemáticas, que desde la antigüedad caminaban estrechamente ligadas una de la otra.

los valores de los coeficientes serán los siguientes

$$a = a,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 0,$$

y así sucesivamente, y la ecuación de la superficie curva será

$$v = ae^{-x} \cos y.$$

Si se corta esa superficie perpendicularmente al eje de las y, se tendrá una logarítmica cuya convexidad es devuelta hacia el eje; si se le corta perpendicularmente al eje x, se tendrá una curva trigonométrica que tiene su convexidad hacia el eje. Se sigue de ahí que la función $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ *tiene siempre un valor positivo, y que el de* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ *es siempre negativo. Ahora bien (art. 123), la cantidad de calor que una molécula adquiere, de acuerdo a su lugar entre otras dos en el sentido de las x, es proporcional al valor de* $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$*; por tanto, se tiene que la molécula intermedia recibe, de la que precede en el sentido de las x, más calor del que ella le comunica a la que le sigue. Pero, si se considera esta misma molécula como colocada entre otras dos en el sentido de las y, siendo negativa la función* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$*, se ve que la molécula intermedia comunica a la que le sigue más calor que lo que recibe de la precedente. Se llega así, que el excedente de calor que ella adquiere en el sentido de las x se compensa exactamente con lo que pierde en el sentido de las y, como lo expresa la ecuación*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Se sabe así la ruta que sigue el calor que sale de la fuente A. Él se propaga en el sentido de las x, y al mismo tiempo se descompone en dos partes, una se dirige hacia uno de los ejes, mientras que la otra parte continúa alejándose del origen para descomponerse como la anterior, y así sucesivamente hasta el infinito. La superficie que consideramos es engendrada por la curva trigonométrica que responde a la base A, y se mueve perpendicularmente al eje de las x, siguiendo este eje, mientras que cada una de sus ordenadas decrece al infinito, proporcionalmente a las potencias sucesivas de una misma fracción.

Se obtendrán consecuencias análogas si las temperaturas fijas de la base A fueran expresadas por el término b cos 3y, o uno de los términos siguientes c cos 5y...; y se puede, después de esto, formarse una idea exacta del movimiento del calor en el caso general; ya que se verá, por lo que sigue, que ese movimiento se descompone siempre en una multitud de movimientos elementales, en donde cada uno se comporta como si fuese solo.

En el episodio anterior, tanto Fourier como Biot y los ingenieros egresados de la *Politechinique*, están interesados en *anticipar* el comportamiento de la naturaleza, en modelarla, su búsqueda no se reduce a representar un objeto preexistente, una noción, un concepto o un procedimiento. Esta necesidad de anticipación sólo podría provenir de una práctica de referencia que la ingeniería matemática del periodo había acuñado con tanta vehemencia. Se cobija la anticipación en dicha práctica de referencia, y *norma* al conjunto de actividades y prácticas (reiteración intencional de la actividad) para producir la experiencia. Llamaremos práctica social a ese emergente que norma el ejercicio de las prácticas, su localización no puede provenir de la observación sino del análisis, se trata de un constructor teórico que nos permite explicar el proceso de construcción social del conocimiento matemático.

Reflexiones finales

Los ejemplos muestran la diversidad de situaciones que habrían de considerarse ampliando el marco teórico hacia la socioepistemología. Este artículo ha querido mostrar cómo opera el enfoque socioepistemológico al centrar su atención en las prácticas más que en los objetos. Su centración en las prácticas arroja luz distinta de aquella que produce la centración en objetos, en procesos o en mediadores. El artículo mostró mediante ejemplos, el papel que juega la práctica social en la construcción del conocimiento matemático y de cómo dicha práctica se articula con los procesos de representación.

Este artículo si bien pretende posicionar a la Socioepistemología a través de ejemplos, busca sobre todo discurrir sobre el papel de la noción de práctica social en la formación de conocimientos. No se abordan las relaciones de complementariedad o contraposición de cara a otros enfoques teóricos, aunque bien sabemos que existen relaciones con la

Semiótica Cultural de Radford, o con el enfoque Ontosemiótico de Díaz – Godino, o aun con la Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevalard y colaboradores, o con la Etnomatemática de D'Ambrosio y colaboradores, pero más bien quisimos aportar un elemento adicional, una particular interpretación de la noción de práctica social que juzgamos prometedora para la investigación en matemática educativa.

En el futuro inmediato, el enfoque socioepistemológico estará intentando construir elementos de articulación entre los enfoques señalados anteriormente, pero esa será otra historia…

Referencias bibliográficas

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., y Rodríguez, R. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav IPN.

Cantoral, R. (1990 versión preliminar, 2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1997). *The sociological point of view in math educaticion: The case of analytical functions*. RUMEC. Michigan State University, USA

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico a la ricerca in matemática educativa. *La matemática e la sua didattica*, Vol. 3, 258-273.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Espsilon*, Núm. 42, Vol. 14(3), 353-369: España.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2002). La sensibilité à la contradiction: une étude sur la notion de logarithmes à nombres négatifs et l'origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 24 (2-3) 137-168.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Relime*, 4 (2), 103–128.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav IPN México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav IPN, México.

López, I. (2005). *La socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado no publicada. Cicata – IPN, México.

Minguer, L. M. (2004). Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Un estudio de caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*(2): 885 – 889.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. Cicata – IPN, México.

Radford, L. (2004). *Semiótica cultural y cognición*. Conferencia dictada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla, Chiapas México. [En red] Disponible en

http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3.pdf

Varela, F. et al. (1997): *De cuerpo presente*. Barcelona: Editorial Gedisa.

SIGNIFICADOS ASOCIADOS AL PUNTO DE INFLEXIÓN

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II México
camachoalberto@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología, Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Se dice comúnmente que el punto en el que una curva continua separa la parte cóncava de la convexa, se llama "punto de inflexión". El punto de vista es llevado más allá a través del teorema en el que se establecen condiciones suficientes para que el punto crítico,* $f''(a)=0$*, de la segunda derivada, efectivamente lo sea: "Si* $f''(a)=0$ *o* $f''(a)$ *no existe, y la derivada* $f''(x)$ *cambia de signo al pasar por el valor x=a, entonces, el punto de la curva en x=a es un punto de inflexión". No obstante, en el análisis de los valores extremos para la graficación de funciones el argumento mencionado es poco usado. Visto así, el objetivo del presente trabajo es dotar al concepto de significados que permitan un acercamiento, en principio algorítmico, a la definición formal que se presenta inicialmente, haciendo uso del recurso de la 3ª derivada.*

Palabras clave: significado, punto de inflexión

Introducción

En los cursos de cálculo diferencial, a los estudiantes les es suficiente con determinar, las más de las veces, los valores críticos de la segunda derivada, $f''(a)=0$, para así considerarles puntos de inflexión de la curva, pasando por alto el teorema arriba citado. Esta afectación es del todo algorítmica, sin interesarse tanto por la comprensión del argumento y su demostración. El problema se centra en evitar una regla que da suficiencia teórica a la existencia del punto de inflexión, pero que además resulta poco útil en el proceso de graficación de funciones, haciendo uso del criterio de las dos primeras derivadas. Asumiremos enseguida un criterio que sintetiza la proposición anterior y que permite un uso más eficiente del mismo. Para este efecto, hicimos un análisis de textos de cálculo antiguos que permitieron identificar un argumento asociado al punto de inflexión a partir de la utilidad de la tercera derivada en el proceso algorítmico de la graficación, por hoy en desuso en la enseñanza. Con dicho argumento el propósito fue el de "reconstruir el conocimiento matemático", debido a que su inserción en el discurso afecta a este último cambiando su organización interna.

Marco teórico

Se ha considerado útil involucrar nuevos significados a los ya existentes en el discurso de enseñanza matemática, a partir de integrar "bases de significados", semejantes al siguiente emplazamiento: $E_0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_k \to \ldots \to E_n$. En este último: $E_1, E_2, \ldots, E_n$ simulan los conocimientos que aparecen cotidianos en el discurso matemático escolar (DME), en el cual E_n es el conocimiento final, también llamado por los eruditos "conocimiento de referencia", que se desea los estudiantes aprendan, y E_k el nuevo conocimiento. Las bases originan un primer paso en la cuestión de la coherencia del nuevo significado E_k, respecto del resto de los conocimientos colocados en la cadena. En ese caso, E_k es "potencialmente" útil para el entendimiento del "conocimiento de referencia" E_n, y da mayor significado a $E_1, E_2, \ldots,$ etc., es decir, para el caso, a los significados asociados al punto de inflexión, lo cual habla del compromiso de incorporarle en la base de significados. La determinación de E_k es posible desde diferentes opciones de investigación, una de ellas, el análisis epistemológico que se plantea enseguida.

Análisis epistemológico

Desde finales del siglo XVIII, y a lo largo del XIX, se privilegió en la enseñanza matemática, para la determinación de los valores extremos de una función, dos proposiciones complementarias que tienen que ver con las derivadas sucesivas de la función que se trate. Ambos argumentos fueron ampliamente estudiados en el *Traité élementaire* de Lacroix y en la *Théorié des fonctions analytiques* de Lagrange, encontrándose coyunturas de dichas reglas, todavía, en textos que se usaron a lo largo del siglo XX (Granville, Smith, Longley, 1963, 220; Santaló & Carbonell, 1980, 183-184). Cabe destacar que a mediados del siglo XIX ambas proposiciones se encontraban en una escala de utilidad en la enseñanza. Planteamos enseguida ambas proposiciones en la forma concisa como les escribieron y utilizaron en sus respectivos textos y cursos de cálculo en la escuela politécnica francesa, los profesores Reygnaud-Hadamard, así como el propio Granville. La primera de estas se refiere a la regla para la determinación de máximos y mínimos, reza así: "Para encontrar los máximos y mínimos de una función $f(x)$, iguálese su derivada con cero, los valores de *x* que convienen son aquellos que hacen nulas un número impar cualquiera de derivadas sucesivas. Habrá un máximo si la primera derivada que no se anula deviene negativa al ser sustituida; habrá un mínimo si ella deviene positiva" (Reygnaud-Hadamard, 1823, 32). Otra regla que se deduce de la anterior, es la siguiente: "Si de las derivadas de $f(x)$ la primera que no se anula para $x=a$ es de *orden impar*, entonces $f(a)$ no será ni máximo ni mínimo". (Granville, 1963, 221). En ningún caso aparecen demostraciones. Podemos escribir la contraparte de la primera regla como un "criterio" más, de la siguiente manera: "Si $f''(a)=0$, $x=a$ es un punto crítico de la segunda derivada, este será punto de inflexión si al sustituirlo en la última derivada impar, que no sea nula, el resultado es distinto de cero: $f'''(a)\neq 0$ o $f^{v}(a)\neq 0$ o, etc."

Con este criterio es suficiente que la tercera derivada no sea nula para la determinación del punto de inflexión, esto intentaremos demostrar más adelante. En el texto de cálculo de Santaló & Carbonell (1980), se hizo un amplio uso de este recurso, sin demostración alguna.

Reconstrucción del conocimiento matemático

El siguiente es un intento de modelo didáctico del punto de inflexión basado en argumentos algebraicos y variacionales que amplían sus significados ya conocidos. Se prevé que en el modelo se interactué con los argumentos asociados al punto de inflexión, como son aquellos de concavidad, curvatura, segunda derivada etc. En cuanto a la utilidad de los significados vistos como objetos matemáticos, hemos recurrido a aquellos de función, derivada, derivadas sucesivas, teorema del valor medio, serie de Taylor, etc. Otros significados asociados útiles fueron el uso de representaciones gráficas. No obstante, pretendemos que la incorporación del criterio de la tercera derivada sea visto a partir de su utilidad en la graficación de funciones, y no tanto por las demostraciones que realizamos para dar sentido al modelo, lo cual es fundamental desde el punto de vista teórico.

Pocos autores de textos de cálculo llaman "punto de torcedura" a los valores críticos de la función *f* donde esta cambia de curvatura, es decir la curva se "tuerce" dando un giro de 180º al pasar por el punto crítico para salir de este con la concavidad invertida. Para la función *f* la "concavidad" significa que ella tiene un "hueco".

En el caso de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, esta cuenta con un punto de torcedura en *x*=2 que no consigna la información de la primera derivada al ser igualada con cero. Por lo general, estos valores son llamados "puntos de inflexión" y aparecen al igualar a cero la segunda derivada. Para el ejemplo citado, $f''(x) = 6x - 12$, o bien $6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$, resulta cierta la afirmación para $f'' = 0$, véase la figura 1. Si bien el criterio de $f'' = 0$ es "necesario", este no es "suficiente" para cualquier función, puesto que existen casos donde ello no se cumple, lo cual es aclarado eficientemente en los textos de cálculo. Por ejemplo, en $f(x) = x^4 - x$, la primera derivada $f'(x) = 4x^3 - 1$, consigna un mínimo en $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0.62$, de manera que la segunda derivada igualada con cero $f''(x) = 12x^2 = 0$, precisaría que en *x*=0 hubiera un punto de inflexión, lo cual no ocurre, véase la figura 2.

No obstante, la concavidad es asociada a la segunda derivada de *f,* recordemos los criterios expuestos en los textos de cálculo para la verificación de puntos críticos, estos dejan ver que si en *x*=*a* se tiene un máximo, entonces $f''(x) < 0$, lo cual debe ser relacionada a la concavidad "hacia abajo" de la curva, en el caso del mínimo la concavidad 757 de la curva es "hacia arriba", con $f''(x) > 0$. En este sentido, los puntos de inflexión son "límites" de las concavidades de la curva. Si observamos el caso de la figura 1, la concavidad hacia abajo de *f* se encuentra en los límites de menos infinito a 2, cambiando a ser cóncava hacia arriba entre 2 e infinito. Ello significa que el punto de inflexión se encuentra entre los cambios de concavidad de la curva, quedando, en otras palabras, entre $f'' < 0$ y $f'' > 0$, en el caso de cambiar de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y viceversa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, entre $f'' > 0$ y $f'' < 0$. De ello resulta que la recta tangente en el punto de inflexión cruza la curva de "arriba" hacia "abajo" o viceversa, véase más adelante la figura 3.

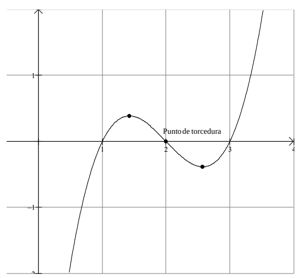


Figura 1

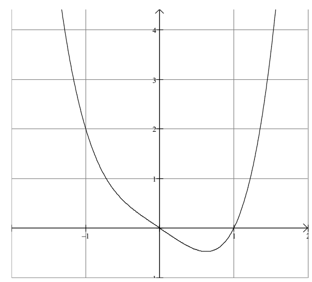


Figura 2

Lo anterior nos permitirá establecer la siguiente proposición: "Si f'' es menor que cero en (a,b), entonces *f* es cóncava hacia abajo en ese intervalo. En caso de que f'' sea mayor que cero en (a,b), entonces *f* será cóncava hacia arriba en el intervalo." Puesto que suponemos que la función *f* se encuentra por encima de la recta secante *y,* entre *x=a* y *x=b,* esta última se encuentra por debajo de $f(x)$. Para demostrar la proposición anterior, construyamos una función auxiliar $F(x) = y - f(x)$, cumpliéndose que $f(x) > y$. Luego se pretende demostrar que: $y - f(x) < 0$.

Demostración: Siendo la ecuación de la recta secante: $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{x - a}(x - a)$, al hacer la diferencia entre $f(x)$ e *y,* se tiene la relación: $y - f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$...(1)

Aplicando dos veces el teorema del valor medio como: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, queda:

$$y - f(x) = \underbrace{-(f(x) - f(a))}_{-f'(e)(x-a)} + \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{f'(c)}(x - a)$$

Suponiendo *c* entre *a* y *x,* así como *e* entre *c* y *x,* se guarda la relación:

$0 < a < c < e < x < b$...(2)

De aquí que: $y - f(x) = -f'(e)(x - a) + f'(c)(x - a) = [f'(c) - f'(e)](x - a)$

Aplicando de nuevo el teorema del valor medio a esta última expresión, queda:

$y - f(x) = f''(d)(c - e)(x - a)$...(2)

Deseamos probar que: $y - f(x) < 0$. Ello también ocurrirá si: $f''(d)(c - a)(x - a) < 0$...(3)

Para probar la desigualdad (3) hagamos uso de las propiedades de las desigualdades. El resultado de la desigualdad debe ser de signo – o < 0, de hecho tenemos dos opciones, estas son:

A): Para el caso en que $x > a$: $x - a > 0$, con $e - c > 0$, y puesto que $f''(d) < 0$, queda el esquema $> \cdot > \cdot < \; = \; <$. De aquí que $y - f(x) < 0$.

B): Para cuando $x < a$, $x - a < 0$, con $c - e < 0$, para $f''(d) < 0$, es decir, $< \cdot < \cdot < = <$. Luego $y - f(x) < 0$.

A) y B) muestran que la curva está situada por encima de la recta secante *y*, cualesquiera que sean *c, d, e* y *x* en (a, b), lo cual significa que la curva es cóncava hacia abajo. La concavidad hacia arriba se demuestra de manera semejante.

A partir de los argumentos vistos anteriormente, podemos establecer la conocida "condición suficiente" para la existencia de un punto de inflexión, como:

"Si $f''(a)=0$ o $f''(a)$ no existe, y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor *x*=*a,* entonces, el punto de la curva en *x*=*a* es un punto de inflexión".

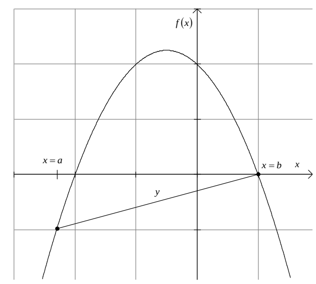


Figura 3

En los textos, la demostración se realiza comúnmente por "reducción al absurdo", de la siguiente manera:

"Siendo $f''<0$ para *x*<*a*, y $f''>0$ para *x*>*a*. Entonces en *x*<*a* la curva es cóncava hacia abajo, y para *x*>*a* cóncava hacia arriba. Por tanto en *x*=*a, f* tiene un punto de inflexión, siendo en este punto $f''(a)=0$".

Finalmente, asumiremos el criterio mencionado en el resumen el cual sintetiza la proposición anterior, éste nos permitirá un uso práctico de la misma, o sea: "Si $f''(a)=0$, *x*=*a* es un punto crítico de la segunda derivada, este será punto de inflexión si al sustituirlo en la última derivada impar, que no sea nula, el resultado es distinto de cero: $f'''(a)\neq 0$ o $f^{v}(a)\neq 0$ o, etc." El criterio es válido para funciones continuas en $f''(a)$, y acciona de inmediato en expresiones en las que el grado impar es "aislado" como por ejemplo $y=x^7-1$, $y=8x^9+10$. No obstante, para polinomios que involucran diversos grados y otro tipo de funciones trascendentes, es suficiente mostrar que la tercera derivada no se anula al sustituir el valor crítico, candidato a punto de inflexión, para que este último efectivamente lo sea. La demostración aparece más adelante. Antes veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Verifique la existencia de punto de inflexión en la curva $y=x^5$.

Solución: Las derivadas sucesivas hasta la última derivada impar no nula, son:

$y' = 7x^6$, $y'' = 42x^5$, $y''' = 210x^4$, $y^{iv} = 840x^3$, $y^{v} = 2520x^2$, $y^{vi} = 5040x$, $y^{vii} = 5040$, $y^{viii} = 0$, etc.

Al igualar con cero la segunda derivada obtenemos el punto crítico $42x^5 = 0 \rightarrow x = 0$. Sustituyendo este valor en la última derivada impar no nula, es decir $y^{vii}(0) = 5040 \neq 0$, ello asegura que en $x = 0$ la función tenga un punto de inflexión. Si se desea, esto último puede revisarse dando valores antes y después de *x*=0 a la segunda derivada, para observar que efectivamente haya cambio de signo, más ello es precisamente lo que se desea evitar con el uso de la tercera derivada. Por ejemplo $y''(-0.1) = -0.00042$ y $y''(0.1) = 0.00042$.

Ejemplo 2 Verifique si la función $y = x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 11x + 6$, cuenta con puntos de inflexión.

Solución: Siendo las primeras tres derivadas de la función:

$y' = 5x^4 - 24x^3 + 60x^2 - 11$, $y'' = 20x^3 - 72x^2 + 60x$, $y''' = 60x^2 - 142x + 60$

Igualando con cero la segunda derivada, obtenemos: $x(20x^2 - 72x + 60) = 0 \rightarrow x = 0,\ 20x^2 - 72x + 60 = 0$

Usando la fórmula general en la segunda expresión, quedan los valores críticos:

$x = 0$, $x = 1.32$, $x = 2.27$

Sustituyendo en la tercera derivada cada uno de estos, queda:

$y'''(0) = 60 \neq 0$, $y'''(1.32) = -22.896 \neq 0$, $y'''(2.27) = 46.83 \neq 0$

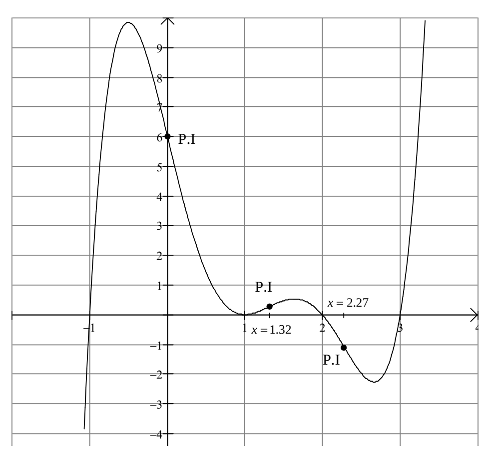


Figura 4

En los tres casos la evaluación en la tercera derivada resulta distinta de cero. Ello nos da para concluir que: $x=0$, $x=1.32$, $x=2.27$,

son puntos de inflexión de la función, lo cual hace innecesaria su verificación antes y después de los mismos. La gráfica correspondiente aparece en la figura 4.

En la hipótesis de $f''(x)=0$, la demostración de la proposición es la siguiente:

Demostración: Hagamos uso de la serie de Taylor hasta la tercera derivada, como:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!} \ldots(1)$$

En (1) consideremos $b=x+h$ y $a=x$. No obstante que: $0<a<x<b$, con $b-a>0$ ….(2)

De modo que (1) quede como: $f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^3}{3!}$

Enseguida hagamos: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)+f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$

Aplicando a esta última expresión el teorema del valor medio, resulta que:

$$f'(c)=f'(a)+f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Para *c* entre *a* y *b*. Además: $f'(c)-f'(a)=f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$

Aplicando de nuevo, en el miembro izquierdo, el teorema del valor medio, resulta:

$$f''(d)(c-a)=f''(a)\frac{(b-a)}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Para *d* entre *c* y *a*, con: $c-a>0$…(3)

Puesto que de (2) y (3): $b-a>0$, $c-a>0$ y por hipótesis partimos de que $f''(a)=0$,

queda: $f''(d)(c-a)=f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$ …(4)

De 4) se desprende que $f''(d) > 0$ o $f''(d) < 0$, y puesto que $c - a > 0$ además de que $b - a > 0$, resulta que el miembro izquierdo de (4) es diferente de cero, consecuentemente para el miembro derecho: $f'''(a) \neq 0$, lo cual se deseaba demostrar. No obstante, el criterio es restringido a funciones cuyas derivadas impares no se anulen más allá de la tercera derivada, en caso contrario es necesario, como se ejemplificó, usar la proposición tal y como se plantea.

Conclusiones

En la base de significados planteada anteriormente: $E_0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_k \to \ldots \to E_n$, nos esforzamos por conservar aquello que Chevallard (2004) ha llamado, un "principio de simetría" entre los significados ya conocidos: $E_1, E_2, \ldots, E_n$, y el nuevo conocimiento involucrado, E_k. La simetría entre los significados contiguos a E_k, en este caso representado por el criterio de la tercera derivada, como aquel de concavidad, se preserva por la coherencia y unificación que adquiere el propio discurso que hemos esbozado. En su conjunto, los elementos $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots, E_n$, que integran la base, establecen un discurso que se consolida en reconstrucción del conocimiento matemático, mismo que sirve de fundamento para el diseño de situaciones didácticas, consecuentes para el salón de clase.

En pocas palabras, hemos utilizado por varios años, en la práctica de la enseñanza del punto de inflexión, esta forma expuesta del discurso, unificando así el criterio de la "tercera derivada" con los propios argumentos que se conocen de este saber.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y (2004) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. 3e Université d'été Animath, Saint-Flour, 22-27. IUFM d'Aix-Marseille & UMR ADEF.

Granville, W., Smith, P., Longley, W (1963). Elements of the differential calculus and integral calculus. U. S. A.: Ginn and Company, Boston

Reygnaud-Hadamard (1823). *Probléms et dèveloppmens (sur diverses parties des mathématiques)*. Paris : Bachelier.

Santaló, L., Carbonell, C.(1980). *Cálculo diferencial e integral.* México: Porrua, 11ª. Edición

LO PERIÓDICO EN LA RELACIÓN DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS

Gabriela Buendía Abalos
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología de Avanzada – IPN México
buendiag@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Presentamos un análisis de la relación f-f ' para el caso de las funciones periódicas. Debido al privilegio de argumentos analíticos esta relación resulta poco significativa en el discurso matemático escolar y en ella pueden encontrarse problemáticas tanto de la relación entre una función y sus derivadas, como del aspecto periódico de las funciones. Queremos dar evidencia de que esta relación puede resignificarse en un marco de prácticas sociales apoyándonos en resultados de corte socioepistemológico relacionados tanto con f-f 'como con lo periódico.*

Palabras clave: derivada, periódico, prácticas sociales

Introducción

En el discurso matemático la relación entre una función y sus derivadas resulta ser poco significativa por el privilegio de los aspectos analíticos que usualmente se presenta. Al respecto, diversas investigaciones (Aguilar, 1999; Hernández, 2004) han dado evidencia de propiedades que presenta f que parecen heredarse directamente a f' . Por ejemplo, si a una función se le suma una constante, esta constante permanece en su derivada y, entonces, si una gráfica tiene un desplazamiento vertical sobre el eje y, la gráfica de su derivada también se desplaza también verticalmente.

Esta “herencia” de características entre f y f', la cual no concuerda con que una informa de la otra respecto a su comportamiento variacional, ocurre también en la propiedad periódica de una función. En el marco de la investigación que llevamos a cabo sobre la socioepistemología de lo periódico (Buendía, 2004; Buendía, 2007) hemos preguntado a profesores de nivel medio y medio superior sobre la validez de la proposición *f es periódica $\Leftrightarrow f'$ es periódica* (Ordoñez, 2007) (figura 1). La respuesta común es afirmativa ya que se hace referencia a la función seno o coseno cuyas derivadas, efectivamente, son periódicas. Consideramos que el marco de referencia que se tiene al abordar esta pregunta es limitado tanto en el aspecto periódico de la función como en el de la propia derivada.

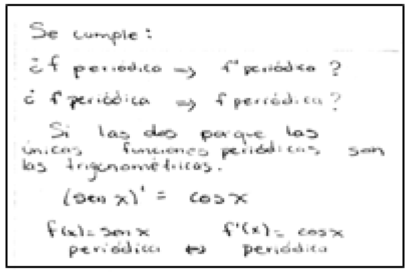


Fig 1. *f es periódica* $\Leftrightarrow$ *f' es periódica*

Por parte de lo periódico, una respuesta afirmativa induce a pensar que la periodicidad no está siendo usada como una propiedad que califica a un cierto comportamiento, sino que se limita a calificar a una determinada función: la función trigonométrica (seno, especialmente). Y por parte de la derivada, nos encontramos con el privilegio de argumentos analíticos ("la derivada del seno es el coseno") sin que la relación f -f' pueda analizarse cualitativamente de tal manera que una informe acerca de la otra aunque no necesariamente mantenga sus mismas cualidades (en este caso, la periodicidad). Estos dos aspectos (lo periódico y la relación $f - f'$) han sido abordados ampliamente en Matemática Educativa.

La relación *f* -*f'* y lo periódico

En la línea de investigación sobre pensamiento y lenguaje variacional (González ,1999; Dolores et al., 2002) se ha señalado que es factible construir una relación significativa entre una función y sus derivadas cuando se favorece un tránsito entre las variaciones sucesivas, es decir cuando se puede establecer un uso simultáneo entre la función y sus derivadas de tal manera que se pueda reconocer en todas ellas la forma de estudiar los cambios sucesivos. Es necesario romper pues la idea de iteración.

Con el mismo objetivo de dar significados a la relación entre una función y sus derivadas, la investigación se ha valido también del uso de gráficas en el cual éstas representan una forma de argumentación que favorece la construcción del conocimiento matemático. Una situación de transformación (Cordero, 2001) da cuenta de que la función $y = f(x)$ en la relación entre la derivada y primitiva puede ser concebida como una instrucción que organiza comportamientos entre ellas. Ya que la función no se percibe como un proceso previo a la gráfica, la gráfica de f permite organizar los comportamientos de la gráfica de f' y viceversa. Para ello se tiene que transitar significativamente por los registros gráfico, algebraico, e incluso el tabular.

Por otra parte, la investigación sobre lo periódico ha dado cuenta de que existe una irreflexiva asociación entre función trigonométrica y periodicidad (Buendía, 2004). Por ejemplo, es común que la gráfica de una función $f(x) = kx + \text{sen } x$ sea calificada como periódica. Una razón que se ha encontrado para ello es que cualquier función que cuya forma sea senoidal adquiere como por herencia la propiedad periódica de la función analítica $f(x) = \text{sen } x$. Otros argumentos que se han presentado para calificarla como periódica hacen uso de la gráfica: *sí es periódica porque es factible encontrar un patrón de repetición en el eje x*.

De acuerdo a la estructura matemática, esto podría ser un cuasiperiodo[12]. Pero esto puede resultar una razón suficiente, entre algunos alumnos y profesores de matemáticas, para que sea periódica ya que al seguir el patrón de la parte lineal, la gráfica "sube siempre igual".

Es factible, a partir de la gráfica de dicha función hacer un bosquejo de su derivada. Cada uno de los máximos o mínimos locales representarán ceros en f'. Ya que la gráfica de f

[12] Aun cuando el movimiento no es verdaderamente periódico, podemos definir un cuasiperiodo $T_d = 2\pi / \mu$ como el tiempo entre los máximos sucesivos del desplazamiento (Boyce, DiPrima, 1987)

mantiene la misma forma en cada intervalo del eje *x*, entonces el comportamiento de las tangentes en realidad es el mismo en cada intervalo. Así, la gráfica de la derivada sí resulta periódica.

Este análisis cualitativo de las gráficas de $f - f'$ en el que el comportamiento de cada gráfica informa, finalmente, de la relación que guardan entre ellas, parece indicar que, para el caso de estas gráficas, si f fue calificada como periódica el argumento que se usa tiene que ver con cómo está variando: cada intervalo en el eje *x* presenta el mismo comportamiento en el eje *y.*

Veamos ahora el aspecto analítico de una función con un comportamiento similar. La función $f(x) = x + \text{sen}\, x$ suele ser catalogada como periódica porque la expresión analítica contiene a la función seno. En realidad no lo es ya que el factor lineal provoca que se pierda dicha propiedad [13]:

$$\boxed{\text{Si } p = 2\pi\text{, entonces } f(x+p) = \boldsymbol{x + 2\pi} + \text{sen}\,(x+2\pi) \neq \boldsymbol{x} + \text{sen}\,(x) = f(x)}$$

En cambio, su derivada $f'(x) = 1 + \cos x$, sí lo es:

$$\boxed{\text{Si } p = 2\pi\text{, entonces } f'(x+p) = 1 + \cos\,(x+2\pi) = 1 + \cos\,(x) = f(x)}$$

Veamos ahora las gráficas (figura 2), de manera simultánea, de dicha función y de su derivada:

[13] Una función es periódica si existe p en el dominio de f tal que $f(x+p) = f(x)$

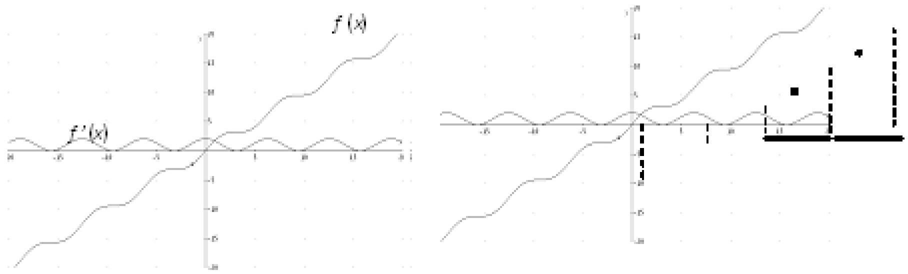


Fig. 2 La función y su derivada

Podemos construir diversos argumentos a partir de la gráfica de estas dos funciones. Por ejemplo, el punto de inflexión de *f*(*x*) (en línea punteada) señala los ceros de la función derivada y éstos siguen un patrón repetitivo en el eje *x* lo cual es una parte de la propiedad periódica. Dentro de esos intervalos, existe otro punto de inflexión (indicado con un pequeño círculo) que corresponde a un máximo de la derivada (o, digamos que en este punto la curva presenta una inclinación tal que la pendiente de la tangente es máxima). Ese valor es el mismo en cada uno de los intervalos, independientemente del valor ascendente que va tomando la abscisa. Pareciera, nuevamente, que si *f*(*x*) es señalada como periódica, en realidad se está haciendo referencia a su derivada.

Estamos, pues, tratando con ciertas funciones que no son periódicas pero que sus derivadas sí lo son. Si esta situación es analizada en contextos de movimiento, por ejemplo, señalan la existencia de movimientos que no son periódicos pero cuya velocidad –y aceleración- sí lo son. En el curso de la investigación (Buendía, 2004) hemos preguntado a estudiantes y profesores de matemáticas cómo tendría que moverse un objeto a fin de obtener la gráfica tiempo distancia indicada en la figura 2b. Algunas descripciones son las siguientes:

*"El cuerpo avanza y retrocede un poco menos de lo que avanza, este movimiento lo va repitiendo **en forma constante**"*

*"Es un cuerpo que se encuentra en un punto A, de aquí recorre una distancia pasando por B hasta llegar al punto C, regresa al punto B, desde B se dirige pasando por C hasta llegar a un punto D, regresa al punto C,…etc. esto **con una velocidad casi constante**"*

*"El cuerpo avanza y retrocede un poco menos de lo que avanza, este movimiento **lo va repitiendo en forma constante**"*

Consideramos que los argumentos anteriores están siempre haciendo referencia a la velocidad (derivada) del movimiento o bien a variación periódica (de ahí que le llaman "constante") del movimiento.

La conclusión que podemos extraer hasta aquí es que una relación significativa entre *f-f '* cuando alguna de ellas sea periódica, surge en un contexto de variación en el que se rompe la idea analítica de iteración. Estos significados parecen obtenerse tanto de formas analíticas como gráficas y físicas (movimiento) tomando en cuenta que en cada caso hay un cierto tipo de argumentación construida.

La relación *f-f '* en la socioepistemología de lo periódico

La socioepistemología realiza una investigación epistemológica donde ésta es entendida como la búsqueda de circunstancias que dan origen al conocimiento matemático. Da cuenta de las prácticas sociales como una base de significación para este saber; propone, pues, epistemologías de prácticas.

En este marco, la sociopistemología de lo periódico da cuenta de que el reconocimiento significativo de esta propiedad vive al seno de la práctica de predicción. Esto es, al predecir es posible distinguir significativamente entre el "se repite" y el "cómo se repite" lo cual es necesario para el reconocimiento de la naturaleza misma de la propiedad y no del objeto al cual se aplica.

A fin de analizar la relación entre una función y sus derivadas al tratar con funciones periódicas, se realizó una investigación sobre el uso de lo periódico en diferentes situaciones (Ordoñez, 2007). Presentamos dos ejemplos en los que subyace la predicción como práctica que favorecen la generación de conocimiento.

Situación 1. Al estudiar el problema de los tres cuerpos[14], Poincaré (citado en Aluja, 2005) establece que "*…en un determinado momento, un sistema se halla en un estado concreto y en un momento posterior vuelve, de nuevo, al mismo estado. Todas las posiciones y velocidades son las mismas después que antes. Así, debe repetirse, una y otra vez, el movimiento que le ha conducido desde un estado de nuevo a sí mismo: el movimiento es periódico.*"

Esto es, Poincaré al describir un movimiento periódico no sólo hace referencia a que que es un movimiento que "se repite" sino que pone énfasis en "el dónde pasa, y el cómo pasa". Lo anterior le permite encontrar soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales que describen el problema. Consideramos que una práctica de predicción está favoreciendo el desarrollo de saber matemático en esta situación ya que, dada una cierta información, Poicaré se ocupa de describir (matemática) lo que pasará después.

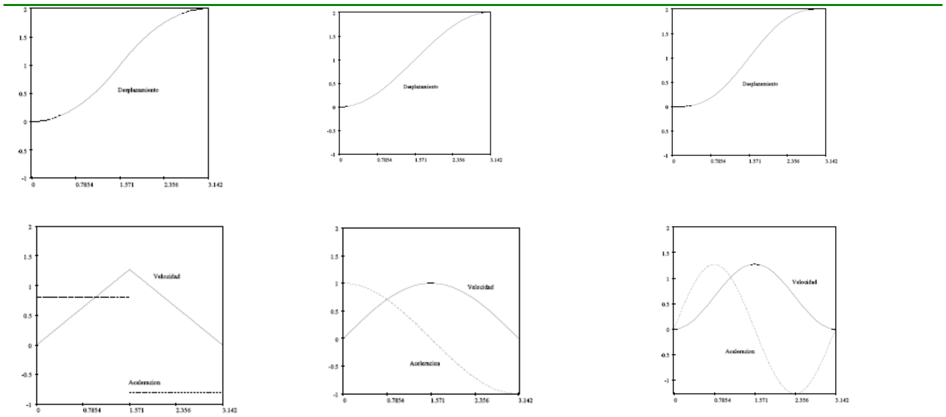
[14] Determinar en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a su atracción mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas

Situación 2. En el diseño de levas[15], Miranda (2003) establece que "*Cuando las levas giran a bajas velocidades, los cambios de fuerza que generan los cambios en la aceleración pueden despreciarse. Sin embargo, a altas velocidades, estos cambios se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor. Por esta razón es importante revisar que los perfiles de las levas de alta velocidad no presenten cambios bruscos de pendiente o discontinuidades en las gráficas de velocidad y aceleración. Existen movimientos que permiten asegurar derivadas "suaves" como el movimiento armónico y el movimiento cicloidal*"

El autor presenta en la siguiente tabla (figura 3) las gráficas de desplazamiento (primer renglón), velocidad (segundo renglón) y aceleración (tercer renglón) de los movimientos parabólico, armónico y cicloidal, así como las ecuaciones que las representan. Algunas de ellas han sido discutidas en la parte inicial de este escrito.

[15] Una leva es un elemento mecánico que sirve para impulsar a otro elemento llamado seguidor para que desarrolle un movimiento especificado por contacto directo. Este movimiento puede ser uniforme, parabólico, armónico o cicloidal, dependiendo de la velocidad de la leva

Movimiento parabólico	Movimiento Armónico	Movimiento Cicloidal



$y = A\theta^2 + B\theta + C$	$y = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$	$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\,\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$
$y' = 2A\theta + B$	$y' = \frac{\pi L}{2\beta}\,\text{sen}\,\frac{\pi\theta}{\beta}$	$y' = \frac{L}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$
$y'' = 2A$		
$y''' = 0$	$y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$	$y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2}\,\text{sen}\,\frac{2\pi\theta}{\beta}$

Fig. 3 Tres funciones para el diseño de levas

Además de distinguir entre “armónico” y “cicloidal”, vemos que para la discusión situacional que presenta el autor no basta con la forma del movimiento, sino que éste será el adecuado o no (para el diseño de la leva) en función de sus variaciones (velocidad y aceleración). A través de su argumento gráfico sustenta la construcción del conocimiento en cuestión ya que la *suavidad* de la derivada será trascendente para una leva de las llamadas de “alta velocidad”.

En resumen, y con base en lo anteriormente expuesto, consideramos que una relación significativa entre la función y sus derivadas al tratar con funciones periódicas, se de en un marco de prácticas como la graficación, la predicción y la modelación.

Referencias bibliográficas

Aguilar, M. (1999). *Relaciones entre la derivada y la primitiva: El papel del registro gráfico en lagunas de las construcciones de los estudiantes.* Tesis de Maestría no publicada. Dirección de estudios de postgrado. Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Aluja, J. (2005). La matemática borrosa en economía y gestión de empresas I**.** *Matematicalia revista digital de divulgación matemática.* 1(3). Obtenido en abril 30, 2007 de http://www.matematicalia.net/

Boyce, W. y DiPrima,R. (1987). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. (2007) Lo periódico una revisión en el marco de la socioepistemología. En Dolores, C., Martínez,G., Farfán, R.,Carrillo,C., López, I.,Navarro, C., (eds) *Matemática Educativa: algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Díaz de Santos. pp 77-90 ISBN: 84-7978-786-4

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 4, (2), 103-128.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 5 (3), 225-250.

Hernández D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de f y f' para las funciones x, x^2 y x^3*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Gonzáles, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Miranda, J. (2003). Diseño de levas. En Mecanismos (pp. 98-142). Obtenido en Abril 20, 2007 de

http://www.ufrrj.br/institutos/it/deng/kalil/IT_140_Proj_Maq/Parte2_Mecanismos/mecanismo.pdf

Ordoñez, A. (2007) *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas*. Tesis de Maestría no publicada. México: Universidad Autónoma de Chiapas

UNA VISIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA DE LA RESIDENCIA

Liliana Homilka, Javier Lezama
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Buenos Aires. Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN México
lhomilka@yahoo.com.ar, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores, socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Los estudiantes del profesorado de matemáticas en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, durante el cursado del último año de la carrera deben realizar la residencia, momento en el que hacen efectiva sus primeras prácticas docentes en escuelas públicas.*

En el estudio de la residencia desde la aproximación socioepistemológica, se ha identificado un escenario cuyas características lo hacen relevante para la discusión acerca de la naturaleza, estructura y funcionalidad del conocimiento matemático escolar. En él, interactúan el profesor de las prácticas, el profesor de la escuela secundaria que presta su curso y asigna el contenido a enseñar al practicante, en el que se manifiesta diferentes intencionalidades acerca de la enseñanza y el aprendizaje de matemática.

Los resultados de la investigación que se reportan evidencian algunos factores que condicionan la forma en que el futuro profesor de matemáticas se incorpora al ejercicio profesional.

Palabras clave: socioepistemología, escenario, practicante, práctica del profesor

Introducción

Los estudiantes del profesorado de matemática en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, durante el cursado del último año de la carrera deben realizar la "residencia" (denominación social, no académica que utilizan algunos docentes para referirse a las primeras prácticas de enseñanza que realizan los futuros profesores) en escuelas públicas de nivel medio.

Los practicantes deben integrar los conocimientos construidos como alumno de matemática, de formación general y de Trabajo de Campo III y Didáctica Específica I. Lamentablemente, esto no ocurre. Se ha observado que tienen dificultades para estructurar las clases, determinar los objetivos de aprendizaje, la elección que hacen del material didáctico muchas veces no es apropiada para la construcción de conocimientos matemáticos en el nivel medio. Dichas dificultades los llevan en algunos casos a reproducir en el aula un saber matemático cuya naturaleza es propia del nivel superior, de forma que éste, no es funcional en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la escuela media; en el sentido en que lo plantea Martínez (2005). En otros, reproducen un saber tal cual lo han vivido en su formación matemática como alumno de escuela media. Es decir, que en ambos casos, repiten las mismas prácticas de sus docentes (Lezama, 2006).

Además, deben interactuar con el profesor de prácticas (PP) y el profesor de secundaria (PS), que muchas veces, poseen distintas visiones acerca de las funciones que cumple la enseñanza de la matemática. Hay interacciones que son problemáticas para el practicante, dado que los docentes esperan de él un desempeño en el aula parecido a lo que ellos proponen y llevan a la práctica. Pero, el practicante muchas veces no llega a comprenderlos, debido a que la relación con el saber enseñado siempre ha sido desde su posición de alumno.

Por lo dicho anteriormente, el objetivo de este trabajo se ha centrado en determinar, desde el enfoque socioepistemológico, los factores que condicionan las primeras prácticas de enseñanza de los estudiantes de profesorado.

Dicha determinación es posible, desde el análisis de los escenarios socioculturales porque:

> *"El escenario sociocultural influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto representativo de la sociedad en la que se gesta."(Crespo Crespo, 2007, p. 37)*

En nuestro caso, existen fuertes interacciones entre el PP, el PS que presta su curso y asigna el contenido a enseñar al practicante (P), en la que coexisten diferentes necesidades, experiencias, visiones e intencionalidades acerca de la enseñanza y el aprendizaje de matemática.

Es desde el análisis del escenario que la matemática educativa puede explicar el proceso de construcción de manera sistémica y situada en un contexto escolar como resultado de las prácticas sociales que el escenario genera (Martínez, 2005). Dado que, la socioepistemología asume que el conocimiento es producto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales (Lezama, 2005).

El escenario de la realidad y práctica docente

La concepción que se tiene de la residencia está focalizada por un lado en la evaluación, y por otro, las observaciones de clases es vivida por el PS como un control de su actividad. Esto limita la posibilidad de que este espacio se constituya en un momento para obtener información y como proceso para producir conocimiento (Edelstein, 2003).

Los siguientes comentarios de los P evidencian esta característica que presenta el escenario:

- *“Se pone una lupa en lo que haces mal, (…) no te ayudan a que se aprenda.”*
- *“Nada podías cuestionar acerca de qué enseñar y cómo, (…), como si yo ya supiera dar clases”*
- *“Se deben leer materiales acerca de diversas estrategias y problemas que sirvan a todos los docentes y alumnos. La mayoría de las veces no se entiende para que se hace lo que se hace en el aula.”*

Esa visión limita la posibilidad de que se construyan conocimientos relacionados a las prácticas de la enseñanza, desaprovechándose una instancia formativa importante para este grupo en particular y para la comunidad docente en general.

La persistencia de esa concepción acerca de la residencia, a pesar de la evolución de la matemática educativa (Cantoral & Farfán, 2003), se debe en parte a los significados que aún se le otorga a la tarea del profesor en el escenario que describimos: como un sacerdocio, un trabajo, una profesión o una mezcla de todos ellos y a la valoración social de que la profesión del profesor se construye sólo sobre la base de la matemática y que la práctica se sustenta únicamente en función de la experiencia docente. Generando o reforzando la idea en el P de que para ser profesor es suficiente: *"conocer a fondo los contenidos curriculares, el reconocimiento debe estar dado por el trabajo que el docente realiza, 'su sacrificio'."* (Homilka, 2008, p.86)

Aún se mantiene la creencia de que el aprendizaje consiste en adquirir conceptos y reglas ya establecidas, por la cual, en la formación y la acción del profesor se sigue alimentando una concepción antigua, ser docente implica saber los contenidos matemáticos y poseer cualidades innatas para enseñar. A modo de ejemplo, se transcriben algunos comentarios de los practicantes que evidencian estas afirmaciones:

- *"Te salvan los contenidos disciplinares. La formación pedagógica que posees, no se puede aplicar, te encontrás con otra realidad en las aulas."*
- *"Te enseñan procedimientos, no voy a tener problemas, pero hay gente que no puede aprenderlos, no los puede retener. Ves de explicarlo de diversas formas, si no da resultado consultás con un profesor, con otro, y nuevamente otro escollo."*
- *"Debe haber otra forma de transmisión, ampliar el horizonte de herramientas, no es sólo imaginación, ni te alcanza lo que sabés de matemática, ni las*

cualidades personales del docente ni las del alumno. No te preparan para enseñar, eso se debe aprender también."

Las ideas anteriores nos llevan entonces, a considerar la desvalorización que se hace de la didáctica general y el hecho de no considerarla como propedéutica para construir la didáctica de la matemática. Los practicantes, confunden las representaciones teóricas entre sistema educativo y sistema didáctico. Además, desconocen el papel que cumple la sociedad en su conjunto y en especial la educativa y las influencias que tienen todas ellas sobre la escuela, sus docentes y alumnos. Un ejemplo de ello, se manifiesta en las siguientes declaraciones de los estudiantes:

"Hay culpas compartidas (profesorado, escuela media), se llega sin saber leer comprensivamente, los alumnos en el instituto se copian en las materias pedagógicas, no le damos la misma importancia a ese tipo de materias"

"El profesorado no te brinda una formación pedagógica, didáctica, las pocas teorías que te hacen estudiar no son aplicables a nuestra situación actual."

De acuerdo a lo planteado por Lezama (2007), en este escenario, se debe reflejar la relación que existe entre formación del profesorado y los conocimientos producidos por la matemática educativa. Pero, el conocimiento teórico y práctico que se centra exclusivamente en la labor que se realiza en el aula, es estático, no actualizado. Muchas veces, los profesores no lo consideran necesario, ni útil tanto para la formación como para la acción de su profesión. Lo que determina la ausencia de discusión y resignificación de la matemática escolar (la del profesorado y la de la escuela media) y la escasa incidencia que sobre la construcción de la profesión tienen las producciones científicas.

La socioepistemología considera que el escenario es el que genera prácticas sociales que condicionan a los estudiantes y profesores. La reproducción de un saber matemático es reconocida como una práctica social institucionalizada. Es el docente quien reproduce un saber en el aula, los factores que norman esta actividad, le hace generar un discurso matemático escolar específico por su naturaleza e intencionalidad (Lezama, 2006).

La práctica del profesor de prácticas de la enseñanza

La práctica docente genera en los alumnos, imágenes positivas o negativas muy fuertes de lo que significa ser docente, de las actitudes que se tienen hacia el trabajo profesional, las características de sus clases, y acerca de las habilidades y competencias que debe desarrollar el profesor. De acuerdo al análisis realizado en función de las características de la clase del PP, se ha determinado que se presenta a los P metodologías de enseñanza desde un abordaje teórico exclusivamente, no se traslada al aula la aplicación de las mismas. En algunos casos el docente hace hincapié en el error como herramienta de aprendizaje, pero, no trabaja con los estudiantes la idea de que diversos tratamientos didácticos pueden producir diferentes efectos en alumnos y profesores, los que dependen de la forma en que se originan, organizan, comunican y sociabilizan en el aula. A modo de ejemplo, se muestran los siguientes comentarios de los estudiantes acerca de la manera en la que sus experiencias previas en el aula influyen en su concepción de la profesión docente:

- *"Sostenía que el error es una herramienta de aprendizaje que permite la adquisición de nuevos conceptos y la corrección de aquellos conceptos mal adquiridos o la detección de la ausencia de conceptos."*
- *"Discutíamos varios textos, veíamos distintos enfoques que daban a un mismo tema, analizábamos posibles errores y cómo podíamos hacer para enfrentarlos (…), luego había que hacer lo que él quería."*
- *"Sólo escuchabas las experiencias personales, los textos sobre método inductivo, deductivo, heurístico los leías, pero no se discutían en el aula. Sé que cada rama*

de la matemática tiene su propia didáctica, pero no me enteré nada de eso, no he visto nada, así que no sé nada al respecto.””

- *“El profesor de prácticas en su curso te hace dar lo que él quiere, no te da mucha libertad de elegir, la definición, las actividades y los ejercicios los arma él, uno interpreta eso y lo implementa.”*

Las contradicciones que se presentan en el aula entre lo que comunica y hace el docente, evidencian el discurso del profesor, mostrando que los aspectos teóricos en los que se basa, son insuficientes o inapropiados para que el practicante los pueda poner en práctica en el momento de gestionar la clase. Podemos pensar entonces, que hay una restricción explicita sobre la actividad en el aula y sobre el propio discurso matemático que se utiliza. Los comentarios siguientes ejemplifican lo antes expresado:

- *“Las clases de mi profesora distaban bastante de las recomendaciones que ella misma nos daba.” “Creo que nos faltaron fundamentos teóricos firmes.”*
- *“Actuaba de manera diferente a cómo lo hace cuando enseña probabilidad y estadística, allí si se adecuaba a su estilo la materia. (…), en didáctica hablaba una cosa y hacía otra.”*
- *“Hay que imaginarse lo que quiere el profesor para preparar la clase”*
- *“Durante las prácticas intentaba que me sirvieran, pero el grupo y el profesor hacían difícil la situación porque quería que sus practicantes lleváramos al aula algo que él no hacía y tampoco nos orientaba en cómo hacerlo.”*

Interrogantes como ¿qué enseñar?, ¿por qué enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿para qué enseñar?, ¿a quién enseñar?, no son presentados ni discutidos con los estudiantes antes ni durante sus primeras prácticas. Las respuestas a esas preguntas determinan las formas de encarar un ejercicio didáctico básico y la formulación de un discurso matemático con determinadas características. Como no se discuten estas ideas, la práctica del profesor alimenta en el practicante la concepción de que la profesión se construye sobre la base de la matemática y de la experiencia personal y no en función de un trabajo académico actualizado.

Efectos y resultados de las prácticas del profesor

Algunos P proyectan en sus clases la modalidad de enseñanza que utilizan los docentes del profesorado, no pueden distinguir la diferencia entre la naturaleza de la matemática superior de la de la escuela media.

> *"En el desarrollo de la clase utilizaba en forma rigurosa la notación matemática, llegué a plantear una función de dos variables, cosa que para mí es natural, pero que no iba a ser comprendida por los alumnos de la escuela secundaria. Me costó mucho acostumbrarme a bajar el nivel para un segundo año."(*Homilka, 2008, p.127)

Los docentes, generan un discurso que lleva a los practicantes a estructurar un sentido, un significado, una visión parcializada de la matemática de la escuela que tienen que enseñar y de la profesión que practicará. La matemática superior debe servir de base en relación al conocimiento matemático de la escuela media en el sentido de que este último requiere para ser alcanzado del desarrollo de un conjunto de acciones didácticas previas que deben estar articuladas entre los dos niveles, de modo que se contemple también que en el nivel medio, adopta diferentes características debido a que las circunstancias son otras y que también se presentan conflictos en el aula, por lo que son necesarias rupturas para que se adquieran diferentes significados en el contexto de la escuela media. De modo que los conocimientos construidos en la clase sean útiles y funcionales. Evitándole al P las siguientes dificultades:

> *"Te hacen planificar (…) no tenía claro qué criterio utilizar, (…), los temas eran sinónimo de concepto. (…) planificar no sé, hay que anticipar comportamientos, pensamientos, dificultades; pero lo cierto es*

que no se repite de la misma manera en todas las aulas, salvo que te entrenen para que el alumno diga lo que el docente quiere escuchar."

"No me sirvió para organizar la clase (…), sólo se qué hacer con un problema pero no cómo determinar el objetivo de la misma. Nunca hicimos un plan de clase y ahora en la residencia te lo piden. "

El practicante recibe indicaciones de ambos profesores. En estas interacciones, se presentan situaciones que trascienden a la mera planificación de una clase, tiene que ver con lo que sucede en el aula, con la devolución que se le hace al P acerca de su desempeño. Pero, este último, no cuenta con herramientas teóricas para comprender por qué su práctica genera conflicto, ni las razones por las cuales reaccionan los profesores frente a ellas. Estas consideraciones se prueban con los siguientes comentarios:

- *"No coincidían las criticas, uno se centraba en el uso del pizarrón, otro en la necesidad de que diera mas ejercicios, uno que era necesario dar la definición formal, el otro que la construyeran los alumnos."*
- *"Preparamos las clases según nos indicó la profesora del curso, por medio de gráficas. Pero, no le gustó, nos pidió que lo volviésemos a dar utilizando límite, cambiamos, damos la idea de límite, y nos vuelve a rechazar por que la profesora se contradice, sobre la marcha iba cambiando sus ideas, fue un desastre."*
- *"Le discutía a la profesora de secundaria porque me hacia dar los casos de factoreo y yo le planteaba que era mejor darlo como función, para que los chicos comprendieran más el tema y que con propiedad distributiva y teorema Gauss, era suficiente."*

La existencia de diferentes visiones acerca de las funciones que cumple la enseñanza de la matemática en el nivel medio no puede ser comprendida por el practicante dado que los profesores no le fundamentan la naturaleza del problema. Es necesario que el docente revise sus propios saberes y reflexione acerca de los efectos que tiene su práctica sobre los alumnos.

Reflexiones finales

Las características del escenario han evidenciado que los factores que condicionan las primeras prácticas docentes se deben a la forma en que aún se concibe la residencia, producto de la práctica del profesor, quien no se asume como un profesional actualizado en función de los aportes de la matemática educativa.

Los efectos de las prácticas que surgen en él, han mostrado que practicantes y docentes no identifican al DME. Si conocieran que el profesor es responsable del discurso que construye, entonces, podrían transformarse en profesionales flexibles, adaptándose a las necesidades del practicante.

Por lo anterior, concluimos que es necesario resignificar este espacio. Para lo cual, es fundamental que el profesorado comience a mirar tanto a las sociedades que producen conocimientos como a sus estudiantes para identificar las ideas que en él se construyen y la forma en que se lo hace. De esta forma, sobre la base de una didáctica nueva se podrá rediseñar el discurso matemático escolar vigente.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 6 (1), 27-40.

Covián, O. (2006). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada, CICATA, IPN, México.

Diseño Curricular. (2005, junio 6). *Diseño Curricular para la formación en matemática.* (1174). En Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina.

Edelstein, G. (2003). Prácticas y residencias: memorias, experiencias, horizontes... *Revista Iberoamericana de Educación. Nº 33*, pp. 71-89.

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas.* Tesis de Maestría no publicada, CICATA, IPN, México.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 8(3), 339-362.

Lezama, J. (2006, octubre). *Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemologica.* En Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina.

Lezama, J. (2007, octubre). *Una mirada a la investigación en el campo académico de la Matemática educativa en América Latina.* V Congreso Virtual de Enseñanza de las Matemáticas.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 8*, (2), 195-218.

Mingüer Allec, L. M. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Doctorado no publicada, CICATA, IPN, México.

IDENTIFICANDO A GEOMETRIA NAS CONSTRUÇÕES INDÍGENAS

Lucélida de Fátima Maia da Costa
Universidade do Estado do Amazonas Brasil
celiamaia5@hotmail.com
Campo de investigación: Etnomatemática Nivel: Médio

Resumo. *Atualmente, a escola vive sempre procurando acompanhar as constantes transformações do mundo "globalizado", e isso se transforma numa luta, às vezes desigual, pela conquista do universo dos estudantes tão bombardeado de novidades audiovisuais e eletrônicas. Neste trabalho, mostra-se como a partir do estudo do meio, foi possível despertar o interesse de estudantes brasileiros do ensino médio pela Geometria presente na construção da maloca de indígenas Uitoto da Amazônia colombiana. Mostra também, que além dos meios tecnológicos disponíveis, o professor de matemática pode utilizar os recursos existentes na comunidade ou na própria escola como objeto de ensino atrativo, pois tudo depende da forma como este objeto irá ser usado.*

Palavras chave: Geometria, Ensino, ContextualiPzação.

Introdução

As relações que se estabelecem no decorrer de uma aula de matemática, seja no nível fundamental ou médio, depende entre outros fatores, da capacidade do professor para motivar os alunos e despertar neles a curiosidade pelo assunto que vai ser trabalhado. Nesse sentido, o espaço escolar por si só já se torna um atrativo para o ensino de Geometria, uma vez que, esta se faz presente e muito evidente nas construções de modo geral.

No entanto, a maioria das escolas públicas do município de Tabatinga reflete o retrato do ensino de Geometria no Brasil, principalmente no nível fundamental, é possível observar a Geometria como um capítulo isolado e muitas vezes, deixado em segundo plano, ocasionando assim, grandes lacunas na formação matemática dos alunos que chegam ao ensino médio.

Diante disso, e pretendendo dá sentido e significado ao ensino de Geometria, que estava sendo desenvolvido com os alunos do ensino médio da escola Estadual Marechal Rondon, pensou-se em uma atividade que ao mesmo tempo envolvesse a aplicação dos conhecimentos geométricos e o repensar da realidade por eles vivida.

Esse trabalho mostrou que quando estimulados, os estudantes são capazes de desenvolver estratégias interessantes para solucionar os problemas propostos, mostrou também, uma possibilidade metodológica de ensinar Geometria a partir do que se tem ao alcance, ao mesmo tempo em que, levou os estudantes envolvidos a reconhecer e valorizar o conhecimento empírico de povos culturalmente distintos.

Os sujeitos e o contexto

No extremo Oeste do Estado do Amazonas, na fronteira com a Colômbia e o Peru, está localizada a cidade de Tabatinga. Esta possui cinco escolas públicas mantidas pelo governo do Estado nas quais estudam alunos de 1ª série do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio. Nessas escolas convivem alunos de diversas origens, tendo em vista, ser a cidade uma área de fronteira e vizinha de comunidades indígenas.

Este trabalho foi desenvolvido com 116 alunos adolescentes da faixa etária de 15 a 18 anos, estudantes do ensino médio, os quais compunham duas turmas de 2º ano e uma turma de 3º ano, todos do turno matutino.

Após várias tentativas de tornar as aulas de matemática, mais atraentes para esses alunos, percebeu-se que era necessário além do livro didático e das metodologias convencionais baseadas em exemplificações cotidianas, fazer com que eles descobrissem a matemática presente nos mais variados contextos e nas mais distintas formas, como por exemplo, nas construções sejam elas rudimentares ou altamente sofisticadas.

Sendo assim, pensou-se em conciliar os conteúdos das unidades temáticas propostas que estavam sendo trabalhadas (geometria plana e espacial) com uma atividade onde os estudantes pudessem manusear objetos, observar estruturas, detectar falhas, fazer conjecturas, exercitar sua capacidade de descoberta para assim, fazer conexões com a estrutura conceitual e com a sua própria realidade, mostrada sem abstrações e sem as simplificações da Geometria presente nos livros didáticos, pois:

A realidade, figurativamente falando, é experimentada através de um filtro conceitual ou categorial, constituindo o mundo de significado do indivíduo. O homem vive mais num mundo de conceitos do que de objetos, eventos e situações. O conteúdo cognitivo da palavra escrita ou falada, numa mensagem, é uma versão altamente simplificada, abstrata e generalizada da realidade à qual se refere no mundo físico e da experiência consciente que essa realidade evoca no indivíduo (Moreira, 2001 p. 35).

Então com esse intuito, organizou-se uma atividade prática visando à interação dos alunos com seus pares e com pessoas de outra cultura num meio diferente, mas próximo da realidade deles e que muitas vezes é invisibilizado apenas pela insensibilidade humana, pois,

O meio é toda realidade física, biológica, humana que rodeia os alunos, estando ligados a ele de uma maneira direta, através da experiência e com a qual estavam em intercâmbio permanente. Não se pode, portanto, precisar os limites do meio, porque, à medida que a criança cresce seus relacionamentos com a realidade que a rodeia se tornam imperiosos. O meio é cada vez mais amplo, se estende: meu quintal, minha rua, meu bairro, meu lugarejo, os arredores do meu lugarejo. (Nidelcoff, 1979, p. 10)

O fato dos estudantes viverem nua região tri-fronteiriça (Brasil – Colômbia - Peru) foi determinante para a definição do local escolhido: uma comunidade de indígenas Uitoto, localizada no quilômetro sete da estrada Letícia – Tarapacá – Colômbia.

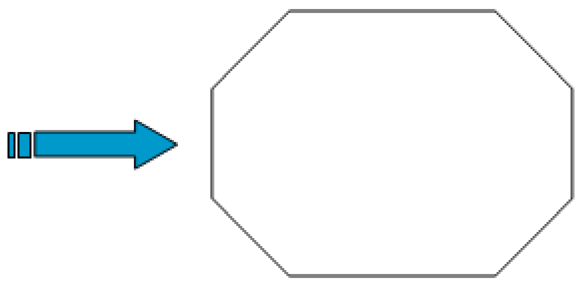
Os estudantes foram orientados sobre: a observação e as medições que iriam fazer, os instrumentos que deveriam levar, as pessoas a serem entrevistadas e como deveriam proceder ao registro das mesmas.

A maloca como objeto de estudo

Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligado às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si. (PCNEM, 1998, p. 123)

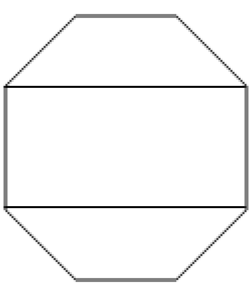
A maloca de forma octogonal foi a primeira forma geométrica analisada pelos alunos. Foi possível fazer medições para o cálculo da área e do perímetro, estabelecer relações métricas e até visualizar, através da estrutura que sustentava a cobertura de palha, o teorema das três retas perpendiculares.

Foto 01: maloca – Uitoto

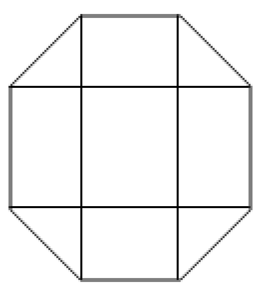


Esboço do piso da maloca

De posse das medidas os alunos, divididos em grupos desenvolveram estratégias diferenciadas para desenvolver os cálculos solicitados, como por exemplo, houve grupos que para o cálculo da área do piso da maloca procederam da seguinte forma:

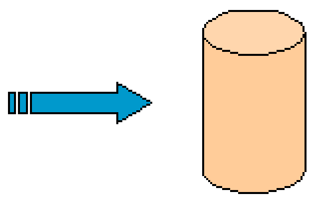


Dividiram a área em retângulo e trapézios.



Dividiram a área em triângulos retângulos e retângulos.

A partir do contato com os objetos encontrados na maloca, como a forma circular utilizada para fazer beiju (espécie de pão feito de mandioca.), foi possível trabalhar assuntos como: área do setor circular, área do círculo e seus elementos como raio, diâmetro e corda. Além dessa forma, encontraram também, um forno, um pilão de coca e vários bancos de forma cilíndrica feitos de troncos de árvores, a partir dos quais, os estudantes do 3º ano calcularam o volume de cada um e fizeram estimativas sobre a quantidade de árvores derrubadas para construir os 23 bancos que havia na maloca.



$V = B \cdot h$

$A_l = 2p \cdot h$

$A_t = A_l + 2B$
Onde:
B = área da base;
2p= perímetro e
h= altura

Foto 03: bancos de forma cilíndrica.

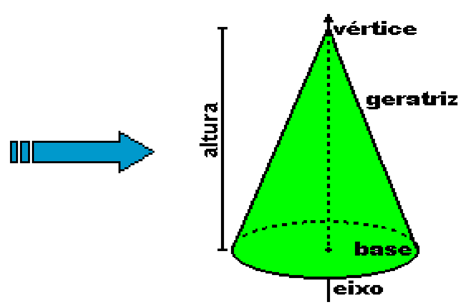


Foto 04: Pilão de forma cônica

Segundo Freire (1998) deve-se ter sempre em conta, os saberes do aluno e estimulá-lo no caminho da autonomia para a construção e desenvolvimento de novos conhecimentos, por isso, a descoberta do pilão de coca de forma cônica, isto é, de um tronco de cone, foi a parte mais surpreendente desse trabalho, pois ainda não se tinha abordado, em sala de aula, as características e elementos deste sólido e, os grupos, a partir da observação das fotografias do pilão, fizeram comparações, deduções e chegaram a calcular o volume e a área deste.

Além de o trabalho ter sido realizado em grupo, o que já é uma vitória ao se falar de ensino de matemática, os alunos puderam conversar e conhecer pessoas que apesar de não terem freqüentado uma escola, conseguiram construir uma maloca com uma forma geométrica nada comum as construções as quais estavam habituados a conviver, fato este, que chamou a atenção também pela ausência de instrumentos utilizados na sua construção despertando assim, a curiosidade daqueles adolescentes tão acostumados a novidades tecnológicas. Esse encontro de realidades distintas possibilitou ver que:

A passagem da etnomatemática para a matemática pode ser vista como a passagem da linguagem oral para a escrita. A linguagem escrita (ler e escrever) repousa sobre o conhecimento da expressão oral que a criança já possui, e a introdução da linguagem escrita não deve suprimir a oral. Entender e respeitar a prática da etnomatemática abre um potencial para o senso de questionamento, reconhecimentos de parâmetros específicos e sentimento do equilíbrio global da natureza. As práticas etnomatemáticas ainda estão desvalorizadas no sistema escolar, em todos os níveis de escolaridade e até mesmo na vida profissional, e algumas vezes levam à humilhação e são, na maioria dos casos, consideradas irrelevantes para o conhecimento matemático (D'Ambrósio, 1998, p. 35).

As atividades matemáticas realizadas após a visita à comunidade como, por exemplo, a construção de uma maquete da maloca levou os estudantes a valorizar o conhecimento matemático empírico dos Uitoto, assim como a percepção de que muito do conhecimento matemático existente, justifica-se por sua utilidade na resolução de problemas reais.

Considerações finais

A educação matemática via escola tem se mostrado, na maioria das vezes, como um instrumento perverso de caráter classificatório, e ao tratar todos os estudantes de forma homogênea desperdiça uma riqueza de conhecimentos prévios e exclui os culturalmente diferentes levando, geralmente, uma classe inteira à monotonia e ao desinteresse por uma disciplina rica em conhecimento étnico.

Nesse contexto, levar o aluno a perceber a variação de conhecimento matemático produzido e utilizado por comunidades, associações ou grupos de profissionais possibilita o despertar do interesse pelo estudo dessa disciplina e por sua utilização no dia a dia.

Posto que, o ensino da Geometria leva o aluno a lidar com as formas, sua representação, suas relações e suas medidas, é muito importante que o professor tente viabilizar o início desse estudo com a manipulação do concreto para, a partir desse, sistematizar os conhecimentos abstratos que vêm veiculados nos livros didáticos.

Nesse sentido, a riqueza de possibilidades é enorme e se apresenta até mesmo na própria construção do prédio escolar. Levar os alunos a percepção dessa riqueza é uma tarefa do professor que lhe renderá bons frutos se ele souber administra-la.

Certamente, todos e, em todas as realidades, existem limitações e impedimentos, mas podem ser contornados, muitas vezes, apenas com criatividade e bom senso, em outras, requer o repensar das próprias práticas, ação esta que possibilita também a sistematização de novos conhecimentos.

Finalmente, reconhece-se que a experiência aqui apresentada possibilitou o emprego de uma metodologia diferenciada para as aulas de Geometria, ao mesmo tempo que, propiciou a descoberta de habilidades matemáticas especificas dos alunos envolvidos, assim como, o reconhecimento de práticas etnomatemáticas que acontecem ao redor da escola e que muitas vezes se tornam invisíveis aos olhos da comunidade escolar. Sendo assim, as aulas de matemática podem se tornar mais atraentes ao adquirir um caráter inter ou multicultural.

Referências bibliográficas

Brasil (1998), Ministério da Cultura e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNEM. Matemática. Brasília: MEC.

D'Ambrósio, U. (1996). E*ducação Matemática: Da teoria à prática*. São Paulo: Papirus.

D'Ambrósio, U. (1998). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar ou conhecer*. São Paulo: Ática.

Freire, P. (1998). *Pedagogia da Autonomia: sabres necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Ferreira, M.(org.) (2000). *Idéias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global.

Nidelcoff, M. (1979). *A escola e a compreensão da realidade*. São Paulo: Brasiliense

EL CONTEXTO, LA PREDICCIÓN Y EL USO DE HERRAMIENTAS; ELEMENTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS DE LA MATEMATIZACIÓN DE LA ECONOMÍA

Saúl Ezequiel Ramos Cancino
Facultad de Ciencias Sociales. Cimate, Universidad Autónoma de Chiapas — México
saulramcan@hotmail.com, saulram@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Superior

Resumen. *La ciencia económica, al igual que las ciencias físicas analizan y predicen diferentes tipos de fenómenos. Para entender ¿cómo el Cálculo originado en la práctica social de predecir se incorpora a otras prácticas sociales asociadas a la Economía?, se realizó un análisis socioepistemológico para analizar el proceso de matematización de la ciencia económica. En éste análisis encontramos que el contexto, la predicción y el uso de herramientas han jugado un papel importante. Tomando como base el análisis anterior, se diseñaron y aplicaron situaciones didácticas que consideraran estos elementos socioepistemológicos. Tomando como referencia los resultados que se obtuvieron de las situaciones, y revisando en análisis epistemológico, concluimos que el contexto, la predicción y el uso de herramientas son ejes centrales para la matematización de ciencia económica.*

Palabras Clave: Socioepistemología, contexto, predicción, herramientas, matematización.

Introducción

Las necesidades del ser humano lo han llevado a la búsqueda de los medios y formas para salir adelante, lograr su desarrollo y seguir evolucionando. Esto genera diversas prácticas y actividades sociales, con el propósito de resolver diferentes problemas que enfrenta la sociedad, es decir, el ser humano en la búsqueda de resolver diferentes problemáticas, ha desarrollado conocimiento con intencionalidades específicas que dependen estrechamente del problema y el contexto social en que se presenta. En la construcción de estos conocimientos intencionados convergen las características sociales e individuales de los participantes, el entorno físico, las prácticas que realizan, la intencionalidad y los supuestos compartidos. Eso da como resultado ciertas actividades sociales, tal como, las prácticas de matematización de los diferentes fenómenos, ya sean físicos, químicos, sociales, etc. A lo largo de la historia se han encontrado diversas nociones y procedimientos matemáticos que surgen del proceso de comprender y transformar diversos fenómenos naturales o sociales. La predicción y la modelación son prácticas sociales (Cantoral, 2001; Arrieta, 2003). Estas prácticas tienen una intencionalidad y se desarrollan en interacción con fenómenos, conjeturando y realizando las predicciones acerca de éstos fenómenos a través de la utilización de modelos. Estos modelos tienen la función de herramienta ("Un objeto en si mismo no es herramienta, es herramienta hasta que el hombre lo utiliza con una intención" (Arrieta, 2003. pag 34)) para comprender, predecir y dar explicaciones teóricas de un fenómeno.

La modelación y la predicción, han y siguen jugando un papel muy importante en la actividad humana y sobretodo en la construcción del conocimiento matemático, el hacer matemáticas tiene una intencionalidad determinada. Incluso esta intencionalidad no es individual, sino social y que tiene como fin encontrar en ellas una herramienta para la humanidad. Por otra parte el estudio de la matematización de los fenómenos dentro de la Matemática Educativa ha permitido identificar diferentes categorías del conocimiento matemático basada en el lenguaje de las herramientas. Se identifican así todas las relaciones entre el conocimiento matemático, donde la naturaleza de esas relaciones lleva directamente a las formas de construir los procesos y objetos, más que el estudio de procesos y objetos en sí. La noción de predicción trata de adelantarse a los acontecimientos, de anticipar lo que habrá de suceder. Esta noción se construye a través de las vivencias cotidianas de los individuos dentro de un contexto social. Para ciertas situaciones se pretende conocer el valor que tomará una variable con respecto a la variación de otra. Por lo tanto, lo que se pretende es determinar el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase de un primer estado a un estado dos. Debido a que es imposible adelantar el tiempo y algunas otras variables, el ser humano ha tenido la necesidad de predecir. Por lo que se pretende encontrar un valor generado por los cambios y los cambios de los cambios, y así sucesivamente hasta encontrar el valor deseado teniendo como referencia las condiciones iniciales (presente) hasta un valor final (futuro). La búsqueda de la predicción de la evolución de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza condujo a desentrañar mecanismos que permitieron el pasaje de la predicción, noción propia de las ciencias físicas, a lo analítico, noción propia de la matemática. El Cálculo tiene como origen las ciencias que estudian la naturaleza, en especial las ciencias físicas; un determinado contexto, una forma peculiar de la naturaleza y nuevos paradigmas del saber posibilitaron el surgimiento del Cálculo. El paradigma newtoniano, "consistió básicamente en considerar a los problemas de la dinámica en particular, y de la variación de las magnitudes variables en general, de la siguiente manera: ciertos valores de los parámetros de un sistema en un momento y lugar dados, determinan la evolución ulterior del sistema. De ahí que el objetivo de la mecánica desde entonces sea predecir dicha evolución sin plantearse preguntas sobre la "causas reales" o "causas inherentes" del movimiento" (Alanís, 1996. p. 21). El Cálculo ha jugado un papel importante para el ser humano como herramienta de predicción de los fenómenos físicos. Por lo anterior, ha sido de gran importancia su estudio y difusión.

En las instituciones escolares de nivel superior que ofrecen licenciaturas afines a las ciencias naturales incluyen al Cálculo dentro de sus planes y programas para su estudio. A lo largo del tiempo, han surgido otras instituciones que no estudian las ciencias naturales y que han incluido a las matemáticas en su currículo escolar, en especial el Cálculo. Las ciencias sociales es una de ellas, en particular la Economía. Desde los principios del análisis económico, los economistas han buscado métodos para explicar y exponer sus ideas. Una característica de la economía moderna es la difusión de los instrumentos matemáticos y empíricos en el núcleo de la investigación de prácticamente todos los economistas. La utilización de las matemáticas en la ciencia económica a partir del siglo XIX generó una revolución metodológica, que ha dotado al discurso económico de las características de rigor y generalidad, y a su vez ha proporcionado a la economía la solidez teórica para la formulación y desarrollo de diferentes teorías económicas. Como se mencionó anteriormente el Cálculo tiene como origen las ciencias que estudian la naturaleza, en especial las ciencias físicas, cuyas necesidades eran predecir el movimiento, la ciencia económica tiene como principales objetivos la interpretación y la predicción de fenómenos económicos, al igual que las ciencias físicas (Ramos, 2005a).

Entender, ¿cómo el Cálculo originado en la práctica social de predecir se incorpora a otras prácticas sociales asociadas a la economía? para nuestro estudio es de gran importancia. Tener conocimiento de las causas que originaron la necesidad de utilizar el Cálculo como metodología para comprender, predecir y dar explicaciones teóricas de un fenómeno económico, dentro de la ciencia económica consideramos que es importante para identificar las prácticas sociales que permitieron dicha utilización, y con ello justificar la pertinencia del Cálculo dentro del currículo escolar de la Licenciatura en Economía.

Para lograr lo anterior metodológicamente nos ha llevado a realizar un estudio histórico-epistemológico del proceso de matematización de la ciencia económica a través de la aproximación socioepistemológica. En este estudio se intenta visualizar el papel que juega el contexto, la predicción y el uso de herramientas como elementos socioepistemológicos que intervienen directamente en la matematización de la ciencia económica para resolver ciertas problemáticas que a los economistas se les han presentado. A partir del análisis socioepistemológico y la problemática de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo y en especial estudiantes en Economía se diseñaron e implementaron situaciones que permitan al estudiante reconstruir conceptos microeconómicos a través ciertas prácticas sociales y determinados elementos socioepistemológicos que permitieron matematizar la ciencia económica. En estas situaciones se pretende observar el papel que juega el contexto, la predicción y el uso de herramientas para resolver diferentes problemáticas en el ámbito económico. Se realizó un análisis *a priori* con base en un conjunto de hipótesis descriptivas y predictoras de lo que los estudiantes realizarían. Finalmente, se recolectaron los datos obtenidos a lo largo de la experimentación y se realizó un análisis *a posteriori*.

Análisis socioepistemológico de la matematización de la Economía

El Cálculo se ha usado para la generación de diversas teorías económicas. Para los economistas ha tenido, y tiene un papel muy importante en el proceso de matematización de la ciencia económica a partir del periodo marginalista (1838-1947). Se considera que es en este periodo cuando da inicio la utilización del Cálculo de manera formal como metodología para formular, interpretar y explicar teorías económicas (Arrow e Intriligator, 1989). Con el fin de entender el papel que juega el contexto social, la predicción y el uso de herramientas en el proceso de matematización de la ciencia económica y en especial en la utilización del Cálculo, se optó por realizar el análisis histórico epistemológico en el periodo clásico de la evolución de la ciencia económica, es decir, el periodo que antecede al marginalista. En coherencia con nuestra pregunta y objetivo de investigación revisamos diferentes teorías elaboradas en el periodo clásico de la economía y se decidió analizar la Teoría de la Renta, dentro de los principales hallazgos que se encontraron con respecto a los elementos socioepistemológicos que estábamos buscando fueron los siguientes:

- **El contexto.**

Este periodo se caracteriza por desarrollar los principios, doctrinas y las siguientes teorías: a) Fundamentos teóricos del valor y suministros para el crecimiento económico; b) Filosofía basada en las doctrinas de la utilidad o egoísmo; c) Principio de la población; d) Teoría de la Renta, y e) Doctrina del fondo de salarios. En esta época de la economía, los economistas buscaban como lograr el crecimiento económico, el funcionamiento dinámico de la teoría clásica de la población, los rendimientos decrecientes en la agricultura, la teoría de salarios de subsistencia, la teoría clásica de acumulación de capital (la doctrina del fondo de salarios) y la teoría residual de los beneficios era predecir un equilibrio de estado estacionario, es decir, cuando se detendría la acumulación adicional de capital. Con esta visión clásica surge la Teoría de la Renta bajo las siguientes características sociales:

Las Leyes de Granos que fueron aprobadas por el Parlamento de Inglaterra en 1815, ya que por un embargo que impuso Napoleón a los puertos británicos impidió eficazmente la entrada de los granos extranjeros. Con esta problemática los agricultores británicos se vieron obligados a aumentar la producción de cereal doméstico, a fin de alimentar la población. Debido a que los costos de producción eran muy altos en Inglaterra que en el extranjero, el precio del cereal aumento y las rentas de las tierras también aumentaron, hasta el punto de que los terratenientes desarrollaron unos intereses creados para continuar restringiendo las importaciones de cereales. Por lo tanto, las Leyes de Granos se crearon con el fin de la protección agrícola y sus efectos sobre la distribución de la renta y el crecimiento económico, estímulos necesarios para el desarrollo de la Teoría clásica de la Renta por David Ricardo (1771-1823). El efecto de las Leyes de los Granos era el de reforzar una agricultura más intensiva y extensiva en Inglaterra. La renta es definida por David Ricardo como lo que se paga por el uso de las energías originarias e indestructible del suelo, no existen en el margen y aparece en las mejores tierras sólo cuando se ponen en cultivo las tierras peores, es decir, la diferencia entre el producto obtenido por el empleo de dos cantidades iguales de capital y trabajo.

- **La predicción**

En esta época se encontró evidencias del germen del Cálculo en la Ciencia Económica para predecir fenómenos económicos. Dentro de la Teoría de la Renta existen conceptos como, Producción Marginal del Capital y Trabajo, entendiéndose como la variación del producto total resultante de la adición de una nueva unidad del factor capital-trabajo a la producción, y la Renta como diferencia entre el producto de la mejor tierra y de la peor tierra de cultivo, para cantidades iguales de Capital y Trabajo en ambas. En ambos conceptos se están presentando evidencias de la noción de variación. En la tabla que a continuación se presenta, se muestra de manera simplificada unos de los análisis que se realizaron en esta investigación, en ella se observa como se calcula la producción total de una tierra que se cultiva de manera intensiva utilizando 5 unidades de Capital y Trabajo (Ramos, 2005a. pag 70):

Capital y Trabajo	Producción Total (Pt)	Producción Marginal (Mp)	Cálculo de la Producción Marginal
0	0		
1	$Pt_1 = 100$	$Mp_1 = 100$	$Mp_1 = 100 - 0 = 100$
2	$Pt_2 = 190$	$Mp_2 = 90$	$Mp_2 = 190 - 100 = 90$
3	$Pt_3 = 270$	$Mp_3 = 80$	$Mp_3 = 270 - 190 = 80$
4	$Pt_4 = 340$	$Mp_4 = 70$	$Mp_4 = 340 - 270 = 70$
5	$Pt_5 = 400$	$Mp_5 = 60$	$Mp_5 = 400 - 340 = 60$
Por lo tanto, la Producción Total es igual a: $Pt = 100+90+80+70+60 = 400$			

Con lo anterior, podemos observar que el Producto Marginal (Mp) del Capital y el Trabajo, es la variación del Producto Total (Pt) resultante de la adición de una nueva unidad del factor capital-trabajo a la producción, es decir:

$Mp_1 = Pt_1$; $Mp_2 = Pt_2 - Pt_1$; $Mp_3 = Pt_3 - Pt_2$; $Mp_4 = Pt_4 - Pt_3$ y $Mp_5 = Pt_5 - Pt_4$.

Por lo tanto la producción total para esta tierra utilizando cinco unidades de capital y trabajo es:

$Pt_5 = Pt_1 + Mp_2 + Mp_3 + Mp_4 + Mp_5$ y para calcular la Pt utilizando n unidades de Capital y Trabajo es: $Pt_n = Pt_1 + Mp_2 + \ldots + Mp_{n-1} + Mp_n$, por lo que: $Pt_n = Pt_1 + \sum Mp_i$

Podemos observar con el análisis anterior, como ya estaban presentes conceptos elementales con relación a la estructura del Cálculo; *juntar y separar, sumar y restar* (Cordero, 2003). En este ejemplo también podemos evidenciar que existe la predicción, es decir, una vez conocidas las condiciones iniciales de un fenómeno económico y a través del análisis de la variación de las variables que están involucradas podemos encontrar el estado final del fenómeno.Como se mencionó anteriormente en el periodo clásico, el principal interés estaba, en el crecimiento económico, o la transición de un estado progresivo a un estado estacionario, ya que en éste momento se detendría una nueva inversión (no hay acumulación adicional de capital), por lo tanto, era necesario predecir cuando se presentaría el estado estacionario, en este sentido también la predicción juega un papel muy importante en la visión y construcción de conocimiento con intencionalidades específicas en los economistas de esa época.

- **Herramientas**

Se encontraron evidencias que nos permitieron observar que las principales herramientas que se utilizaron en esta época para formular, interpretar y explicar teorías económicas están basadas en la noción de variación, en sus elementos básicos; esta presente el proceso de comparación, las nociones de acumulación y valor acumulado (predicción).

Situaciones de cambio para estudiantes de economía

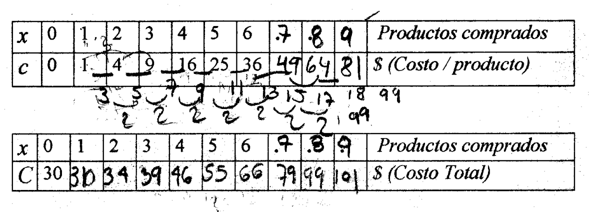
Las situaciones de cambio se pusieron en escena con estudiantes de 4º semestre de la Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de Chiapas. Dentro del análisis *a posteriori* podemos comentar algunas de las conclusiones obtenidas con respecto a los elementos socioepistemológicos que estábamos buscando:

- **El contexto**

Se pudo observar como el contexto en que se diseñaron las situaciones tuvo un papel muy importante en la solución y argumentos de los estudiantes para la construcción de significados. El contexto de las situaciones propició que las discusiones que se presentaron para la solución de las diferentes problemáticas giraran en torno a términos y conceptos económicos, no matemáticos.

- **La predicción**

Dentro de la predicción encontramos que los estudiantes realizaron sus predicciones de dos formas, una de manera explícita, es decir, tomaron en cuenta de manera explícita el papel que juega la condición inicial y sumaron las variaciones para encontrar el estado final de la variable dependiente, y la otra de manera implícita, donde ellos buscan encontrar el valor del estado final de la variable observando la relación que existe entre las variables que intervienen en la problemática. Para poder predecir la noción de variación jugó un papel muy importante, ya que a través de ella pudieron observar como va cambiando la cantidad inicial, analizaron el proceso necesario para transformarla a una cantidad final, ya sea local o global, como podemos observar el la figura siguiente:



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*Productos comprados*
c	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	*$ (Costo / producto)*

3 5 7 9 11 13 15 17 18 99

2 2 2 2 2 2 2 99

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*Productos comprados*
C	30	31	34	39	46	55	66	79	99	101	*$ (Costo Total)*

- **Las herramientas**

Los estudiantes, en la necesidad de predecir crearon sus propias herramientas predictoras. Para la generación de estas herramientas pusieron en juego la noción de variación, es decir, revisaron los comportamientos de las variables que estaban presentes, observaron qué datos permanecían constantes, cuales variaban, como variaban y cuanto variaban, para que a través de esta información ellos pudieran generar herramientas que les permitiera predecir. Las herramientas de predicción que construyeron en términos generales fueron relaciones funcionales entre variables. Con estas herramientas predictoras, ellos pudieron determinar el comportamiento del problema económico. Otro hecho que consideramos importante es que pudimos distinguir dos tipos de relaciones funcionales entre variables, una relación funcional explícita y la otra implícita. La relación funcional implícita consiste en que los estudiantes desarrollan relaciones funcionales numéricas, es decir, únicamente manipulan los datos (números) conocidos y los datos que ellos mismos van construyendo. La relación funcional entre variables explícita es representada a través de números y símbolos o únicamente por símbolos que representan la relación de las variables que están en juego.

A manera de conclusión

El contexto en el que se desarrolla una problemática, es un factor importante en la construcción del conocimiento matemático dentro de la ciencia económica, la predicción ha sido eje central en la actividad humana para generar conocimiento matemático en la ciencia económica, el uso de herramientas para predecir y explicar diferentes teorías económicas juega un papel importante para el proceso de matematización de la ciencia económica, a través de la modelación, se fundamentan diferentes teorías económicas que son puestas a disposición de la sociedad. Por lo tanto consideramos que el contexto, la práctica social de predecir y el uso de herramientas son ejes centrales para que la economía utilice el conocimiento matemático como metodológica para formular, interpretar y explicar diferentes teorías económicas, es decir, estos elementos socioepistemológicos han desempeñado un papel importante en el proceso de matematización de la ciencia económica.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo.* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Arroy, K. & Intriligator, M. (1989), *Handbook of Mathematical Economics.* Vols. 1-3,

North Holland. Amsterdam.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México : Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados. En J. Delgado (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 16, pp. 73-78). Lorena Impresores. Santiago de Chile.

Ramos, S. (2005a). *Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía*. Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Ramos, S. (2005b). Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía. En J. Lezama, M. Sanchez y J. Molina (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp. 631-637). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Ramos S. y Muñoz, G. (2006). Práctica social de predecir y el uso de herramientas en estudiantes de economía. En G. Martínez (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 19, pp. 805-811). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Ramos, S. y Muñoz, G. (2007). Clasificación de la matematización de la economía desde un punto de vista socioepistemológico. En C. Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 20, pp. 467-472). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

EULER: SU CONCEPTO DE SERIE NUMÉRICA INFINITA Y SU INFLUENCIA EN LA MATEMÁTICA DEL SIGLO XVIII

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
CICATA-IPN México
alerosas@ipn.mx
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Medio

Resumen. *En este artículo se discute la forma en que Euler utiliza las series numéricas y de funciones para resolver problemas de aplicación. Muchos autores afirman que los trabajos de Euler muestran un manejo poco formal de las series y un tipo de razonamiento pragmático en el que el énfasis se pone en el problema a resolver y no en la formalidad. Algunos autores afirman lo contrario. En el cuerpo de este trabajo se muestran algunas afirmaciones de Euler al respecto y analizamos la forma en que éstas influyen sobre los matemáticos de la época.*

Palabras Clave: serie infinita, expansión, análisis, convergencia

Introducción

Después de la invención del cálculo, la solución de problemas que incluyen la aplicación de series numéricas y de funciones aumentó rápidamente. En esas primeras aplicaciones la convergencia de las series, ya sean numéricas o de funciones, está garantizada.

Sin embargo, lentamente empezaron a aparecer algunas paradojas, en ocasiones algunas series de funciones al ser evaluadas proporcionaban un valor numérico esperado; pero en algunas ocasiones al sustituir un valor diferente se obtenían expresiones incorrectas o imposibles.

Leibniz trató de explicar algunas paradojas que empezaron a surgir con el uso de series, por ejemplo, explicó que $1-1+1-1+1-1+\cdots$ tenía como límite ½ utilizando argumentos probabilísticos.

También utilizó la expresión:

$$1+x+x^2+x^3+x^4\cdots=\frac{1}{1-x}$$

para dar otro argumento a favor del valor de

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

y de la serie

$$1+2+4+8+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1$$

(Gardiner, 2002, p. 82)

Al mismo tiempo han ido apareciendo algunas series numéricas infinitas a las que se les ha podido asignar un valor al que se le llama suma de la serie. Sin embargo, las series de las que se conoce su suma son tan pocas y tan difíciles de calcular que Jacob Bernoulli alrededor de 1700 falla al intentar calcular el valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

y escribe:

> *"If somebody should succeed in finding what till now withstood our efforts and communicate it to us, we shall be much obliged to him*."
>
> (Gardiner, 2002, p. 248)

Es decir "*Si alguien tuviera éxito en encontrar lo que hasta ahora se ha resistido a nuestros esfuerzos y nos lo comunicara, estaremos en gran deuda con él*"

A pesar de las discusiones que se fueron generando, la aparición de Euler en el panorama científico de la época inicia una nueva era de desarrollo de las series infinitas.

Euler y las series infinitas

El primer trabajo de Euler es un artículo publicado sobre series que data de 1729 (presentado en 1730) *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales* *algebraice dari nequente* (Euler, 1738a) es decir “Sobre progresiones trascendentales, es decir, aquellas cuyos términos generales no pueden ser dados en forma algebraica”.

En este trabajo inicia analizando la serie $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4+etc$ y la progresión

$$\frac{1.2^n}{1+n}\ \frac{2.^{1-n}3^n}{2+n}\ \frac{3.^{1-n}4^n}{3+n}\ \frac{4.^{1-n}5^n}{4+n}\ etc.$$

y hace cálculos con integrales como en

$$\int x^e dx(1-x)^n = \frac{x^{e+1}}{e+1}-\frac{n.x^{e+2}}{1.(e+2)}+\frac{n.n-1..x^{e+1}}{1.2.(e+3)}-\frac{n.n-1.n-2.x^{e+4}}{1.2.3.(e+4)}etc.$$

En 1731 escribió su segundo artículo sobre series titulado *De summatione innumerabilium progresionum* (La suma de una progresión innumerable) en el que hace uso de

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}dx$$

para encontrar sumas como

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+etc.$$

y también usa

$$\int -y^{\alpha-2}dy\,l(1-y)=\frac{y^\alpha}{\alpha}+\frac{y^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}+\frac{y^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)}etc.$$

Euler utiliza *l* para indicar *ln* (logaritmo natural)

para calcular expresiones como

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}etc.$$

y define la constante γ (*Euler* utiliza la letra C y Mascheroni es el primero en usar γ en 1790) como el límite de

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-ln$$

también escribe igualdades como:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}=\frac{y+z}{1}+\frac{y^2+z^2}{4}+\frac{y^3+z^3}{9}+\frac{y^4+z4}{16}+etc.+ly\,lz$$

En 1734 escribió el artículo *De progressionibus harminicis observationes* (Sobre progresiones aritméticas) trabaja con expresiones como

$$\frac{c}{a},\frac{c}{a+b},\frac{c}{a+2b},\frac{c}{a+3b},etc.$$

y realiza sumas de diversos logaritmos, por ejemplo:

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}etc$$

$$l3=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{2}{12}etc$$

$$l4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}etc$$

y otras más.

Además calcula el valor de γ con 6 decimales γ =0.577218.

En 1735 escribe uno de los artículos más celebrados, *De summis serierum reciprocarum* (Sobre las sumas de series de recíprocos) en el que establece las sumas:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}etc=\frac{p^2}{6}$$

(En este artículo *Euler* utiliza la letra **p** en lugar de **π**, que más tarde él sería el primero en utilizar)

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+etc=\frac{p^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+etc=\frac{p^6}{945}$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+etc=\frac{p^8}{9450}$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+etc=\frac{p^{10}}{93555}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+etc=\frac{691p^{12}}{638512875}$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-etc=\frac{p^3}{32}$$

en la primera expresión aparece la serie que Jacob Bernoulli había fallado en encontrar. En este mismo artículo Euler presenta otras sumas más.

Además establece igualdades como:

$$1-\frac{s^2}{1.2.3}+\frac{s^4}{1.2.3.4.5}-\frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7}+etc=\left(1-\frac{s^2}{p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{14p^2}\right)etc.$$

y finalmente establece varias igualdades para p (es decir π):

$$p=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc\right)$$

$$p=2\left(\frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc}\right)$$

$$p=4\left(\frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+etc}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc}\right)$$

y otras 4 sumas más.

En 1746 Euler escribió De seriebus divergentibus (Sobre series divergentes) en el cual clasifica las series divergentes en cuatro clases (él las llama especies) de acuerdo a su forma:

I) $1+1+1+1+1+1+etc.$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+etc.$$

II) $1-1+1-1+1-1+etc.$

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+etc.$$

III) $1+2+3+4+5+6+etc.$

$$1+2+4+8+16+32+etc.$$

IV) $1-2+3-4+5-6+etc.$

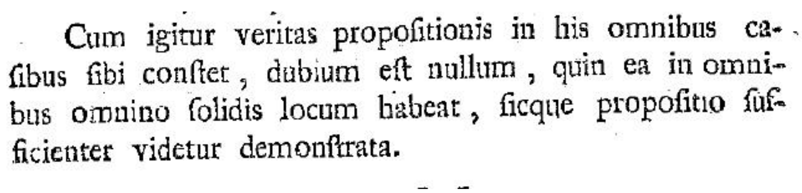
$$1-2+4-8+16-32+etc.$$

En este artículo Euler dice que las series convergentes están definidas, tienen términos que decrecen continuamente y se desvanecen. Pero sobre las series divergentes dice:

> *De summis huiusmodi serierum divergentium magnus est dissensus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmant, eas in una summa comprehendi posse.*

que podemos interpretar como “La suma de una serie divergente crea disenso entre los matemáticos, mientras unos la niegan, otros la afirman que la posee (suma final – es inclusión nuestra) ”

Es este el único trabajo en el que Euler discute la divergencia de series numéricas infinitas y por el cual Barbeau y Leah (1976) afirman que Euler mantenía la formalidad en el tratamiento de las series, sin embargo, una cita del mismo Euler permite ver que sus visión de demostración podía aceptar la verificación de casos específicos para determinar la veracidad de un caso general, como cita Lakatos (1978) y como podemos ver en la imagen siguiente


Cum igitur veritas propoſitionis in his omnibus caſibus ſibi conſtet, dubium eſt nullum, quin ea in omnibus omnino ſolidis locum habeat, ſicque propoſitio ſufficienter videtur demonſtrata.

(Euler, 1758, p. 124)

es decir

…he de admitir que aún no he sido capaz de idear una prueba estricta del teorema… Sin embargo puesto que su verdad ha sido establecida en tantos casos, no puede haber duda de que vale para cualquier sólido. Así la proposición parece estar satisfactoriamente demostrada… (Comentario acerca de la demostración de su famosa fórmula V- A+C=2)

(Lakatos, 1978, p. 23)

Esta forma de trabajar llegó a tener mucha influencia en su época no sólo por la capacidad matemática de Euler, sino porque algunos de los matemáticos contemporáneos más renombrados lo utilizan como punto de referencia, como dice la siguiente frase de Laplace:

Read Euler: he is our master in everything.

(Leed a Euler: él es nuestro maestro en todo.)

(The MacTutor History of Mathematics Archive)

Es este seguimiento a las palabras de Euler el que en parte provoca que todos se enfoquen en los resultados y no en el rigor de las demostraciones.

De esta manera durante este período se tiene una febril construcción de métodos para sumar series y para acelerar la convergencia de series.

Conclusiones

En esta breve discusión se pueden observar evidencias que muestran a un Euler hábil en el manejo algebraico de las series infinitas, pero cuya formalidad es muy cuestionada. Por otra parte la fama de Euler generó que el mundo científico de la época lo siguiera en su visión y su forma de trabajar, provocando un manejo poco formal generalizado.

El concepto de serie que parece tener Euler es el de una herramienta que puede utilizar para analizar curvas mecánicas y cuya aplicación es suficiente justificación de las manipulaciones que realiza, pese a no tener una teoría formal que respalde su trabajo. Así, para Euler, obtener un resultado congruente con sus suposiciones le hace innecesario considerar la validez matemática de los pasos y métodos que utiliza al trabajar con las series. Esta es una época caracterizada por el pragmatismo.

Referencias bibliográficas

Barbeau, E. y Leah, P. (1976). Euler's 1760 paper on divergent series. *Historia Mathematica 3*, 141-160.

Euler, L. (1738a). De progressionibus trasncendentibus, sev quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5,* pp. 36-57. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Euler, L. (1738b). Methodus Generalis Sumandi Progressiones. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6*, pp. 68-97. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Euler, L. (1744). Variae observationes circa series infinitas. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9*, pp. 160-188. (Versión digital obtenida de http://www.eulerarchive.com/ el 16 de junio de 2005)

Gardiner, A. (2002).*Understanding infinity: The mathematics of infinite processes* [Entendiendo el Infinito: Las matemáticas de los procesos infinitos]. New York: Dover Publications.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Rosas, A. (2007). Transposición Didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del Discurso Escolar actual en el nivel superior. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

The MacTutor History of Mathematics Archive. (sin fecha). Obtenido el 26 de abril de 2006 de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

LAS PRÁCTICAS SOCIALES QUE CONFORMAN LA CULTURA MATEMÁTICA DE LOS PROFESORES DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE OAXACA

Luz María Mingüer Allec
Instituto Tecnológico de Oaxaca México
luzma16@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En esta investigación se aborda el fenómeno de la cultura matemática de un grupo de profesores del nivel superior de educación, el marco teórico es la aproximación socioepistemológica, que nos permite visualizar a la cultura matemática como una sucesión de construcciones de conocimiento matemático que un individuo realiza a lo largo de su existencia, así mismo nos permite reconocer la importancia del entorno sociocultural en el que se produce dicho conocimiento.*

En esta investigación reconocemos la acción que ejercen las influencias socioculturales en la conformación de la cultura matemática de los individuos, al mismo tiempo identificamos que gran parte de esas influencias socioculturales son prácticas sociales relacionadas con la matemática o con la enseñanza o el aprendizaje de esta última.

En esta presentación nos proponemos primeramente, mostrar una clasificación de las prácticas sociales detectadas entre los profesores y en segundo lugar analizar la manera como estas prácticas sociales relacionadas con las matemáticas, inciden en la conformación de su cultura matemática.

Palabras clave: Aproximación socioepistemológica, cultura matemática, prácticas sociales

Introducción

A) Influencias socioculturales y prácticas sociales.

Las influencias socioculturales constituyen la versátil y heterogénea manifestación de la actividad humana, tal actividad, en el campo de la matemática educativa, está conformada de prácticas sociales.

Los aportes al desarrollo teórico de la aproximación socioepistemológica, realizados por el grupo de investigadores que conforman la red de cimates, establecen que *la actividad humana y la práctica social* son entendidas como todas las acciones, intencionadas o no, que grupos humanos ejercen sobre la construcción de conocimiento matemático en ámbitos escolares o fuera de ellos. Lo anterior nos permite establecer una correspondencia estrecha entre lo que entendemos como *influencias socioculturales* y la *práctica social*

Nosotros consideramos que las influencias socioculturales pueden ser concebidas como el conjunto de prácticas sociales que un grupo humano con una cultura específica practica en su comunidad; este conjunto de prácticas sociales envuelve y permea a dicho grupo humano, de tal manera que posibilita su propia reproducción, al mismo tiempo este grupo social crea y recrea nuevas prácticas sociales que surgen de las necesidades y motivaciones internas y externas a la comunidad.

Entendemos pues, por *prácticas sociales,* el conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, afectando y conformando la psique de todo individuo. *La práctica social* no es estática, es activa se está construyendo día a día y es producto del hombre mismo, su característica principal es que es vigente y genera consenso, no siempre se manifiesta o percibe con toda claridad, puede estar oculta, pero se intuye y se presiente, *la práctica social* puede estar constituida por actividades motrices o intelectuales, es decir, puede tratarse de una práctica de uso de la matemática (utilización del compás de forma intuitiva para el trazo de una espiral sobre un bloque cilíndrico de madera) o de una idea o sentimiento, creencia, acerca de las matemáticas

("las matemáticas son difíciles"), otra característica de la *práctica social* en matemática educativa es que ésta no atañe a un solo individuo sino a comunidades de individuos.

En la expresión *práctica social* quedan comprendidos: los conocimientos matemáticos eruditos, los conocimientos matemáticos escolares, todas las prácticas de uso de las matemáticas, las creencias, opiniones, ideas, actitudes, ideologías y modas relacionadas con las matemáticas, que surgen en una sociedad.

B) La cultura matemática

En la búsqueda de una expresión que abarcase en toda su extensión la idea de "bagaje académico" (saber con el que cada profesor enfrenta su quehacer docente), encontramos que el término «cultura matemática» es el que mejor se adapta a nuestros intereses y perspectivas conceptuales, pues de la misma manera que «cultura» es lo consecuente de toda persona o individuo –desde el punto de vista antropológico–, así, «cultura matemática» es también toda aquella percepción, noción o saber matemática que está íntimamente ligada a todo ser humano que vive en sociedad.

En este contexto, es posible decir que la «cultura matemática» se constituye en una realidad social integrada por fuerzas multidireccionales provenientes de influencias socioculturales (prácticas sociales) que rodean al individuo y que acompañarán su existencia, moldeando su percepción del mundo y, por consiguiente, de lo que son las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

A partir de lo anterior establecemos que la *cultura matemática* se conforma por medio de una sucesión de construcciones de conocimiento matemático, que son prácticas sociales que surgen del contexto sociocultural en el que se desarrolla el individuo, durante su existencia.

Desde el punto de vista de la antropología cultural, la «cultura matemática» forma parte de la cultura general de todos los miembros de una sociedad, porque ésta está vinculada de forma natural con el hombre, sin embargo, hasta hoy día, por *cultura matemática* de un individuo, solamente se entiende, la cantidad y calidad de conocimientos matemáticos que éste posee.

C) La socialización del conocimiento matemático

Según Nanda (1987), la cultura se aprende mediante una intensa red de comunicaciones entre las personas que conforman un grupo social. Para que el ser humano pueda sobrevivir necesita de la transmisión social de conocimientos. La tradición cultural humana es un traspaso que de generación en generaciones se realiza mediante un proceso de aprendizaje llamado socialización.

Reconocemos que la «cultura matemática» se traspasa mediante el aprendizaje de prácticas sociales, entre las cuales se encuentran las «prácticas de uso» de las matemáticas, existentes en comunidades caracterizadas por una cultura específica.

En la investigación que aquí realizamos estamos considerando a las «prácticas de uso» como todo aquello de empleo rutinario de saberes matemáticos que el ser humano, con una cultura específica, ha implementado en la búsqueda de soluciones a problemas prácticos de su vida cotidiana y profesional. De tal manera que estas «prácticas de uso» son empleadas en casi todos los oficios de carácter artesanal y en la resolución de problemas de la vida diaria, de manera intuitiva, sin ningún rigor matemático.

En este estudio establecemos también que la «socialización del conocimiento matemático» es la multiplicidad de formas, que el hombre ha practicado para transmitir prácticas sociales vinculadas a las matemáticas, de persona a persona y de generación en generación.

Esta socialización del conocimiento matemático surge de la necesidad de preservar un conocimiento («cultura matemática») que es útil y necesario para la subsistencia y

sostenimiento de los distintos grupos sociales que conforman la sociedad (grupos de profesionales diversos, diferentes tipos de artesanos, campesinos, profesionales de las matemáticas, amas de casa, estudiantes, instituciones diversas, etcétera).

La socialización del conocimiento matemático es el fenómeno de la transmisión de prácticas sociales asociadas a éste. En la expresión «prácticas sociales» estamos considerando a: el conocimiento matemático erudito, el conocimiento matemático escolar, todas las prácticas de uso de las matemáticas, las creencias, opiniones, ideas, ideologías y modas relacionadas con las matemáticas, que surgen en una sociedad.

Naturaleza y acción de las prácticas sociales que conforman la cultura matemática de los profesores entrevistados.

Las influencias socioculturales que se traducen en prácticas sociales, son fuerzas externas, ajenas a la voluntad personal de cada sujeto, que intervienen en su historia de vida. Estas prácticas comienzan a ejercer su acción desde el seno familiar, a través de la educación familiar y del medio social que rodea a los individuos; en esta última consideramos a la institución escolar, en donde se manifiestan muchas prácticas relacionadas con las matemáticas. Todas estas influencias intervienen, motivando o no, el gusto por esta materia, definiendo las orientaciones profesionales de los individuos, o favoreciendo o interfiriendo con el aprendizaje de las matemáticas.

Las prácticas escolares de la enseñanza de las matemáticas, constituyen una micro cultura escolar (que forma parte de la *cultura matemática*) en la que localizamos estilos y formas de enseñar y de aprender matemáticas y que pueden ser altamente persistentes y compartidas entre la mayoría de los profesores de matemáticas.

Son estas prácticas sociales que en algunas ocasiones no llegan a ser explícitas o claramente configuradas en nuestra percepción, las que a través del análisis propuesto, llegamos a identificar reconociendo su naturaleza, su acción, y el resultado de esta acción.

Presentamos el análisis de algunas entrevistas, sustentado en el marco de la aproximación socioepistemológica, es decir, por medio del principio metodológico que Cantoral nos aporta para llegar a «descubrir» toda aquella información que no se manifiesta de manera explícita ante nuestros ojos, inmediata y regularmente, porque es una información que está oculta, a la vez que forma parte medular de la naturaleza intrínseca del fenómeno de la cultura matemática de algunos profesores del Instituto Tecnológico de Oaxaca. De tal manera que, por medio de este análisis, estaremos identificando los «constructos característicos» de la cultura matemática en dichos profesionales.

ENTREVISTA 3: PROFESOR DE CIENCIAS BÁSICAS. 20 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE	
Sí. Yo recuerdo que veía a mi papá que hacía sus cálculos para hacer sus… o sea, cubicaba la madera para sacar sus costos de sus tallas. Por ejemplo, tenía que comprar el cedro, y no desperdiciar; entonces, hacía unos trazos para hacer un torzal. Lo que hacen generalmente los carpinteros es enrollar un mecate y marcar la huella de éste sobre la madera, al tanteo, pero, mi papá hacía ese trazo geométrico, utilizaba mucho el compás (…)	
Naturaleza y origen de la influencia	Práctica social que se manifiesta a través de prácticas de uso de las matemáticas en el oficio de la carpintería y ebanistería. Las prácticas de uso de las matemáticas son múltiples y muy variadas, y se podría decir que existen una infinidad de ellas, si consideramos que la matemática forma parte de la cultura universal de todos los seres humanos. Ella está implícita en todas las actividades y quehaceres de la existencia humana.
Acción	La acción de esta práctica social se manifiesta por medio de una práctica profesional del padre (carpintería y ebanistería) relacionada con el uso de la geometría y del compás.
Resultado de la acción	Motivador, para la entrevistada. Despertó su interés hacia la matemática. Esta acción contribuye en la conformación de su cultura matemática.
Socialización	En esta influencia sociocultural se puede percibir la socialización del conocimiento matemático.

Sí, te digo, a pesar de que mi papá no era de juego, de que se pusiera a jugar con nosotros, el verlo a él trabajar y sacar sus proporciones, la gente le preguntaba: "cómo es que le calcula para que le quede así, bien centrada la figura, sin gastar la tela", y el respondía que se tenía que calcular. Y yo creo que eso me debe de haber motivado para que yo entendiera que todo debía de tener una razón, y que podía hacerse calculando matemáticamente las cosas.	
Naturaleza y origen de la influencia	Esta práctica de uso de la matemática proviene de una especie de taller de oficios, constituidos de manera no formal por los padres dominicos desde la construcción de la iglesia de Santo Domingo (siglo XVII), en éste, los maestros ebanistas enseñaban a sus aprendices las diferentes técnicas empleadas. La posesión de un conocimiento matemático que se aplica a un oficio (carpintería y ebanistería) despierta admiración en el medio social. Al mismo tiempo que esta práctica social, que es la actividad profesional del padre (realizada en su taller, ubicado en la misma casa) despierta el interés y la admiración de los hijos
Acción	Se manifiesta a través de la práctica profesional del padre, en la que la utilización de prácticas de uso de la matemática, como es la aplicación de la geometría y otros cálculos matemáticos, son de uso cotidiano.
Resultado de la acción	Motivador del interés por las matemáticas, la entrevistada identifica en la matemática una herramienta de uso cotidiano que se encuentra en la actividad de su padre. Contribuye a la conformación de su cultura matemática.
Socialización	En esta práctica de uso de las matemáticas se identifica la socialización del conocimiento matemático.

ENTREVISTA : PROFESOR DE CIENCIAS BÁSICAS. 20 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE	
En el campo las actividades tradicionales que tienen que ver con las matemáticas son ir a medir un terreno. De chicos estamos relacionados con eso, en ocasiones con el área y en ocasiones con la longitud; como ir a hacer una zanja o cercar algún terreno; ahí tienes que ver con mediciones de esta naturaleza. En el campo muchas actividades tienen que ver con estimaciones; por ejemplo, ¿cuántas carretas de mazorca irán a salir de este terreno, ¿cómo cuantos canastos de fríjol cosecharemos? O sea, lo cuantificable está presente en muchas actividades, siempre, siempre.	
Naturaleza y origen de la influencia	Práctica social que tiene su origen en las prácticas de uso de las matemáticas, en el medio rural. Estas prácticas se utilizan para la medición de terrenos y para la estimación de cantidades de maíz, fríjol, alfalfa, y otros productos agrícolas que se producen.
Acción	El entrevistado tuvo vivencias relacionadas con la estimación de diversas cantidades de productos agrícolas (prácticas de uso rural de las matemáticas).
Resultado de la acción	El hecho de repetir muy seguido éstas prácticas (actividades en el campo), desarrolla habilidades para la matemática, despertando interés por ésta. Dicha acción contribuye en la conformación de la cultura matemática del profesor.
Socialización	En estás prácticas se manifiesta la socialización del conocimiento matemático.

ENTREVISTA: PROFESORA DE CIENCIAS BÁSICAS. 10 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE	
No, fíjate, me acuerdo nadamás que en segundo año… el segundo año yo lo volví a repetir, porque… primero… bueno, según que yo estaba muy chica, era muy pequeña, ya que entré un año antes de lo establecido y, entonces, en segundo año había una maestra que nos regañaba mucho, nos pegaba, y me acuerdo que para aprendernos de memoria las tablas de multiplicar hacíamos cola y de tal tabla… del uno hasta la del cinco, repetir y repetir y luego pasar y si no nos las sabíamos, nos pegaba y yo me ponía muy nerviosa. Era horrible, pues me ponía nerviosa y no me gustaba, y cuando me pasaban al pizarrón no podía; entonces yo iba con mi abuelito, que me atendía por las tardes y me dedicaba una hora, haciendo cuentas y repasando las tablas y él decía que yo iba bien, y ¿por qué entonces en la escuela yo iba mal? Con mi abuelito yo podía hacerlo, pero, en la escuela, cuando hacíamos cola y cuando me tocaba, no me sabía las tablas; la maestra [me] preguntaba por qué no me sabía las tablas, y yo le decía que era porque salía con mi mamá. Reconozco que no me gustaba estar repitiendo como perico las tablas y comencé a desinteresarme en las clases. Y, bueno, entonces mi mamá estaba preocupada, y entonces me cambiaron de maestra; la maestra que tuve en primer año –que fue muy buena maestra– fue cambiada al segundo año, pero tuve que repetir ese año.	
Naturaleza y origen de la influencia	Práctica social escolar vinculada con las técnicas y métodos de enseñanza. La utilización de técnicas intimidatorias con los estudiantes fueron prácticas comunes en las escuelas primarias hasta hace unos 20 años. Dicha práctica estuvo sustentada en los lineamientos de la didáctica tradicional, los cuales fundamentan su concepción de enseñanza y aprendizaje en un modelo educativo centrado en el papel del profesor; en este proceso, el alumno es considerado como un ente pasivo y receptivo, por lo que la memorización es una de las prácticas más utilizada.

Acción	La acción de esta práctica social se manifiesta por medio de la práctica docen profesora, quien asume actitudes intimidatorias para obligar a sus estudiantes a "ap alterando su equilibrio emocional y bloqueando el Aprendizaje.
Resultado de la acción	Pérdida de un año escolar. Esta acción interviene en la conformación de la matemática del entrevistado.

ENTREVISTA: PROFESOR DE CIENCIAS BÁSICAS. 23 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE.	
Me acuerdo que, en tercero de primaria, me enseñaron el número pi[π]. Me acuerdo que fue un inspector de zona que llegó un día y pidió que el maestro del grupo se retirara y se quedó solo con los alumnos; él era una persona ya mayor, con mucha experiencia. Y me acuerdo que llevó una rueda y un cordel y nos dijo que teníamos que aprender la relación que había entre la rueda y el diámetro; entonces, tomó el diámetro –creo que era una rueda de bicicleta– y, entonces tomó el diámetro, y empezó a medir sobre la rueda, y vimos claramente que cupo tres veces y que sobraba un poquito, y que ese poquito era la fracción y, entonces, dijo: este es el número pi. Y yo creo [que] es una de las cosas que no olvido, el número pi, se me quedó muy grabado. Entonces, como este caso, yo creo que tenían muchos para enseñar diferentes conceptos, pero, no así solo, sino relacionado con algo concreto para no olvidar.	
Naturaleza y origen de la influencia	Práctica social que surge de la educación rural en el México de los años 40's y 50's, la cual se vio beneficiada por el fuerte impulso que el Ministro de educación José Vasconcelos promovió en la educación indígena, rural, técnica, y urbana. En ese contexto los profesores rurales marcaron una época en la que su desempeño docente se caracterizó por la gran responsabilidad con la que asumieron su quehacer profesional. Los profesores, altamente motivados promovieron la creatividad y la utilización de técnicas de enseñanza que posibilitaron el aprendizaje significativo de conceptos matemáticos.
Acción	La acción se manifiesta por medio de la práctica docente de un profesor que hace significativo el aprendizaje de una noción matemática.
Resultado de la acción	Aprendió el significado del número Π, contribuyendo, por medio de la acción de esta práctica social, a la conformación de la cultura matemática del entrevistado.
Socialización	En esta práctica docente se manifiesta la socialización del conocimiento matemático.

Conclusiones

Finalmente las prácticas sociales que conforman la cultura matemática de los profesores entrevistados se sintetizan en la siguiente tabla.

PRÁCTICAS FAMILIARES				PRÁCTICAS DEL MEDIO SOCIAL				PRÁCTICAS ESCOLARES					
Motivación familiar.		Necesidades familiares impuestas por el medio.		Los amigos		La cultura popular		Personalidad del profesor		Métodos de enseñanza		Ambientes escolares	
Urbanas	Rurales	Urbanas	Rurales	Urbanas	Rurales	Urbanas	Rurales	Urbanas	Rurales	Urbanas	Rurales	Urbanas	Rurales

En este estudio pudimos apreciar cómo las personas aprenden las matemáticas, cómo aprenden las prácticas de uso de las matemáticas, asimismo cómo aprenden las diversas prácticas sociales ligadas a esta materia, en síntesis: cómo aprenden su cultura matemática. Este aprendizaje (socialización del conocimiento matemático) se produce por medio de un aparato (en el que intervienen: sus propios familiares, su entorno social y la institución escolar) que se encuentra inmerso en un ambiente sociocultural que define percepciones, comportamientos, ideas, acciones (prácticas sociales) en los diferentes grupos humanos que conforman la sociedad.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (2002). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. España: Paidós.

Cantoral, R. (1998). La aproximación Socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional [Resumen]. *Resúmenes de la Decimosegunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Bogotá. P. 1

Cantoral, R. (2001a). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001b). La Socioepistemología: una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. En F. Cordero (Ed.), *Serie Antologías* (Número 1, pp. 331-333). México: CLAME-Red de Cimates.

Camilleri, C. (1985). *Antropología cultural y educación*. Lausana, Suiza: UNESCO.

Chevallard, Y. (1997). *El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori-ICE.

Farfán, R.M. y Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. En F. Cordero (Ed.), *Serie Antologías* (Número 1, pp. 249-291). México: CLAME-Red de Cimates.

Nanda, S. (1987). *Antropología cultural*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sutherland, R., Mochon, S., Jinich, E., Molyneux, S. y Rojano, T. (1996). Cultura y cognicion: El caso de las matemáticas y la ciencia. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, (pp. 1-16). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Wertsch, J. (1993). Voces de la mente Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada. Madrid: Visor.

Wertsch, J. (1988). *Vigotsky y la formación social del la mente*. Barcelona: Paidós.

ACERCA DE LA EXISTENCIA DE FORMAS DE ARGUMENTACIÓN CONSTRUIDAS FUERA DE ESCENARIOS ESCOLARES QUE LLEGAN AL AULA DE MATEMÁTICA

Cecilia Crespo Crespo, Rosa M. Farfán, Javier Lezama
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.
CICATA–IPN México
Cinvestav, IPN México
crccrespo@gmail.com, rfarfan@cinvestav.mx, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento lógico, Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. Este trabajo forma parte de una investigación enmarcada en la perspectiva socioepistemológica y se orienta a analizar desde este marco teórico, las características de las demostraciones y argumentaciones presentes en el aula de matemática. El objetivo de la investigación es comprender el carácter sociocultural de las argumentaciones matemáticas, mostrándolas como resultado de acciones de una comunidad en un escenario sociocultural. Nuestra cultura, con base aristotélica, ha construido formas de argumentación basadas en esta lógica, y durante siglos se han consideradas innatas. Sin embargo, en el aula se ponen de manifiesto algunas situaciones no sujetas a la lógica que se ha considerado innata, que evidencian el carácter de construcción social de la argumentación matemática y que consideramos tienen que ser tenidas en cuenta en el discurso matemático escolar.

Palabras clave: argumentación, construcción sociocultural, escenario

Introducción

A veces es posible detectar en el aula de matemática, ciertos modos de razonamiento que realizan los alumnos que no son acordes con la tradición aristotélica. Se trata en muchas oportunidades de la transferencia a escenarios académicos escolares de formas de argumentar que son utilizados en escenarios cotidianos, que han sido construidos en escenarios no académicos. La visión socioepistemológica de la matemática debe tener en cuenta estas formas de razonamiento, la manera en las que son realizadas y cómo se reflejan en el aprendizaje y validación de resultados matemáticos, ya que denotan la transferencia de los mismos de unos escenarios a otros. En investigaciones realizadas, se han puesto de manifiesto que las argumentaciones como recurso de validación de resultados en matemática, surgen con el carácter de producto cultural (Crespo Crespo, 2005; Crespo Crespo & Farfán, 2005).

En este trabajo se presentan algunas de estas formas de argumentación y se abren preguntas, cuyas respuestas conducirán a nuevas investigaciones. La finalidad de este artículo es mostrar que en los cursos de matemática, no todas las maneras de razonar que se ponen de manifiesto son deductivas. De esta manera, la argumentación deductiva de origen aristotélico vuelve a mostrarse como una construcción sociocultural, que convive con otras formas de argumentación que también han sido construidas socioculturalmente.

Argumentaciones abductivas

El término abducción fue introducido por Pierce (Panizza, 2005), para designar razonamientos de la siguiente forma: $p \Rightarrow q$, $q \dashv p$.

En la lógica clásica este es un razonamiento no válido. Esta falacia suele, sin embargo, utilizarse en ciertos escenarios para la producción de conocimiento. En escenarios no académicos es usada en numerosas situaciones en las que se busca una explicación. En la vida cotidiana, en múltiples oportunidades, se razona a partir de evidencias y sobre la base de los conocimientos que se posee, se formula una hipótesis acerca de cuál puede ser la causa del hecho observado. En algunos casos la conclusión inferida tiene mayor probabilidad de ser cierta que en otros. La conclusión se enuncia a veces por medio de un “tal vez” o un “quizá”. La fuerza de las creencias acerca de la manera en la que se desarrollan los hechos o el valor de las pruebas a las que se someten las conclusiones resultan fundamentales en el momento de afirmar la conclusión.

Veamos un ejemplo de pensamiento abductivo, que se presentó en alumnos de primer año de ingeniería en sistemas. Se presentó a los estudiantes:

"Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par"

La demostración presentada por varios alumnos fue:

a es par, entonces se puede escribir a=2k

El cuadrado de a es: $a^2=(2k)^2=4k^2$

que es par.

Al corregir este tipo de demostraciones, se suele afirmar que se trata de una confusión de la hipótesis y la tesis del teorema. Se trata, en realidad de un razonamiento abductivo.

La concepción de los condicionales en los estudiantes suele ser causal y es común que al preguntarles la explicación de cierto proceso que hayan utilizado en la resolución de un problema, acudan a razonamientos abductivos. Esto quizá se deba a que confundan la estructura condicional con la bicondicional y de esta manera asignan a las argumentaciones abductivas carácter de válidas.

En escenarios cotidianos, los razonamientos abductivos son bastante utilizados. Esta forma de argumentación se le reconoce gran valor para lograr argumentos explicativos. Algunas preguntas que se abren ante las situaciones en que se los utiliza en escenarios académicos son: ¿Existe realmente una confusión entre la tesis y la hipótesis del teorema? o, ¿asumen como válidos los razonamientos abductivos, basándose en la implicación de Diodoro, en vez de la reconocida por Aristóteles? ¿Consideran como válidos únicamente los razonamientos sólidos?

Argumentaciones inductivas

También es frecuente encontrar en el aula argumentaciones inductivas. Los alumnos a veces, ante un enunciado de una propiedad matemática, prueban una cantidad finita, e incluso no muy grande, de casos aislados, concretos, y de eso concluyen que cierta proposición.

Esta situación se repite en distintos cursos y en distintas ramas de la matemática. Es muy usual que los alumnos extraigan conclusiones a partir de razonamientos inductivos. Los razonamientos inductivos conducen a conclusiones más o menos probables. No otorgan garantía de la verdad de la proposición. Los razonamientos inductivos no dependen únicamente de la cantidad de casos ensayados y observados.

Por ejemplo, preguntamos a un grupo de alumnos de segundo año de escuela media:

> *"¿De qué cuadrilátero se trata si tiene sus diagonales iguales, perpendiculares y que se corten mutuamente en partes iguales?"*

Los alumnos comenzaron a trazar segmentos perpendiculares que verifican las condiciones solicitadas: perpendiculares, que se corten mutuamente en partes iguales y que sean iguales entre sí. Cada uno probó en uno o dos casos, compararon resultados, y respondieron: *'Se trata de un cuadrado'".*

Esta situación se repite en distintos cursos y en distintas ramas de la matemática. Es muy usual que los alumnos extraigan conclusiones a partir de razonamientos inductivos. El esquema inductivo es uno de los más habituales entre los estudiantes. Además éstos no son conscientes de sus limitaciones, ya que no dan pruebas de su rechazo cuando se les presenta una argumentación inductiva. Sus pruebas inductivas consisten muchas veces en la presentación de un ejemplo o dos, rara vez muestran un contraejemplo, e incluso no expresan que éste invalide la prueba.

Argumentaciones no monotónicas

Una característica de la lógica clásica es la monotonicidad. Esto significa que agregando nuevas proposiciones (premisas) a un razonamiento, nunca se invalidan viejas conclusiones. O sea que el conjunto de conclusiones o teoremas crece monótonamente con el conjunto de premisas. Dicho de otra manera: si una proposición es posible que sea inferida a partir de cierto conjunto de premisas, por más que se agreguen nuevas premisas, la proposición seguirá siendo inferida. En la práctica, de hecho, no se utilizan muchas veces todas las premisas de las que se disponen para llegar a una conclusión. Por ejemplo cuando en matemática se demuestra un teorema, no se aplican todos los conocimientos y propiedades que ya han sido demostrados previamente para lograr dicha demostración.

La lógica clásica permite realizar inferencias seguras y consistentes, no obstante, los razonamientos humanos no siempre son consistentes, por las inferencias que realizan los alumnos en el aula a veces tampoco lo son, ya que transfieren esta forma de razonar desde un escenario no académico a uno que sí lo es. El paradigma inferencial de la no-monotonicidad otorga una noción de "racionalidad útil" que no consiste solamente en razonar correctamente garantizando el proceso de deducción lógica, la *racionalidad útil* toma en cuenta no sólo los propósitos de un agente razonador determinado sino también el dominio en el cual éste opera. La inferencia clásica se explica a través de la noción de consecuencia lógica, mientras que la inferencia no-monotónica asume compromisos muy distintos respecto a su contraparte clásica, en especial abandona la noción de consistencia y de validez, asumiendo que el contexto de la información es importante para la representación de las inferencias racionales. El requisito de racionalidad que requieren las inferencias de sentido común parece centrarse en las propiedades formales que debe poseer la relación de consecuencia no-monotónica.

La no monotonicidad de las argumentaciones también aparece en oportunidades en las aulas. El uso de contraejemplos está relacionado con este tipo de argumentación. Volvamos al ejemplo que se presentó en el caso de las argumentaciones abductivas, pero enunciemos de distinta manera la propiedad: *"Probar que si el cuadrado de un número es par, dicho número es par", u*n alumno presentó la siguiente demostración:

> *Sea a^2=2k. Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces a=2u (siendo u=k/2) y por lo tanto a es par. Pero 2 es par y $\sqrt{2}$ no es par pues no es entero. Entonces la propiedad es falsa.*

La demostración presentada tiene dos partes. En la primera utiliza una argumentación deductiva. En la segunda, descubre un contraejemplo y a partir de ahí afirma que la propiedad es falsa. Sin embargo, en el examen presenta ambas argumentaciones, como si la propiedad hubiera sido válida hasta la aparición del contraejemplo.

Cabe preguntar: ¿Qué papel desempeñan los contraejemplos para los alumnos? ¿Acaso ven a la matemática como una construcción no monotónica y no reconocen el carácter deductivo que le da la lógica aristotélica?

Argumentaciones visuales

Existen estudios actuales acerca de los aportes que pueden hacer las demostraciones visuales a la comprensión de la demostración matemática, basadas en la visualización (Hanna, 2000). Estas se sustentan en la utilización de representaciones visuales, el uso de diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades que se desea demostrar.

Son conocidas las demostraciones de propiedades aritméticas que provienen de la época de Pitágoras. Otro tipo de argumentaciones visuales son las que utilizan recursos computacionales. Pueden mencionarse como ejemplos las construcciones en Cabri Geomètre de los puntos notables de un triángulo. Los alumnos utilizan estas construcciones para visualizar las propiedades correspondientes de las ubicaciones de estos puntos. Quienes utilizan estos recursos en el aula, defienden que en realidad al experimentar con los gráficos obtenidos, se están probando los mismos para una cantidad infinita de casos y que a partir de ellos, es posible referirse a demostraciones visuales. Sin embargo, se preguntan otros cómo extraer la información implícita de las representaciones visuales que permitan construir una demostración válida (Hanna, 2000).

Para los estudiantes, quizá esta sea la manera que menos aceptan de argumentación no deductiva, ya que como se presenta en algunas investigaciones (Crespo Crespo, 2007), "no creen" en los gráficos debido a la cantidad de veces que han oído que los dibujos pueden engañar.

Preguntas que surgen son: ¿Qué tipos de argumentaciones gráficas pueden considerarse deductivas? ¿Cuáles son en realidad inductivas? ¿Creerían los estudiantes en ellas si no recibieran el continuo mensaje de que no son válidas?

Argumentaciones a conocimiento cero

Hace unos años, ha surgido la expresión "demostraciones a conocimiento cero" para identificar ciertas formas de argumentación (Hanna, 1997). Se trata de una prueba interactiva basada en protocolos de conocimiento cero. En ella, una persona trata de demostrar a otra que sabe algo, sin enseñarle o transmitírselo. Es una forma de presentar una propiedad matemática a un interlocutor, convenciéndolo de la veracidad del teorema correspondiente y de que el demostrador conoce la misma. Durante esta comunicación se busca el convencimiento y la aceptación del otro.

Esta forma de demostración es sustancialmente distinta a la que se aplica en la matemática clásica, sin embargo resulta interesante desde el punto de vista socioepistemológico en cuanto caracteriza una práctica social constituida por el intercambio de opiniones acerca de ideas matemáticas en escenarios académicos en los que no se presenta la demostración completa, pero que surge de ella la aceptación del resultado.

Su aplicación en el aula se realiza con gran frecuencia, incluso con fines didácticos. Por ejemplo cuando se desea que los estudiantes comprendan y acepten un resultado matemático, pero el docente no se focaliza en la presentación de la demostración en sí del resultado.

Algunas reflexiones acerca de las argumentaciones de los estudiantes

A veces en la tarea docente preocupa que los estudiantes no lleguen a los resultados que como profesores quisiéramos, no se entiende cómo no realizan argumentaciones deductivas correctas, es posible oír de algún docente, la expresión "no razonan".

> *"Pero los alumnos razonan siempre. Dicho de otra manera, los alumnos no razonan solamente porque la tarea lo demanda [.]. Los alumnos establecen espontáneamente analogías, generalizan, se dan explicaciones, encuentran regularidades, etc.*". (Panizza, 2005, p.94)

En efecto, lo que ocurre es que sus formas de razonar no coinciden con la manera deductiva clásica, fundamentada en la tradición aristotélica. Están transfiriendo al escenario del aula formas de argumentación que son propias de escenarios no académicos, de la manera que utilizamos con frecuencia en razonamientos cotidianos.

Las maneras de argumentar en matemática no se han mantenido estáticas, y deben ser comprendidas como construcciones socioculturales. Esta comprensión, podrá ayudar a tener una mayor percepción de las formas de argumentación en el aula y un mejor aprovechamiento en la reconstrucción del discurso matemático escolar.

La comprensión de las demostraciones matemáticas como prácticas sociales, conduce de inmediato a analizar las maneras de argumentar que están presentes en el aula y a pensar acerca de las causas por las que surgen y de qué manera adquieren o no aceptación por parte de los alumnos. El análisis del valor social de estas formas de argumentar, puede dar luz acerca de la comprensión de los mecanismos de validación y explicación de las construcciones matemáticas en el aula.

Consideramos que resulta indispensable una mirada sobre la escuela actual en función de las argumentaciones. Las instituciones educativas se mantienen en la actualidad, o al menos intentan mantenerse, con características que les fueron propias hace años. Intenta mantener sus tareas de manera disciplinadamente racional, esto es "*que permitan distinguir con claridad los espacios del que sabe y del que aprende, del que manda y del* *que obedece, así como quién es el que evalúa al aprendiz, y cuándo y cómo*" (Barbero, 2006, p.2).

Sin embargo estas instituciones educativas están entrando en un período de crisis que deberá desembocar en un replanteo de sus actividades, de los roles que en ellas se desempeñan. Barbero plantea claramente que la causa de la crisis es que no es posible pensar un modelo escolar que marque los espacios y tiempos de aprendizaje en la sociedad actual. "*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2006, p.3). Esta idea parece esencial, ya que llama la atención a buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. La escuela pasa a ser, bajo esta concepción, una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

En el caso de las argumentaciones, nuestro esquema actual de escuela, ha intentado, siguiendo el esquema aristotélico de ciencia, enseñar formas de argumentar deductivas. Sin embargo, no ha logrado con los estudiantes actuales resultados satisfactorios. Acabamos de mostrar la presencia en el aula de algunas formas de argumentar no deductivas. Éstas en algunas oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes. Indudablemente han sido construidas en escenarios no académicos. Son utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir, defender ideas.

La escuela actual intenta ignorarlas, pero no podemos ignorar que el modelo de comunicación escolar actual es distinto de las dinámicas comunicativas de la sociedad actual, del escenario en el que los estudiantes se desenvuelven, en la que se utilizan recursos orales, gestuales, sonoros, visuales, musicales y escritos. Estos recursos contribuyen a la construcción de argumentaciones fuera de la escuela, en escenarios no académicos. La escuela no puede ignorarlos. Con el reconocimiento de que nos hallamos en una sociedad educativa, los docentes deberemos prestar atención a estas formas de argumentación y a su construcción.

La socioepistemología al reconocer la construcción social del conocimiento y comprender que éste se lleva a cabo en un escenario determinado y a veces se transfiere a otros escenarios, estudia la manera en la que se produce esa transferencia. En el caso particular del objeto de nuestro estudio, las argumentaciones, hemos podido detectar que las argumentaciones utilizadas por los alumnos en la escuela a veces son construidas fuera de ella. El alumno actúa en escenarios académicos y no académicos, trae argumentaciones construidas en los segundos a los primeros. Si la escuela se mantiene con la convicción de que ella constituye el sistema educativo y no reconoce, según las palabras de Barbero que mencionamos anteriormente, la existencia de una sociedad educativa, no podrá repensarse en la reconstrucción del discurso matemático escolar.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2006). Dinámicas urbanas de la cultura y cultura escolar. En *Nuevos tiempos y temas en la agenda de política educativa. La escuela vista desde afuera*. Buenos Aires, Argentina.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. (pp.64-75). México: Iberoamericana.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría sin publicar. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado sin publicar. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). *Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural.* Relime Vol. 8 (3), pp.287-317.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. En A. Gutiérrez y L. Puig (Ed.), *Proceeding of PME 20*. *1* (pp.21-34). Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5–23.

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

CONSTRUCCIÓN DEL INFINITO EN ESCENARIOS NO ESCOLARES

Patricia Lestón, Apolo Castañeda
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada México
patricialeston@yahoo.com.ar, apcastane@gmail.com
Campo de investigación: Estudios socioculturales, Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *El siguiente trabajo presenta dos actividades realizadas por alumnos de escuela media en las que se intentan determinar las ideas en referencia al infinito que se construyen fuera de la institución escolar, con el fin de poder analizar cómo éstas interfieren luego en la construcción del infinito matemático. Buscando integrar las componentes cognitiva, epistemológica, didáctica y social que rodean a este concepto se enmarca la investigación en la aproximación socioepistemológica (Cantoral, 2001). Se consideran además los modelos implícitos que rigen la adaptación de nuevas ideas (Fischbein, 1989); y se observa cómo forman estos modelos a lo largo de la vida.*

Palabras clave: infinito, idea intuitiva, construcción social

Introducción

El infinito es conocido por los alumnos, aunque sea en forma coloquial. Generalmente, antes de ser presentado y discutido en la escuela, el estudiante tiene ideas no escolares asociadas al infinito. Como concepto matemático, el infinito se construye en la escuela en sus diferentes visiones, como resultado de un límite, extensión de una recta, resultado de una suma infinita o cociente de denominador tendiendo a cero. El conflicto surge cuando estas ideas, las intuitivas y las matemáticas, diferentes en su construcción y naturaleza, tienen que convivir en la mente de los alumnos. En ese proceso que ocurre dentro del aula, las ideas intuitivas elaboradas fuera de escenarios escolares reaparecerán, afectando la idea matemática que los alumnos construyan.

El objetivo de esta propuesta es intentar conectar las dos construcciones que se dan en función del mismo objeto para intentar determinar si esas construcciones pueden auxiliarse una a la otra, o al menos, no entorpecerse. Se plantean a continuación dos preguntas que son las que guían la línea en la cual se diseñaron las actividades y en que se continuará la investigación:

- ¿De qué manera se relaciona el significado ya conocido con el significado matemático por conocer?
- ¿Puede construirse el infinito matemático a través de su aparición en escenarios no matemáticos?

Planteo del problema y marco teórico

El infinito se usa habitualmente para referirse a distintas situaciones fuera de la escuela, en particular por los niños: "el amor es infinito", "el cielo es infinito", "las estrellas son infinitas". Es decir, antes de ser presentado y discutido en la escuela, el alumno tiene ideas asociadas al infinito de su vida no escolar, que nacen del diálogo con sus padres y pares, ideas que toda persona que viva en una sociedad ha ido construyendo. Como concepto matemático, el infinito se construye luego en la escuela, en la clase de matemática, se lo trabaja como cardinal de los conjuntos numéricos, como "cantidad" de puntos de un segmento, como la "longitud" de una recta y asociado a muchos otros conceptos matemáticos. El conflicto surge entonces cuando estas dos ideas, la intuitiva y la matemática, diferentes en su construcción y en su naturaleza, tienen que convivir en la mente de los alumnos. Es en el proceso de la construcción que se produce dentro del aula, influenciada por ideas intuitivas y extraescolares, en donde las ideas intuitivas reaparecerán, afectando la idea matemática que los alumnos construyan.

Lo que se analiza en esta investigación es la existencia de actividades humanas en estos escenarios no escolares que condicionan la construcción de un conocimiento de naturaleza matemática, a pesar de que se use primero fuera de la cultura matemática. El objetivo de este trabajo es entonces, identificar cuáles son esas ideas intuitivas asociadas al infinito, cómo se construyen en escenarios no escolares, en situaciones cotidianas, y comenzar a identificar qué influencias tienen en la posterior construcción del infinito matemático dentro de la escuela.

De acuerdo al problema planteado y su naturaleza, se necesita para poder analizarlo realizar un estudio que integre en este análisis las componentes cognitiva, epistemológica, didáctica y social que rodean a la construcción de este concepto. Se propone entonces enmarcar la investigación en la aproximación socioepistemológica, que plantea que:

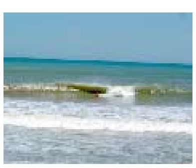
> *"Mientras [las aproximaciones epistemológicas tradicionales] asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana, la socioepistemología plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares."*(Lezama, 2005, p. 341)

Experimentación

Primera Experiencia: El infinito intuitivo

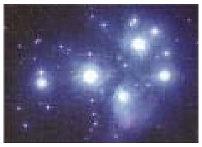
- **Objetivo**
  - Buscar en la memoria de los alumnos las ideas más antiguas que tuvieran en referencia al infinito, recuerdos de su infancia
  - Analizar distintas situaciones habitualmente relacionadas con el infinito y buscar fuera de la matemática referencias sobre este tema.

1. ¿Cómo explicarían la presencia del infinito en cada una de estas situaciones?

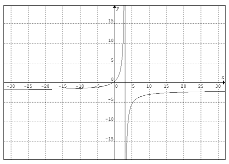


"Desde lo visual, es infinito, no se ve donde termina ni el mar ni el universo"

"El agua del planeta no es infinita porque se puede calcular su volumen en litros. Esto es porque está en un medio, la Tierra, que mantiene igual o con pocos cambios, su volumen, que es finito"



"Hay millones de estrellas, es imposible contarlas, entonces pareciera que fueran infinitas"



"El límite de la función es infinito, porque aumenta a medida que se acerca al valor, y se sigue acercando, así que se sigue agrandando y nunca deja de crecer: es infinito"

"Todas las funciones son infinitas: no tienen ni principio ni porque para un valor de x siempre hay una valor de y"

2. Escriban dos frases como mínimo en que se utilice la palabra infinito y que no se relaciones con la matemática. Explica qué significado tiene ahí este término.

"Hasta el infinito y más allá (Buzz Lightyear –Toy Story)".

"Si alguien te decía infinito, vos decías infinito punto rojo y le ganabas, porque es más grande. El único que le ganaba al infinito punto rojo es el infinito punto de todos los colores, pero ese no se aceptaba, era trampa".

"Te quiero hasta el infinito"

3. El símbolo que representa al infinito es ∞. ¿Cómo lo describirían? ¿Por qué creen que se utiliza esa imagen? Creen otro símbolo y expliquen por qué podría servir

"Es adecuado porque no se ve dónde empieza ni dónde termina. Es continuo, no lo terminás de recorrer nunca"

"No es adecuado porque es cerrado, debería mostrar que sigue siempre"

"Es mejor este porque muestra que lo infinito sigue para todos lados"

- **Conclusiones**

  - Lo infinito se relaciona con aquello de lo cual no se puede asegurar dónde termina ni donde comienza, lo que no se puede medir ni contar; aún cuando se sepa que el final existe, como en el caso del mar.
  - Por otro lado, las referencias a la infancia están más teñidas de sentimentalismo: el amor es infinito.
  - Ese infinito en realidad tiene un significado distinto al matemático: es inalterable, no se modifica y no existe nada mayor que él en cuestión de sentimientos. Ha de ser, entonces, infinito.

Segunda Experiencia: El infinito en la literatura

- **Objetivo**

  - Enfrentar a los estudiantes con una serie de textos y tiras cómicas en que se trata al infinito, aunque no de forma matemática

  - Identificar cuáles son las ideas que ese tratamiento despierta en ellas

Para los siguientes textos, analice el elemento matemático que se trabaja y explique si está de acuerdo o no con el enfoque presentado

- *El libro de Arena* (Borges, 1998, pp. 130-137)
- *La paradoja de Tristam Shandy* (Palacios y otros, 1995, p. 23)
- *El hotel de Hilbert* (Palacios y otros, 1995, p. 29)

El libro de Arena

- ✓ *"Se trabaja el infinito, lo explica con varias comparaciones distintas: que no hay primera ni última hoja, que una página no se puede volver a encontrar, que la numeración es arbitraria y no se repite, es más, el nombre del cuento, El libro de Arena, hace referencia a la comparación entre las hojas y el arena, aunque el arena no es infinita pero es imposible encontrar el primer o último grano"*
- ✓ *"No es claro cómo puede ser que infinitas hojas, que tienen un espesor aunque sea mínimo, estén dentro de un libro que se puede manejar. Él dice que lo va a poner en el lugar donde sacó la biblia, y la biblia tiene una cantidad finita de hojas"*

La paradoja de Tristam Shandy

- ✓ *"La idea que se plantea es la del infinito, pero el del infinito como los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5. Y es claro lo que se quiere hacer entender: tanto con la numeración de los días como el de los años se puede extender infinitamente. Obviamente es un relato que pretende explicar este aspecto de infinito del tiempo, ya sea de los días como de los años"*

El hotel de Hilbert

- ✓ *"La idea de infinito que aparece acá es distinta a las anteriores, porque lo que hace el autor es dividir al conjunto en partes iguales (las habitaciones pares y las impares) y ocupar unas con las personas que ya estaban y las otras con las que llegan. Está bien lo que hace porque hay la misma cantidad de números pares que de impares, pero no tiene sentido el planteo: si hay infinitas personas cambiándose de habitación no hay última persona, entonces nunca terminan de acomodarse. Es ilógico el planteo, no tiene sentido."*

- ✓ *"Lo que se plantea no tiene sentido: el autor dice que todas las habitaciones están ocupadas y llegan infinitas personas para ubicarse, entonces los que ya estaban ahora ocupan las habitaciones pares y los que llegan las impares; pero si todas estaban ocupadas y ahora las quiero ubicar en la mitad no entran, por más que los números pares sean infinitos: ya estaban todos usados y también estaban usados los impares, y ahora con la misma cantidad de habitaciones pretendo ubicar al doble de pasajeros. No se puede, lo que el autor hace es jugar con la idea de infinito, pero en el fondo es como lo de las paradojas de 1º Año, no lo puede explicar entonces hace un relato tipo fantástico para que se vea lo difícil que es."*

- **Conclusiones**
  - ❖ Los textos abren la discusión a algunas cuestiones referidas al infinito.
  - ❖ Desde la información matemática que tienen sobre qué es el infinito buscan hacer una lectura más crítica que comprensiva, buscan desacreditar algunos de los aspectos que aparecen y no comprenden en los relatos para poder entonces, continuar con sus ideas, que sí comprenden.

Conclusiones finales

La escuela está inmersa en un escenario social que hace de ella un lugar en el cual la intuición no tiene espacio. El alumnado sabe que lo que cree o siente no acredita conocimiento, solo el saber, el saber de los libros o el transmitido por los docentes permite la promoción de las materias. Y la escuela media es un medio para lograr un primer escalón en el avance de la educación. Y la manera de concluirlo es acreditar el conocimiento que la sociedad ha aceptado como importante y necesario en su sistema de valores.

La escuela no puede seguir mirando a la cultura popular como algo sin valor. Las ideas intuitivas, lo que se construye en la vida no escolar es parte de lo que los estudiantes saben, y debe aceptarse como elemento, ya sea para colaborar o para mostrar las contradicciones que con el conocimiento erudito presenta. Como dice Montiel:

> *"Dicho en otras palabras, encontraremos los factores sociales que generan conocimiento matemático, entendidos éstos como aquellas restricciones que pesan sobre los individuos por el sólo hecho de vivir en sociedad y que no son estrictamente modificables por una voluntad individual"(*Montiel, 2005, p.20*)*

El impacto de las ideas intuitivas en el caso del infinito es innegable, especialmente porque fuera de la matemática el infinito no es contradictorio. En los sentimientos, en el tiempo, en el espacio, en la religión, el infinito "cierra": convence, caracteriza de manera tal que todo el mundo sabe de lo que se está hablando. Los conflictos aparecen sólo dentro de la matemática: entonces, ¿por qué alguien cambiaría un modelo que no tiene problemas (el modelo intuitivo) por un modelo que se muestra contradictorio, conflictivo y que "no convence" (el modelo matemático)? La matemática escolar debe tomar parte en la modificación del discurso de manera tal que los alumnos encuentren en el sistema matemático un modelo que sea compatible con las nociones que provienen de experiencias no escolares para contribuir a la construcción de noción mejor adaptada.

Referencias bibliográficas

Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México DF: Fondo de Cultura Económica.

Borges, J. L. (1998). El Libro de Arena. En Borges, J. *El Libro de Arena*. (pp. 130 -137). Madrid: Editorial Alianza.

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En Beitía G. (Editor) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 14.* México DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática*. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* México DF: Pearson Education.

Crespo Crespo, C. (2001). Acerca de la comprensión del concepto de continuidad. En *Boletín de SOAREM* nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires: SOAREM.

Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15 (I), (pp. 529-534). México.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México DF: Editorial Reverté.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the learning of Mathematics. 9, 2.* (pp. 9 – 14)

Garbin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. En J. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 16 (II) (pp. 406-414). Santiago de Chile.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos". *Relime 8* (2), 169-193.

Lezama, J. (2005). Una Mirada Socioepistemológica al Fenómeno de la Reproducibilidad". *Relime 3* (8), 339-362.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimientos. *Relime 8* (2), 195-218.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México

Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N. (1995). *Los Matematicuentos. Presencia matemática en la literatura.* Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Valdivé Fernández, C. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: "el paso del infinito potencial al infinito 'como un todo' para comprender la construcción de los conjuntos infinitos". En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 19. (pp. 544-550). México.

COMUNICANDO CAMBIOS EN EL TIEMPO: ELEMENTOS PARA UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Eduardo Carrasco Henríquez, Leonora Díaz Moreno
U. de Valparaíso, U. Metropolitana de Ciencias de la Educación Chile
ecarrascr17@yahoo.com, leonoradm@yahoo.es

Campo de investigación: Visualización, Gráfica y funciones, Pensamiento Variacional   Nivel: Básico, Medio

Resumen. *Con el objeto de mejorar la apropiación de herramientas para el pensamiento variacional, el presente trabajo presenta indagaciones realizadas en torno a gráficas de variación en el tiempo, en especial aquellas de distancia en el tiempo. Entendemos que construir aprendizajes implica introducir al estudiante en prácticas matemáticas que potencien las nociones a construir, por ello reconocer las situaciones en que las gráficas distancia-tiempo y, en particular el tiempo, son necesarios para comunicar y trabajar con cambios, se torna central. El presente reporte da cuenta de experiencias exploratorias con base en la necesidad de comunicar cambios, recurriendo a representaciones gráficas, de modo de constatar en qué situaciones se representa al tiempo en tales gráficas.*

Palabras clave: tiempo, graficación, visualización matemática

Antecedentes

A partir de un marco de investigación socioepistemológico hemos trabajado en torno a las dificultades que estudiantes muestran al interpretar gráficas de variación en el tiempo. Hemos reportado que poder interpretar el tiempo y recuperar la evolución del parámetro que se grafica es una actividad compleja, en especial si es una gráfica distancia tiempo. Varios autores (Dolores 2004, Arrieta 2003) muestran como estudiantes reconocen una gráfica distancia tiempo como la trayectoria del móvil. Si consideramos por otra parte que la comunidad matemática ha construido una representación metafórica del tiempo como una distancia (Lakoff y Núñez, 2000) reconocemos a la gráfica como una traza de un punto sobre la hoja -es decir, una trayectoria- se requiere por tanto entender ese desplazamiento temporal metafórico para interpretar la gráfica de variación en el tiempo.

De igual modo, la construcción de gráficas desde el fenómeno implica poder abstraer las relaciones y covariaciones del tiempo con los parámetros relevantes a describir. Un tiempo que se nos presenta al entendimiento de modo complejo, a partir de nuestra experiencia temporal subjetiva, que no está presente en la imagen directa que nos dan los sentidos. Ellos están principalmente focalizados en las variaciones de posición, temperatura, color, olor, por nombrar algunas. Toboso (2005) señala que el tiempo se le presenta a cada persona en una experiencia que se construye de modo subjetivo en sus proyecciones intencionales al futuro y en sus retenciones del pasado, también intencionales, para actuar en una situación a la vez con lo que recuerda y con aquello que proyecta. Los trabajos de Piaget sobre la construcción de una noción temporal en los niños, señalan que se constituye en la secuencia de imágenes, en reconocer que pasó y que viene. Se va constituyendo entonces un tiempo que es subjetivo, interno a la persona y cuya evolución varía de acuerdo a nuestros estados de ánimo, es irreversible a diferencia del tiempo matemático, que es isotópico, continuo y reversible. Por ello comunicar lo que varía, si se refiere a un desplazamiento, no requiere al tiempo. Nos basta con mostrar la trayectoria que éste ha tenido y

en esa trayectoria recuperamos nuestra experiencia temporal en un acto imaginativo.

En una mirada breve al devenir histórico, notamos que la actual forma de graficar variaciones en el tiempo, se constituye en un largo proceso en el tiempo y sobre la base principal de metáforas geométricas. En efecto, Oresme[16], quien señala la necesidad de construir un "dibujo de lo que varia", amplia las herramientas para

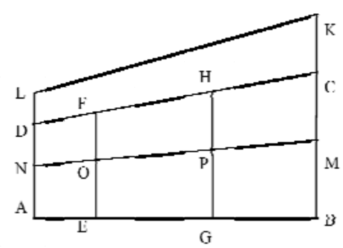


Fig. 1

el estudio de la variación, al construir un dibujo geométrico de lo que varía para todo tipo de magnitudes y no solo graficar lugares geométricos. Señala Oresme: "supongo, por lo tanto, que el dolor es una cierta cualidad del alma que se extiende en el tiempo y se intensifica por grados. Entonces es posible que dos de estas cualidades sean iguales y, más

[16] Nicolás de Oresme nació en Normandía, alrededor del año 1323, fue profesor en el colegio de Navarra, emplazado en donde hoy está la Escuela Politécnica de París, y murió en 1382, siendo obispo de Lisieux,

aún, una sea más inevitable y peor que la otra. Esto puede suceder en dos formas: a) Como el resultado de una diferencia en intensidad; y, b) Como resultado de una diversidad en la configuración de su deformidad. Como ejemplo del primer caso, sean A y B dos dolores, donde A es dos veces más intenso que B y de la mitad de extensión (…) El dolor A es asimilado a un cuadrado, el dolor B será asimilado a un rectángulo (donde el lado más largo denotará la extensión y cada alto, la intensidad del dolor en un punto de la extensión)"[17]. Con ello Oresme incorpora la potencialidad del dibujo geométrico al estudio del devenir de las cualidades.

Desde entonces, la evolución temporal comienza a ser representada mediante una línea continua.

Podemos ver que en su dibujo, Galileo coloca el tiempo (segmento AB, Fig. 2) paralelo al desplazamiento (segmento CD) y perpendicular al tiempo, coloca la velocidad.

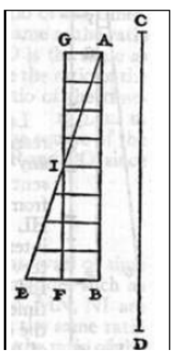


Fig. 2

Gráfica que construye bajo la premisa del desplazamiento de un punto. Por su parte, en gráficas de variación de distancias - como las reseñadas por Tartaglia - no se muestra al tiempo sino solo trayectorias. Posteriormente, los trabajos de Fermat y Descartes respecto de la geometría Analítica permiten el estudio de de ecuaciones a través del significado de las curvas y el estudio de curvas definidas por ecuaciones, en la cual dos cantidades desconocidas en una ecuación, más bien entendidas como segmentos, uno medido horizontalmente (x en Fig. 3) a

[17] 1353, Tractatus de configuationibus qualitatum et motuum.

la derecha de un origen y el otro como una ordenada vertical ubicada en el extremo del primero (y en Fig. 3), dan origen a una curva o lugar geométrico, permitiendo que herramientas geométricas se usen para resolver problemas algebraico y viceversa. De este modo Newton tiene a su

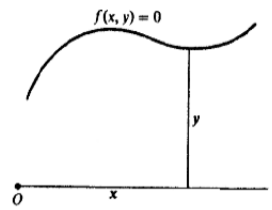


Fig. 3

disposición una amplia gama de marcos conceptuales para su trabajo con el movimiento, permitiéndole conformar su paradigma geométrico en cual gráfica es el resultado de la traza de un punto que se mueve. Por su parte Newton entiende el tiempo, como “eterno e infinito, omnipotente y omnisciente; esto es, su duración se extiende desde la eternidad a la eternidad y su presencia del infinito al infinito…” (Principia), configurando un tiempo externo a las cosas. Sin embargo para el estudio de las curvas o más bien los problemas de un espacio que es atravesado por algún movimiento local”, considera a las “cantidades [que conforman la curva, es decir las coordenadas x e y] como si fueran generadas por incrementos continuos, a la manera de un espacio descrito por el recorrido de un objeto que se mueve” (Newton,1736). El tiempo ha de ser entonces representado en la curva por una cantidad que se incrementa de modo continuo. Así logra trabajar con un tiempo más manejable que el ya descrito o “formal”, y entonces recurre a la noción de duración que es aquella “cantidad a través de cuyo incremento o flujo uniforme se expresa y mide el tiempo” (Díaz, 2005). Posteriormente la comunidad matemática logra una representación del tiempo a partir de una metáfora de flujo continuo, coherente con la representación como la línea continua, que porta números reales. Como señala Lakoff y Nuñez (2000) “El tiempo es distancia” y desde ahí surge el tiempo isotópico e irreversible y dando un contexto para el trabajo con el tiempo formalmente entendido y alejado de aquel que construimos en nuestra cotidianidad.

En resumen, la gráfica porta en su construcción e interpretación propiedades de desplazamiento (es la traza de un punto) sobre una superficie, pero sin embargo en su interpretación la variable tiempo, ha de ser significada desde la variación en distancia geométrica que se aprecia en la variación temporal de la variable que se analiza.

Experimentación

En el marco del trabajo realizado en el proyecto Fondecyt 1030413 (Díaz, Gutiérrez, Ávila y Carrasco, 2006) se solicitó a estudiantes de décimo año escolar que describiesen situaciones de cambio para comunicarlas a quienes no las presenciaron, siguiendo en esta actividad, la metodología usada por Arrieta en su trabajo doctoral (Arrieta 2003) Se definieron dos situaciones que grupos distintos verían y comunicarían de modo escrito a quienes no las hubieren presenciado. Ellas fueron: i) Tres desplazamientos del docente por la sala. El primero a velocidad constante, el segundo comenzando más rápido que el primero y terminando de modo más lento, y, el tercero de modo inverso al segundo; e ii) Escuchar los primeros 45 minutos de una melodía a base de percusiones, que comienza con unas campanas a intervalos regulares y poco a poco incorpora otros instrumentos de percusión.

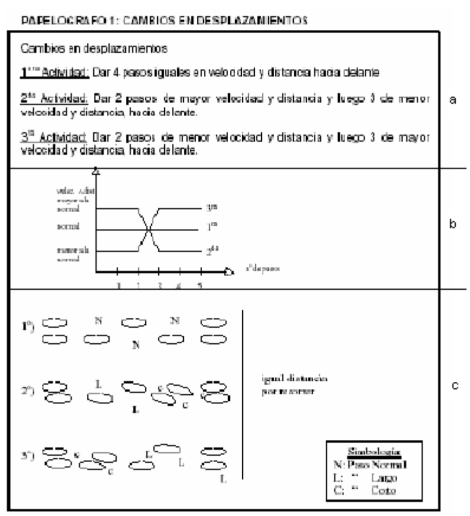


Fig.4[18]

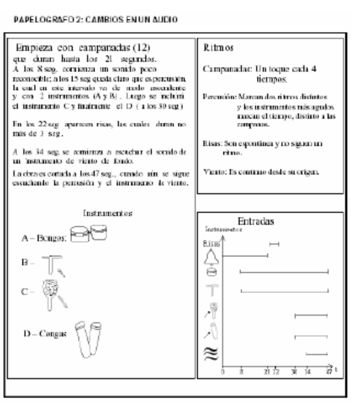
El objetivo de la experiencia fue relevar las herramientas que usan los estudiantes para comunicar cambios en el tiempo y, en particular, si recurren al tiempo en su comunicación.

Respecto de la primera situación los estudiantes recurrieron a un relato y a una gráfica en ejes cartesianos, que no incorpora el tiempo y el dibujo de los pasos del docente (fig. 1a). Si nos focalizamos en

[18] Díaz et al, 2006; pp. 105

la descripción de la distancia recorrida, los estudiantes dibujan la trayectoria, es decir, marcan las huellas que dejarían los pasos del docente, y revelan una estrategia no efectuada por el caminante, a mayor velocidad los pasos son más largos (fig. 1c). El tiempo por tanto queda implícito, abierto a la reconstrucción del lector de la trayectoria. Por su parte recurren a un plano cartesiano cuando necesitan mostrar la velocidad del desplazamiento, otra variable a describir. En éste, si bien no marcan el tiempo en el eje de las abscisas, colocan el número de pasos dados, entendidos como marcas regulares. Numerizan el avance de los pasos como un reloj pone números al avance de los segundos. En el eje de las ordenadas representan la velocidad. Observamos en su producción escrita, que el foco de atención de los estudiantes estuvo en lo visible y lo corporal: en la dirección (hacia delante), cantidad de pasos (cinco), tipo de paso (largo, normal o corto) y velocidad (cualitativa corporal al sujeto en una especie de simbiosis velocidad/distancia). Usan, para la rapidez del desplazamiento, en una primera mirada, categorías dicotómicas respecto a un referente (en este caso el primer desplazamiento que llaman normal), señalan que la rapidez es mayor/menor que la rapidez del primer desplazamiento, dando cuenta de categorías dicotómicas de entendimiento (Díaz, 2005).

El segundo fenómeno consistió en los primeros 45 minutos de una melodía con base en percusiones (candombe Uruguayo).



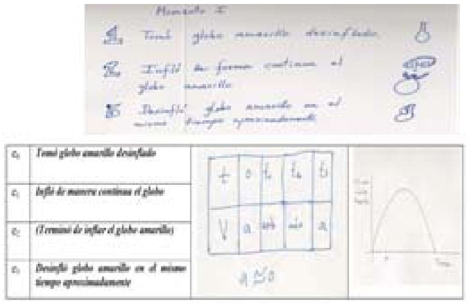
Fig[19]. 5

Los estudiantes en esta situación reconocieron los diferentes sonidos presentes en la grabación y también su duración. No obstante, no precisan exhaustivamente en su descripción de “lo que cambia”, la intensidad de los sonidos.

[19] Díaz et al, 2006; pp. 108

El tiempo surge en sus descripciones relacionado o codefinido por el vocablo ritmo. En esta situación, que no se presenta visualmente y en que los estudiantes se ven desafiados a comunicar la coordinación entre varios sonidos, emerge un tiempo paramétrico y que coordina acciones (Toboso, 2005; Carrasco, 2006). El gráfico utilizado incorpora naturalmente un eje temporal. Este permite la articulación de los sonidos, los cuales se van representando mediante segmentos de avance continuo. En el eje de las ordenadas se representan los diversos instrumentos. Esta situación muestra la necesidad de un tiempo coordinador que permita entender la articulación de los sonidos de éstos. De igual forma que en el fenómeno anterior, los estudiantes recurren a descripciones textuales del fenómeno (Díaz et al, 2006).

Por su parte, Díaz (2007b) muestra que cuando a un grupo de profesores de matemática se les enfrentó a la tarea de describir el fenómeno de inflado de un globo, con igual consigna que a los estudiantes, describir cambios por medios escritos a quienes no vieron los cambios, el profesorado recurre al cómic como su primer medio de comunicación (ver figura 2). Los profesores añadieron al cómic los registros tabular y gráfico (ver figura 3). En términos de Gubert (1987; p.222, citado en Díaz, 2007b): "*Los cómics iconizan la temporalidad en forma de espacios cambiantes construidos por imágenes icónicas fijas*". En las producciones docentes señala Díaz (op.cit.; p. 417) *"se trata de una forma de comunicación que construye su articulación narrativa por medio de imágenes fijas y textos complementarios. Habrá tantas escenas fijas como las "omisiones/novedades" que por un lado separan y por otro liguen a dos eventos consecutivos. Quien lee construye su conciencia de temporalidad atendiendo mentalmente a la sucesión de los hechos o eventos, su duración y la duración del intervalo entre ellos -a través de la omisión/novedad que separa y enlaza a dos dibujos consecutivos. Entonces el tiempo de la actividad será la agregación de la duración de cada evento y la duración de cada intervalo entre ellos, levantándose una estimación cualitativa de tiempos desde la conciencia temporal que favorece el cómic".* Observamos que el cómic funge como herramienta de trabajo en procesos de construcción de la temporalidad sico-social que describiera Piaget cuando señala que el tiempo paramétrico - cotidiano se construye en una sucesión de "imágenes de los hechos". En la herramienta del cómic las secuencias sucesivas de imágenes cambiantes informan variaciones en el tiempo y permiten una mejor construcción de tablas y gráficas constituyéndose en un eslabón importante en la modelización del fenómeno.



Coordinación de registros de comunicación caso globo amarillo: Escenas Cómic - Puntos Tabla - Gráfico

Fig[20]. 6

Conclusiones

Se reconocen elementos centrales al trabajo con la graficación de variaciones en el tiempo. En primer lugar, entender al tiempo matemático como una construcción de la cultura matemática. Por ello requiere de mediaciones didácticas para que los estudiantes la hagan propia. El tiempo matemático-escolar queda implícito en las descripciones gráficas de trayectorias de movimiento del docente por la sala. Surge en la descripción gráfica cuando el estudiantado debe comunicar coordinaciones de sonidos musicales, más que desplazamientos. Noción cotidiana de un tiempo de coordinación de acciones, un tiempo paramétrico-social, cercano al tiempo matemático y que pone en escena el estudiantado para describir coordinación de variaciones de uno o más parámetros. Tiempo que ha construido en sus actividades diarias el estudiantado (Carrasco, 2006) y que difiere del que ha construido la comunidad matemática.

Un segundo elemento, es el cómic o secuencia de imágenes, como elemento central del momento genético de la representación de variaciones en el tiempo. Elemento recurrido

[20] Díaz 2007b;

tanto por profesores - investigadores (Diaz, 2007b) como por los alumnos cuando necesitan representar y entender situaciones de cambio en el tiempo (Díaz et al, 2006).

Un tercer elemento, que reconocemos en el trabajo con gráficas, es la posibilidad del estudiante de incorporar a sus argumentaciones marcos conceptuales que son evocados en la visualización de estas. Argumentaciones que responden a las redes de significado que el estudiantado enacta en el ambiente gráfico. Redes construidas tanto en su experiencia escolar como en su biografía de vida (Ávila, 2006).

Podemos por tanto considerar a las gráficas como espacios de argumentación, en el sentido de abrir, desde la imagen, la posibilidad de construir argumentos sobre el fenómeno, evocando para la construcción argumentativa, diversos campos conceptuales tanto de la propia matemática, como son: otros registros de representación (algebraico, analítico, tabular); experiencias de desplazamiento espacial, "la gráfica sube hacia la derecha", "hacia la izquierda de la gráfica los puntos están más abajo"; o, nociones culturales del tiempo, usadas para trabajar con la gráfica, construcciones sociales que el estudiantado enacta al trabajar con gráficas de variación en el tiempo (Carrasco, 2006).

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003) *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Ávila, J. (2006). *Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México

Ávila, J. Carrasco, E. (2002) *Dificultades en la interpretación de gráficas*. Ponencia presentada a la XVI RELME. La Habana, Cuba.

Boyer, C. (1999) *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral R. (2000) *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Editorial Trillas. Mexico.

Carrasco, E. (2006) *Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada, Cicata, México.

Díaz, L. (jul.; 2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. En *RELIME*, Vol. 8, Núm. 2, julio, 2005, pp. 145-168

Díaz, Gutiérrez, Ávila y Carrasco (2006) *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Proyecto Fondecyt Nº1030413. Informe Final. Santiago de Chile.

Díaz, L. (2007a) Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano *(pp. 287-308). México DF, México. Díaz de Santos-CLAME A.C.*

Díaz, L. (2007b) Coherencias Cognitivas vs Matemáticas en el Estudio del Cambio. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 20., pp. 394-399. México, D.F.

Dolores C., Guerrero, L.A. (2004) Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores y estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 17. Chile.

Hitt, F (1998) Visualización Matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista de Educación Matemática*, vol. 10, nº 2, pp. 23-45. GEI. México

William H. (fl. ca. 1350) *Uniform and Nonuniform Motion and The Merton College Mean Speed Theorem*. [Versión electronica] Translated by Ernest A. Moody Reprinted in A Source Book in Medieval Science (pp.237- 241) from The Science of Mechanics in the Middle Ages.

Lakoff, G. Núñez, R. (2000) Where *Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. EEUU: Basic Books.

Newton, I. (1736) *Tratado de Método de Series y Fluxiones*. Traducción Iztaccíhuatl Vargas. Primera Edición (2001), Servicios editoriales de la Facultad de ciencias, UNAM. México

Oresme N. (1370) *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*. [Versión electrónica] English translation, and commentary by Marshall Clagett. Univ. of Wisconsin Pr., 1968. Madison, Wisconsin

Osorio J. (2004) *Metáfora y Análisis Conceptual del Discurso*. Obtenido el 10 de julio del 2004 de http://www2.udec.cl/~prodocli/serie/.

Roth, W.-M. (2004). Emergence of graphing practices in scientific research. [version electronica] *Journal of Cognition and Culture*, 4, 595-627.

Toboso, M. (2003). Tiempo y sujeto: nuevas perspectivas en torno a la experiencia del tiempo. *A Parte Rei. Revista de filosofía* v(27) . Obtenido en agosto 30 de 2007, de http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/toboso.pdf

SOBRE LAS RUPTURAS CONCEPTUALES EN LA CONSTRUCCIÓN ESCOLAR DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Gustavo Martínez Sierra
Programa de Matemática Educativa México
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional
gmartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Lo aquí presentado es parte de los resultados de una línea de investigación que busca elaborar explicaciones de los procesos sociales de generación de conocimiento matemático. En particular estamos interesados en el estudio de los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado procesos de convención matemática (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez-Sierra, 2002; Martínez-Sierra, 2003, 2005, 2006). De manera más específica lo aquí presentado es continuación de nuestro anterior trabajo (Martínez-Sierra, 2007) en donde presentamos los procesos de convención matemática presentes en la inclusión de las funciones trigonométricas (FT) en el contexto del análisis euleriano. Lo aquí presentado tiene por objetivo describir y explicar, desde la perspectiva de los procesos de convención matemática, algunas de las rupturas conceptuales presentes en la construcción escolar de las funciones trigonométricas en tanto funciones de variable real.*

Palabras clave: construcción de conocimiento, convención matemática, funciones trigonométricas, construcción escolar

Introducción

Una de las tesis con las que se ha articulado una parte de las investigaciones desde la perspectiva *socioepistemológica* en Matemática Educativa en México (Cantoral y Farfán, 2003, 2004; Buendía y Cordero, 2005) es aquella que sostiene que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son específicos del concepto o sistema conceptual matemático de que se trate. A lo anterior suele agregarse la consideración de que los conocimientos matemáticos no fueron construidos para ser objetos de enseñanza; por lo que la "matemática escolar" es cualitativamente diferente a la "matemática". Apoyados en las consideraciones anteriores se han desarrollado investigaciones que ofrecen explicaciones acerca de las particularidades, en tanto su construcción conceptual, de las funciones trascendentes, logarítmicas (Ferrari 2001), exponenciales (Lezama 2005, Martínez-Sierra 2002, 2003) y trigonométricas (Buendía y Cordero 2005, Montiel 2005).

En trabajos previos (Martinez-Sierra, 2005) hemos desarrollado algunas nociones teóricas que han sido útiles, por un lado, en la explicación de algunos fenómenos didácticos y, por el otro, en la interpretación de procesos de construcción de conocimiento. En particular, en el plano de la construcción de conocimiento, hemos dado evidencia de que ciertas piezas de conocimiento, a las que hemos llamado convenciones matemáticas, pueden ser entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o proceso de integración de conocimientos. En este mismo sentido, en el plano de la explicación de fenómenos didácticos, hemos dado cuenta de que algunas de las rupturas conceptuales presentes en la escuela tienen su origen en la desarticulación de cierta parte del corpus de la matemática escolar (Martínez-Sierra, 2005; Méndez, Maldonado y Martínez-Sierra, 2007).

En particular aquí describimos y explicamos, desde la perspectiva de los procesos de convención matemática, algunas de las rupturas conceptuales presentes en la construcción escolar de las funciones trigonométricas en tanto funciones de variable real.

Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

La socioepistemología es una aproximación sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del saber, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza· *“La socioépistémologie procède d’une approche systémique qui permet d’aborder les phénomènes de production et diffusion de la connaissance dans une perspective multiple, qui intègre l’étude des interactions entre l’épistémologie du savoir, sa dimension socioculturelle, les procédés cognitifs asocies et les mécanismes de* *l'institutionnalisation via l'enseignement"* (Cantoral y Farfán 2004, p. 139). Más precisamente, dentro de la teoría socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes dimensiones interdependientes son las que condicionan/determinan la construcción y la difusión del conocimiento matemático: las dimensiones cognitivas, didácticas, epistemológicas y sociales. Estas últimas condicionan/determinan, a su vez, las tres primeras. La *dimensión didáctica* atiende a aquellas circunstancias propias del funcionamiento de los diferentes sistemas didácticos y de enseñanza. La *dimensión cognitiva* se ocupa de las circunstancias que son relativas al funcionamiento y la actividad mental de las personas. La *dimensión epistemológica* se aboca a aquellas circunstancias *que* son propias de la naturaleza y significados del saber matemático. La *dimensión social* atiende a las circunstancias conformadas por las normativas y valoraciones sociales del saber y la manera en como éstas influyen en las demás dimensiones. En este sentido, las prácticas del artesano, del ingeniero, del médico, del profesional, o más ampliamente de una época o una cultura, son consideradas como constituyentes indisociables del saber escolar.

El proceso de convención matemática en la construcción de las FT

Un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la *práctica de integración sistémica de los conocimientos*; es decir existe una *normativa de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes (Martínez-Sierra, 2003, 2005).

Esencialmente, la búsqueda de integración puede resolverse optando por alguna de las siguientes vertientes: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Así vista *la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados*.

Desde el punto di vista anterior hemos hecho estudios sobre la articulación de las funciones trigonométricas al corpus del análisis euleriano que muestran la presencia de convenciones matemáticas que permitieron lograr la articulación de las funcions trigonométricas al análisis euleriano (Martínez-Sierra, 2007). En particular a través del análisis de la obra de Euler (1738, 1755) hemos podido interpretar que la articulación mencionada fue posible a través de la "analitización" de las *cantidades que nacen del círculo* a través de las relaciones siguientes: 1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 2) $\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$ y 3) $\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$. En base a esto Euler (1738) pudo desarrollar el serie de potencias a las funciones *sin* y *cos* para con ello elevarlas a la calidad de funciones (en el sentido de euleriano) y además por primera vez (Katz, 1987) las funciones trigonométricas fueron insertadas al cálculo diferencial e integral en (Euler, 1755) en base a al desarrollo de potencias y las relaciones mencionadas.

Las rupturas conceptuales en la construcción escolar de las FT

En el mismo sentido anterior, pero desde el punto de vista de la articulación de la matemática escolar hemos podido constatar que existen diferentes convenciones presentes en la construcción escolar de las funciones trigonométricas que pueden ser interpretadas, a su vez, como portadoras de rupturas conceptuales: 1) El transito grado-radian-real para las funciones trigonométricas y 2) ángulos negativos y mayores de 360º. Al respecto hemos podido interpretar que en la construcción escolar de las funciones trigonométricas en el sistema educativo mexicano, la definición de los ángulos negativos y mayores de 360º y el tránsito al uso de los radianes son producto de una "*convención matemática escolar*" para la definición de las funciones trigonométricas como funciones de variable real.

Este último aspecto, en relación al uso escolar de los radianes como paso previo para la definición del dominio real de las funciones trigonométricas, ocasiona una serie de rupturas conceptúales que son el origen de una variada cantidad de fenómenos didácticos en relación al estatus de las funciones trigonométricas en el marco del Cálculo Diferencial e Integral. En términos generales los fenómenos didácticos señalados los consideramos subsidiarios de la al menos dos *prácticas sociales,* reproducidas en escenarios escolares. La socioepistemología comparte la inclusión de una visión social y cultural en la disciplina y específicamente contribuye en la búsqueda de "aquello" (que nombramos la práctica social) que estando presente en la cultura y en el pensamiento no es parte de un saber escolar; empero, posibilita su construcción y difusión. La primera consiste en considerar a los radianes como otro sistema de medición de ángulos que cumple las mismas funciones que la medición del sistema sexagesimal o cualquier otro sistema de medición. Está práctica es fácilmente detectable en los libros de texto en aquellas secciones dedicadas a ejercitar las reglas de transformación de unidades de un sistema a otro. La segunda práctica que hemos detectado consiste en la *destematización* (es decir el considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las funciones trigonométricas.

Las dos prácticas señaladas determinan fuertemente diferentes concepciones que poseen estudiantes y profesores del nivel medio superior mexicano (alumnos de 12 a 15 años) en relación a las funciones trigonométricas. Un ejemplo de tales concepciones es aquella que provoca considerar que el dominio de las funciones trigonométricas son dimensionales con la unidad en grados o radianes. Esta concepción provoca que no sea posible interpretar adecuadamente, al mezclar los valores de *x* con números reales y cantidades en grados, diversas expresiones de usos frecuentemente en el Cálculo Diferencial e Integral, como por ejemplo: $f(x) = x + \sin x$, $f(x) = x^2 + \sin x$, $\int_0^1 (\sin x)dx = -\cos x\big|_0^1$ o $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

La metodología que hemos seguido para identificar y clasificar los fenómenos señalados ha sido la realización de diferentes análisis como los son el análisis de libros de texto y el análisis de entrevistas a profesores y estudiantes del nivel medio superior mexicano. A continuación mostramos algunas evidencias en que se basan nuestras afirmaciones anteriores. Para más detalles se puede consultar (Méndez, 2008).

Las rupturas presentes en los libros de texto del Nivel Medio Superior

Tras el análisis de diferentes libros de texto utilizados en el nivel medio superior (NMS) mexicano podemos identificar la presencia de un patrón común en la construcción de las FT, el cual consiste en seguir las transiciones $\text{grados} \to \text{radianes} \to \text{reales}$ en el dominio de las FT (Ver Figura 1).

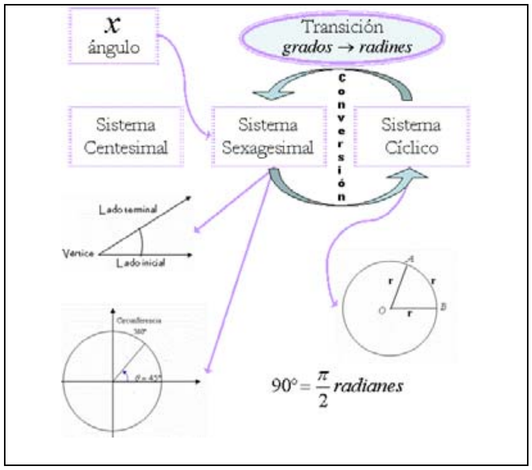


Figura 1. Patrón en la construcción de las FT

en los libros de texto

Has dos puntos importantes que a resaltar del análisis de los libros. El primero es observar que no se hace explícito los motivos por los que repentinamente aparece un sistema de medición de ángulos como son los radianes. El segundo consiste en observar la *destematización* (es decir el considerarlos como objeto de estudio desde el punto de vista conceptual) del tránsito de los radianes a los números reales como argumento de las funciones trigonométricas (Ver Figura 2). Esto puede percibirse en las frases que algunos de estos libros presentan, como por ejemplo: "*se acostumbra omitir la palabra radianes*", "*cuando se usa el valor de un ángulo en radianes, no suelen indicarse las unidades*", "*por comodidad y simplicidad omitiremos la palabra radianes*".

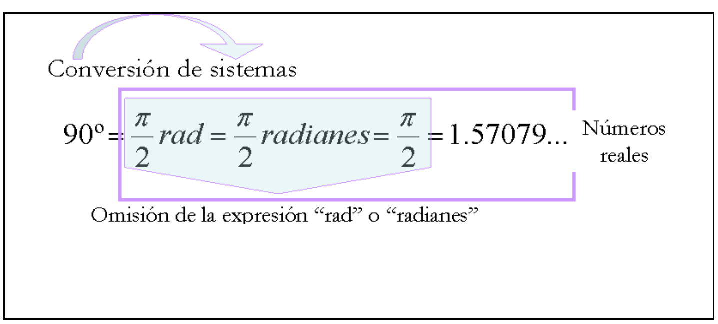


Figura 2. Patrón en los libros de texto en la destematización

del tránsito de los radianes a los números reales

Las rupturas presentes en profesores del NMS

Con base en lo encontrado en el análisis de los libros de texto se diseñó una entrevista a cuatro profesores de diferentes instituciones educativas del NMS mexicano. La entrevista constó de dos fases. La primera fase se refiere a las primeras cinco actividades que tienen como objetivo detectar las concepciones que los profesores tienen de las características del dominio (el valor de x en sus diferentes posibilidades como grados, radianes o números reales) e imágenes de las FT, mientras que la segunda constó de tres actividades con el propósito de detectar las concepciones que los profesores tienen respecto al significado de las operaciones entre funciones trigonométricas y funciones algebraicas.

La principal señal de la ruptura conceptual que encontramos en los profesores se presenta cuando se encuentran ante la decisión de en que momento pueden utilizar la medida angular sexagesimal, la cíclica o utilizar números reales. Por ejemplo, en una de las actividades un profesor asigna valores a x reales, mientras que a la x de sin x la de le da valores en grados a pesar de que ambas expresiones constituyan una sola expresión ya sea en una adición o en una razón. Hacia el final de la actividad se da cuenta que le da valores a x en un sistema y en otro y consideró que era imposible hacer eso. Sin embargo, no corrige lo realizado en la actividad dado que aún no estaba convencido de que medida angular debería usar en que momento (Ver Figura 3). En el mismo sentido, al parecer, era tal la confusión sobre que tipo de medida angular debe utilizar en ciertas actividades que en varias de ellas los profesores omiten respuesta argumentando que son temas que no se tratan en el NMS y mencionan que son temas complicados a los que por falta de tiempo solo se pueden ver cómo teoremas o características de las FT.

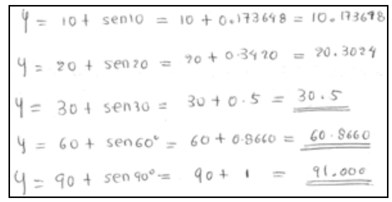
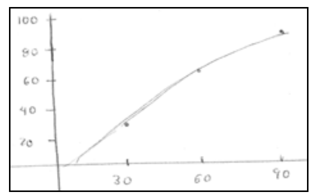
<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 2.1 ¿Cómo le explicaría a un estudiante la construcción de la gráfica de la función y = f(x) = x + sin(x)?</td></tr>
<tr><td>En este momento el entrevistado intenta aclarar que los valores de x son en grados, por lo que agrega el símbolo ° (para grado) a las ultimas dos expresiones, sin embargo no lo hace en la expresión de x sino que solo lo agrega en la expresión sen (x)</td><td>Le da valores a x sin determinar si son grados o radianes, y comienza sustituyendo los valores de x en y = x + sin(x)

</td></tr>
<tr><td>Al finalizar al intentar explicar que si lo había hecho en grados se da cuenta que estaría sumando un numero real con una medida angular expresada en el sistema sexagesimal, por lo que dice que no se puede y que los valores de x si eran de un principio números reales.</td><td>Gráfica la expresión en y = x + sin(x) de la siguiente manera.

</td></tr>
</table>

Figura 3. Asignación de valores a la variable x

Referencias bibliográficas

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics,* 59(2).

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53: 255–270.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2.3), 137 - 168.

Euler, L. (1738/1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Euler, L. (1755/1787). Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum (Vol. 1). TICINI. Tiphographeo Petri Galeati.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14*. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I*. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Katz, V. (1987). The Calculus of the Trigonometric Functions. *Historia Mathematica* 14, 311-324

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 287-318.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 5(1), 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 195-218.

Martínez-Sierra, G. (2006). Los procesos de convención matemática como constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19* (pp. 745-751). México: CLAME. ISBN: 970-9971-08-5.

Martínez-Sierra, G. (2007). Los procesos de convención matemática y la inclusión de las funciones trigonométricas en el marco del análisis euleriano. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 20* (pp. 602-608). México: CLAME.

Méndez, C. L., Maldonado. E. S. y Martínez-Sierra, G. (2007). Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: la transición grados → radianes → reales. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 20* (pp. 573-578). México: CLAME.

Méndez, C. (2008). *Sobre la construcción escolar de las Funciones Trigonométricas: La transición grados → radianes → reales en el Nivel Medio Superior.* Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas.

Montiel G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, México.

DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE GRAFICACIÓN EN LA ANTIGÜEDAD

Apolo Castañeda Alonso
CICATA Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Programa de Matemática Educativa-IPN — México
apcastane@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Medio

Resumen. *En este artículo se presenta un estudio socioepistemológico del desarrollo de la noción de graficación entendida como una actividad vinculada al estudio o tratamiento de las funciones. Aunque no fue sino hasta finales del siglo XIX cuando se define a la función tal y como la conocemos ahora, nuestro estudio en la época antigua en la que se evidencia el uso de las gráficas y se concluye la existencia de procedimientos, estrategias o ciertas técnicas que conduce a la graficación.*

Palabras clave: graficación, función

La Epistemología en la Investigación en Matemática Educativa

Los estudios de carácter epistemológico ofrecen explicaciones de la naturaleza de los objetos matemáticos al analizar su origen y desarrollo, los criterios y condiciones de su validez, su consistencia lógica, entre otras (Albert, 1998). Sin embargo es posible llevar la investigación a enfoques más específicos, y para los matemáticos educativos (Sierpinska & Lerman, 1996) este tipo de estudios provee de explicaciones detalladas de los procesos por los que se desarrolla una idea matemática; observando las condiciones de desarrollos pasados, los momentos en los que se negocian y agregan significados ampliándose campos de estudio o los puntos en la historia en los que se descartan ideas y nociones asociadas a los conceptos en cuestión.

Sin embargo, cuando se trata de indagar las condiciones de creación y desarrollo de las ideas matemáticas, así como las circunstancias sociales o culturales que posibilitan su construcción o los factores extra-matemáticos que moldea y permea el conocimiento, una epistemología en el sentido tradicional no alcanza a ofrecer explicaciones sobre este tipo de preguntas de naturaleza sociocultural. Se requiere entonces de un acercamiento epistemológico sensible a reconocer, entre otras; la naturaleza del conocimiento, los procedimientos de comunicación hacia los colectivos, así como los mecanismos por los que una cultura ejerce influencia en la formulación de ese conocimiento. Esta visión incluyente a la que la que se ha llamado socioepistemología (Cantoral, 2001) da cuenta de estas explicaciones al reconocer que existen variables del tipo social y cultural en los procesos de validación de las ideas (negociación de significados) así como en los procesos de comunicación y difusión.

El estudio de Lizcano (1993) en relación a la construcción de la noción de negatividad en el antiguo oriente, mostró que el desarrollo de esta idea estuvo determinada por significados sociales y culturales; como el devenir de las fuerzas o la complementaridad en la naturaleza. Así los números negativos, guardan profundo significado con su cultural;

> *Las "formas de negatividad que no surgen propiamente de los campos antes acotados (refiriéndose a distinciones de género en Grecia) ni tampoco se derivan de un cierto concepto previo de número. Surgen directamente en un campo: el de unos nombres/números/palillos opuestos que se destruyen mutuamente cuando se está tratando de crear un vacío en un espacio de representación".* (Lizcano, 1993; p. 19)

En Cantoral, (2001) se puede observar otra descripción de la influencia de variables socioculturales en el desarrollo de la matemática;

> *"Es un hecho conocido que no todas las culturas desarrollaron la noción del cero. Particularmente el cero fue inventado en aquellos escenarios socio-culturales en los que el imaginario colectivo y el tratamiento que este hacía de las representaciones de ausencia – como muerte por ejemplo".*(Cantoral, 2001; p. 67)

El significado que construye cada grupo social está en función de sus códigos y significados compartidos los cuales están incorporados a su propia cosmogonía. Es de esperar que cuando una persona ajena a un grupo que estudia ciertos objetos de saber su condición no le permite reconocer otras componentes de tipo social-cultural que están inherentes a esos objetos. Por esta razón la perspectiva socioepistemológica de investigación asume importante el reconocimiento de variables sociocultural así como de las prácticas que son generadoras de conocimiento y, en general, de las condiciones en un contexto por las una idea se construye.

Sobre la noción de *graficación*

Un trabajo clásico en relación al concepto de función es la obra de Youschkevitech, (1976) quién documentó a través de un estudio histórico el desarrollo del concepto de función, este análisis inició con una descripción de los manejos de ciertas relaciones numéricas de los Babilonios y hace un amplio recorrido analizado finalmente las formulaciones del siglo XIX. En este análisis histórico identificamos un episodio que impactó notablemente el desarrollo del concepto de función, nos referimos específicamente a las contribuciones de Descartes en relación a plano ordenado. Este desarrollo significó contar con un método analítico para expresar relaciones funcionales a través de trazos geométricos sobre un plano, lo que permitió posteriormente la formulación del cálculo infinitesimal.

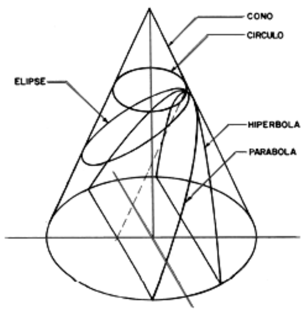
Pero la necesidad de un plano o de un sistema de referencia para expresar información gráfica proviene desde mucho antes. Los astrónomos Hiparco y Ptolomeo desarrollaron las primeras formas de un sistema de coordenadas para designar lugares en la superficie de la Tierra indicando su *longitud y su latitud* (medidas de este a oeste y de norte a sur respectivamente).

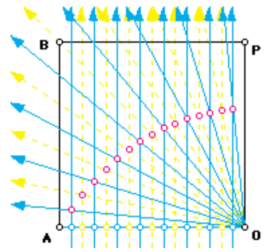
Los descubrimientos geográficos y la posibilidad de establecer nuevas rutas comerciales detonó el desarrollo de la cartografía, un primer gran sistema de referencia para ubicar posiciones, lugares y organizar exploraciones. En el campo de la ciencias, una notable contribución a mediados del siglo XIV de Nicolás de Oresme permitió una interpretación de datos a través de una expresión gráfica, descubrió que había más o menos una equivalencia *lógica* entre tabular y representar gráficamente datos, y propuso utilizar una gráfica para representar una magnitud variable cuyos valores dependen de los de otra magnitud, representó las intesidades variables de cantidades tales.

Los intentos atribuidos a los primeros pitagóricos, por determinar las leyes más sencillas de la acústica, son tipos en la búsqueda de interdependencias cuantitativas entre diversas cantidades físicas como, por ejemplo, las longitudes y los tonos de las notas emitidas por cuerdas de la misma especie, al ser pulsada bajo tensiones iguales. La más antigua tabla de cuerdas que se conoce es la que se encuentra en el *almagesto de Ptolomeo*, obra en la figuran también numerosas tablas astronómicas.

Figura 8
Almagesto, 1482

Los griegos no se limitaron al uso de relaciones en tablas numéricas. El papel principal en la teoría de las cónicas lo desempeñaron sus síntomas, es decir aquellas propiedades planimétricas básicas de las curvas correspondientes que se derivan de forma inmediata de su definición estereométrica original, como las secciones planas del cono. Así se inicia el trabajo con curvas desde los griegos, con el manejo de las secciones cónicas (375–325 a. C.), el quadratrix (aproximadamente en el año 420 a.C.), the archimedian spiral (225 a.C.), entre otros.





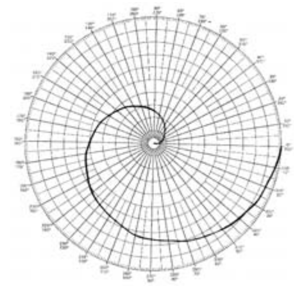


Fig. 8 Fig. 9 Fig. 10

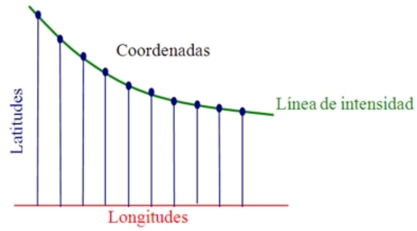
Secciones cónicas Quadratrix The Archimedian spiral

Relaciones funcionales y gráficas en la Edad Media

A partir del siglo XIII, las matemáticas tienden a ocupar un lugar cada vez más importante en las ciencias de la naturaleza, se empieza a poner en duda la estricta demarcación establecida por Aristóteles entre ellas y las ciencias físicas. Según Crombie (1983), del siglo XII al XVII, se considera como el periodo de la penetración progresiva de las matemáticas en el dominio que se creía pertenecía exclusivamente a las ciencias físicas.

El matemático y Obispo de Lisieux Nicole Oresme (1323-1382) en su obra *Teoría de las latitudes y formas* explicó que *"La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas. [.]. Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo"* (González, 1992; p. 42). Oresme deseaba representar los fenómenos de forma geométrica pero, por la complejidad de la representación en tres dimensiones se apoyaba en representaciones bidimensionales.

Con la teoría de las latitudes de las formas se inicia el manejo de variables dependientes e independientes (aunque estas no son expresadas en esos términos). En esta teoría se puede observar que la latitud de una cualidad es una cantidad variable dependiente de su longitud y la línea cúspide es la representación gráfica de alguna relación funcional continua.

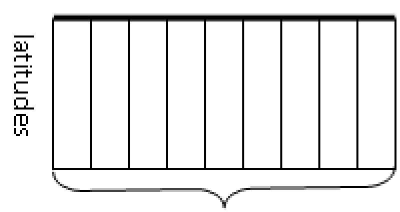


Las coordenadas que se utilizaban en el siglo XIV (latitud y longitud) siempre se referían a los puntos de una curva, y no a los puntos arbitrarios del plano. Sin embargo la misma receta es válida incluso por lo que toca a Descartes.

Como resultado de su estudio anterior Oresme establece una clasificación de las principales clases de formas o cualidades lineales (basado en la forma de las gráficas).

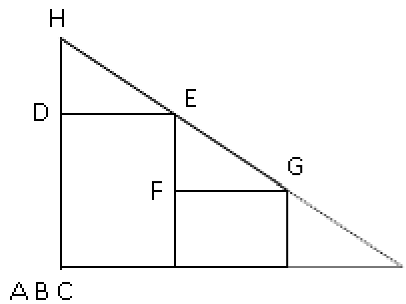
1. *Cualidad o forma uniforme, con latitud constante* y cuya línea de intensidad es paralela a la línea de longitudes (rectángulo).

línea de intensidad



Longitudes

2. Cualidad o forma uniformemente irregular o diforme, es aquella en que si se toman tres puntos cualesquiera, la razón de distancias entre el primero y el segundo, y entre este y el tercero, es igual a la razón de los excedentes de intensidad del primer punto con respecto al segundo y este con respecto al tercero, de estos tres puntos, llamo primero a aquel que posee la mayor intensidad



DE ∥ AB

FG ∥ BC

DE = AB

FG = BC

Δ HDE

Δ EFG

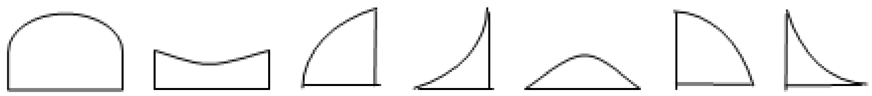
$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{HD}{EF}$$

$\frac{DE}{FG} = \frac{HD}{EF}$ HD y EF son los excedentes

Esta simbología no fue usada por el autor, se ha agregado para explicar el planteamiento hecho por Oresme.

3. *Cualidad o forma irregularmente irregulares o diformemente diformes*, a esta clasificación pertenecen todos los demás casos. Esta es la clase más abundante de cualidades o formas.

Oresme distingue cuatro clases simples de cualidades o formas:



Y sesenta y dos compuestas, cuyas líneas de intensidad están conformadas por dos o más arcos o por segmentos de rectas

Oresme introduce al menos implícitamente cinco ideas innovadoras:

a) La medida de diversas variables físicas por medio de segmentos
b) Una noción de relación funcional entre variables
c) Una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante representación gráfica de relaciones funcionales
d) La constancia de la disminución de la variación en proximidades de un extremo
e) Una especie de integración o sumatoria continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo
f) Una primera aproximación a la *presentación gráfica* de una relación *funcional.*

Conclusiones

Este estudio analizamos el desarrollo la *función* en la antigüedad*,* y hemos identificado a la *graficación* como una actividad *humana* asociada a la representación *gráfica,* En el sentido más general del término , de relaciones funcionales a través de dibujos, trazos y figuras.

La representación gráfica de una relación funcional se usó muchos años antes que las expresiones algebraicas; esta hecho nos hace suponer que el uso de formas gráficas contribuyó a la formulación actual del concepto de función. Los trazos y dibujos no sólo constituyeron formas de expresar las relaciones funcionales sino que a partir de estas imágenes se construyeron explicaciones, se desarrollaron argumentos y se formularon definiciones.

El manejo de las representaciones gráficas también estaba asociado con el planteamiento y solución de problemas de geometría o de la física (como el del braquistócrona), las gráficas también se usaron para modelar las situaciones variacionales o, como en el caso de Oresme, describir comportamientos físicos.

Referencias bibliográficas

Albert, A. (1998). Introducción a la epistemología. En Farfán (Coord. Edit)*, Antologías, número II* (pp. 1-28). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Crombie, A. (1983). *Historia de la ciencia: de San Agustín a Galileo*. (Vol. 1 y Vol. 2). Madrid: Alianza editorial.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Gedisa Editorial, España.

René de Cotret, S. (1985). *Etude Historique de la notion de fonction: Analyse epistemologique et experimentation didactique*. Memoire de Maitrise en Mathématiques. Montreal: Universrté do Quebec.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Mir.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemolgies of mathematics and of mathematics education. En : A. J. Bishop et. Al (eds.), *Internacional Hanndbool of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Struik, J. (1969). *A source book in mathematics,1200-1800*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Struik, J. (1998). *Historia concisa de las matemáticas*. México: IPN.

Youschkevitech, A. P. (1976). *The concept of function up to the middle of the 19th century*. Arch. Hist. Exact. Sci. 16, 36-85.

MATRICES DE SENTIDO PARA LAS NOCIONES DE VELOCIDAD Y TIEMPO

Leonora Díaz Moreno
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación Chile
leonoradm@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *Las distancias entre saberes de la vida diaria, los escolares y los eruditos, afincan sus raíces en matrices de sentido de epistemes propias. Tal ocurre para las nociones de velocidad y tiempo de la matemática del cambio. Una didáctica crítica es desafiada a deconstruirlos, desentrañando su presencia en el sentido común del estudiantado y en los saberes escolares de los que debe apropiarse éste, de modo de proporcionar antecedentes para diseñar y validar puentes de diálogo entre estos cuerpos de saberes. Para colaborar en esta línea, se presentan matrices de sentido para las nociones de velocidad y de tiempo obtenidas en investigaciones de la Matemática del Cambio.*

Palabras clave: pensamiento variacional, velocidad, tiempo

Introducción

Estudiantes de niveles secundario y terciario, presentan dificultades para trabajar con gráficas: representan una caída vertical en el tiempo como un segmento vertical -y, en general- identifican la gráfica de la trayectoria de un móvil con la gráfica de la distancia recorrida en el tiempo ¿Por qué en sus representaciones gráficas no visibilizan al tiempo? Por su parte la voz cotidiana informa *"El más veloz llegó en 15 minutos*" ¿Cómo se explica que este aserto sea comprendido como una rapidez si no aparece la cantidad de la magnitud desplazamiento? En una línea de investigación socioepistemológica en Pensamiento y Lenguaje Variacional (Díaz et al, 2006; Díaz et al, 2007) se reporta aquí un estudio epistemológico de velocidad y tiempo -nociones eruditas, escolares y cotidianas- para visualizar potenciales eslabones para sus aprendizajes.

Velocidad y velocidades

Para la acepción cotidiana de velocidad la Rae - Real Academia Española - consigna la frase *ligereza o prontitud en el movimiento*. En tanto que para la palabra rapidez - a la que se recurre indistintamente en el habla cotidiana – Rae consigna la frase *velocidad impetuosa o movimiento acelerado*. Ambas acepciones cualifican al movimiento: impetuoso, acelerado, ligero, pronto. Estas últimas palabras adjetivas se relacionan a su vez con la noción de tiempo, poca cantidad de tiempo, ese tiempo que ocupa lo liviano en desplazarse. Se trata de una red o bucle de nociones, cuyos núcleos centrales son tiempo, desplazamiento, velocidad, movimiento. Laboriosas invenciones teórico-prácticas ocurrirán para llegar a los contenidos del discurso escolar actual sobre el estudio del movimiento físico -cambio de posición que experimentan las partes de un cuerpo como un todo o las posiciones de sus partes respecto a un sistema de referencia- en orden a determinar la posición de un objeto en cualquier momento.

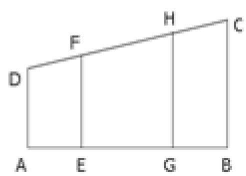


Figura 1

Carrasco, 2006

Aristóteles analiza el movimiento en las categorías de acto y potencia. En su concepción el movimiento es potencia en actualización y por ello es un acto incompleto e imperfecto. Para el estagirita, la causa de los movimientos naturales radicaba en un principio intrínseco mientras que los movimientos violentos exigían una causa externa cuya eficiencia sólo duraba mientras estaba en contacto con el móvil. Los pensadores del Merton College se desplazan desde estas categorías y adoptan un acercamiento formal y especulativo analítico, considerando al movimiento esencialmente como una proporción. Trataron a las variaciones de velocidad - es decir, al movimiento local - como variaciones en la intensidad de una cualidad, enunciando una noción de velocidad instantánea con consideraciones de funcionalidad. Asimismo levantaron distinciones entre dinámica y cinemática. Distinguieron entre las causas del movimiento y los efectos espaciales temporales de movimiento. Definieron un movimiento uniformemente acelerado como aquel en que los incrementos iguales de velocidad se adquieren en períodos iguales de tiempo. Y, enunciaron y demostraron el teorema de la velocidad media. Los aportes de Oxford se continúan con los de Paris, entre los que destaca el de Buridan, quien concibe la noción de ímpetus que fungirá como eslabón entre la concepción aristotélica de causas intrínsecas y extrínsecas, y, las nociones de momentum e inercia de la dinámica newtoniana. La entiende como una fuerza capaz de mover el cuerpo en la dirección en que fue lanzado por el agente. Será mayor cuanto más rápidamente mueva el motor al móvil y cuanta más materia contenga el móvil, de modo que si dos cuerpos se lanzan con la misma velocidad, el más denso y pesado recibirá una fuerza mayor y su movimiento, que tenderá a disminuir debido a la tendencia natural del cuerpo y a la resistencia que encuentra, durará más. Aplicando estas ideas a la caída libre de los cuerpos, Buridan afirmó que, al principio, el cuerpo sólo se mueve por efecto de la gravedad, pero que ésta le comunica un ímpetus que se añade a la gravedad y crece progresivamente al hacerse el movimiento más rápido, lo cual explica el carácter acelerado de la caída. Por su parte Oresme aporta una representación gráfica al devenir de las cualidades. Representa a la cualidad como una longitud. Su devenir queda representado por un segmento (el segmento AB en la figura 1) y su intensidad en cada punto por otro segmento, perpendicular al anterior (por ejemplo, la intensidad en el punto E es el segmento EF de la figura 1) Esta figuración del devenir de las cualidades habría sido el paso decisivo para referir el movimiento a un marco temporal. Su aplicación al estudio del movimiento uniformemente acelerado, resultó en la formulación geométrica del teorema de la velocidad media. Oresme observa que nuestro conocimiento se apoya en los sentidos y es ayudado mediante el recurso a la imaginación. Casi trescientos años más tarde Galileo se levanta sobre la obra de sus predecesores mediatos de Oxford y París, así como de la obra inmediata de su padre. Vincenzo Galilei experimenta y numeriza para argumentar sus concepciones. Se desplaza de lo lineal a lo exponencial desde su taller de luthier renacentista. Combina la práctica y la teoría músical. Levanta experimentos desde los que obtuvo números para argumentar en las discusiones teórico-musicales de su época. Supera los planteos sólo especulativos y lineales de su maestro Zarlino: la consonancia no se define por relaciones de números simples sino de sus cuadrados. Asimismo provee a su hijo de las herramientas teórico prácticas que le permitirán recurrir a un cronómetro musical para medir el tiempo de sus experimentos, con una precisión inalcanzable con los relojes de su época, ya sean relojes clepsidras o relojes mecánicos. Galileo establece entre otros resultados, el principio cinemático de la relación entre el espacio y el tiempo, alcanzando "la esencia" del movimiento de caída de los graves. Allí relaciona números simples y cuadrados de números: "*Si un móvil cae, partiendo del reposo, con un movimiento uniformemente acelerado, los espacios por el recorridos en cualquier tiempo que sea, están entre sí como el cuadrado de la proporción de los tiempos*" (Álvarez y Posadas, 2003, p. 65, citando a Galilei, *Consideraciones y demostraciones.*, Jornada tercera, Teorema II, Proposición II, p. 294; en Díaz y otros, 2007). Opera fluidamente con relaciones de números simples y de sus cuadrados así como con cambios y cambios de cambios. Destaca al cambio lineal que relaciona números simples, los que dan cuenta del incremento más sencillo cuando comenta a su amigo Sarpi: "*Luego, puesto que veo que la piedra que desciende de lo alto a partir del reposo adquiere constantemente nuevos incrementos de velocidad, por qué no he de creer que esas adiciones se verifican de la manera más sencilla y obvia de todas?. Tú dirás: entonces la velocidad es la misma (uniforme). De ninguna manera. Es en efecto constante que la velocidad no sea la misma y que el movimiento no sea uniforme. Se debe, pues, buscar y plantear la identidad. no en la velocidad sino en el incremento de velocidad, es decir, en la aceleración. Que si lo examinamos atentamente no encontraremos ningún incremento más sencillo que en el que se sobreañade siempre de la misma manera.*" (Romero, p.3; en Díaz y otros, 2007) Galileo sustituye el espacio físico por el espacio euclidiano y a los cuerpos reales por los objetos geométricos. Sus consecuencias son, entre otras, el movimiento en el vacío y el movimiento como un estado. El movimiento que según Aristóteles debía de ser tratado como un proceso (potencia-llegar a ser) a partir de Galileo se concebirá como un estado de los cuerpos.

Tiempo y tiempos

Desde nuestra experiencia subjetiva temporal no obtenemos alguna imagen directa que nos den los sentidos respecto del tiempo. Tal experiencia de temporalidad la recuperamos en un proceso imaginativo. Contamos con distintas referencias del tiempo, presentes en la vida diaria y más o menos permeadas por metáforas de tiempo construidas desde distintas prácticas socialmente compartidas. En términos del diccionario RAE, tiempo es, en una primera acepción, la duración de las cosas sujetas a mudanza. A mudanza, a su vez, le asocia la acepción de acción y efecto de mudar o mudarse. Y respecto de mudar, dar o tomar otro ser o naturaleza, otro estado, forma, lugar. De este modo, tiempo y desplazamiento aparecen compartiendo significados en este diccionario. Por duración entiende tiempo que dura algo o que transcurre entre el comienzo y el fin de un proceso, con lo cual nos devuelve a la voz primera de tiempo. Entonces culturalmente hablando, tiempo es una suerte de noción primitiva - algo análogo a la noción de punto en geometría euclideana - no derivada de otras que permitan definirlo y ligada simbióticamente desde un inicio a cambio, a movimiento. En una segunda acepción de RAE, tiempo refiere a una magnitud física que permite ordenar la secuencia de los sucesos, distinguiendo entre éstos, sucesos anteriores, simultáneos y posteriores.

Tiempos de la física. Newton concibió un tiempo absoluto, verdadero, matemáticamente regular y que fluye con independencia de cualquier factor externo; y, otro tiempo (al que llamó duración) relativo y aparente, que identificaba con el tiempo medible por el cambio y movimiento de las cosas. Precisa Liebniz el tiempo de la física clásica como ese *tiempo* dado simultáneamente con el suceso de interés, por un reloj estacionario ubicado en el lugar de tal suceso. Reloj que, a su vez, se sincroniza a un reloj específico y estacionario. Dos tiempos se agregarán: el *tiempo-espacio* de la relatividad, tiempo físico relativo al estado de movimiento del observador, mismo que ahora se mezcla de modo inextricable con el espacio, proporcionando al espacio-tiempo como marco para el estudio del universo. Y el *tiempo de cambio sustantivo* en sistemas subatómicos. Es el *tiempo de la* *relación de incertidumbre* $\Delta E * \Delta t \sim h$ (h constante de Planck), siendo Δt el tiempo necesario para que la distribución estadística de resultados probables de un sistema subatómico con una dispersión de energía ΔE, haya cambiado sustancialmente. Esto es, Δt no mide el ritmo de evolución del sistema, sino que su cambio en otro sistema (Saavedra, 1997).

Tiempo *de la vida, tiempo sagrado*. Afirma Heidegger que *el ser es tiempo.* Este *tiempo de la vida humana* no es una entidad, sino que es el modo de ser de las cosas que son, por lo que, los tiempos, resultan diferentes según las distintas cosas que están siendo.

> *"Cuando escucho la palabra tiempo viene a mi mente la muerte, los pensamientos y malos momentos (…) pero por otra parte está la vida, la creación de todo lo que vive y solo vive, el aprendizaje, el amor y bellos momentos, todo es el tiempo, vida y muerte"* (E10, Cuestionario; en Carrasco, 2006).

En el *tiempo de la vida humana* estamos lanzados hacia el futuro desde la conciencia de nuestra finitud. Volvemos valorando nuestro presente, concientes de que debemos "hacer nuestro ser", decidiendo a cada instante entre opciones de ese hacernos ser, actualizando ese futuro por el que optamos, desde el horizonte de nuestra finitud. Confucio distingue un *kronos-tiempo profano* como un tiempo calendario que determina los plazos en que se llevan a cabo las acciones humanas, de un *kayros-tiempo sagrado* en que se desarrollan los ciclos del drama humano, según la voluntad del Cielo, Gran Uno Inmutable. Para Soublette (2004) la transformación de la cultura en civilización comporta un creciente proceso de rigidización. Refiere a Lao Tse quien, en el Tao Teh King, señala a la rigidez como característica de la muerte y a la flexibilidad cualidad propia de la vida. El autor afirma que en la complejidad abrumadora de la gran urbe todo se cristaliza y se inmoviliza, dando la impresión de que todo cambia. El cambio sólo ocurre en un proceso puramente mecánico de la existencia, inmovilizado el ritmo de la vida en la psique humana. No habría un cambio cualitativo de la persona. En su lugar habría un olvido del *ser,* del *tiempo sagrado*.

Tiempo *histórico*. Los historiadores procuran identificar explicaciones generales que identifiquen y definan una época, el tiempo que vivieron los individuos, el de su organización social y económica. Permanencia y cambio de unas determinadas estructuras en un espacio les llevan a determinar categorías temporales. Los diferentes enfoques de las estructuras, que definen las distintas épocas, responden a su vez, a otros tantos modelos de periodización histórica. Sus reflexiones ilustran que, lo que más lentamente cambia, son las estructuras mentales y las formas de interpretar y comprender el mundo, mismas que incluyen desde la religión a la filosofía, pasando por los mitos, la literatura y el arte, entre otros.

> *"Es una forma de… dejar cuenta de lo que está pasando cada día…sin saber qué después pasa a ser parte de la historia"* (E3, Cuestionario; en Carrasco, 2006)

Tiempo *dinerario* de las economías capitalistas del mundo moderno. La posibilidad de acumulación que abre el dinero trajo aparejados la intensificación del trabajo y el estrechamiento del tiempo (Valenzuela, 2004). Cuando se vuelve atractivo cosechar todo el árbol de manzanas porque el excedente puede transformarse en dinero, el hombre intensificará su jornada de trabajo y quedará crecientemente sometido a la presión del tiempo que entonces deviene en algo escaso. La vida moderna resultará de intensificar el trabajo y el tiempo, a diferencia de la holgazanería y el ocio, propios de las economías naturales. Para ello racionaliza: controla, regula y calcula el uso del tiempo en una escala que no conoció ninguna sociedad tradicional. La sociedad dineraria emerge sobre la base de este mecanismo de contención del uso del tiempo, el que se manifiesta en un estilo de vida riguroso, presuroso, rígido y controlado, propio de la persona que está siempre ocupada (op.cit., 2004).

> *"el tiempo para hacer una tarea en clases, es muy corto"*
>
> *"La palabra tiempo se me imagina… como si fuera el reloj del mundo y todos fuéramos sus sirvientes"*
>
> *"Es algo que el hombre inventó para organizar el día así poder hacer algo"*

"Oye apúrate, el tiempo es oro"

"Si no llegas a tiempo, yo me voy". (E2, E17, E7 , E16, E18 ,Cuestionario; en Carrasco, 2006).

El tiempo *bio-psicológico***.** El tiempo se puede detener o enlentecer en la experiencia de la psique humana:

"En esta clase el tiempo no pasa nunca" (E15, Cuestionario; en Carrasco, 2006).

Al tiempo-espacio de Einstein apto para el estudio del universo, Bergson agrega un tiempo "*apto para la vida*" o tiempo *duración* al que entendió como la vivencia de nuestros estados de conciencia, en el fluir de la vida. Los orígenes del sentido del tiempo, en las estructuras de nuestro sentido común, se remontan a la etapa prebiológica en la que ya existían procesos cíclicos, en un ambiente lleno de periodicidades (noche/día, verano/invierno, bajamar/pleamar, entre otros). Esos ciclos imprimieron, desde sus orígenes, conductas rítmicas a los organismos**…** (Díaz y otros, 2007) Recientes investigaciones de las neurociencias muestran que varias estructuras cerebrales contribuyen al desarrollo del "tiempo mental", al organizar nuestras experiencias en etapas cronológicas que permiten recordar eventos. Incluyen el hipocampo, el lóbulo temporal y la región frontal del cerebro. Los humanos portamos un reloj biológico que nos marca la alternancia del día y la noche. Este reloj está localizado en el hipotálamo del cerebro. Pero es un "*tiempo mental*" el que nos permite interpretar el paso del tiempo, además de permitirnos comprender nuestra organización de eventos cronológicamente. En la experiencia temporal, la duración del tiempo parece ser a veces más rápida o corta y en otras ocasiones, más lenta o larga y estas variaciones perceptibles pueden situarse en diferentes escalas, desde algunas horas, hasta muchas décadas. De acuerdo a las investigaciones, el *tiempo mental* lo determina la atención que nosotros le ponemos a los sucesos así como las emociones que sentimos cuando esos sucesos ocurren. Así mismo el *tiempo mental* está influenciado por la forma en que registramos esos eventos y también por las inferencias que hacemos mientras los percibimos o los recordamos (Herrera, 2005).

> *"el tiempo pasa lento y pasa rápido, pero cuando me gusta es cuando yo lo hago, es decir, yo hago mi tiempo"* (E19, Cuestionario; en Carrasco, 2006).

La metáfora del río dota de significado al transcurrir del tiempo en la estructura del sentido común, semantizando nuestra experiencia temporal como una corriente en la que –por una parte- en todo momento el futuro vendría al presente y se alejaría al pasado, y –por otra parte- en todo momento se experimenta un avance progresivo desde el momento presente hacia el futuro. Toboso añade un vértice, el que modula un flujo discontinuo, articulando *el ahora* y *el momento presente,* elementos constitutivos de la experiencia del tiempo en la persona. En el ahora nos experimentamos nosotros mismos aún cuando instante a instante, a su vez, cambiamos. El momento presente es el momento fugaz en el que somos distintos al momento anterior. Tal vértice marca la distinción y la relación entre la visualización psicológica de futuro (protensión) y de pasado (retensión). Para Toboso la experiencia personal del tiempo se configura como la síntesis integradora de esta dimensión retensivo-protensiva y una paramétrica, dimensión del tiempo que mide un reloj. Esta dimensión paramétrica, al distinguir las relaciones de anterioridad, simultaneidad y posterioridad entre sucesos -carentes de intencionalidad y emociones de pasado, presente-ahora y futuro- da paso al tiempo medible de la simultaneidad (Carrasco, 2006).

> *"(Cuando escucho la palabra tiempo, se me vienen a la mente) momentos de mi infancia, imágenes de mi alegre"* (E6, Cuestionario; en Carrasco, 2006).
>
> *"Ya es tiempo de ir a estudiar"* (E19, Cuestionario; en Carrasco, 2006).

Tiempo matemático. Newton, al reportar su práctica experimental refiere al que será el tiempo de la física: "*cuando en lo sucesivo se encuentre la palabra tiempo, no deberá entenderse el tiempo formalmente considerado, sino aquella cantidad a través de cuyo incremento o flujo uniforme se expresa y mide el tiempo*" (Díaz, 2005, p. 155). Este flujo uniforme lo representa por un segmento continuo (Segmento VE en la figura 2) portador de las cantidades de tiempos. El tiempo matemático cristaliza hoy en la metáfora de una distancia, que se representa por una recta portadora del continuo de IR, posible de recorrer en ambos sentidos, configurando un tiempo homogéneo y reversible, distinto del tiempo físico de la simultaneidad antes referido, de números y longitudes de intervalos, homogéneo e irreversible .

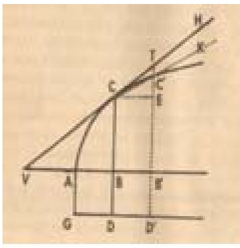


Figura 2
Carrasco, 2006

A modo de cierre

Desde el "acto incompleto" de Aristóteles, pasando por la definición de los calculistas del concepto de velocidad en términos abstractos, sin referencia al mundo físico, a la sustitución del espacio físico por el espacio euclidiano y la sustitución de los cuerpos reales por los objetos geométricos de Galileo, se verifican importantes deslizamientos epistemológicos. Y en la vida diaria la noción de velocidad se entreteje con la de tiempo y desplazamiento, formando complejos cadena. Por su parte el tiempo estudiantil resulta constituido por una red –ni numérica ni lineal- compleja de intencionalidades y coordinaciones que se estructuran a partir de las necesidades de coordinación con lo otro, con los otros y de las proyecciones intencionales hacia un futuro y un pasado, constituyéndose, a la manera de un collage heterogéneo e irreversible. Permeado por *los tiempos* de *su tiempo*: histórico, de la vida, dinerario, de la simultaneidad, entre otros. Aprendizajes significativos de velocidad y tiempo presentes en el discurso curricular, pueden verse favorecidos con diseños didácticos que validen eslabones entre los sentidos que concurren al evocar estas nociones, en la enseñanza de la variación.

Referencias bibliográficas

Carrasco, E. (2006) Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo. Tesis de maestríano publicada. CICATA, México.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. En *Relime, Vol.8 (2),* 145-168

Díaz, L.; Ávila, J. & Carrasco, E. (2006) *Las representaciones docentes del Cambio* Informe de Avance Proyecto de Investigación años 2006-2007. UMCE. Santiago de Chile.

Díaz, L.; Gutiérrez, E.; Ávila, J. & Carrasco, E. (2007) *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos.* Informe Final Proyecto Fondecyt Nº 1030413. En Biblioteca de CPEIP, Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. Chile.

Herrera, F. (2005) Reseña del texto La neurología del tiempo. Una aproximación teórica. Tomado el 25/01/08 de www.uvmnet.edu/investigación/episteme/numero2-05/resenas.

Saavedra, I. (1997) El tiempo en la física. Apuntes de clases. Plan Común Programas de Ingeniería. Universidad de Chile. Chile.

RAE, Real Academia Española. Tomado el 25 de enero de 2008 de www.rae.es.

Soublette, G. (2004) El inmutable y perpetuo cambio. En Revista Universitaria Nº85. Chile: Editorial PUC.

Valenzuela, E. (2004) Tiempo, dinero y gratuidad. En Revista Universitaria Nº85. Chile: Editorial PUC.

DOCENCIA EN MATEMÁTICAS: HACIA UN MODELO DEL PROFESOR DESDE LA PERSPECTIVA DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Javier Lezama, Elizabeth Mariscal
CICATA _ Unidad Legaria. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional — México
jlezamaipn@gmail.com, elimariscal@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología, Formación de profesores — Nivel: Superior y posgrado

Resumen. *Esta investigación se orienta al estudio de lo que se ha denominado las Prácticas de enseñar y aprender matemáticas en la escuela, específicamente en el nivel preuniversitario y universitario. Se enfocó el proyecto a analizar fenómenos estudiados previamente tales como los fenómenos didácticos de reproducibilidad. Profundización en la noción de cultura matemática del profesor y como afecta en su quehacer docente, así mismo resistencias al cambio en el escenario de los cambios en los enfoques educativos que adoptan las instituciones y que exigen al profesor la incorporación de nuevas prácticas de instrucción. Todo con el fin de iniciar una construcción de un modelo de profesor de matemáticas.*

Palabras clave: reproducibilidad, socioepistemología

Introducción

El propósito de la investigación es obtener información sobre la complejidad del quehacer docente en matemáticas. Las raíces de dicha complejidad las identificamos tanto en la naturaleza de la propia matemática como en las prácticas que la escuela ha elaborado para hacer que los estudiantes la aprendan. La escuela en sí enfrenta enormes retos que sin lugar a dudas afectan la labor de enseñar matemáticas. La información que buscamos, esperamos aporte elementos claros y profundos para ser utilizados en la formación y actualización de un profesor de matemáticas que sea capaz de producir y utilizar conocimientos derivados de la investigación, a fin de que sus prácticas de enseñanza-aprendizaje produzcan efectivamente aprendizaje en los alumnos.

Consideramos al Discurso Matemático Escolar (DME), distinto a lo que propiamente es la Matemática (Cantoral, 1995). Entendemos el DME, como un saber transpuesto adaptado al sistema escolar. La matemática escolar (ME) no es en estricto sentido la Matemática, está compartimentarizada y secuenciada según el nivel y el campo profesional para el que ésta se aprende (Chevallard, 1991). El estudio de todos los fenómenos asociados a la actividad del docente de matemáticas, lo enfocamos desde una perspectiva sistémica (Ruiz, 2002) y con ello se refiere a que no estudiamos al profesor aislado de los otros elementos del sistema didáctico, como lo son el alumno y el saber a enseñar (el contenido temático a aprender, es decir la matemática escolar). Toda actuación del profesor no la podemos separar de un saber específico y de un estudiante concreto. La actividad del profesor está determinada por múltiples interacciones con el alumno y el saber matemático a enseñar.

En el estudio de todos los fenómenos asociados al procesos de enseñaza-aprendizaje de las matemáticas en el sistema didáctico y específicamente lo relacionado a la actividad del profesor de matemáticas, consideramos cuatro elementos a observar en dichos fenómenos: los de carácter epistemológico, que se refieren a la naturaleza del conocimiento matemático que está en juego, toda exploración y estudio sobre un fenómeno didáctico se inicia desde el reconocimiento de la naturaleza y complejidad de construcción del objeto matemático a estudiar, ya sea conceptual o procedimental. Los de naturaleza cognitiva, que son aquellos que surgen en el estudiante en relación a las interpretaciones del objeto de estudio, producidas por las representaciones del mismo, así como intuiciones y formas de pensamiento del estudiante. Estos elementos son fundamentales a considerar pues forman parte de la complejidad que reconocemos en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Otro elemento es el de naturaleza didáctica que hace referencia a las formas de enseñanza que se producen en la escuela, en que por ejemplo, se privilegia lo procedimental, dejando a un lado el sentido de los métodos y los contenidos de la matemática; como es sabido, esto genera importantes dificultades de comprensión de la matemática en los estudiantes. Por último, señalamos otro aspecto más a considerar consistente en mirar el aula y la escuela así como el entorno de ésta, como el escenario sociocultural que no puede dejar de ser considerado en la construcción de conocimiento matemátic, o en los alumnos y por ende en la elaboración de los procesos de estudio de la matemática escolar. A la consideración de un enfoque de investigación que reconoce el carácter transpuesto del saber matemático que se encuentra en la escuela, la naturaleza sistémica de los fenómenos que se producen en los procesos de adquisición del saber matemático y que además toma en cuenta elementos de naturaleza epistemológica, cognitiva, didáctica y los escenarios socioculturales, lo denominamos enfoque socioepistemológico (Cantoral y Farfán, 2003), siendo en él que enmarcamos nuestro estudio.

La identificación, descripción y desentrañamiento de las dificultades y obstáculos que enfrenta el profesor de matemáticas para realizar su actividad, nos permitirá iniciar el diseño de un posible perfil de profesor de matemáticas, fuertemente capacitado para entenderlos y enfrentarlos a fin lograr mejoras en el aprovechamiento de sus alumnos. La construcción de un modelo de profesor de matemáticas, pasa por lograr incorporarlo a un campo de saber que le sea específico y que sea la fuente de información y actividad profesional. ¿Cuáles son las múltiples dificultades que el profesor enfrenta en su quehacer y de que naturaleza son? ¿Cuál es del campo de saber específico del profesional de la docencia en matemáticas y qué lo caracteriza?

El profesor de matemáticas, al no ser un ente aislado, enfrenta para cumplir su misión, aquello que la escuela de manera global enfrenta. *La educación ya no es pensable desde un modelo escolar que se haya rebasado tanto espacialmente como temporalmente por procesos de formación correspondientes a una era informacional en la que la edad para aprender son todas… Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa.* (Barbero, 2006, p.3). Se puede aprender en varias partes y de múltiples maneras y no como lo dicta la escuela tradicionalmente. Los profesores en muchas ocasiones deben trabajar con alumnos que se les exige por razones institucionales, dejar fuera de la escuela, su cuerpo, su alma, sus sensibilidades, sus experiencias, y sus culturas, sean estas orales, gestuales, sonoras, visuales, musicales, narrativas o escriturales. (Barbero, 2006). Con ésto señalamos de manera muy general las dificultades que enfrentan los profesores; siendo en ese escenario donde el profesor tiene que, además, superar las dificultades específicas de aprendizaje de las matemáticas. Ser profesor de matemáticas en la actualidad exige de un sujeto con amplia formación y un saber muy especializado.

La matemática educativa como campo de saber específico del profesor de matemáticas

La Matemática Educativa, Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas constituye un campo de conocimiento consolidado. Actualmente, es posible ver sin gran esfuerzo rasgos de consolidación plena y que como señala Godino (2000, p.211) *pueden reconocerse en una plena institucionalización al permitirse la creación de departamentos universitarios que se ocupan de dicho campo. El establecimiento de estudios formales de especialización en el campo, tales como maestrías y doctorados en matemática educativa, así como el planteamiento y desarrollo de proyectos de investigación con apoyos de recursos públicos.* Otro elemento y muy importante, es el surgimiento de varias revistas especializa-das en el campo de la matemática educativa con los estándares de evaluación comunes a revistas de otros campos de más larga tradición que el nuestro; la base de datos MATHDI, que sistemáticamente almacena los resúmenes de los artículos publicados en más de 500 revistas y otras publicaciones, es el mejor indicador de la riqueza y complejidad del campo…

Explorando nuestro campo académico con un modelo establecido por (Fuentes -Navarro, 1998) denominado *modelo heurístic*o (estructural) del campo académico. Éste nos permite distinguir tres prácticas académicas. Las centradas en la producción, en la reproducción y en la aplicación de dichas prácticas que para nuestro caso serían las de la matemática educativa. Las modalidades de prácticas académicas mencionadas están sujetas a determinaciones (tanto *internas* como *externas*) diversas y que deberían estar articuladas entre sí mediante un núcleo común de sentido básico compartido, y que constituye lo que Kuhn (1982) denomina *matriz disciplinaria*.

Las prácticas de *producción* de conocimiento es lo que conocemos como investigación, lo que es importante reconocer para el caso de nuestro campo académico es que la investigación se realizará bajo los marcos lógicos, ideológicos, técnicos y éticos de las ciencias sociales. Las prácticas de *aplicación* del conocimiento, se centran en el ámbito de la *profesión*, que en nuestro caso es la profesión docente en matemáticas. Para poder ejercer esta práctica profesional nos sujetamos a los medios de calificación formal para ejercerla, como son los títulos profesionales y en algunos casos a la experiencia reconocida. Las prácticas de *reproducción* del conocimiento y de los agentes que lo tienen son los que median desde las universidades la conformación del campo en términos socioculturales afirma Fuentes-Navarro (1998). Para realizar esta mediación las prácticas académicas articulan los planos científico y profesional mediante programas institucionales de docencia e investigación. Fuentes Navarro también nos señala que los modos o grados de articulación entre los subcampos científico y educativo (entre las prácticas de investigación y de formación de profesionales), es donde se ubican los parámetros de consistencia interna de estructuración de un campo académico, mediante una matriz disciplinaria que también incluya *esquemas interpretativos*, en una *ideología profesional* específica.

Reflexionando desde el modelo de Fuentes-Navarro, identificamos en los diversos ejes de su modelo algunas investigaciones en las que hemos participado o que hemos conocido a través de la literatura especializada. Es con dicho esquema que ubicamos algunos avances muy importantes. El eje formado por los subcampos científico y educativo es abordado por Mingüer (2006), reformulando la noción de cultura matemática del profesor de matemáticas trascendiendo los propios conocimientos disciplinares; así mismo Espinoza (2006) se pregunta sobre cómo el profesor puede rescatar los significados culturales en el aprendizaje de la numeración Náhuatl dadas fuera de la escuela, en las actividades de aprendizaje de la escuela. En Gómez Sollano y Zemelman (2005), se discute la necesidad de creación en el profesor la construcción de una utopía que haga posible una lectura alternativa de la realidad actual. Díaz Barriga e Inclán (2001, p.37), discuten sobre las reformas educativas que realizan las instituciones a espaldas de los profesores y que después a éstos se les dificulta asumirlas… *hemos mencionado lo que puede ser un conjunto de puntos críticos de la reforma como la asunción de otra cosmovisión sobre la educación, en la cual el docente no fue formado, y que además es opuesta a la que comparte,…etc. (*Adler et al, 2005), señalan como campo emergente de investigación la del quehacer de los profesores de matemáticas, señalando los múltiples aspectos que ahí pueden abordarse.

Antecedentes de la investigación

Es a partir de nuestros resultados de investigación sobre el fenómeno de la reproducibilidad, que se pone de manifiesto el papel primordial del profesor de matemáticas en el proceso de estudio de los estudiantes (Lezama, 2003, 2005). Nos propusimos entender los factores tanto de carácter matemático como extramatemático que determinan la actividad del profesor. De nuestra tesis quedaron de manifiesto los siguientes hechos y que se constituyeron en punto de partida de los estudios sobre le profesor: El profesor con su actividad es determinante del logro didáctico de los alumnos. El profesor no se arriesga a la innovación si siente que pierde el control de los que está acostumbrado a hacer en su actividad. No es una resistencia arbitraria sino un elemento de identidad como profesional. El profesor en su quehacer profesional hecha a andar elementos culturales producto de su proceso de formación, mezclándolas con asuntos específicos de matemáticas. Estos elementos constituyeron hipótesis de trabajo en nuestra investigación.

Método

Metodológicamente se decidió proceder atendiendo a dos estrategias:

Primera, en toda tesis que se desarrollara bajo nuestra dirección, atender aspectos que están relacionados con la actividad docente.

Segunda, realizar una serie de entrevistas de carácter no estructurada a fin de hacer hablar al profesor sobre sus dificultades en los tres aspectos que nos planteamos: la reproducción de los efectos didácticos, sus posibles resistencias a la innovación en su práctica docente y las consideraciones de orden sociocultural que observa o percibe en su actividad.

Las entrevistas libres se realizaron a manera de diálogo (con el entrevistado o entre los entrevistados) en el que se pide al profesor que exprese sus experiencias o que opine sobre los problemas que enfrenta a nivel personal o bien como colectivo para realizar su actividad, lo dicho por los profesores nos permite interpretar y categorizar desde nuestro marco teórico, los factores que dificultan su actividad docente.

La exploración del pensamiento, creencias y representaciones del profesor, tiene un alto nivel de complejidad, pero al entrevistar a diversos grupos de profesores y poniendo atención a las distintas maneras de enfocar un mismo asunto, nos dan elementos para estructurar categorías a considerar en el análisis de la actuación del profesor.

Si bien las entrevistas fueron libres, versaron temáticamente sobre los mismos puntos.

- Cómo es el ritual de la clase. Descripciones de clase.
- Cuál es el escenario (en cuanto a disciplina, espacio físico, organización social de la clase) que consideran mejor para aprender matemáticas.
- Cuáles son las principales dificultades que ven en los estudiantes para aprender matemáticas.

- Cómo problematizan el saber matemático para diseñar su clase, en contraposición con elementos extramatemáticos que pueden ayudar a mejorar la instrucción.
- En qué aspectos y en qué sentido los alumnos pueden ser más hábiles, profundos y reflexivos que sus profesores.

Mingüer (2006) en su tesis utilizó un formato de entrevista profunda no estructurada a fin de alcanzar una visión de cuáles eran los elementos de carácter familiar, social y escolar que hicieron de los maestros lo que son actualmente como docentes.

Las entrevistas nos dan una aproximación que nos permite identificar desde nuestro marco, cuáles son los vacíos teóricos, prácticos y actitudinales, así como los factores que pueden ser calificados como culturales en el sentido de las influencias de lo que hemos calificado como escenarios socioculturales, en el ejercicio de la profesión de maestros de matemáticas. Es importante señalar que sobre la marcha decidimos complementar lo que calificamos la visión de los profesores, con la visión de los estudiantes a fin de poder ver los elementos de contradicción en las dos visiones.

Informe de un análisis global de las entrevistas

Los profesores nos brindaron múltiples experiencia y opiniones, a partir de las cuales en un primer nivel de análisis, podemos señalar los siguientes aspectos generales:

Hay ambigüedad en cuanto a la naturaleza de la profesión del profesor de matemáticas, al no identificar el campo de saber de referencia propio de su actividad de profesor. Si bien se declara la matemática como elemento fundamental, en contradicción con esto, nos manifiestan múltiples problemas que impiden el aprendizaje de sus estudiantes y que no son de naturaleza matemática. Manifiestan no saber como enfrentar dichos problemas al no poder identificar de manera clara una disciplina e información concreta que les permita enfrentar los problemas de aprendizaje de las matemáticas de una manera más amplia y que no se aleje de la matemática. Muestran gran dificultad para aceptar la noción de discurso matemático escolar y por tal razón no ven la presencia de ideología en su actividad.

Les cuesta trabajo indicar la naturaleza de las dificultades de un estudiante ante un saber específico o bien no lo pueden expresar con claridad. Hay una fuerte creencia de que una buena explicación produce aprendizaje o conocimientos en los alumnos.

No hay claridad en cómo articular propuestas o reformas educativas muy generales basadas en teorías del aprendizaje que no comparten o entienden, en acciones concretas de clase.

Es común que identifiquen que cambiar los modos de enseñanza exige necesariamente acciones que son ajenas a la actividad matemática, costándoles mucho trabajo plantear acciones que pasen a la problematización del saber matemático. Les cuesta mucho trabajo articular una teoría del aprendizaje que esté en la base de sus acciones de enseñanza, es decir, no se puede decir porqué tal o cual acción produce tal o cual aprendizaje.

Una reflexión final

Lo que pudimos recoger en lo expresado sobre la actividad de los profesores, abre múltiples preguntas, más que certezas.

En términos de reproducibilidad, si un profesor no tiene claro por qué ciertas acciones de sus estudiantes producen o no aprendizajes en ellos, hace que la actividad de clase sea una especie de apuesta y no se sabe si se obtendrán los resultados esperados. Esto nos muestra que si no se hacen diseños de clase que consideren la epistemología del saber y las dificultades propias de los estudiantes para hacerse idea de los conceptos que se estudian, será muy difícil construir de manera segura formas de instrucción que aún considerando la heterogeneidad de los grupos, puedan producir aprendizajes. Lo cual es un gran obstáculo para poder enfrentar la masificación (grupos muy grandes y difíciles de controlar) que requiere especial atención en nuestras aulas. En términos de resistencias al cambio, pudimos ver que uno de los elementos que más impactan al profesor es la pérdida de control de lo que pasa en el estudiante, aunque en las formas de enseñanza tradicional tampoco hay control, pero el profesor vive una "ilusión de que sí sabe lo que pasa". Esta pérdida de control es determinante pues está asociada a que el profesor puede temer de dejar de ser el profesor que es (esto es una mera hipótesis) y eso constituye una pérdida de identidad, elemento que debe ser cuidado en cualquier política institucional de puesta al día a profesores en el marco de un nuevo enfoque educativo. Basta por ejemplo analizar, las múltiples interpretaciones de los conceptos aprendizaje significativo y profesor facilitador.

Estudios sobre el profesor resultan indispensables para apoyarlo más en sus procesos de puesta al día y poder lograr más confianza en que lo que se hace en la clase de matemática producirá aprendizajes sólidos e útiles en los futuros profesionistas. Es indispensable propor-cionarle al profesor información y teoría que lo haga considerar que su quehacer como pro-fesor de matemáticas es una actividad científica, que tiene un cuerpo de saber producto de la investigación y que puede y debe desarrollar actividad académica para discutir con sus pares.

Referencias bibliográficas

Adler, J.; Ball, D.; Krainer, K.; Lin, F, Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*. 60 (3) 359-381.

Díaz Barriga, A. e Inclán, C. (2001). El docente en las reformas educativas: sujeto o ejecutor de proyectos ajenos. *Revista Iberoamericana de Educación*. No. 25 pp.17-41.

Cantoral, R. (1995). Matemática, Matemática Escolar y Matemática Educativa. En R. Farfán (Ed.), *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de*

Profesores e Investigación en Matemática Educativa 1 (pp. 1-10). La Habana: Ministerio de Educación de Cuba.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Edu*cativa 6(2), 161-193.

Carrillo, H. (2006). *Recursos Nemotécnicos de las Funciones Trigonométricas Básicas*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Argentina: Aique.

Edelstein, G. (2003) Prácticas y residencias: memorias, experiencias, horizontes… *Revista Iberoamericana de Educación*. No. 33 pp.71-89.

Espinosa P. (2006). *La Matemática Náhuatl: Estudio del Sistema de Numeración Náhuatl.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Fuentes-Navarro, R. (1998). La emergencia de un campo académico: continuidad utópica y estructuración científica de la investigación de la comunicación en México. México, TESO-UdeG.

Godino, J.D. (2000). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. En A. Martinón. *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (pp.347-350). Madrid: Nívola.

Kuhn, T. (1982). la tensión esencia. Estudios selectos sobre la tradición y el cambio en el ámbito de la ciencia. Fondo de Cultura Económioca-Conacyt, México.

Gómez Sollano, M. y Zemelman, H. (2005). Formación de sujetos y perspectivas de futuro en América Latina*. En, Discurso pedagógico. Horizonte epistémico de la formación docente* (pp.1-9). México: Pax México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado, no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativ*a. Vol. 8, No.3. (pp. 339-362)

Mingüer, L. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Doctorado no publicada. Cicata. México.

Ruiz, L. (2000). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. *Material de apoyo, del curso: Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje, impartido en RELME 14.* Panamá.

Lezama, J. *(2005)* Una mirada sociopistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Edu*cativa. Vol.8, Núm. 3. 339-362.

Steinbring, H. (1988). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* 1, 157-189.

Yurén, T. y Araújo-Olivera, S. (2003). Estilos docentes, poderes y resistencias ante una reforma curricular. *Revista Mexicana de Investigación Educativa. Vol. 8 (19), 631-652.*

UNA VISIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA A TRAVÉS DE LA PREDICCIÓN EN LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma de Chiapas México
polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología, Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En esta investigación buscamos elementos de relación de la conservación de la energía mecánica y el cálculo como una propuesta alternativa de la didáctica de la enseñanza-aprendizaje en las asignaturas de cálculo y física en el nivel medio superior y universitario. En este trabajo proponemos la exploración del experimento de la caída de un cuerpo en un plano inclinado a través de un laboratorio virtual con la finalidad de obtener datos de espacio-tiempo del movimiento (Arrieta et. al, 2006). También, consideramos a la predicción como práctica social y el binomio de Newton como herramienta de interpolación para obtener un modelo matemático en la relación de la energía potencial, energía cinética y el principio de la conservación de la energía mecánica dentro del marco de la aproximación socioepistemológica.*

Palabras claves: predicción, práctica social, conservación de la energía

Introducción

Los contenidos de conservación de la energía mecánica y el binomio de Newton están contemplados en los cursos y planes de estudios de física y matemáticas de las instituciones de educación, tanto, en el nivele medio superior y universitario. En la práctica docente se ha visto que estos contenidos están relevantemente desvinculados entre el cálculo y los fenómenos físicos, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos y físicos en los planes de estudios vigentes, así como en los textos que son recomendados en los programas de los planes de estudios. Una manera de estudiar las relaciones entre fenómenos físicos y cálculo es proponer experimentos dentro del marco de la aproximación socioepistemológica entendida como práctica social.

En los textos de física e ingeniería utilizadas en nuestro medio, encontramos argumentos como el siguiente: “Si s representa a un parámetro físico en un instante dado de tiempo t, en un momento después $t+\Delta t$, este parámetro será $s+\Delta s$ ...”, esta idea se requiere para su conceptualización y pensar un tanto como lo sugiere Newton y la serie de Taylor en cuanto instrumento de predicción y a la vez llegan a concebir los estudiantes para resolver problemas propios de la física, esta forma de pensar son de una naturaleza dinámica donde las ideas de cambio y variación están presentes.

En esta investigación se propone un experimento virtual con la intención de obtener datos y generar un proceso de predicción del fenómeno de la conservación de la energía mecánica, con la intención de buscar relaciones entre la predicción y la conservación de la energía (Reyes, et. al., 2005). Para lograr estos objetivos se realiza un análisis epistemológico del movimiento de un cuerpo de Galileo y el binomio de Newton con la intención de ver las posibles relaciones o indicios de ellas. Reportamos los datos del experimento explorado del movimiento de un cuerpo en un plano inclinado y la relación de la noción de la conservación de la energía mecánica como una forma de construcción del conocimiento, donde nos proporcionan elementos para un cambio epistemológico del Cálculo escolar a través de una visión Newtoniana-Tayloriana, considerando las prácticas sociales para reorganizar el Cálculo escolar (Hernández, 2006a).

Antecedentes

La hipótesis genial sobre la cual Galileo (Citados en Levi, 1989) apoya su teoría de los cuerpos es que dicha caída tiende a producirse con aceleración constante en el vacío. En consecuencia establece sus teoremas de los cuales se escriben a continuación.

> *"Teorema I. El tiempo en el cual un espacio dado es recorrido por un móvil que parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado, es igual al tiempo en el que aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme cuyo grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado al final del movimiento uniformemente acelerado precedente."* *(*Galileo, Citado por Levi, 1989, pág. 57)

En síntesis, la demostración de este teorema se muestra en forma gráfica en la figura 1.

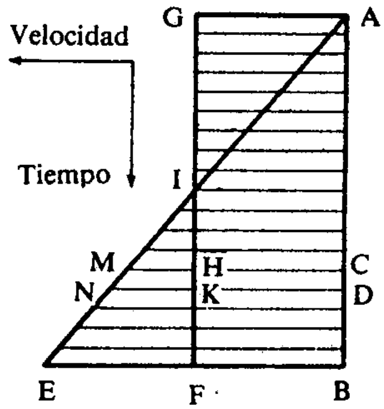


Figura 1.

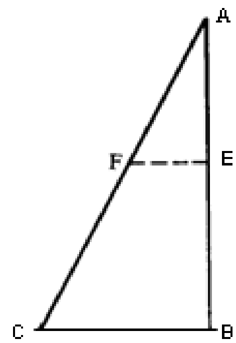


Figura 2.

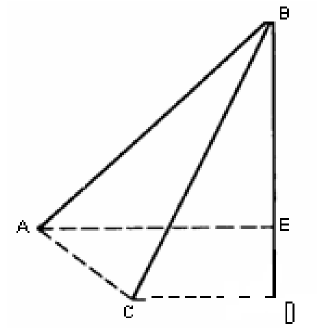


Figura 3.

También, Galileo estudió la caída de cuerpos sobre planos inclinados, descritos en la figura 2 y figura 3, y llega a los siguientes teoremas:

> *"Teorema III. Si un mismo móvil, a partir del reposo, baja sobre un plano inclinado y sobre otro vertical que cubran el mismo nivel, los tiempos totales de descenso son proporcionales a las longitudes de los planos respectivos.*
>
> *Teorema IV. Los tiempos de descenso sobre planos de igual de longitud, pero de diferente inclinación, están en proporción inversa a las raíces cuadradas de los desniveles cubiertos por dichos planos.*
>
> *Teorema V. Los tiempos de descenso sobre planos de diferente inclinación y longitud son directamente proporcionales a las longitudes de los planos e inversamente a las raíces cuadradas de sus desniveles. Este teorema es consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores." (*Galileo, Citado por Levi, 1989, p. 58-59)

Por otra parte, en la epistemología del binomio de Newton, Cantoral (2001) menciona que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables. Precisa el reconocimiento de los procesos de predicción de corto alcance (la variación del movimiento local) y la predicción de largo alcance (estudio de la variación del movimiento global). El movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen herencia: el estado ulterior $P + PQ$ del fenómeno de variación $P \rightarrow P + PQ$ depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto P y la evolución de un sistema completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de la predicción asociada con la variación y cambio en la naturaleza: PQ es la variación de la variable independiente.

Con esta idea y en la necesidad de predecir, conocer, adelantar, Newton estableció el binomio de Newton que hoy en día lleva su nombre y escrito como:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc \qquad (1)$$

Si el exponente *m/n* es un número entero no negativo, entonces el binomio de Newton es una serie finita. Si el exponente *m/n* es un número fraccionario o un número negativo entonces el binomio de Newton es una serie infinita.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Newton y con las diferencias finitas llegó al polinomio que se conoce como el polinomio de interpolación de Newton:

$$y = y_0 + k\Delta y_0 + k(k-1)/2\Delta^2 y_0 + k(k-1)(k-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0 . \qquad (2)$$

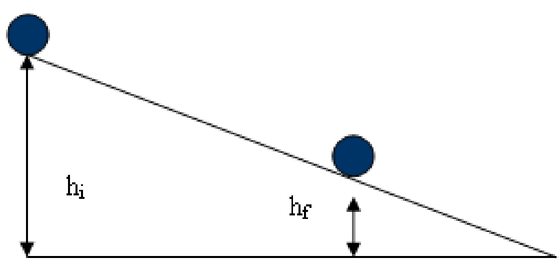
En esencia, Taylor consideró el siguiente proceso: $x = x_o + k\Delta x; k = \dfrac{x - x_o}{\Delta x}$, y tomando a la variación de la variable independiente muy pequeña $(\Delta x \rightarrow 0)$, *k* muy grande, x fija, llegó a construir la siguiente serie:

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\dot{y}_0 / \dot{x}_0 + (x - x_0)^2\,\ddot{y}_0 / 2(\dot{x})^2 + (x - x_0)^3\,\ddot{y}_0 / 6(\dot{x})^2 + \ldots . \qquad (3)$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis, el binomio de Newton y la serie de Taylor son instrumentos de predicción en un contexto de variación.

Principio de conservación de la energía mecánica

En este trabajo analizamos la variación de la energía potencial y la energía cinética de un cuerpo en movimiento sobre un plano inclinado. El principio de la conservación de la energía es la suma de la energía potencial y la energía cinética, bajo la suposición de que el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo, la variación de la energía mecánica es constante esto implica que se conserva. En nuestro experimento consideramos un cuerpo sobre un plano inclinado que parte del reposo desde una altura h, por tanto la energía potencial es máximo y la energía cinética inicial es cero, cuando pasa por un punto más bajo, tiene energía cinética ΔE_i y una energía potencial disminuida ΔP_i y así sucesivamente. En cualquier punto debe cumplir $\Delta E_i + \Delta P_i = cte$, ver figura 4.



Energía Potencial $= E_p = mgh$

Energía Cinética $= E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Figura 4

Aspectos metodológicos

Nuestra investigación está inmersa en el marco teórico de la aproximación socioepistemológica, teniendo en cuenta las prácticas sociales como actividad humana y generación de conocimiento matemático. El corte metodológico que reportamos es primeramente con una exploración del experimento del movimiento de un cuerpo en un plano inclinado con la intención de recabar información y elementos de análisis de la relación de la predicción y la conservación de la energía mecánica, posteriormente en otra etapa de la investigación se diseñará una situación siguiendo las fase de la ingeniería didáctica con la finalidad de ponerlos en diferentes en escenarios. Por tanto, iniciamos con el binomio de Newton y la serie de Taylor como instrumento de predicción y epistemología inicial

Relación entre predicción y la conservación de la energía mecánica

En esta primera etapa de la investigación se exploró el experimento de la conservación de la energía a través del movimiento de un cuerpo en un plano inclinado, con la finalidad de generar datos del desplazamiento y tiempo con la intención de hallar la relación entre la predicción y la conservación de la energía.

El grupo de investigación de laboratorio virtual de Arrieta, et. al. (2006) desarrollaron el experimento del plano inclinado en la cual investigan la relación entre prácticas sociales y la construcción social del conocimiento. Este experimento ha sido puesto en escena en diferentes escenarios escolares y extracolares. La práctica consiste en soltar un objeto del plano inclinado, el ángulo de inclinación utilizado es de 45 grados, y el objeto será colocado a una distancia de 500 centímetros, es decir, 5 metros, como se muestra en las siguientes figuras 5(a), 5(b), 5 (c).

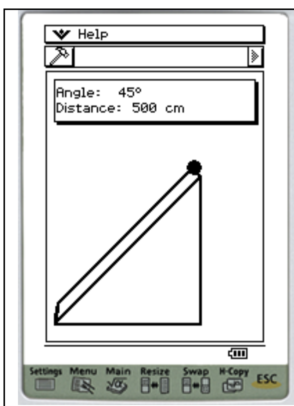


Figura 5(a)

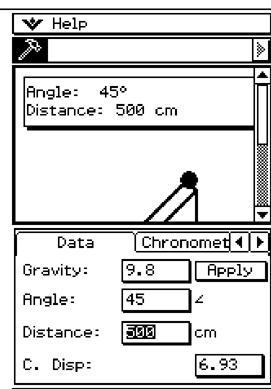


Figura 5(b)

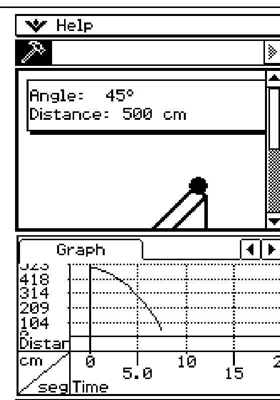


Figura 5(c)

En nuestro trabajo retomamos los datos del experimento anterior para explorar el principio de la conservación de la energía mecánica a través de un plano inclinado. Este análisis tiene el objetivo de establecer las relaciones de la conservación de la energía y la predicción como práctica social para la construcción social del conocimiento. En la tabla (1) se tienen los datos de tiempo, desplazamiento en el plano inclinado y los valores de la altura del plano inclinado. En la tabla (2) se tienen los datos de tiempo, altura y primera y segunda diferencias.

T (seg)	D (m)	h=0.7071*D
0	4.98268	3.52325303
0.5	4.9307	3.48649797
1	4.84408	3.42524897
1.5	4.72281	3.33949895
2	4.5669	3.22925499
2.5	4.37633	3.09450294
3	4.15112	2.93525695
3.5	3.89126	2.75150995
4	3.59675	2.54326193
4.5	3.26759	2.31051289
5	2.90378	2.05326284
5.5	2.5052	1.77142692

Tabla 1

t (seg)	h (m)	1Dif	2Dif
0	3.52325303	-0.03675506	-0.02449394
0.5	3.48649797	-0.061249	-0.02450102
1	3.42524897	-0.08575002	-0.02449394
1.5	3.33949895	-0.11024396	-0.02450809
2	3.22925499	-0.13475205	-0.02449394
2.5	3.09450294	-0.15924599	-0.02450101
3	2.93525695	-0.183747	-0.02450102
3.5	2.75150995	-0.20824802	-0.02450102
4	2.54326193	-0.23274904	-0.02450101
4.5	2.31051289	-0.25725005	-0.02458587
5	2.05326284	-0.28183592	
5.5	1.77142692		

Tabla 2

Usando el binomio de Newton como herramienta y la predicción como práctica social para construir el modelo matemático del movimiento de un cuerpo en un plano inclinado con movimiento uniformemente acelerado, con este modelo relacionamos la energía potencial y la energía cinética en donde se muestra la relación de la energía potencial, energía cinética y el principio de la conservación de la energía mecánica, ver tabla (3) y figura (7).

Escribiendo el polinomio de interpolación de Newton como un binomio y los datos del experimento del plano inclinado, obtenemos:

$$h_k = (1+\Delta)^k h_o$$
$$= h_0 + k\Delta h_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 h_0 + \ldots + \Delta^k h_0$$

Donde $t_k = t_o + k\Delta t$, $k = \frac{t_k - t_o}{\Delta t} = \frac{t}{\Delta t}$

$$h(t) = h_o + \frac{t}{\Delta t}.\Delta h_0 + \frac{t(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}\Delta^2 h_o + etc.$$

$$h(t) = h_o + \frac{\Delta h_0}{\Delta t}.t + \frac{\Delta^2 h_0}{(\Delta t)^2}t(t-\Delta t) + etc.$$

$$h(t) = h_o + \frac{t}{\Delta t}.\Delta h_0 + \frac{t(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}\Delta^2 h_o + etc.$$

$$\mathrm{h(t)} = 3.52325303 + \frac{\mathrm{t}}{0.5}(\text{-}0.03675506) + \frac{t(t-0.5)}{(0.5)^2}(\text{-}0.02449394)$$

$$\mathrm{h(t)} = 3.52325303 - 0.04902\mathrm{t} - 0.04898\mathrm{t}^2$$

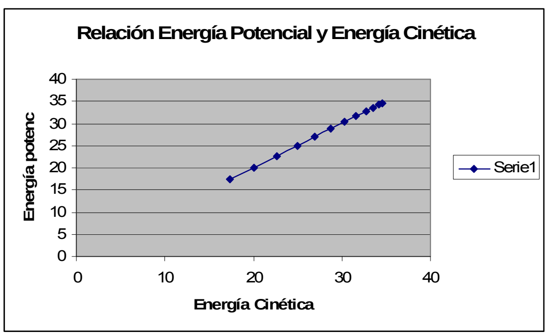


Figura 7

Ep (Joule)	Ec (Joule)
34.5278797	34.5278797
34.1676801	34.1676801
33.5674399	33.5674399
32.7270897	32.7270897
31.6466989	31.6466989
30.3261288	30.3261288
28.7655181	28.7655181
26.9647975	26.9647975
24.9239669	24.9239669
22.6430263	22.6430263
20.1219758	20.1219758
17.3599838	17.3599838

Tabla 3

Conclusiones

En el experimento de la caída de un cuerpo en un plano inclinado exploramos en los datos obtenidos de tiempo, desplazamiento, altura, primeras y segundas diferencias de la variable dependiente en este caso la altura del plano inclinado, nos proporcionan elementos de análisis del cálculo y del comportamiento del fenómeno físico de la conservación de la energía mecánica. En los cálculos de este trabajo se utilizó la herramienta de interpolación y la predicción como práctica social para la modelación matemática con la finalidad de establecer la relación entre la predicción y la conservación de la energía en ciertos fenómenos físicos como otra visión alternativa de modelación matemática estudiada por (Arrieta, 2003). Esta forma de ver a la matemática nos está proporcionando elementos para la reconstrucción del cálculo escolar con base en la práctica social de predecir (Hernández, 2006b).

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., López, C. y Peralta, F. (2006). *Laboratorio virtual de ciencias para Classspad 300*. Libro de trabajo, Universidad Autónoma de Guerrero y Casio, México.

Arrieta, J. (20003). *Las prácticas de modelación como procesos de matematización en el aula.* Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). *Matemática educativa: Una visión de su evolución.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa 16(2), 27-40.

Edward, H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. U.S.A. Springer–Verlag.

Hernández, H. (2006a). *Una visión soioepistemológica de la matemátización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría, UNACH. México.

Hernández, H. (2006b). *El papel de la interpolación y la predicción en el cálculo.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 786-791.

Levi, E. (1989). "*El agua según la ciencia*", CONACYT. México: Ediciones Castell Mexicana, S. A.

Reyes, A., Hernández, H. y Muñoz, G. (2005). *Una visión de Cálculo: Relación entre la predicción y la conservación de la energía*. Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Uruguay.

ELEMENTOS TEÓRICOS DE LA INVESTIGACIÓN: LA FORMACIÓN DE LOS DOCENTES Y SUS CREENCIAS EN EL ENFOQUE DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Leticia Téllez Hernández, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Pedagógica Nacional. México
CIMATE, Universidad Autónoma de Guerrero
tellez_56@hotmail.com, gustavomtzs@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo es producto del proyecto de investigación "La formación de los docentes y sus creencias en la puesta en práctica del enfoque de la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas" que se realiza en el Estado de Guerrero, con docentes y alumnos de educación primaria, cuyo objetivo es: conocer la influencia que han tenido la formación de los docentes y sus creencias de las matemáticas al aplicar el enfoque de enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas. Los elementos teóricos que nos permitirán analizar las categorías detectadas en el trabajo de campo son: La teoría de las situaciones didáctica, el contrato didáctico, la perspectiva sistémica.*

Palabras claves: Enseñanza problémica, matemáticas, escuela primaria

Introducción

Este trabajo es producto del proyecto de investigación "La formación de los docentes y sus creencias en la puesta en práctica del enfoque de la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas" que se realiza en el Estado de Guerrero, con docentes y alumnos de educación primaria, cuyos objetivos son: Indagar cual ha sido la formación matemática, inicial, continua y de actualización de los maestros y su efecto en la gestión de la propuesta de la reforma de 1993. Analizar en un grupo de cuatro profesores de educación primaria el efecto que han tenido en la práctica docente los cursos de actualización que se les han impartido para enseñar matemáticas con el enfoque actual. Explorar la visión de los docentes sobre el enfoque de la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Detectar las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y su aprendizaje y el efecto que éstas tienen en su práctica docente. Hasta el momento hemos desarrollado el estado del arte, la metodología y los elementos teóricos. En este reporte hablaremos de la metodología y de los elementos teóricos que sustentarán la investigación

Metodología

La metodología empleada en esta investigación será de tipo etnográfico cuyo enfoque es cualitativo el cual se caracteriza por ser inductivo, subjetivo, generativo, y constructivo. Inductivo porque a través del examen de los fenómenos semejantes y diferentes que se analicen se desarrollara una teoría explicativa. Es subjetivo porque utilizan estrategias para obtener datos subjetivos. Es generativa al centrarse en el descubrimiento de constructos y proposiciones a partir de una o más bases de datos. Lo constructivo se orienta hacia la formulación y diseño de las unidades de análisis. Corenstein (1987) dice: "*Es preciso señalar que la Etnografía no sólo registra y describe, sino que busca interpretar la realidad social o bien la experiencia particular de la actividad relativa a la educación, en sus múltiples dimensiones*" (p. 275). Todo esto es precisamente lo que haremos en este trabajo, teniendo como muestra cuatro docentes cada uno de ellos del medio urbano, del medio urbano marginal, del semiurbano y del medio rural; cercano a la ciudad de Iguala Guerrero.

Las estrategias que se emplearan de acuerdo al problema son: La observación no participante, crónicas de flujo de comportamientos, los análisis proxémicos y kinesia, y la entrevista no estandarizada para conocer las creencias de los docentes con respecto a la propuesta si los maestros lo permiten, se grabaran o videofilmaran las clases observadas. En el momento de ir registrando lo observado se harán los análisis proxémico y kinesia para evitar que se nos olviden posteriormente los gestos y movimientos imperceptibles. Para el análisis de datos etnográficos se emplearan técnicas como: La teorización, las estrategias de selección secuencial y los procedimientos analíticos generales.

Los Elementos Teóricos

Los elementos teóricos en los que nos apoyaremos para realizar esta investigación son la teoría de las situaciones didácticas, el contrato didáctico, la teoría de la transposición didáctica, y la perspectiva sistémica.

La teoría de las situaciones didácticas

Fue Brousseau uno de los primeros investigadores que percibió la necesidad de modelar los procesos de aprendizaje de las matemáticas en la escuela, creando con ello una visión renovada de la didáctica de las matemáticas, una de sus primeras propuestas al respecto fue la *teoría de las situaciones didácticas*, la cual dice: el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios... Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986). Uno de los factores principales de estas situaciones de aprendizaje, lo constituye el hecho de que las respuestas que produce el alumno, sean respuestas provocadas por las exigencias del medio y no a los deseos del profesor. Al logro de este hecho, se le llama devolución de la situación por el profesor. La devolución no se realiza sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que lo caracterizan (Brousseau, 1994). A estas situaciones se les ha denominado situaciones adidácticas.

Se llama situación adidáctica a una situación matemática específica de un conocimiento determinado, tal que por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el alumno. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma de provocar este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hacen que fracasen las estrategias espontáneas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1995). Así tenemos: Situación adidáctica de acción. El alumno actúa sobre un problema, juzga el resultado de sus acciones y las ajusta sin la intervención del profesor, solamente se vale de la retroalimentación que obtiene del medio. Situación adidáctica de formulación. El alumno comunica las formulaciones resultado de las acciones realizadas sobre el medio. Al intercambiar mensajes con uno o más alumnos se crea un *modelo explícito* formulado con la ayuda de símbolos y reglas conocidas en lenguaje matemático, según las posibilidades de los interlocutores. Situación adidáctica de validación. El alumno expone su *modelo explícito* con el objetivo de probar su exactitud y pertinencia. Es decir, deben usarse nociones *matemáticas*, objetos de conocimiento, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. (Montiel 2002). Retomamos esta teoría en nuestra investigación porque al revisar los contenidos que se trabajan en los cursos de actualización para los maestros, encontramos que es una de la teoría que se maneja como fundamento del enfoque de enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas en los planes y programa de educación primaria, por lo que es importante tenerla como herramienta cuando analicemos la práctica de los docentes cuando los observemos.

El contrato didáctico

A la relación del profesor con el alumno dentro de una situación didáctica, propia de un conocimiento matemático específico, Brousseau la ha llamado Contrato Didáctico. Entendemos que el contrato se lleva a la práctica cuando el docente pretende que sus alumnos aprendan matemáticas y al realizar la investigación nosotros debemos de ver como es ese contrato que se establece en cada uno de los grupos que vamos a observar, identificando desde luego como la formación y las creencias de los maestros influyen en él.

La teoría de la transposición didáctica

De esta manera D'Amore (2005) dice que transposición didáctica.**,** es extraer un elemento del saber de su contexto, para adaptarlo en el contexto individual del aula. Con esto entendemos que para poder enseñan, cada maestro realiza de acuerdo a sus referentes una adaptación del conocimiento matemático de acuerdo a su formación y a sus creencias, por lo que es necesario tener un referente científico que nos permita hacer análisis de este proceso en nuestra investigación.

Perspectiva sistémica

La escuela francesa considera el fenómeno enseñanza – aprendizaje como sistémico, cuyos componentes son: Maestro, alumno y saber, quienes interactúan en un medio que al que ha denominado "noosfera". La noosfera, es el centro operacional del proceso de transposición. Allí se produce todo conflicto entre sistema didáctico y el entorno. Con base a lo dicho nuestro problema debe ser analizado desde esta perspectiva enfocándonos en el vértice del maestro, quien como sabemos debe contextualizar y personalizar el saber transpuesto, buscando con ello el sentido a los conocimientos que sus alumnos deben de aprender, pero es importante entender que el maestro es producto de un entorno histórico, social, político, cultural y familiar, sería interesante poder analizar la influencia de cada uno de ellos en el trabajo docente pero ante la imposibilidad, no hemos centrado sólo en dos factores socioculturales que influyen en la práctica docente y estos son la formación del docente y sus creencias de las matemáticas. Mingüer (2006) afirma que todo individuo que vive en sociedad, de manera consciente o inconsciente, tiene una opinión acerca de las matemáticas; mientras más las utilice de forma intuitiva o formal, más elementos tendrá acerca de sus ideas, nociones, prácticas de uso, manejo y aplicación de conceptos, etc., en su bagaje de conocimientos matemático, lo cual –desde la perspectiva de Vigotsky– desarrollará funciones mentales superiores. Esta idea nos permite considerar la importancia de estudiar las creencias de los maestros sobre las matemáticas las cuales pueden fortalecerse o destruirse día a día con la experiencia que la práctica diaria da a los docentes y son saberes que es necesarios escudriñar para encontrar aportes que nos permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Formación docente

En nuestra búsqueda por definir la formación docente hemos encontrado definiciones sobre formación en general como la siguiente, Ibáñez (1975) dice: La formación es aquella transmisión (o adquisición) de conocimientos enlazados con las dimensiones de vida propiamente humana y provista de una jerarquía interna, que se realiza con el esfuerzo que sea necesario. Como formación docente Cayetano (1999), nos dice: entendemos por formación, el proceso permanente de adquisición, estructuración y reestructuración de conductas (conocimientos, habilidades, valores) para el desempeño de una determinada función; en este caso, la docente, Brousseau (1988) nos dice, el docente realiza el trabajo inverso del científico, una recontextualización y repersonalización del saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar. Afirma también que el rol del maestro es hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable de una situación familiar y además, transformar esa respuesta razonable en un hecho cognitivo extraordinario, identificado, reconocido desde el exterior. De estas ideas deducimos que un maestro debería de romper con los paradigmas tradicionales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en donde se concibe al alumno como un sujeto pasivo y al docente como un transmisor de conocimientos, ahora debe aprender a crear situación didáctica que conduzcan al alumno a descubrir el conocimiento. El estudiante debe ser capaz no solo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de apartar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas. Todo esto desde luego tomando en cuenta el contexto social y cultural de los estudiantes.

Las Creencias

Estamos conscientes de que tenemos conocimientos, los cuales tienen una valides científica, que nos han permitido explicarnos y comprender la realidad que vivimos, pero que también contamos con saberes y creencias, que no tiene ese valor científica, pero están en nosotros y se ven reflejados en nuestra conducta. Thompson (1992), nos dice desde una perspectiva epistemológica tradicional, el conocimiento es un convenio general acerca de procedimientos para evaluar y juzgar su validez mientras que las creencias son caracterizadas por la falta de convenio sobre cómo serán evaluadas o juzgadas. Y nos presenta las características que pueden tener las creencias:

- Una creencia puede ser sostenida variando el grado de convicción, es decir, una persona puede creer fuertemente en algo en ese momento pero luego ya no necesariamente.
- Las creencias no son consensúales, es decir, la persona que tiene una creencia está consciente de que otros pueden pensar de otra manera, a diferencia del conocimiento, y que su creencia está sujeta a confrontación o enfrentamiento.
- El conocimiento debe satisfacer una condición de verdad, pues el conocimiento es incompatible con estar errado o equivocado mientras que las creencias son independientes de su validez. Es decir, alguien con el simple hecho de pensar que tengo un error en mi idea, puede pensar que eso no es conocimiento, sino sólo una creencia, sin importar el fuerte grado de convicción o la sinceridad que haya en ella.

De manera particular al hablar de las creencias del trabajo docente podemos aceptar los tipos que nos presentan Moreno y Azcárate (2003) creencias institucionales, creencias sobre la enseñanza y creencias sobre el aprendizaje. Las primeras incluirían aquéllas que son aceptadas de forma general por la institución y alimentadas en su seno. Las creencias sobre enseñanza incluirían aquello que el profesor considera que significa *enseñar,* cómo *enseñar,* incluyendo el papel del profesor, la metodología de enseñanza, los recursos empleados, etc. Finalmente, las creencias sobre el aprendizaje se relacionan con las ideas que tiene el profesor sobre los estudiantes, cómo aprenden, sus posibilidades y capacidades de razonar e investigar, la capacidad creativa de los estudiantes, la autonomía e independencia para descubrir nuevos conceptos, etc. El hecho de que no se pueda establecer una frontera tan clara entre creencias de enseñanza y aprendizaje nos ha llevado a referirnos conjuntamente a ellas en la investigación, aunque en la medida de lo posible se analizan por separado aspectos específicos de enseñanza y otros de aprendizaje.

Conclusión

En la Matemática Educativa como disciplina encontramos los elementos teóricos que nos permitirán analizar los datos que recabemos en el trabajo de campo, debemos analizar la relación que se da entre los alumnos el maestro y el saber, quien nos va a permitir realizar este análisis es precisamente la perspectiva sistémica. El enfoque didáctico para enseñar matemáticas en la escuela primaria coloca en primer término la resolución de problemas como forma de construir los conocimientos matemáticos (SEP, 1993), entendemos que al utilizar el problema como motor del aprendizaje existe una similitud a la situación problémica de la que se habla en la teoría de situaciones y consideramos que de alguna manera también se da la acción, la formulación, y la validación además la institucionalización y esto se va a corroboran en el trabajo de campo y nosotros como investigadores debemos de tener las herramientas para realizar el análisis, en cuanto al contrato didáctico ahora que se ha teorizado sabemos que existe en todo proceso educativo que se da en el aula y es importante analizarlo tomando en cuenta la formación y las creencias de los maestros, tampoco podemos negar que el maestro realiza una transposición didáctica y que ésta se ve afectada por los factores socioculturales en que está inmerso, por lo que no podemos ignorarlos en esta investigación. De la formación docente se han escrito varias definiciones pero retomaremos lo dicho por Brousseau en una conferencia (1988): "*El docente realiza el trabajo inverso del científico, una recontextualización y repersonalización del saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar*" (p. 66).

En relación a las creencias retomaremos en nuestro trabajo a Thompson (1992), quien escribe desde una perspectiva epistemológica tradicional, el conocimiento es un convenio general acerca de procedimientos para evaluar y juzgar su validez mientras que las creencias son caracterizadas por la falta de convenio sobre cómo serán evaluadas o juzgadas.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33 – 115.

Brousseau, G. (1992). *Fundamentos de didáctica de la matemática*. Universidad de Burdeos. México, SEP.

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz, (comps) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 65-94.). Argentina. Paidós.

Cantoral, R. y Farfán. R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40

Cayetano. (1999). *Modelos y tendencias de la Formación Docente*. Cayetano de Lella, www.oei.es/Cayetano.htm

Corenstein, M. (1987). El significado de la Investigación Etnográfica en Educación. En: Universidad Pedagógica Nacional. *Metodología de la investigación para la educación* (pp.273-279). UPN. México.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 17-54.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Ed. Horsori. I.C.E. Universitat Barcelona

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(52), 7-33.

Ibánez, M. (1975). *Hacia una formación humanística.* Heder. Barcelona

Joshua, S. (1996). Qu´est-ce qu´un résultat résultat en didactique des mathématiques? Recherches en Didactique des Mathematiques, vol 16 no. 2. Francia.

Mingüer, M.L. (2006*). Entorno Sociocultural y Cultura Matemática en Profesores del Nivel Superior de Educación. Estudio de Caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una Aproximación Socioepistemológica*. Tesis doctoral no publicada. Cicata-IPN. México

Montiel, G. (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual.* Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias 21(2), 265-280*

Parra, (1990). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. En Fuenlabrada, Irma. *Informe final del proyecto*: *Formación de profesores sobre Áreas Fundamentales de la Educación Básica.* CINVESTAV-IPN. México, D. F.

SEP. (1993). *Plan y programas de estudios 1993*.Educación Básica. Primaria. México: SEP.

Thompson, A. (1992). Teachers´ beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D.A Grouws (Ed.), *International Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, USA: MacMillan Pub. Com.

ELEMENTOS HISTÓRICOS, EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Yadira Marcela Mesa, Jhony Alexánder Villa Ochoa
Grupo "Educación Matemática e Historia". Universidad de Antioquia Colombia
yadiramarcelamesa@yahoo.es, javo@une.net.co
Campo de investigación: Historia de la matemática Nivel: Medio

Resumen. *Son muchas las investigaciones que han resaltado la importancia de un conocimiento de la evolución histórica de un concepto matemático en la comprensión de los obstáculos y razonamientos de los estudiantes al interior del aula de clase (Posada & Villa, 2006). Con base en este argumento, se presenta en este documento los resultados de una indagación histórica sobre la evolución del concepto de función cuadrática que ofrece al lector algunas pautas que le sean útiles a la hora de diseñar situaciones didácticas que involucren el concepto objeto de este estudio.*

Palabras clave: ecuación cuadrática, movimiento, función, geometría analítica, álgebra

Introducción

La historia ha evidenciado cómo las matemáticas surgen gracias al interrogante que tiene el hombre frente al universo y de su actividad como miembro de una sociedad. Es entonces la historia quien muestra la construcción del conocimiento como actividad propia del individuo y de él mismo como ser social. Además, Sierpinska (1989, 1992), Cotret (1985, 1989) y Sfard (1991) citados por Posada & Villa (2006, p.11) coinciden en que la historia es una herramienta para la actividad educativa en la medida en que le sirve al educador fuentes de reflexión a la hora de diseñar actividades de aprendizaje de las matemáticas.

En relación con las nociones cuadráticas, la revisión de la literatura permite determinar al menos cuatro momentos claramente diferenciados, a saber: *Las ecuaciones, Las cónicas, La Cinemática y Las Funciones*. De aquí se confirma la idea que, desde el punto de vista histórico, las ecuaciones y las funciones tuvieron una génesis independiente, ya que el descubrimiento de las relaciones funcionales a nivel formal se dio cuando había cierto desarrollo en el lenguaje algebraico, vale la pena profundizar en la investigación de tal manera que se valore dicha separación al interior del aula o que por el contrario se puedan construir ambos conceptos simultáneamente desde la modelación de situaciones de variación.

Génesis histórica de las nociones cuadráticas

Se presentará a continuación una síntesis de los cuatro momentos encontrados con lo cual se pretende generar reflexiones sobre el concepto de *"cuadrado"* y la manera en que históricamente se fue consolidando hasta construir lo que actualmente conocemos como función cuadrática. Estas reflexiones pueden convertirse en propuestas a la hora de diseñar situaciones didácticas para el aula de clase.

1. **Las ecuaciones**: El concepto de ecuación es uno de los más importantes del álgebra actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas ligada en muchos casos a situaciones donde intervienen nociones cuadráticas.

   Los *Babilonios (2000 a.C – 600 a. C)* tal y como se presentó en Mesa y Villa (2007, p.3) *"Generaron estrategias de cálculo diferentes a los geométricos de forma retórica, sin embargo, no se podría inferir necesariamente que no se haya pensado geométricamente, pero no tuvo la trascendencia que le dieron los griegos"*. Esto se puede observar un poco en esta situación presentada por Kline (1992, p. 26).

   "Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado. En la notación moderna se puede escribir que lo que buscaban los babilonios era dos números $x \wedge \overline{x}$ *tales que* $x\overline{x} = 1$ *y* $x + \overline{x} = b$*. Estas dos ecuaciones dan como resultante la ecuación cuadrática:* $x^2 - bx + 1 = 0$*"*

   Este tipo de situaciones muestra que el concepto de *"cuadrado"* era concebido como un producto de una cantidad por sí misma, que se representaba por medio de un "álgebra retórica" que le hacía ver de forma aritmética al no disponer de estrategias o símbolos que les permitiera registrar las generalizaciones, pero es clara la intención de generalidad que hay en ellas.

En la cultura *Griega (300 a.C – 200 d.C)* se evidencia cómo la cuadratura está comprometida en diferentes situaciones, pero que todas remiten a su explicación geométrica, a excepción de Diofanto que después de siete siglos (aproximadamente) se valió de un álgebra sincopada con el fin de expresar potencias. Se rigieron por un razonamiento de carácter puramente geométrico, por ende deductivo; la expresión “al cuadrado” ó “es el cuadrado de…” se describen de forma retórica dentro de un sistema deductivo que es desarrollado con el fin de darle generalidad a sus procedimientos (que precisamente la deducción la que permite generar unas premisas generales para serles útiles a los casos particulares) y son referidas a áreas y superficies.

En lo relacionado con el concepto trabajado y a la luz de una de las grandes obras que representarían en *Los Elementos* de Euclides el término “*cuadrado*” acepta definiciones como: “(…) *entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular*”. Por lo que se puede asociar la idea de cuadrado como la construcción a partir de un segmento (lado) cualesquiera de manera repetida de forma rectangular que termina por limitar una región (área), es decir, una cantidad multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica, siendo x el valor del segmento. Las representaciones para la solución de las proposiciones que se observan en esta obra eran rigurosamente geométricas y su demostración de forma retórica.

Posteriormente los *árabes* iniciaron la creación de un álgebra en la utilizaban representaciones de construcciones geométricas heredadas por los griegos; el “*cuadrado*” se evidencia como una cantidad, pero aún la expresión cuadrado se vale de una representación geométrica, por lo que se puede deducir que “*cuadrado*” es una cantidad que permite representarse geométricamente de acuerdo con la definición euclidiana mencionada anteriormente. Esta idea podría explicar el hecho de no tomar a los números negativos de los cuales se tenían ciertos conocimientos heredados de los hindúes y que fue su falta de representación geométrica la que influyó para no concebirlo como magnitudes. Es importante considerar el enfoque geométrico que tomaban los conceptos, ya que como se ha mostrado hasta aquí pareciese que lo evidente como sinónimo de real era posible representarse por algo que pudiese observarse o percibirse simplemente.

2. **Las Cónicas**: Definitivamente pensar en ellas implica remitirse a Apolonio de Perga (260 a.C), quien realiza un tratado sobre el estudio de las secciones cónicas que fue de gran trascendencia para el posterior desarrollo de la geometría analítica y los estudios del movimiento, según González (Las cónicas de Apolonio, 4) referenciando a Apolonio afirma: «*La Parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa x y el latus rectum l*». de ahí que se pueda inferir que "*cuadrado*" es, sin lugar a dudas, la expresión geométrica a la que Apolonio, por su brillantez, hacia referencia desde la generalidad promoviendo un acercamiento a un "álgebra" de las cónicas. Si bien la parábola no podía construirse con regla y compás, pues como ya lo han mostrado al ser precisamente un lugar descubierto por los problemas típicos de la época, se observa que lo que puede haber es una transformación de áreas o lo que se ha llamado la cuadratura de la parábola.

   Otro acercamiento es el de Hipócrates (s. V a. C) en su intento de hallar la solución a la duplicación del cubo. En este sentido Kline (1992, p.70), anota que surgen ecuaciones cuadráticas a partir del hallazgo de las cantidades que hacían la media proporcional.

   A partir de este momento se puede observar un salto de casi 18 siglos en la historia de las matemáticas con respecto al paso del tratado de las Secciones Cónicas a su estudio en el plano cartesiano, que es el interés de esta investigación. En el siglo XVII con la creación de la geometría analítica, en la que se definen las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en x e y, también se concreta el estudio de los lugares geométricos estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones. En la obra "*La Geometría"* de Descartes "*cuadrado*" tomó la acepción euclidiana, su diferencia radicaba en el desprendimiento de x^2 al ser tratado como una cantidad generada por la segunda potencia y no su restricción al ser tratada como un área.

3. **Cinemática:** Se destacan los trabajos sobre el movimiento de Galileo quien muestra que la expresión: "*al cuadrado*" significa una segunda potencia de una cantidad o el producto de un número por sí mismo, su participación en su avance o desarrollo está basado en los procesos de modelización de los fenómenos físicos.

   Galileo es el mayor representante de la transición entre la ecuación cuadrática relacionada con las superficies y su interpretación como modelo matemático de fenomenos físicos. En su obra conceptualiza el incremento de las cantidades a medida que varían, y en el caso de la parábola comenta cómo los incrementos (variación) corresponden a la progresión de los números impares.

   La explicación dada por Galileo Galilei inicia con el establecimiento de relaciones entre dos cantidades que varían, una dependiendo de la otra, así como el tiempo transcurrido y el espacio alcanzado; la representación gráfica y las unidades de medición, que le demandaba un conjunto denso para darle sentido a todas las representaciones, por la naturaleza en sí del movimiento como continuo, sin embargo ésto no impedía su representación gráfica y uno de sus ejercicios consistía en hallar "*(…) el espacio en el instante t*", es decir que se debía cumplir que para cualquier tiempo le correspondía un espacio determinado, por lo que implícitamente existe en su formulación y teoría la existencia de una relación biunívoca y especialmente situaciones cuadráticas, como muestra el siguiente teorema: "*Si un móvil con movimiento uniformemente acelerado desciende desde el reposo, los espacios recorridos por él en tiempos cualesquiera, están entre sí como la razón al cuadrado de los mismos tiempos, es decir como los cuadrados de esos tiempos*". Galilei (1638/2003, p.236) de todo lo anterior se puede inferir que en Galileo el concepto de "*cuadrado*" era aceptado como un número (aritmética) pero también era representado en forma geométrica, sin embargo no se restringe a este aspecto si no que también el "*cuadrado*" era concebido como una segunda potencia lo cual había sido explícito desde Euclides. Adicionalmente el *cuadrado* era generado por la media proporcional entre dos razones por ende su inversa era su raíz, por lo que raíz corresponde a la operación de hallar una media proporcional.

Newton: Retoma los trabajos de Galileo para formalizar la teoría de la gravitación. Introduce conceptos del cálculo gracias a los desarrollos matemáticos con los que se contaba para la época; por ejemplo, la notación algebraica y la geometría analítica. En su obra "*Principia*", relaciona los fenómenos naturales en los que se observa la riqueza de la expresión "*cuadrado*" vinculada a ciertos rasgos funcionales de manera implícita.

En la siguiente cita de Newton (1687/1982) se muestra una estrecha relación con lo planteado por Galileo y en la forma en que trata los incrementos.

"Si un cuerpo es resistido en parte en razón de su velocidad y en parte como el cuadrado de esta misma razón, y se mueve en un medio análogo únicamente por su fuerza innata, y los tiempos son tomados en progresión aritmética, entonces las cantidades inversamente proporcionales a las velocidades, incrementadas en una cierta cantidad dada, estarán en progresión geométrica." (p. 225)

Sin lugar a dudas, el movimiento es tan antiguo como la existencia misma, aunque con Aristóteles y posteriormente con Oresme se observa un primer trabajo del movimiento. Hubo de esperar hasta el siglo XVII para un conocimiento físico – matemático más sólido del comportamiento de éste. Una reflexión importante es el continuo vínculo que ha existido entre las matemáticas y la física en la cual se puede visualizar procesos de modelización asociados a la explicación de fenómenos de la naturaleza. Newton, en el prefacio de su *Principia,* le da un reconocimiento al proceso de modelización y lo asemeja a la mecánica en tanto:

"*(…) el mecánico y la geometría en sí, el primero como el artífice que y conocedor de las leyes que le rige a la mecánica en lo geométrico y el hecho de 'funcionar' la mecánica no la hace por si sola la geometría, si no en el conocimiento que tenga el artífice de ella.*" (p.4)

4. *Las funciones.* Algunos acercamientos a la construcción del concepto se inician con Descartes y Fermat mediante la creación de la geometría analítica al estar más interesados en la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas con dos variables. Como señala Del Rio (1996, p.38) "[Descartes] *encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijados los de la otra*" por lo que ya tiene dos características de la noción de función, la primera el considerar dos cantidades variables y la segunda una cierta relación de dependencia. Dirichelt dio la definición de función que es la más empleada ahora: "*y es una función de x cuando el valor de x en un intervalo dado le corresponde un número y*" Kline (1992, p.1252). Así como dice Cauchy (1821) citado por Kline (1992):

"Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que esta entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esa variable." (p.1254)

La relación de dependencia entre estas variables facilita la relación en el plano cartesiano por medio de la expresión analítica (ecuación), y según Euler toda función es una expresión analítica.

Consideraciones finales

En la revisión de la literatura se evidencian algunos obstáculos presentes en la construcción de la noción de función cuadrática, tales como: la no aceptación de los números negativos, la concepción cuadrática como área, limitar su construcción con regla y compás debido a que ésto ubica al concepto de "*cuadrado*" como polisémico creando confusión. Es posible superar algunas de estos obstáculos el momento en que se pueda establecer un puente entre la concepción aritmética, geométrica y algebraica, permitiendo la reflexión del concepto como tal y cómo éste se convierte en herramienta para modelar el entorno o situaciones aritméticas, de áreas, de variación, en especial del movimiento.

Las reflexiones históricas presentadas en este documento sugieren la necesidad de que los conocimientos matemáticos que se produzcan en el aula lleven al estudiante a la exploración, manipulación, de lo que está en su entorno. En este caso, las situaciones de movimiento ofrecen una la riqueza conceptual para la comprensión de la función cuadrática. Un trabajo didáctico en este sentido, sugiere una visión de las aulas escolares como espacios análogos a los laboratorios, en los cuales se valide el conocimiento y se promueva un ambiente que potencie la creación de alternativas de solución, análogos a los empleados por Galileo en sus experimentos de movimiento.

Referencias bibliográficas

Del Rio, J. (1996). *Lugares geométricos: Las Cónicas*. Madrid: Síntesis.

Euclides (1999). *Elementos* I- VI. Madrid: Planeta de Agostini.

Galilei, G. (1638/2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Losada.

González, P. *Apolonio ¿262 a.C. - 190 a.C?.* Extraído el 2 enero, 2007 de http://www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático en la antigüedad a nuestros dias. I y II*. Madrid: Alianza editorial.

Mesa, Y. & Villa, J. (2007). Elementos históricos epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. *Revista virtual FUCN, 21,*.Artículo 5. Extraído 25 Agosto, 2007 de http://www.ucn.edu.co/portal/uzine/volumen21/html/articulo5.html

Newton, I. (1687/1982). *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Madrid: Editora Nacional.

Posada, F. & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Jaén: Universidad de Jaén.

LA INTEGRAL DEFINIDA: SIMPLIFICACIÓN DEL LÍMITE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA DE LA DEFINICIÓN

Eugenio Carlos Rodríguez
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana Cuba
ecarlos48@yahoo.com
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *La definición que se utiliza para enseñar el concepto de integral definida en las clases de Cálculo para ingeniería fue dada por Riemann, quien fue el primero en enunciarla en su forma general (Fikhtengol´ts, 1965, p. 346). Por lo general, en los textos de Cálculo, la definición de Riemann se "simplifica" al obtener el "límite" de las llamadas Sumas de Riemann. En este trabajo se muestran las ideas del autor, en las cuales se inició cuando escribió un libro de Cálculo Integral para funciones de varias variables (Carlos, Martín, Otero y Rivero, 1986) para el cual consultó numerosa bibliografía de Análisis Matemático y de Cálculo. Estas ideas fueron enriquecidas con el estudio reciente de bibliografía especializada. El propósito general del trabajo es mostrar cómo llevar el concepto objeto de estudio al estudiante de ingeniería, sin perder el necesario rigor matemático.*

Palabras clave: integral definida, límite, sucesión de particiones

Antecedentes personales

Al comienzo de los años 80 el autor se dio a la tarea de escribir un libro de cálculo integral para funciones de varias variables (Carlos et al., 1986). Para esta tarea tuvo que consultar un gran número de libros de Cálculo y de Análisis Matemático, confrontando las diferencias entre definiciones de ambos tipos de textos, fundamentalmente en el rigor de las definiciones. Las ideas del autor acerca de este problema se enriquecieron con el paso del tiempo, sobre todo con la ayuda a la preparación de profesores jóvenes procedentes de carreras no matemáticas e impartiendo clases de Cálculo en carreras de ingeniería, y tuvieron un momento culminante con la lectura del libro "Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad", del Dr. Ricardo Cantoral Uriza (Cantoral, 2001).

Antecedentes históricos (Ribnikov, 1987)

Del legado de las Matemáticas, el cálculo infinitesimal es, sin duda, la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza. El cálculo infinitesimal tiene dos caras: diferencial e integral. Los orígenes del cálculo integral se remontan, como no, al mundo griego; concretamente a los cálculos de áreas y volúmenes que Arquímedes realizó en el siglo III a.C. Aunque hubo que esperar mucho tiempo, hasta el siglo XVII, ¡2000 años!, para que apareciera, o mejor, como Platón afirmaría, para que se descubriera el cálculo.

Relacionado con los problemas de tangentes surgió a mediados del siglo XVII el llamado problema inverso de tangentes, es decir, deducir una curva a partir de las propiedades de sus tangentes. El primero en plantear un problema de este tipo fue Florimond de Beaune, discípulo de Descartes, quien planteó, entre otros, el problema de encontrar la curva con subtangente constante. El propio Descartes lo intentó sin éxito siendo Leibniz el primero en resolverlo en la primera publicación de la "historia sobre el cálculo infinitesimal". De hecho un elemento esencial para el descubrimiento del cálculo fue el reconocimiento de que el problema de las tangentes y las cuadraturas eran problemas inversos; es por eso que la relación inversa entre la derivación y la integración es lo que hoy llamamos Teorema fundamental del cálculo.

Newton en su célebre frase "Si he llegado a ver más lejos que otros es por que me subí en hombros de gigantes" se refiere entre otros a su maestro y mentor Isaac Barrow. Barrow fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo. En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada -reglas de derivación- y mostraron que ambos conceptos eran inversos- Teorema fundamental del cálculo-: acababa de nacer el cálculo infinitesimal. Para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc. que habían ocupado a sus predecesores bastaba echar a andar estos dos conceptos mediante sus correspondientes reglas de cálculo.

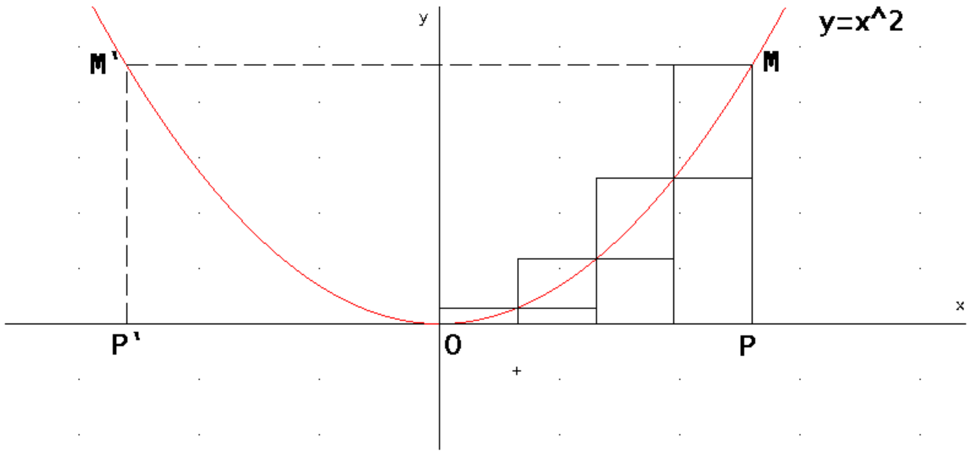
Leibniz, más conocido como filósofo, fue el otro inventor del cálculo. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque Leibniz fue el primero en publicar el invento.

Las suspicacias entre Newton y Leibniz y sus respectivos seguidores, primero sobre quién había descubierto antes el cálculo y, después, sobre si uno lo había copiado del otro, acabaron estallando en un conflicto de prioridad que amargó los últimos años de ambos genios. La disputa fue evitable pues los métodos de ambos genios tienen importantes diferencias conceptuales que indican claramente la génesis independiente de los mismos. La fundamentación de ambos métodos es totalmente distinta. Si el de Newton fue resuelto totalmente mediante el concepto de límite, el de Leibniz tuvo que esperar hasta la década 1960-70 hasta la aparición del Análisis no estándar.

Desarrollo

El presente trabajo considera el resultado de este proceso histórico como un proceso activo de apropiación de la experiencia histórica acumulada por la humanidad, y a partir de las ideas del psicólogo ruso Lev Semionovich Vigotsky (1896-1934), en lo que respecta a su Teoría del desarrollo histórico-cultural de la psiquis humana (Vigostky, 1966), en la que se reconoce que el hombre llega a elaborar la cultura dentro de un grupo social y no sólo como un ente aislado, este se considera el punto de partida y el marco teórico apropiado. Comencemos con el siguiente ejemplo.

Determinar el área A de la figura OPM limitada por la parábola y = x2, el segmento OP del eje de las X desde el origen hasta el punto P de abcisa x, y el segmento PM.



Dividimos el segmento OP en n partes iguales y construimos un conjuntote rectángulos cuyas áreas aproximan por defecto y por exceso el área de cada segmento de parábola.

Las áreas $A_n \; y \; A_n'$ de la sumas de ambos conjuntos de rectángulos satisfacen $A_n < A < A_n'$

Obsérvese también que la diferencia $A_n - A_n'$ es igual al área $y(\frac{x}{n})$ del mayor de los rectángulos, de donde, se observa que $\lim_{n\to\infty}(A_n - A_n') = 0$

Obviamente se tiene que $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n'$

Ya que las alturas de los rectángulos son las ordenadas de los puntos sobre la parábola con abcisas

$$\frac{1}{n}x, \frac{2}{n}x, \frac{3}{n}x, \ldots, \frac{n}{n}x = x$$

y sus magnitudes son

$$\frac{1}{n^2}x^2, \frac{2^2}{n^2}x^2, \frac{3^2}{n^2}x^2, \ldots, \frac{n^2}{n^2}x^2$$

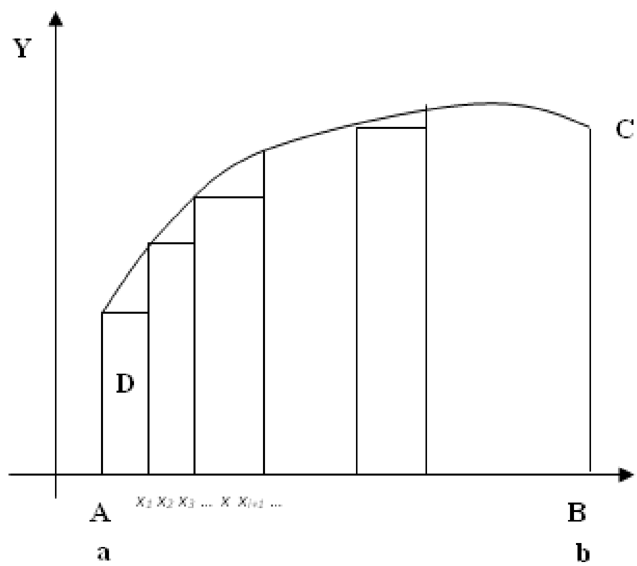
se obtiene que

$$A'_n = \frac{x^2}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\frac{x}{n} = \frac{x^3}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$
$$= \frac{x^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{x^3}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

de donde $A = \lim_{n\to\infty} A'_n = \frac{x^3}{3} = \frac{xy}{3}$

De aquí es fácil encontrar que el área M´OM es igual a $\frac{4}{3}xy$, es decir, dos tercios del rectángulo M´P´PM. Este resultado fue conocido por Arquímedes (287-212 ane).

Generalizando esta idea se puede determinar el área P del trapecio curvilíneo ABCD determinado por la curva *y = f(x)* entre *x = a* y *x = b*



tomando

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$
$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

Para denotar la suma de la forma $\sum y\Delta x$ Leibnitz introdujo el símbolo $\int ydx$, donde el símbolo $\int$ es una s alargada, la primera letra de la palabra "summa" del latín.

El término "integral" fue propuesto por Bernoulí, discípulo y asociado de Leibnitz. Leibnitz originalmente usó la expresión "la suma de todos los *ydx*" (Ribnikov, 1987).

Hasta aquí se se utilizó la idea intuitiva de área, pero el propio concepto de área requiere justificación y el área del trapecio curvilíneo requiere de la existencia del límite. Este tipo de límite debe ser investigado independientemente de la representación geométrica de la función $f(x)$.

Veamos a continuación una definición que nos dará con rigor la forma de calcular el área deseada, la definición de integral definida (Fikhtengol´ts, 1965, p. 346).

Definición

Sea la función $f(x)$ definida sobre el intervalo [a,b] . Formemos una partición del intervalo [a,b] subdividiendo arbitrariamente este intervalo al introducir entre a y b los puntos x_0, x_1, x_2, ..., x_n

La mayor de las diferencias

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

será denotada por λ.

Tomemos algún punto arbitrario ξ_i en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \quad (i = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

y formemos la suma

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Ahora procedamos a establecer la existencia de un límite finito de esta suma

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

Supongamos que el intervalo [a,b] es dividido sucesivamente en partes, primero de una forma, luego de otra forma y así sucesivamente. Esta sucesión de particiones del intervalo será llamada “fundamental” si la correspondiente de valores $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ tiende a cero.

Entonces el límite $I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$ se entiende en el sentido de que la sucesión de valores de las sumas σ correspondientes a una sucesión fundamental arbitraria de particiones de el intervalo, siempre tiende a un límite I para todos los posibles valores de ξ_i

El límite finito I de la suma σ cuando $\lambda \to 0$ es llamado la integral definida de la función *f(x)* en el intervalo [a,b], y se denota por el símbolo

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

y la función *f(x)* se dice que es integrable sobre el intervalo [a,b]

Esta definición en el lenguaje de sucesiones hace posible transferir los conceptos básicos y teoremas de la teoría de límites a la nueva forma del límite.

Por lo general en los textos de Cálculo esta definición se “simplifica” al obtener “el límite” de las sumas de Riemann. Esta es una de las diferencias que distingue también los textos de Cálculo de los de Análisis, y esta simplificación también se refleja, por supuesto, en el discurso matemático en la enseñanza del Cálculo en las carreras de ingeniería.

Esto es lo que Cantoral llama…el fenómeno de Transposición Didáctica, que participa en la conformación de lo que hemos llamado “didáctica normal” del Cálculo, que ha hecho de este tema una especie de Análisis Matemático “diluido”… (Cantoral, 2001).

Veamos qué dice por lo general una definición de integral definida en un libro de Cálculo.

Una vez obtenida la suma $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, si para cualquier partición del intervalo [a,b], existe $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ independientemente de los valores de ξ_i, entonces este límite se denomina integral definida de *f(x)* desde *x = a* hasta *x = b*. En esta definición el límite significa que, para una partición cualquiera del intervalo, si la norma de la partición λ está suficientemente cerca de cero, y siendo arbitrarios los números ξ_i en los subintervalos [x_i , x_{i+1}] de la partición, entonces cualquier suma de Riemann está cerca de *I*.

En esta definición, aunque se trate con rigor la definición de límite de una función, no se aprecia el sentido del "límite de la sucesión fundamental de particiones" y se "diluye" el concepto, se simplifica. La interpretación geométrica, en el mejor de los casos utilizando la tecnología, reafirma el concepto.

En el caso del estudiante de ingeniería, para el cual el concepto de límite es uno de los más difíciles, si no el más difícil, este límite es un límite más entre tantos cuyo sentido no entiende.

Evidentemente en carreras de ingeniería y en otras carreras no matemáticas, en las que se estudia el Cálculo, es necesario "suavizar" la definición, ya que este tipo carreras no requieren del rigor del Análisis Matemático, sólo del Cálculo, pero alguna reflexión hay que hacer del sentido más complejo de este límite con respecto al límite de una función, conocido por el estudiante, y más cercano al límite de una sucesión, a veces no tan conocido por el estudiante.

Conclusiones

El tema mostrado no es más que otro ejemplo de la presencia paralela de la Didáctica normal del Cálculo con la Didáctica del Análisis Matemático.

El problema que se plantea ahora es cómo llevar el concepto objeto de estudio al estudiante de carreras no matemáticas, sin perder el necesario rigor matemático. Se trata de un problema complejo, que, sin lugar a dudas debe llamar a la reflexión, ya que este no es el único ejemplo de su tipo, en los cuales, buscando la simplificación, se pierde el rigor que debe tener la enseñanza de la Matemática. El tema está abierto a la investigación.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica..

Carlos, E., Martín, L., Otero, M. y Rivero, R. (1986). *Integrales Múltiples.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Fikhtengol´ts, G. M. (1965). *The Fundamentals of Mathematical Analysis. Volume 1.* USA: Pergamon Press.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Moscú. URS: Editorial MIR.

Vigostky, L. S. (1966). Pensamiento y Lenguaje. La Habana, Cuba: Edición Revolucionaria.

EL CARÁCTER EVOLUTIVO DE LAS PRÁCTICAS SOCIALES. EL CASO DE LA PREDICCIÓN

Iván López-Flores, Carolina Carrillo, Herminio Alatorre
CimateUAGro México
jilopez@cimateuagro.org
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Este escrito reporta los resultados de una investigación de tipo histórico epistemológico acerca del carácter evolutivo de las prácticas sociales, constructo teórico fundamental en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. En particular esta investigación analiza, cómo se concibe a la predicción desde la Socioepistemología y hace un recorrido histórico conceptual alrededor de la génesis y el posterior desarrollo de los fractales. Una comparación de estos dos análisis nos hace concluir que todo el conocimiento, las herramientas y la teoría creados en torno a los fractales fueron guiados por la práctica social de la predicción. Se muestra así una evolución de la práctica social de la predicción caracterizándola en predicción determinista y predicción no determinista.*

Palabras clave: Socioepistemología, práctica social, carácter evolutivo.

Introducción

La Socioepistemología es una aproximación teórica emergente dentro de la disciplina científica denominada Matemática Educativa. El objetivo de la Matemática Educativa es explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático, cómo desarrollan una manera matemática de pensar. Dentro de esta disciplina la Socioepistemología ha hecho planteamientos novedosos poniendo al centro de la discusión, más que a los conceptos, a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento (López-Flores, 2005).

Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La Socioepistemología, por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales (Cantoral y Farfán, 2003, 2004).

Esta aproximación teórica de naturaleza sistémica permite tratar a los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple incorporando el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

El objeto de estudio

Al ser la Socioepistemología una aproximación teórica emergente en el campo tiene aún problemas teóricos por resolver, uno de ellos es el relativo a la precisión/caracterización/definición de lo que es una práctica social (López-Flores y Cantoral, 2006). Muestra de ello es que, dentro del cúmulo de trabajos que se han realizado al seno de la Socioepistemología, existen diversas caracterizaciones y usos de este constructo teórico (López-Flores, 2005; López-Flores, Alatorre y Carrillo, 2006).

El objeto de estudio de esta investigación son las prácticas sociales, es de particular interés indagar acerca de su naturaleza, en especial sobre su estado de *concepto teórico estático o evolutivo.* Desde luego, nuestro interés es también contribuir con las caracterizaciones que hasta ahora se han hecho, estructurando una caracterización que coadyuve a desarrollar la aproximación teórica socioepistemológica.

Esta investigación asume la siguiente caracterización de lo que práctica social significa:

> *la práctica social surge de una necesidad sociocultural y posibilita o permite la construcción de conocimiento, pero no cualquier conocimiento, sino un conocimiento específico (en el caso específico de la predicción es lo permitió o posibilitó la construcción de lo que se conoce escolarmente como Cálculo, Ecuaciones Diferenciales y Análisis Matemático)*(López-Flores, Carrillo, Alatorre, 2006).

La predicción desde el punto de vista de la Socioepistemología

La predicción es, como resultado de los estudios de la aproximación socioepistemológica, el "eje" que permitiría un rediseño del discurso matemático escolar, alrededor de lo que actualmente se conoce como Cálculo, Análisis y Ecuaciones Diferenciales.

En Cantoral (2001, pp. viii) se rastrea y analiza "*la producción intelectual de científicos, filósofos naturales de los siglos diecisiete, dieciocho; ingenieros, físicos y matemáticos de los siglos diecinueve y veinte, incluyendo por supuesto a los partícipes del proceso educativo y científico contemporáneo*", esta obra nos presenta la forma en que la predicción se constituye como programa de investigación desde el siglo diecisiete al veinte.

Se muestra cómo una de las obras máximas de este programa científico fue la serie de Taylor, si analizamos este resultado desde lo que hasta ahora ha construido la Socioepistemología llegaríamos a la conclusión de que si se conoce cómo es una función (sistema) en un punto, digamos x_0, y cómo son todos sus cambios en ese punto, entonces es posible conocer cualquier estado posterior del sistema (x_0+h), pues dicha serie nos permite conocer de *manera puntual el valor de $f(x_0+h)$*, si *f* es pensado como el sistema de referencia (la función) (Alanís, Cantoral, Cordero, Farfán, Garza, Rodríguez, 2003).

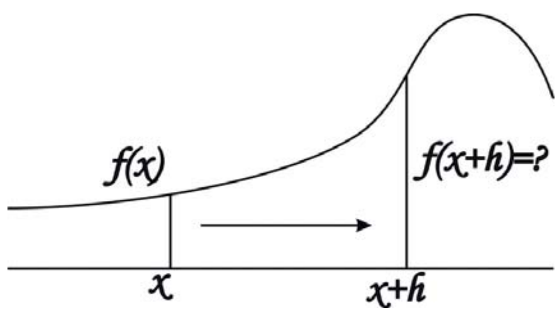


Figura 1. Modelo visual de la predicción. (Cantoral, et al, 2003)

El programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo con el programa lagrangiano donde emerge la noción de función analítica (Cantoral, 1990).

Lo que la Socioepistemología ha estudiado hasta estos momentos es el conocimiento producto de la aplicación de *una muy fructífera metáfora del flujo del agua, una metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes reales, entonces bajo esta metáfora las gráficas que producen los fenómenos son continuas y derivables, ya que así es la metáfora que los modela.*

La pregunta entonces es: *¿Que conocimiento se produce cuando se mantiene la idea de la predicción, pero no así la metáfora que modela las variables?*

Los fractales como una forma de predicción

Antes de Weierstrass el uso de la metáfora del flujo de agua hizo posible que se construyera lo que escolarmente se conoce como Cálculo, Análisis, Ecuaciones Diferenciales; es a partir de la puesta en primer plano de una función continua en todos sus puntos pero sin cociente de diferencias bien definido en ninguno de ellos, que la idea de Fractal, casi 100 años después, pudo concretarse.

Nuestra revisión histórico epistemológica nos permite entender el desarrollo de la noción de predicción, la idea presentada por Weierstrass se consolida como un punto de ruptura, en el desarrollo de la ciencia.

Sin esta metáfora y con este ejemplo, fue posible que gente como Cantor, Sierpinsky, Peano, Menger construyeran más de este tipo de entes que en un inicio eran llamados "monstruos" y se decía que estaban fuera de la Matemática, fue sólo hasta que Hausdorff y Lévi determinaron las características fundamentales de los fractales, la autosimilitud y la dimensión fraccionaria, que fue posible considerarlos dentro de la matemática. Posteriormente, personajes como Julia y Mandelbrot potenciaron el estudio, ahora teórico, sobre los fractales; la aparición de las computadoras finalmente diversificó tanto los ejemplos como las aplicaciones a los diversos campos de la ciencia.

El siguiente gráfico muestra esta ruptura:

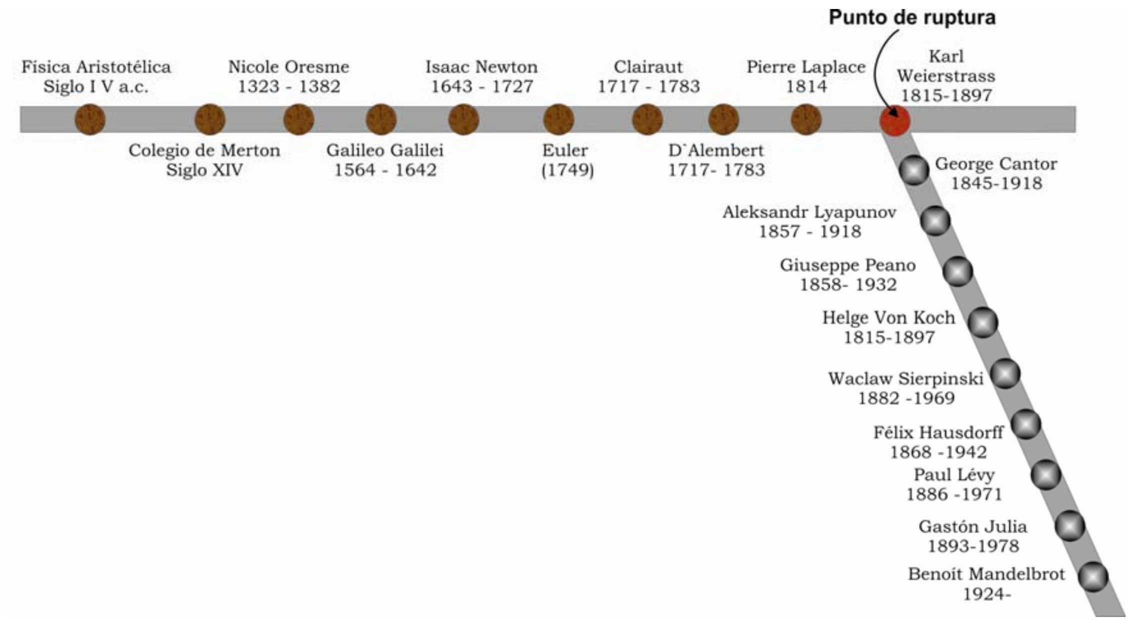


Figura 2. El punto de ruptura en el desarrollo histórico-conceptual de la predicción.

Para ver a detalle cada una de las contribuciones de estos personajes, mirar Alatorre (2007).

Analicemos ahora dos problemas, uno que en Alanís, et al (2003), se presenta como la aplicación de la serie de Taylor como herramienta predictiva y otro, que implica la aparición de un fractal clásico, un estudio de Robert May hecho en 1976, (citado en Braun, 2003) sobre poblaciones, en el campo de la Biología.

Problema 1. La ley de desintegración del radio dice que la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad inicial de radio. Supongamos que en cierto instante *t=0* se tienen R_0 gramos de radio. Se desea saber la cantidad de radio presente en cualquier instante posterior *t*.

Si *R(t)* representa la cantidad de radio en cualquier instante *t* y la velocidad de desintegración está dada por $\frac{-dR}{dt}$, entonces $kR=\frac{-dR}{dt}$, (con *k* constante). Usando la idea de predicción estudiada en el capítulo dos referente al paradigma Newtoniano, el problema consiste en anunciar el valor posterior en términos de los datos iniciales: *0, R (0), R'(0), R''(0),* etc., de ahí que la ecuación buscada se exprese, mediante la serie de Taylor:

$$R(t)= R(0)+R'(0)t+R''(0)t^2/2!+...$$

A partir de la ecuación diferencial que regula el comportamiento entre las variables tenemos que, $R'(0)= -kR(0)$, $R''(0)=-kR'(0)=k^2R(0)$, etc.

Por tanto, la expresión, adquiere el aspecto:

$$R(t)= R(0)-kR(0)t+k^2R(0)t^2/2!-k^3R(0)\ t^3/3!+...=R(0)\{1-kt+k^2t^2/2!-k^3t^3/3!+...\}=R_0e^{kt}.$$

De tal suerte que si uno necesita calcular la cantidad de radio para el tiempo *t=10*, bastará con evaluar en *R(t)*.

Problema 2. Pensemos en un problema de la ecología: cómo evoluciona en el transcurso del tiempo una población determinada, digamos de insectos. Si sabemos cuántos insectos hay en este año, podemos preguntarnos ¿Cuántos insectos habrá el próximo año, el siguiente, y así sucesivamente?

Una función que modele este fenómeno pudiera ser $y = q\ x\ (1 - x)$, ya que esta función hace que para valores pequeños de *x*, la curva crezca y para valores grandes disminuya.

Por conveniencia se tomó a la *x* y la y como entre cero y uno. Y por lo tanto el valor de q estará entre 0 y *y*. Cero representa extinción y el valor uno el máximo posible de la población.

Al paso del tiempo, para un valor de digamos q=2.5, tenemos que, para un valor inicial de *x=0.7* se genera la siguiente secuencia de valores iterados para *x:*

0.525, 0.6234, 0.5869, 06061, 05992, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600,…

Estos resultados indican que la población se estabiliza al paso del tiempo.

Si empezáramos con un valor de x=0.25 y conserváramos el valor de *q*=2.5, se tendría la siguiente secuencia: 0.4688, 0.6226, 0.5874, 0.6059, 0.5970, 0.6015, 0.5992, 0.6004, 0.5998, 0.6001, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600…

Se tiene entonces que se llega al mismo valor, no importando el valor inicial.

Este resultado nos indica que la población no crece indefinidamente al paso del tiempo y que además, al paso de algunos años la población alcanza un valor que no depende de cuál haya sido el valor inicial.

Si se vuelve a repetir este procedimiento pero para otro valor de *q*, se obtendrá otro valor final. Por ejemplo, si *q=2.7*, la sucesión se acerca a 0.6296.

Se puede mostrar que si *q* está entre cero y uno, la población se extingue (la sucesión siempre va hacia cero).

¿Qué pasará con valores mayores que uno?

Si se analiza el caso *q=2.5* con *x=0.6*, se tiene que

0.7920, 0.5436, 0.8187, 0.4898, 0.8247, 0.4772, 0.8233, 0.4801, 0.8737, 0.4779, 0.8236, 0.4795, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794…

Se tiene que la población “salta” a dos valores, ya no sólo a uno (periodo dos).

Si ahora se toman los valores *q=3.5* y *x=0.6*, después de varias iteraciones se tiene que los valores finales son cuatro: 0.3038, 0.8260, 0.5001 y 0.8750 (periodo 4).

Para *q=3.55* y *x=0.6* se tienen ocho valores:

0.3548, 0.8127, 0.5405, 0.8817, 0.3703, 0.8278, 0.5060 y 0.8874.

Para el caso q=3.6, por más iteraciones que se hagan no es posible encontrar una sucesión de números que se repita, parecen escogidos al azar y de hecho se generará una sucesión distinta para cada valor distinto de *x*.

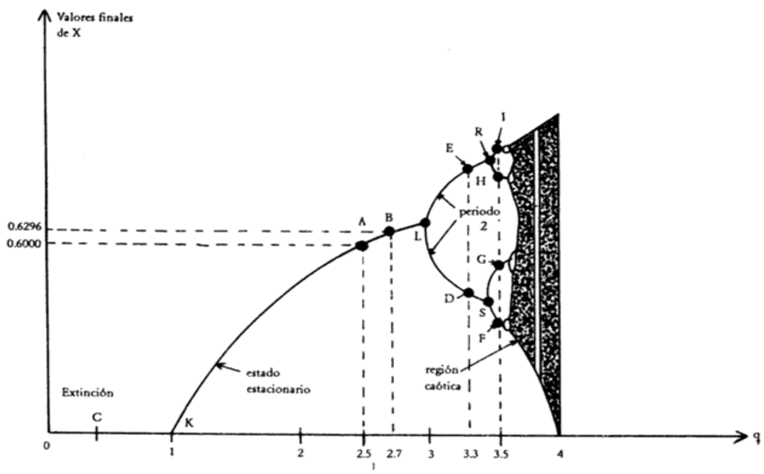


Figura 3. Gráfico de *q* contra los valores de estabilización.

La presente gráfica generada por computadora muestra el comportamiento poblacional de los insectos, en ella se observa que existen infinidad de regiones en las que no es posible encontrar un número finito de valores estables, sin embargo sabemos cómo se comporta el sistema en términos generales.

Podemos entender los estados por los que atraviesa el sistema a través de los cambios de *q* a medida que crece: Extinción, un solo valor final, periódicos con periodicidades 2, 4, 8, 16,…, caótico, periódicos con periodicidad 3, 6, 9…, caótico,…

Éste es un ejemplo clásico de los que podemos encontrar en los libros de introducción a los fractales y al estudio del caos.

Análisis comparativo

En cuanto a similitudes, los dos problemas planteados presentan preguntas que nos permiten afirmar que se trata de situaciones donde la predicción como argumento es fundamental; en cuanto a diferencias, encontramos que si bien en ambas está presente la predicción, el tipo de respuestas que a cada una se dan son muy distintas. Por un lado, para el caso del decaimiento radioactivo, tenemos que el uso de la serie de Taylor nos permite construir una predicción del tipo $F(x_0)=a$, no importando el x_0 del que se hable; en tanto que en la situación de los insectos, para valores específicos de un parámetro es posible dar una predicción del tipo anterior, mientras que para otros valores, no es posible siquiera conocer algún valor aproximado, si acaso es posible de manera general conocer el comportamiento de este sistema.

En cuanto al análisis histórico epistemológico, podemos concluir que los fractales se originan a partir de la eliminación de una metáfora que modelaba las variables, permitiéndose así la creación de un nuevo modelo para la naturaleza.

Al haber presentado las diferencias de fondo entre estos dos tipos de predicción, se hace pertinente una clasificación que permita diferenciarlas: ***predicción determinista***, la presente en los estudios socioepistemológicos hechos hasta ahora **y *predicción no determinista***, para aquella predicción que guía el estudio de fenómenos que involucran a los fractales.

Reflexiones finales

En su conjunto, el análisis histórico conceptual y el de los tipos de problemas, nos permiten afirmar primero que los fractales son una forma de predicción así como que las prácticas sociales, y en este caso de la predicción son susceptibles de evolucionar, donde por evolucionar estamos entendiendo el hecho de mantener una esencia de ella y cambiar alguno de los supuestos que alrededor de ella se encuentran.

Este trabajo también pretende ser una primera aproximación a una socioepistemología de los Fractales.

Referencias bibliográficas

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas.

Alatorre, H. (2007). *El carácter evolutivo de las prácticas sociales*. Tesis de Maestría. México: Cimate-UAGro.

Braun, E. (2003). *Caos, Fractales y cosas raras.* México: Fondo de cultura económica.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para los conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Preadiciere" y "lo analítico"*. Tesis doctoral no publicada. México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvesvav-IPN.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). *Mathematics Education: A vision of its evolution. Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherthelands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thompson.

Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*. United States of America: Addison Wesley .

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. Cicata-IPN. México.

López-Flores, I. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad.* Tesis de maestría no publicada. Mexico: Cinvestav-IPN.

Disponible en http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/.

López-Flores, I., Carrillo, C., Alatorre, H (2006). La evolución de una práctica social: el caso de la predicción. *Actas de la Décima Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México: Editorial CLAME. Disponible en http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/.

López-Flores, I.; Cantoral, R. (2006). La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad. *Acta de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Uruguay: Ediciones Clame. Disponible en http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/

Categoría 4

Uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

LA INTERACCIÓN DOCENTE ANTE LA VINCULACIÓN DEL ENTORNO TECNOLÓGICO EN EL ÁMBITO ESCOLAR

Juana Acosta Ganém, Miguel Ángel Cruz Castillo
Secretaría de Educación Pública en Hidalgo México
ganem_pachuca@hotmail.com, macc_2302056@yahoo.com
Campo de investigación: Formación de profesores, tecnología avanzada Nivel: Básico

Resumen. *El presente trabajo se enmarca en los escenarios actuales de cambios continuos, donde las nuevas herramientas tecnológicas están imponiendo transformaciones en los procesos educativos. Presentamos algunos lineamientos teóricos, supuestos, objetivos y breves conclusiones que orientaron las actividades del programa EMAT. en el Estado de Hidalgo, México en la puesta en escena de acuerdo a la Reforma de la Educación Secundaria en su versión de aula de medios. En este sentido se pretende que el docente profundice sus conocimientos pedagógicos y cuestione su quehacer docente reconociendo el papel decisivo que tienen las nuevas tecnologías en la transformación de las estructuras curriculares. El proyecto busca que los docentes identifiquen las potencialidades de la tecnología para innovar las prácticas escolares y tomen conciencia de la función catalizadora de dichas herramientas al favorecer la apropiación del conocimiento matemático.*

Palabras Clave: nuevas tecnologías, actualización permanente, implicaciones didácticas y pedagógicas

Introducción

La influencia de la ciencia y la tecnología en la sociedad del conocimiento ha ido conquistando distintos espacios de la vida; ha transformado nuestro modo de pensar, de sentir, de actuar, de enseñar, y de aprender. Todo el entorno es distinto. El gran imperativo es prepararnos y aprender a vivir en ese nuevo entorno. Esta transformación conlleva a la Educación a transitar con la dinámica de cambio y mostrar una adaptación constante en la relación entre: conocimiento científico, desarrollo tecnológico y conocimiento cultural.

En congruencia con esta perspectiva la introducción de las herramientas tecnológicas produce un nuevo modelo de formación caracterizado por el paso de una comunicación unidireccional a un modo más abierto que posibilita la interacción, la diversificación de los soportes de la información y el aprendizaje. Este modelo transforma a las aulas en comunidades de aprendizaje, donde los alumnos que interactuán poseen diferentes niveles de experiencia, conocimiento y habilidades, que intercambian para aprender mediante su aplicación y participación en las situaciones didácticas propuestas, gracias a la colaboración que establecen entre sí, a la construcción del conocimiento colectivo. (Trenchs, 2004).

El desarrollo de nuevos recursos didácticos y tecnológicos ha originado que los docentes que participan en el proceso de formación y actualización adquieran un mayor protagonismo, intervención y control de los procesos, sobre todo al hacer uso de los recursos y herramientas que mejor se adaptan a sus necesidades. De aquí la importancia de una capacitación planificada, crítica y actualizada, que tenga como finalidad incrementar la calidad de la educación mediante la adquisición de habilidades y conocimientos que permitan a los docentes el desarrollo de actividades pedagógicas creativas e innovadoras.

La llegada de un desarrollo tecnológico no sólo provoca expectativas o miedos desmedidos, sobre todo plantea retos al maestro, a la escuela y al sistema educativo para su efectiva incorporación al aula porque, por más benéfica que sea esta nueva tecnología para la enseñanza, especialmente implica una transformación de la práctica docente, de la organización escolar e incluso de las políticas educativas (Rojano, 2006).

Lograr este manejo de formación y actualización docente no es tarea fácil pues una de las principales dificultades por las que se enfrentan los profesores actuales es que, pertenecen a generaciones que tuvieron que soportar la irrupción de las nuevas tecnologías de la información y de las comunicaciones (TIC) y su impacto en la vida cotidiana. Este alfabetismo tecnológico, puede llegar a ser un fuerte obstáculo para la incorporación adecuada de las herramientas tecnológicas.

Visión social

Ante esta dinámica, habrá que transitar a un proceso de reconversión docente, es necesario proporcionar una formación que le permita realizar un cambio de paradigma en las metodologías y ambientes de enseñanza y aprendizaje a través del uso pedagógico de las herramientas tecnológicas en la práctica, la intervención docente debe mostrarse cada vez más creativa en las distintas situaciones didácticas y pedagógicas como son en el diseño didáctico, elección de los medios, sistematización de los contenidos, y adaptación de las herramientas tecnológicas a las condiciones institucionales. De esta manera, los espacios de actualización y capacitación deben ser diseñados contemplando la posibilidad de que el profesor reflexione y analice el uso de las nuevas tecnologías a partir de criterios que le permitan evaluar múltiples propuestas dentro del ámbito en el que se aplican. El utilizar adecuadamente un recurso tecnológico como apoyo a la enseñanza no necesariamente garantiza, resultados satisfactorios, para contribuir en forma significativa al mejoramiento de la calidad y efectividad de la educación. (Rozenhauz y Steinberg 2005).

Estas consideraciones nos llevan a determinar que en la capacitación y actualización de los docentes se debe proporcionar los elementos teórico-metodológicos que le permitan diseñar y aplicar estrategias de aprendizaje efectivas para el uso de las herramientas tecnológicas. Los nuevos entornos de enseñanza y aprendizaje exigen nuevos roles en profesores y estudiantes. Como docentes debemos cuestionar las prácticas pedagógicas vigentes y ser sensibles a las profundas modificaciones que estas nuevas tecnologías provocan en los procesos cognitivos como lo evidencian (Rozenhauz y Steinberg 2005*).*

En la integración de las nuevas tecnologías en la educación es necesario hacer referencia a la relación que ha de establecerse entre el uso de los nuevos medios y la innovación educativa, exigiendo del docente una preparación para el uso crítico de las mismas y una actitud de apertura, un esfuerzo de adaptación, actualización permanente, que lo conduzca a propiciar una mejor enseñanza.

La imagen Social nos exige transitar a:

- Definir nuevos canales de enseñanza y aprendizaje.
- Renovación Curricular del Plan de Estudios.
- Renovar nuestra mentalidad y adaptarnos a una nueva forma de hacer escuela.
- Disponibilidad del docente para una formación permanente.
- Un nuevo modelo pedagógico basado en una enseñanza activa flexible, personalizada, acorde a los ritmos de aprendizaje y necesidades educativas.

En este contexto y como parte del proceso de transformación curricular generada por el cambio de paradigma educativo, la reforma educativa que el país esta viviendo, espera que las herramientas tecnológicas incidan de manera favorable en la enseñanza y el aprendizaje, que su aplicación promueva la interacción de los alumnos, entre sí y con el profesor. El sistema Educativo tiene un reto importante de cuestionarse a si mismo sus principios y objetivos, reinventar sus metodologías docentes y sus sistemas organizacionales. De acuerdo al plan de estudios 2006 es necesario el aprovechamiento de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en la enseñanza si tenemos en cuenta, por un lado, que uno de los objetivos básicos de la educación es la preparación de los alumnos para ser ciudadanos de una sociedad plural, democrática y tecnológicamente avanzada y, por otro, que estas tecnologías ofrecen posibilidades didácticas y pedagógicas de gran alcance.

Desafíos, Retos y Preocupaciones

En este esquema de retos nuestra reflexión de investigación se centra en el ámbito de los educadores, en su interacción en el entorno tecnológico así como también en su actuación pedagógica, ya que el uso de las herramientas tecnológicas implica cambios en las estrategias de enseñanza, de comunicación y de gestión para facilitar la interacción de los alumnos con los conceptos matemáticos.

Las interrogantes que guiaron el estudio fueron:

1. ¿Qué retos y desafíos plantean al docente la incorporación de una nueva reforma curricular?
2. ¿Cuál es la visión que ha de despertar en el docente la introducción de las tecnologías?
3. ¿Cómo se modifican las pautas educativas con el uso de las herramientas tecnológicas?
4. ¿Cuál es el papel de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas?
5. ¿Qué competencias demandan en el docente las herramientas tecnológicas al incorporarlas en el proceso enseñanza aprendizaje?

La Subdirección de Secundarias Técnicas y la coordinación del programa EMAT-Hidalgo diseño una propuesta pedagógica combinando el trabajo grupal y la individualización de la enseñanza así como la importancia de qué y como enseñar adecuando los contenidos curriculares con el uso de los software EMAT (Enseñanza de las matemáticas con tecnología) al nivel de las competencias de los docentes.

Dimensión en la orientación pedagógica

La propuesta del programa de actualización y formación está centrada sobre la premisa de que la formación docente no puede hacerse con sólo entregar nuevos materiales y proporcionar equipo de cómputo: se hace necesario promover oportunidades de desarrollo de habilidades en el uso de las herramientas EMAT las cuales tiendan al apoyo de la práctica docente y al uso significativo en apoyo del curriculum escolar.

El modelo EMAT centra su interés en mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas, desarrollando la capacidad de aprendizaje de los estudiantes a través del uso de las herramientas tecnológicas, contempla el uso de una variedad de (software especializado y calculadoras gráficas) cada una estrechamente relacionada con las didácticas específicas de la geometría, el álgebra, la aritmética, la resolución de problemas y la modelación.

El desarrollo de esta propuesta pedagógica en su modalidad de Curso-Taller en su fase de asesoría y seguimiento en el uso técnico- pedagógico de las herramientas mantiene cobertura a 68 instituciones de Educación Secundaria Técnica, en cuya área geográfica se encuentran ubicadas 12 zonas escolares en sus distintos contextos: urbano, semi-urbano y rural, implicando a una comunidad de 252 profesores que imparten la asignatura de matemáticas en un proceso de actualización y formación como una oportunidad de crecimiento académico en la incorporación de la tecnología en el aula de matemáticas.

La puesta en escena del modelo pedagógico

La estrategia de asesoramiento establecida para el programa de actualización y formación se adapto a la modalidad de formación en servicio. (Gros, 2000). Establece que para lograr el uso natural y fluido de las herramientas tecnológicas como parte de la rutina escolar es necesario apoyar la formación sostenida del docente asegurando su participación activa y redefiniendo, su papel en la institución donde labora.

Los grupos de trabajo se desarrollaron en cuatro regiones geográficas del Estado de Hidalgo.

La intención pedagógica se fundamento en lograr que los docentes participantes:

- Profundicen sus conocimientos pedagógicos y cuestione su quehacer docente reconociendo el papel decisivo que tienen las nuevas tecnologías en la transformación de las estructuras curriculares.
- Identifiquen las potencialidades de la tecnología para innovar las prácticas escolares y tomen conciencia de la función catalizadora de dichas herramientas al favorecer la apropiación del conocimiento matemático.

- Generar estrategias de aprendizaje para la sistematización del conocimiento matemático y la adaptación de las herramientas tecnológicas a las condiciones institucionales.

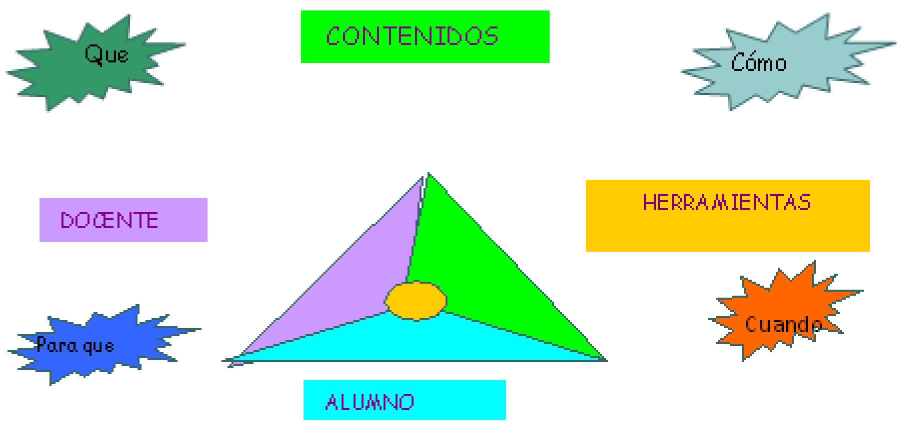
Con referencia a los talleres se dedicó parte de la atención a la enseñanza del uso de las herramientas en diversas propuestas didácticas con relación a los distintos paquetes computacionales: Cabri Geometré, Logo, Calculadora TI-92, Hoja de Cálculo que integra el paquete de EMAT, mediante hojas de trabajo con temas de los contenidos curriculares que integra el programa de matemáticas de educación secundaria, haciendo énfasis en la capacitación de los docentes en los aspectos de la pedagogía del proyecto; es decir, en la forma en que se esperaba que impartieran sus clases, pero a la vez lograr establecer espacios de aprendizaje, de formación y actualización para que desarrollaran sus habilidades de pensamiento como el pensamiento lógico, la resolución de problemas y el análisis de datos , esto al interactuar en el ambiente tecnológico basado en la enseñanza activa, flexible y personalizada ., así como también en la forma de evaluación de los alumnos y las diversas maneras en que la tecnología podía ser insertada en la actividad docente. Durante los talleres se incluyeron sesiones dedicadas a la reflexión y discusión sobre la enseñanza de algunos conceptos matemáticos que se consideran importantes dentro del programa de educación secundaria, así también el análisis de lecturas de apoyo didáctico a las matemáticas. La metodología didáctica se guío en el sentido de que el uso de las nuevas tecnologías está abriendo un campo de acción útil e interactivo, (Trench, 2004) nos habla de la tríada pedagógica, como entidad referencial de aprendizaje entre alumno-docente y contenidos, la incorporación de la herramientas tecnológicas, nos lleva a efectuar una ligera modificación del criterio pedagógico.

Anteriormente: Docente-alumno-contenido: se mantenía conectada, todos los elementos tenían vinculación bidireccional entre ellos.

El docente podía acceder al contenido y ofrecer su aprendizaje, su docencia su enseñanza al alumno y este a su vez podía acceder a la información, bien de forma directa, bien a través de las orientaciones del profesor.

Pero en esta nueva concepción con las herramientas tecnológicas se convierte en un elemento dependiente e independiente, esto es, se convierte en un elemento intermedio entre los tres elementos ya descritos.

El alumno puede acceder e interactuar con las herramientas tecnológicas, el docente permite facilitar la enseñanza de los contenidos.



Las herramientas tecnológicas constituyen un elemento multifuncional de acceso para el tratamiento y la información al servicio de los procesos de enseñanza y aprendizaje, generando nuevos modelos de expresión, de participación y recreación cultural, nuevas formas de acceso y nuevos modelos de participación y recreación cultural.

Principios que guían la relación de las herramientas EMAT con el curriculum

- Combinar la tecnología con una pedagogía constructivista.
- Seguir una metodología de enseñanza donde las situaciones didácticas conduzcan ante procesos reflexivos y de construcción del conocimiento matemático.

- Usar la tecnología para estimular y potenciar múltiples formas de pensamiento: para comunicar, visualizar, argumentar situaciones de aprendizaje con experiencias del mundo real.
- Usar las herramientas tecnológicas para mejorar la comprensión promoviendo oportunidades de aprendizaje significativas que satisfagan las necesidades de docentes y alumnos en sus habilidades y estilos de aprendizaje.
- Los componentes que integran el modelo dinámico de formación son: teoría, práctica e innovación, el material escrito proporcionado se concibe como una guía abierta que incluye sugerencias sobre cómo dar tratamiento a los contenidos de cada uno de los bloques del programa de matemáticas en secundaria. Así también es una invitación a la exploración y tratamiento de algunos ejercicios que el maestro puede realizar según el tiempo e intereses en la incorporación de las herramientas EMAT en el ambiente educativo.

Los resultados obtenidos durante esta experiencia pedagógica con profesores de educación secundaria en la interacción pedagógica con los software EMAT y su adecuación a la propuesta curricular del programa de matemáticas, los aspectos predominantes son:

- ♦ Muestran imágenes de resistencia expresadas en signos de inseguridad, indiferencia, conformismo, ansiedad.
- ♦ Olvidan su experiencia docente y conocimiento sobre las matemáticas y optan por distintas tipologías de conductas donde predomina el conformismo, la indiferencia.
- ♦ Aceptan con muchas reservas los cambios y modificaciones sobre el diseño y desarrollo del currículum.

Es muy notorio que en el trabajo colectivo del taller, las actividades didácticas permiten nuevas estrategias comunicativas adaptadas a los actuales lenguajes del contexto tecnológico, ofreciendo oportunidades para que los profesores desarrollen habilidades como el pensamiento lógico, la resolución de problemas y el análisis de datos, esto al interactuar en el ambiente tecnológico basado en la enseñanza activa, flexible y personalizada acorde a los ritmos de aprendizaje y necesidades educativas.

Conclusiones

La importancia de este aporte radica en comprender que el uso de las herramientas tecnológicas EMAT influye notablemente en la forma en que tanto los profesores como los alumnos perciben la clase de matemáticas y el contenido de la misma.

A través de los talleres, del desarrollo de las actividades y del uso de la tecnología en el aula, los docentes tuvieron un acceso más directo y fácil a nuevas formas de relacionar las matemáticas con la vida cotidiana, adquirieron solidez conceptual, lo que les ayudo a tener mayor confianza en la metodología del proyecto, construyendo una fuente de información y retroalimentación muy importante.

Caminar hacia el cambio sobre las herramientas tecnológicas, los docentes necesitan:

- Convertirse en transformadores de la educación mediante la utilización de las herramientas tecnológicas a partir de bases teóricas y conceptuales que encaucen sus acciones didácticas.
- Establecer mayor difusión y popularización de las herramientas tecnológicas en forma colectiva para aprender a usarlas y no que los cambios nos instrumenten.
- Los profesores con experiencia docente en ámbitos educativos a nivel superior, tiene mayor disposición de explorar y usar las herramientas de computo.
- Se requiere construir conocimiento institucional (comunidades de aprendizaje docente) hacia dentro y fuera de las instituciones.

- Es necesario transformar “El miedo en desafío”.

Perspectivas educativas

La transformación, hacia la adopción de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el contexto educativo tiene que producirse a partir del apoyo de las autoridades en las instituciones, del cambio de actitudes y de planteamientos por parte de los profesores y del empeño responsable de cada uno de los alumnos.

La calidad y potencialidad educativa no radica en el maquillaje sino en el interior, en el grado de apertura y objetividad del programa, en el estilo de integración, en el modelo de enseñanza y aprendizaje, así como en su adecuación curricular a los objetivos, contenidos y metodología de la situación de enseñanza en que se utilicen.

Referencias bibliográficas

Gros,B.(2000) .*El ordenador invisible. Hacia la apropiación del ordenador en la enseñanz*a. España: Gedisa.

Rojano,T.(2006).*Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de Transformación México las prácticas y la interacción social en el aula.* Dirección General de Materiales de la Subsecretaria de Educación Básica. México: Editorial: S.E.P.

SEP.(2006) Plan de Estudios. Educación Básica. SEP.

Rozenhauz, J., Steinberg, S.(2005).*Llegaron para quedarse. Propuesta de inserción de las Nuevas Tecnologías.* Buenos Aires: Edición Especial. SEP.

SEP. (2006). *Educación Básica. Secundaria Programas de Estudio.* Dirección General de Desarrollo Curricular. México.

Trenchs,M.(2004). *Nuevas Tecnologías para el aprendizaje y la Didáctica de lenguas.* Bobalá: Milenio.

LOS MEDIOS TECNOLÓGICOS DE APOYO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Rogelio Ramos Carranza, Miguel Álvarez Gómez
Universidad Nacional Autónoma de México. México
Universidad de Guadalajara
egorrc@gmail.com, egor1131@servidor.unam.mx, malvarez@pv.udg.mx
Campo de investigación: Tecnologías en la enseñanza de las matemáticas Nivel: Básico

Resumen. *La Investigación esta apoyada en el uso de tecnologías computacionales. El software se desarrollo para la materia de Matemáticas, con contenidos aprobados por SEP. Se sometió a aprobación por profesores y en grupos de 3ero de secundaria. Para la validación académica se aplicaron pruebas con pretest-postest y grupos de control y experimental. Uno de los principales propósitos es desarrollar materiales educativos que resulten adecuados. El software utilizado podría influir en el aprovechamiento escolar y garantizar mejores rendimientos académicos, motivación y satisfacción en el estudiante. La plataforma presenta innovaciones pedagógicas, como son, el uso de estrategias de aprendizaje integradas al sistema, instrucciones de aprendizaje y elementos de motivación en los contenidos académicos cuyo efecto se probará en el aprendizaje.*

Palabras Clave: tecnologías, educación básica, enseñanza matemática

Introducción

Descripción General

La presente investigación forma parte de un proyecto interdisciplinario cuya propuesta es del tipo realizado por centros de investigación, en este caso el centro pertenece a la Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de la Costa. La demanda es el uso y aplicación de nuevas tecnologías en educación. Su curriculum se refiere a materiales educativos y mejoramiento de prácticas pedagógicas. La plataforma puede revolucionar el proceso de producción de materiales educativos ya que propone interfases múltiples por que las personas aprenden de diversas maneras y hace uso de muchas nuevas capacidades de comunicación de Internet.

Antecedentes

El desarrollo de la informática y la introducción expansiva de las tecnologías de la información durante las últimas décadas en los ámbitos sociales ha dado lugar a la llamada sociedad de la información que se caracteriza entre otros aspectos por el uso de las nuevas tecnologías de la información y comunicación. Esta condición exhorta a importantes cambios en las instituciones educativas para que puedan responder a las demandas sociales, culturales y de cambios en las demandas de cualificación del mercado de trabajo.

Mi Espacio de Estudio, como se denomina la plataforma multi-interfase que estamos describiendo, es el ÚNICO sistema capaz de producir automáticamente, a partir de un solo trabajo de captura del profesor, 8 interfases diferentes para cada una de las clases que se capturen. Podrían ser capturados en el sistema distintas asignaturas, según convenga a los docentes que deseen utilizar "Mi Espacio de Estudio"; sin embargo, en la investigación que se reporta, se ha aplicado al caso de las matemáticas para tercer grado de secundaria, perteneciente al nivel medio de educación en México.

La Matemática es un pilar fundamental de la civilización y la cultura humana, en la actualidad los desarrollos tecnológicos, así como las ciencias modernas utilizan, de una forma u otra, su lenguaje, así como sus procesos de razonamiento. En particular, cabe mencionar que el papel de la matemática en la educación, así como en la sociedad, ha variado a través de los años. Los ordenadores están presentes en las escuelas y en las casas, y no pueden ser ignorados por los maestros.

En el aspecto de la enseñanza de las matemáticas, Cantoral y Farfán (2003) señalan: Es una necesidad básica, el dotar a una investigación en matemática educativa de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

Justificación

Una problemática que enfrenta la educación en México para el logro de sus propósitos de lograr formar profesionistas competentes (SEP, 2004), que sean individuos autónomos, emprendedores, creativos y con valores éticos y morales, lo es el alto índice de reprobación y deserción que se ha venido presentando en algunas materias. Caso especial, en el área de las Matemáticas. En términos generales, en las diversas investigaciones realizadas sobre actitudes de los estudiantes hacia la introducción de la educación mediada por computadora estas han sido positivas. Ewing-Taylor (2002) considera que probablemente esto sea ocasionado por la facilidad y fascinación de la tecnología en general.

Planteamiento del problema

Determinar las formas adecuadas de los materiales de apoyo en computadora, para el aprovechamiento escolar en la asignatura de matemáticas para tercero de secundaria.

Objeto de estudio

Los estudiantes de secundaria en el tercer grado pertenecientes a siete escuelas secundarias públicas, ubicadas en Puerto Vallarta Jalisco, México.

Objetivos

Objetivos generales

Desarrollar materiales educativos para Matemáticas de 3ero de secundaria en ocho interfases diferentes. Se espera probar que los estilos de aprendizaje determinan las preferencias en el uso de la tecnología y que el uso de la interfase más adecuada para cada estilo de aprendizaje garantiza mejores rendimientos académicos, motivación y satisfacción en el estudiante. Se espera también que la realización del proyecto contribuya a la consolidación de la Red de Cuerpos Académicos, entre la Universidad de Guadalajara-Centro Universitario de la Costa; La Universidad Autónoma de Nuevo León-Facultad de Psicología; la Universidad Veracruzana-Universidad Virtual y la UNAM-Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-Departamento de Matemáticas.

Objetivos particulares

El objetivo de la indagatoria objeto de esta tesis es la de probar que se pueden obtener mejores resultados en al aprendizaje de las matemáticas por medio del uso de adecuados apoyos computacionales. También se espera probar que se puede abatir los índices de reprobación y de mejorar la retención en secundarias mediante el uso de materiales educativos en computadoras.

Hipótesis

El aprovechamiento escolar está influido por la falta de adecuación de los materiales computacionales al estilo de aprendizaje de los alumnos.

Marco teórico

A partir del ámbito de investigación que corresponde al problema que se plantea en esta investigación, se desprenden las componentes teóricas, que, deben tomarse como referentes. Hemos considerado que la mejor forma de delimitar nuestro trabajo es haciendo referencia a las aportaciones teóricas e investigaciones en tres aspectos: el uso de las tecnologías en la enseñanza, la enseñanza de las matemáticas y el uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas.

Uso de las Tecnologías en la Enseñanza

La primera componente se encarga de describir las aportaciones teóricas relacionadas con el uso de las tecnologías para la enseñanza en términos generales; es decir, la forma en la que se han utilizado las tecnologías, con el propósito de enseñar o aprender en todos los ámbitos del conocimiento humano. Se considera un marco general dentro del cual, se encuentran las tecnologías de la enseñanza, para cualquier área del conocimiento humano y para ello, asumimos que, dicha delimitación habrá de ser referida a la teoría de la educación, la Sociedad y las Tecnologías en la Enseñanza, El Universo de las Tecnologías de la Enseñanza, Las Instituciones Educativas y las Tecnologías de la Enseñanza, La Psicología y las Nuevas Tecnologías de la Enseñanza, Educación y las Nuevas Tecnologías de la Enseñanza.

La Enseñanza de las Matemáticas

La componente relativa a la enseñanza de las matemáticas, tomará como referente a las investigaciones hechas en el campo de la enseñanza y el aprendizaje del área que se ha orientado al objeto de estudio en el que se centra el problema de esta investigación y por consiguiente, en esta componente se incluyen las aportaciones teóricas que en la actualidad se han dado a conocer en el campo de la matemática educativa y que representaría el estado del arte, en el área central de nuestra indagatoria y del que nutrimos el marco teórico con las más recientes aportaciones.

La Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas

Se describe la componente del uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, y hace referencia a las tecnologías que se han utilizado en esta área en particular. En esta componente se hace referencia a la tecnología en la clase de matemáticas, la tecnología informática en la enseñanza de las matemáticas, los proyectos en la enseñanza de las matemáticas y la tecnología en educación matemática.

Aplicación del experimento y resultados obtenidos

Resultados de la Prueba realizada en la Escuela Secundaria General No. 149. El día 23 de enero de 2006 de las 12:00 a las 12:50 horas.

Aplicación de la prueba con el grupo 3ero. "C". Cada uno de los cuestionarios para la prueba, referidos al tema de Tazas: sus usos y aplicaciones.

Calificaciones y promedios de la prueba pretest, en el grupo de control del grupo 3° C.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	3	4	1	3	9	6	2	2	2	3	0	3	0	4	2	0	0	2	1	2
Promedio de calificaciones: 2.45																				

Tabla 1. Resultados prueba pretest del grupo de control del 3° C. (Secundaria 149)

Calificaciones y promedios de la prueba pretest, en el grupo experimental del grupo 3° C.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	1	2	0	2	4	4	0	0	2	2	2	2	4	2	2	3	5	2	0	2
Promedio de calificaciones: 2.05																				

Tabla 2. Resultados prueba pretest del grupo experimental del 3° C. (Secundaria 149)

Simbología de las tablas 1, 2, 4 y 5:

A	Alumnos
C	Calificaciones

Tabla de resultados del análisis estadístico de la prueba pretest del grupo 3° "C" de la escuela Secundaria No. 149, mediante el programa de computadora, que ejecuta la prueba-t Independiente sobre los datos de los grupos de control y experimental.

Datos	Media	Varianza	Tamaño de la muestra
Calificaciones del grupo de Control	2,45	4,78684	20
Calificaciones del grupo Experimental	2,05	2,05	20
Estadístico de prueba: t = -0,68414, Probabilidad p = 0,49804			
A un nivel de 0.05 las medias *No* son significativamente diferentes			

Tabla 3. Análisis de los datos de la prueba pretest del Grupo 3° C de la escuela Secundaria No. 149.

En la prueba Postest en la que trabajaron en la forma usual en el salón de clases a cargo del profesor titular Juan José Lepe Jiménez se presentaron 20 alumnos (grupo de control) obteniendo los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	1	4	0	10	4	6	0	0	2	2	0	2	2	4	8	10	0	6	8	0
Promedio de Calificaciones: 3.45																				

Tabla 4. Resultados prueba postest del grupo de control del 3° C. (Secundaria 149)

En la prueba Postest en la que trabajaron con el software, "Mi Espacio de Estudio", se presentaron 20 alumnos (grupo experimental) obteniendo los resultados que se muestran a continuación:

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	0	2	7	7	8	2	4	4	5	4	0	2	10	10	10	2	2	2	7	8
Promedio de Calificaciones: 4.8																				

Tabla 5. Resultados prueba postest del grupo experimental del 3° C. (Secundaria 149)

Tabla de resultados del análisis estadístico de la prueba postest del grupo 3° "C" de la escuela Secundaria No. 149, mediante el programa Origin 6.1

Datos	Media	Varianza	Tamaño de la muestra
Calificaciones del grupo de Control	3,45	11,94474	20
Calificaciones del grupo Experimental	4,8	11,11579	20
Estadístico de prueba: t = 1.25723 Probabilidad p = 0.21634			
A un nivel de 0.05 las medias *No* son significativamente diferentes			

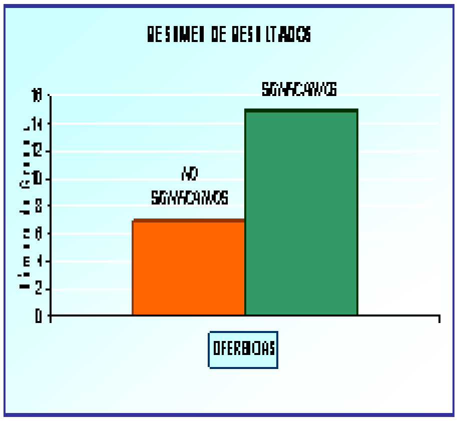
Tabla 6. Análisis de los datos de la prueba postest, del Grupo C de la escuela Secundaria General No. 149

Se selecciono solamente un caso, a fin de presentar un panorama general de los resultados del experimento, así como la metodología para su realización.

Conclusiones

El experimento se ha realizado con un número considerable de grupos de estudiantes de tercer grado de secundaria en 7 escuelas diferentes. Todas las pruebas fueron realizadas con la misma metodología. De los 22 casos de estudio, solamente uno de ellos, presentó diferencia significativa en las pruebas pretest y los 21 casos restantes resultaron no tener diferencia significativa respecto de las calificaciones entre los grupos de control y experimental. Mientras que en la aplicación de las pruebas postest, es decir, después de dar tratamiento a los grupos experimentales, 15 de los 22 casos estudiados presentaron diferencias significativas entre los grupos experimental y de control; y 7 de los 22 casos estudiados no presentaron diferencias significativas entre los grupos de control y experimental.

En general los resultados se pueden resumir gráficamente.



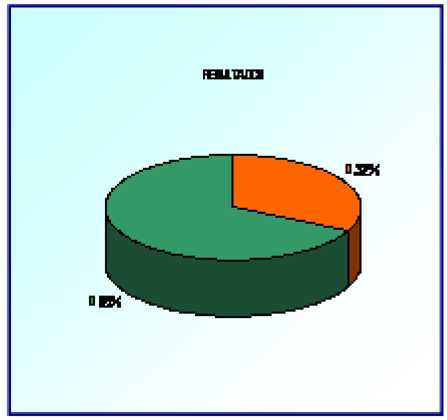


Figura 1. Resultados de las pruebas postest en los grupos de control y experimental. Se muestran las pruebas cuyos resultados son significativos (68%) y no significativos (32%), en los 22 grupos de las 7 Escuelas Secundarias estudiadas.

Por los resultados del análisis de los casos estudiados podemos observar que el aprovechamiento escolar reflejo una mejoría significativa cuando se empleó el material de computo desarrollado para la investigación, en contraste con el aprovechamiento mostrado mediante el uso de materiales educativos tradicionales dentro del salón de clases bajo las instrucciones de los profesores titulares de los grupos con los que se ha experimentado.

Uno de los aspectos, que pensamos podría tener un impacto tecnológico en el uso de herramientas educacionales, es el hecho de que el software utilizado en esta investigación ofrece la posibilidad de aplicación a otros niveles educativos y a distintas asignaturas, como es el caso con el que estamos experimentando actualmente, en otra investigación aplicada a nivel licenciatura, con estudiantes en la asignatura de los métodos numéricos, para las carreras de Ingeniería en Comunicación Multimedia e Ingeniería en Telemática, que se imparten en la Universidad de Guadalajara en su Centro Universitario de la Costa de Puerto Vallarta Jalisco; así como con los estudiantes de las carreras de Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Electrónica e Industrial, de la Facultad de Estudios superiores Cuautitlán de la UNAM.

A continuación se muestra una imagen del software “Mi Espacio de Estudio”:

Figura 2. Menú principal del software utilizado en la investigación: “Mi Espacio de Estudio”

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40.

Ewing-Taylor, J. (2002). "Student Attitudes Toward Web-Based Courses". Consultado en mayo de 2005. En línea en: http://unr.edu/homepage/jacque/research/student_attitudes.html

SEP (2004). Programas y Planes de Estudio de Matemáticas para el Nivel Básico. En línea en: www.sep.org.mx.

Arrieta J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matemátización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Battro, A. M., Denham, P. J. (2004). Learning to use ICT systems. Consejo Empresario de América Latina. En línea en: http://beepwork.com/ShowAnalysisReport.asp.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* 4 (2), 103-128.

Montiel G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa CICATA-IPN, México.

Rojano T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. En línea en: http://www.rieoei.org/rie33a07.htm.

UNAM-SEP-CONACYT-ILCE (2003). Proyecto Universitario para la Enseñanza de las Matemáticas Asistido por Computadora. En Línea en: http://interactiva.matem.unam.mx

Universidad de Santiago de Chile (2004) "Enlaces Matemáticas" Centro Zonal Centro- Red Enlaces. Centro Comenius de la Universidad de Santiago de Chile. En Línea en: http://www.enlaces.cl

Waldegg, G. (2002). El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. Vol. 4, número 1. En línea en: http://redie.uabc.mx.

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL MEDIANTE EL USO DE ORDENADOR

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado, Resolución de problemas, Tecnología avanzada , Visualización Nivel: Superior

Resumen. *El trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos ha tenido como principal fuente de inspiración a la visualización, y ésta ha jugado un papel relevante en el desarrollo de las ideas y conceptos del cálculo infinitesimal. Sin embargo, existe una tendencia actual a considerar que las matemáticas no son visuales, que en la enseñanza universitaria, se pone de manifiesto a través de un enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo.*

Con el propósito de mejorar las prácticas educativas, diseñamos una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral a que incorpora la utilización del ordenador como recurso didáctico facilitador de los procesos de enseñanza aprendizaje.

Palabras claves: visualización, experimentación, argumentación, extrapolación

Introducción

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva o geométricamente y cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en su utilización para la resolución de problemas.

Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en el que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de su teoría y, a través de tales redes significativas, son capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con los que se enfrentan (Guzmán, 1996). Visualizar, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la Universidad, tiene que ver con la capacidad de crear imágenes ricas que el individuo puede manipular mentalmente, puede transitar por diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, proporcionar en papel o pantalla de computadora la idea matemática que está en juego.

El trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos ha tenido como principal fuente de inspiración a la visualización, y ésta ha jugado un papel relevante en el desarrollo de las ideas y conceptos del cálculo infinitesimal. Una de las primeras aproximaciones a los problemas del infinito tuvo lugar en Grecia, a mediado del siglo V a. C., a partir de los problemas de inconmensurabilidad. Luego Arquímedes, a principios del siglo III, propuso un proceso heurístico para calcular áreas, volúmenes y el centro de gravedad de algunos cuerpos geométricos. Recién en el siglo XVII, luego de un largo período de oscuridad, los trabajos matemáticos griegos, traducidos al árabe y luego al latín, salieron a la luz junto con las especulaciones escolásticas medievales sobre el movimiento, la variabilidad y el infinito, y con el álgebra simbólica y la geometría analítica de finales del Renacimiento. Todos ellos formaron la rica amalgama que permitió en ese momento la explosión de la matemática infinitesimal. Cabe mencionar a los principales autores que utilizaron métodos geométricos: Cavalieri y Barrow, y a los que utilizaron métodos analíticos: Descartes, Fermat y Wallis y por supuesto, una mención especial para Newton y Leibniz, quienes culminaron este proceso y fueron nombrados como los descubridores del cálculo infinitesimal (Boyer, 1968).

Sin embargo, en el siglo XX la actividad matemática sufrió la influencia de una corriente formalista, que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis. La crisis de los fundamentos de principio de siglo empujó a los pensadores matemáticos hacia el formalismo, hacia el énfasis sobre el rigor, a una cierta huida de la intuición en la construcción de su ciencia. Lo que fue beneficioso para la fundamentación, fue considerado por muchos, bueno también para la transmisión de conocimientos. Las consecuencias para la enseñanza de las matemáticas en general fueron nefastas, pero especialmente para la evolución del pensamiento geométrico.

Desde entonces, las presentaciones no visuales son las más habitualmente utilizadas para comunicar ideas matemáticas. Esta tendencia se fundamenta hoy en la creencia de matemáticos, docentes y estudiantes, que las matemáticas no son visuales (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Como reacción a un abandono injustificado de la geometría intuitiva en nuestros programas, hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática.

Justificación

La algebrización del cálculo diferencial e integral fue un producto de este proceso. En la enseñanza universitaria, se pone de manifiesto a través de un enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo, que se basa en las operaciones algebraicas con límite, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista los conceptos específicos del Análisis, tales como las razones de cambio o la integral definida. Consideramos que las dificultades que presenta el aprendizaje del Análisis Matemático en primer año de la universidad, son atribuibles a esta situación de contexto. Tales dificultades están asociadas al predominio del formalismo en el abordaje de los conceptos y a la ausencia de asociación con un enfoque geométrico.

Anthony Orton ha trabajado durante largo tiempo sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo. Sus investigaciones en la Universidad de Leeds confirmaron que los alumnos tenían dificultades en el aprendizaje de los conceptos de cálculo: la idea de tasa de cambio, la noción de derivada como un límite, la idea de área como el límite de una suma (Orton, 1979). Cornu (1981) arribó a similares conclusiones respecto de la idea de "límite inalcanzable" y Schawarzenberger y Tall (1978) respecto de la idea de "muy próximo a".

Ervynck (1981) no sólo ha documentado las dificultades de los alumnos en comprender el concepto de límite sino que resalta la importancia de los procesos de visualización mediante aproximaciones sucesivas. En este sentido, los habituales gráficos encontrados en los libros de cálculo tienen dos problemas: son estáticos, con lo cual no pueden transmitir la naturaleza dinámica de muchos de los conceptos, y además poseen una variedad limitada de ejemplos, uno o dos generalmente, lo cual conduce a desarrollar en el alumno una imagen restringida del concepto en cuestión. (Tall y Sheath, 1983)

En este sentido, los alumnos no logran comprender el concepto de integral definida de una función como el área bajo la curva de la misma, pues no visualizan cómo se construye esta área según una suma, conocida habitualmente como Suma de Riemann (si bien Fermat, en 1629, había presentado un método geométrico que permitía aproximar con muy buena precisión el área bajo la curva $y=x^n$ en un intervalo dado, utilizando infinitos subintervalos sobre la abscisa y sumado las áreas de los sucesivos rectángulos con base en la abscisa y altura dada por la ordenada del punto. (Boyer, et. al)).

Atendiendo a la perspectiva de los procesos de enseñanza, cabe notar que los docentes habitualmente introducen el concepto en forma expositiva, eludiendo el verdadero propósito que consiste en obtener aproximaciones cada vez más precisas. También es habitual que se realice un abordaje simplista del concepto y sin aparente conexión con las aplicaciones del cálculo integral, lo cual obstaculiza la comprensión por parte de los alumnos, y por ende, la resolución de problemas referidos al cálculo de áreas, longitud de curvas, volumen de sólidos de revolución; y los referidos a aplicaciones a la ingeniería: trabajo, presión, fuerza hidrostática y centros de masa.

El uso del ordenador en el aula puede resultar un recurso didáctico facilitador de los procesos de enseñanza aprendizaje para:

a) transmitir la naturaleza dinámica de un concepto a partir de la visualización,

b) coordinar los distintos registros de representación de un concepto,

c) la creación de medios personalizados que mejor se adapten a los requerimientos pedagógicos de la propuesta.

Metodología

Con el propósito de mejorar las prácticas educativas, diseñamos una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el contexto de primer año de la Universidad que atendiera a la propuesta de utilización del ordenador tal como se indicó en los items *a, b* y *c* enumerados anteriormente. En ese sentido:

- Se diseñó un paquete de software que permitiese el abordaje del cálculo integral a partir del concepto de integral definida asociado al área bajo la curva, desde una perspectiva geométrica, atendiendo a los procesos que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas,
- Se seleccionaron los problemas a resolver por los alumnos en forma tal que su abordaje permitiese establecer un puente entre la conceptualización de la integración y los problemas de aplicación relacionados con la ingeniería. En ese sentido, el uso del ordenador permitió disponer de una gama muy amplia de problemas, dónde la elección no fue condicionada por las dificultades del cálculo algebraico.
- Se diseñó un conjunto de actividades orientadas a promover que los alumnos conjeturen, experimenten, analicen retrospectivamente, extrapolen, argumenten, pregunten a sus pares y a sus docentes, se comprometan en el desarrollo de sus actividades, discutan sobre sus propios errores y evalúen su desempeño.
- Se rediseñaron las técnicas de evaluación, de tal manera que el análisis de las producciones, facilitase al alumno el poder reflexionar sobre sus propios errores y, para que a la hora de realizar las evaluaciones, dispongan de las mismas herramientas que utilizaban en clase.

Implementación de la propuesta

Esta propuesta fue implementada durante el período julio-noviembre 2006 en un curso de Ingeniería Eléctrica, de la Facultad Regional General Pacheco, de la Universidad Tecnológica Nacional. La misma consistió en la distribución del alumnado en pequeños grupos de no más de tres alumnos, los cuales trabajaron en varios subproyectos. Cada uno de ellos incluyó un número importante de problemas de modo que los alumnos pudieran experimentar, conjeturar y obtener conclusiones sobre la resolución de problemas mediante un software diseñado.

A modo de ejemplo, presentamos el primer subproyecto.

Subproyecto Nº 1: Abordaje del concepto de integral definida por aproximaciones sucesivas

En la 1º actividad se solicita a cada grupo de trabajo que estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$, con $-\pi \leq x \leq \pi$, utilizando primero 10 rectángulos, luego 100 y luego 1000. A continuación se les pide que argumenten acerca de la convergencia de las aproximaciones. En un ítem posterior, con el propósito de descubrir las relaciones entre las aproximaciones por defecto-exceso y los intervalos de crecimiento-decrecimiento de la curva, se les solicita que modifiquen el intervalo de estudio, por ejemplo $[0, \pi/4]$, y que analicen los valores obtenidos en el área por defecto y exceso.

En la 2º actividad de les solicita que analicen la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: *"Las aproximaciones por defecto al valor del área bajo la curva, requieren considerar los puntos muestra a la izquierda de cada subintervalo, así como las aproximaciones por exceso requieren considerar los puntos muestra a la derecha de cada subintervalo."*

Luego deben proponer, con el auxilio del software, ejemplos que sustenten su argumentación.

En la 3º actividad cada grupo debe analizar la convergencia del área bajo la curva de diferentes funciones, incluso algunas no continuas, en el intervalo considerado, y luego exponer sus conclusiones.

Cada grupo debe presentar un informe con los resultados obtenidos y los archivos generados con el software en disquete o unidad de almacenamiento removible.

En las figuras 1 y 2 se muestran dos de las vistas obtenidas con la utilización del software. La primera corresponde a una aproximación con 10 subdivisiones y la segunda con 100.

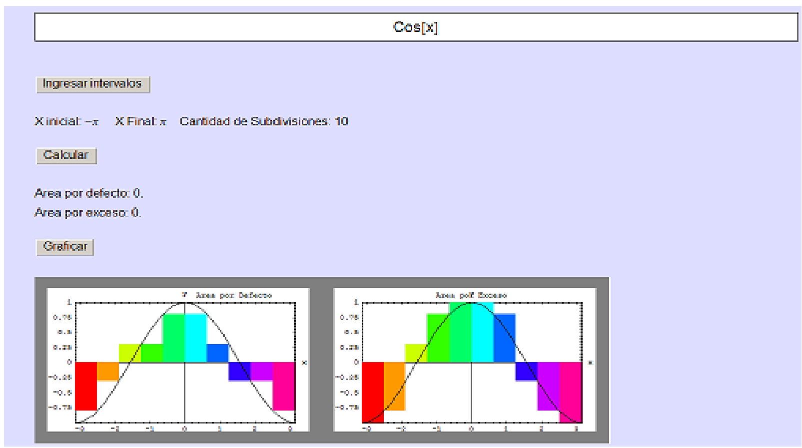


Figura 1

Captura de la pantalla del software de conceptualización de integral definida, calculando área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$*, con* $-\pi \leq x \leq \pi$*, utilizando 10 subdivisiones.*

Los restantes subproyectos que formaron parte de la propuesta, los cuales no se exponen por razones de espacio, fueron:

Subproyecto Nº 2: Familia de integrales,

Subproyecto Nº 3: Teorema fundamental del cálculo,

Subproyecto Nº 4: El área entre dos curvas,

Subproyecto Nº 5: Aplicaciones de la integración.

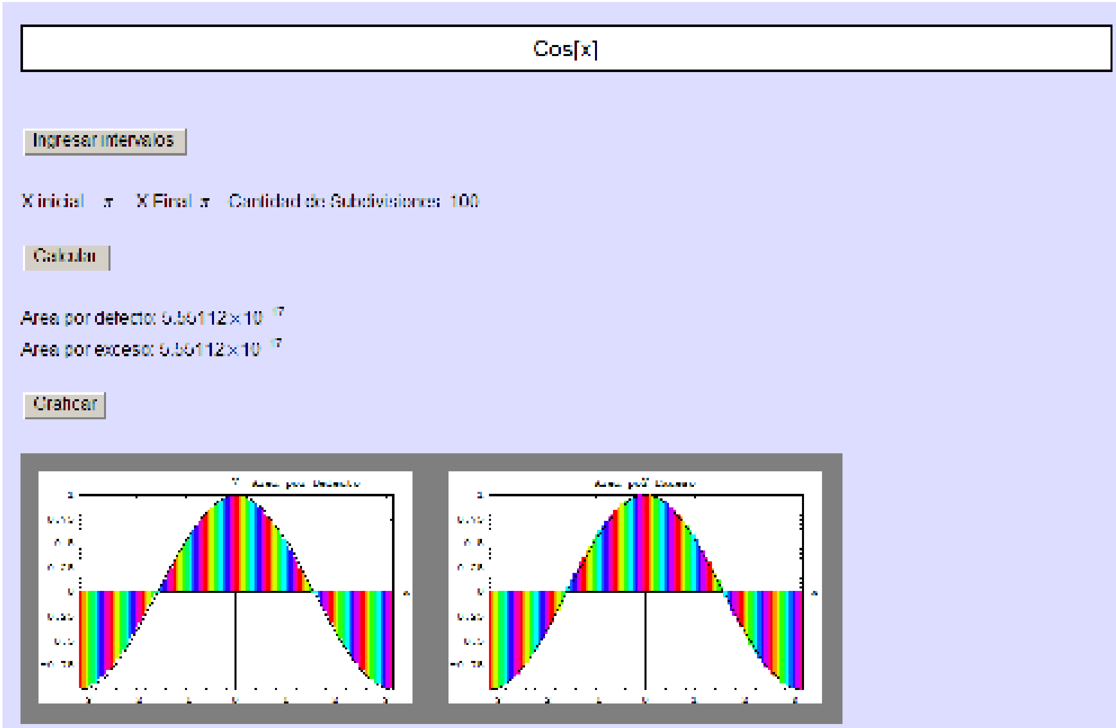


Figura 2

Captura de la pantalla del software de conceptualización de integral definida, calculando área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$, *con* $-\pi \leq x \leq \pi$, *utilizando 100 subdivisiones.*

Conclusiones

La realización de las actividades requirió del uso de los paquetes de software desarrollados ad-hoc. Los alumnos debieron graficar en numerosas oportunidades, modificar sus conjeturas, proponer nuevas soluciones, experimentar, analizar retrospectivamente los resultados obtenidos, proponer nuevas soluciones. Consideramos que es importante que los alumnos puedan interpretar consistentemente los resultados obtenidos, tanto algebraica, como numérica ó gráficamente.

En segundo lugar, creemos necesario el desarrollo de nuevos talleres capacitación. La infraestructura técnica requerida exige que los profesores y los alumnos tengan acceso a las nuevas tecnologías y que tengan la suficiente destreza para usarlas. Además, los profesores de otras áreas necesitan reflexionar sobre cómo hacer uso de la tecnología en la enseñanza de su propia asignatura.

También será necesario atender al afianzamiento de la infraestructura social. Las nuevas tecnologías o los aprendizajes asociados al uso de un software deben integrarse a los procesos educativos esenciales en vez de constituir una actividad aislada. El currículo, la organización y la estructura de los cursos y las prácticas evaluadoras deben apoyar la nueva cultura de aprendizaje en colaboración y construcción del conocimiento. Sirve de muy poco que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas en el área de las ciencias, haciendo uso de herramientas informáticas, si luego en materias de años superiores se les exige que resuelvan integrales haciendo uso de intrincados métodos de integración a mano con lápiz y papel, tal como en siglos anteriores.

Finalmente creemos necesario atender al afianzamiento de la infraestructura epistemológica. Los profesores y los estudiantes deben desarrollar una conciencia epistemológica de las diferentes categorías de conocimiento y de los procesos de investigación para comprender el significado de buscar respuestas a través del uso del ordenador. En ese sentido, estamos diseñando y seleccionando problemas integradores para la asignatura Análisis Matemático I, de tal modo que los alumnos, distribuidos en grupos, puedan dar respuesta a los mismos, haciendo mención sobre cómo se llevaron a cabo los procesos de indagación y conjeturación, cuáles fueron las experiencias realizadas, etc.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. Nueva York: J. Wiley. (Traducido al castellano en Madrid: Alianza.)

Cornu, B.(1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. En *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME,* (pp. 322-326). Grenoble, France.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics. MAA Notes 19*, 25-37.

Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function. En Actes du Cinquieme Colloque du Groupe Internationale PME*, (pp. 330-333). Grenoble, France.*

Guzmán, M (1996). El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. *Elementos básicos del Análisis*. Madrid: Pirámide.

Orton, A. (1979). An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. En *Cognitive Development. Research in Science and Mathematics,* (pp.201–215). Gran Bretaña: Universidad de Leeds

Schwarzenberger, R., Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching*,* (82)*, 44–49.*

Tall, D., Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 357–362). Israel.

LA GENESIS INSTRUMENTAL EN UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO[21]

Eduardo Carlos Briceño Solís, Francisco Cordero Osorio
CINVESTA-IPN México
ebriceno@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. Las calculadoras son consideradas como recursos didácticos, lo que conlleva nuevas formas para abordar la enseñanza y aprendizaje de la matemática, pero éstas no han sido suficientes para que tal aprendizaje sea funcional. Esto ha llevado a la creación de una génesis instrumental que estudia la construcción hecha por el sujeto cuando interactua con un artefacto, convirtiendolo en instrumento, a través de un proceso, de tal forma que es capaz de apropiarselo e integrarlo a su actividad matemática. La aproximación socioepistemología con el estudio de los usos del conocimiento en situaciones específicas, se logra formular que el "uso de las gráficas" norma cierta matemática cuando se utilizan calculadoras de tal manera que favorece la construcción del instrumento.

Palabras Clave: tecnología, artefacto, génesis instrumental, uso de gráficas, instrumentalización e instrumentación

Introducción

En la historia de la humanidad, el hombre siempre ha necesitado herramientas de apoyo para realizar sus cálculos matemáticos. Por ejemplo encontramos que existieron pinturas desde la Prehistoria (25000 años AC) donde los arqueólogos hacen referencia de que los puntos se referían algún calculo matemático, (Figura A), herramientas como la Tablilla de Plimpton (Figura B), el cual se utilizaba para efectuar el cálculo de la superficie de un terreno y herramientas no tan antiguas que surgieron a partir de1970, que son "las reglas de calculó" (Figura C). El cual fueron diseñadas como apoyo tanto a profesores como estudiantes en las clases de matemáticas.

[21] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior*. Clave: No. 47045

Fig.A Pintura encontrada en la cueva de Pech Merle (Francia)

Fig.B. Tabla para el cálculo de la superficie de un terreno. Foto E. Lessing- Mágnum en "Ciencia y Vida" nº 2 Abril 1998

Fig.C Regla de calculo, Marca Aristo-júnior 301 1971

El hombre en el transcurso de la historia ha utilizado herramienta que han mediado su actividad y pensamiento matemático. Actualmente la tecnología es una herramienta indispensable en la actividad humana, por ello se ha incorporado en las clase de matemáticas como un recurso didáctico en el proceso de aprendizaje. Se ha observado que ha ejercido una influencia importante en la generación de nuevas formas para abordar dichos procesos en la matemática escolar, pero también se ha encontrado que perjudica al proceso mismo, dependiendo del uso tecnológico (Kutzler, 2003). Es difícil comprender el mundo moderno sin la tecnología, por ello los estudiantes, así como la población en general, requieren de una cultura científica y tecnológica básica que les permita comprender mejor su entorno para relacionarse de manera responsable con él, como afirma Ong (1999, p.11) citado en Hitt (2003):*"Muchas de las características que hemos dado por sentadas en el pensamiento dentro de la ciencia. se originaron debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana."*

Lamentablemente la ciencia y la tecnología están integradas parcialmente al sistema educativo, los alumnos las reconocen como un cuerpo del conocimiento fuera del salón de clases, eventualmente hacen uso de ellas y al hacerlo construyen conocimiento que no forma parte de su enseñanza. (Suárez, 2007). Por lo tanto, como la tecnología todavía vive separada de la enseñanza de las matemáticas, es un ente externo, que requiere de una intensa negociación para ser incorporada intencionalmente, en los procesos de aprendizaje (Cordero, 2006b). Esta investigación cuestiona estas acepciones y se pregunta por el papel que juega el uso de la tecnología en el conocimiento matemático, de tal manera que podemos preguntarnos: ¿De qué manera afecta la actividad matemática? ¿De que depende la expertes con el uso tecnológico? ¿Qué tipo matemática refleja el uso tecnológico? Para ello estudiamos una aproximación que estudia las cuestiones instrumentales, pretendiendo proporcionar indicadores, para dar alguna evidencia del papel que juega la tecnología en el conocimiento matemático, más tenemos la hipótesis de que en las prácticas con el uso de un artefacto[22], existe algo que hace que se desarrolle un tipo de matemática, algo que norma de tal manera que provoca la integración del artefacto al humano lo que le permite entender la tecnología y hace que resuelva sus tareas matemáticas. Para ello se ha estudiado un marco de referencia que estudia la importancia del papel que juega estos artefactos en el conocimiento matemático llamada *"génesis instrumental"*. A continuación presentamos los marcos de nuestra investigación:

La aproximación instrumental: "La Génesis instrumental"

La génesis instrumental estudia cómo un artefacto se convierte en un instrumento de tal manera que se integra al humano para hacer matemáticas (Artigue, 2002). Si bien la ubicación de su problemática tiene que ver con una relación dialéctica *técnica-conceptual*, debido al hecho de usar un artefacto. Ésta incrementa tus técnicas y habilidades, pero de qué manera afecta la parte conceptual producto de que su uso incide a una "economía" matemática. Es por ello que surge la creación de dicho marco capaz de responder a tal problemática. La palabra instrumento para la aproximación tiene un sentido más

[22] Se utiliza el término *artefacto* en un sentido general, en lugar del término *máquina*, ya que esta última incluye ideas de complejidad y de manufactura industrial. Un martillo es un artefacto, un compás es un artefacto, una calculadora y computadoras son artefactos. El término artefacto tendrá el sentido de un objeto material que está disponible para la actividad humana. En el caso que nos ocupa, en este escrito cuando hablamos de artefacto nos referimos a calculadoras simbólicas.

profundo, ya que surge de la construcción por parte del sujeto, es decir, para que esta construcción del artefacto al instrumento suceda, la génesis instrumental se debe de apropiar de una dualidad producto del artefacto. La primera se dirige del sujeto hacia el artefacto cargándolo progresivamente de potencialidades, descubrimiento y experimentación. Todo ello es un proceso llamado instrumentalización, el cual desarrolla esquemas de uso. La segunda dirección se dirige del artefacto hacia el sujeto lo que lleva al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada. Estos esquemas permiten entender las potencialidades y restricciones del propio artefacto y constituyen progresivamente en habilidades para responder efectivamente actividades matemáticas. A esto se le denomina instrumentación (Trouche, 2004). Ver figura D.

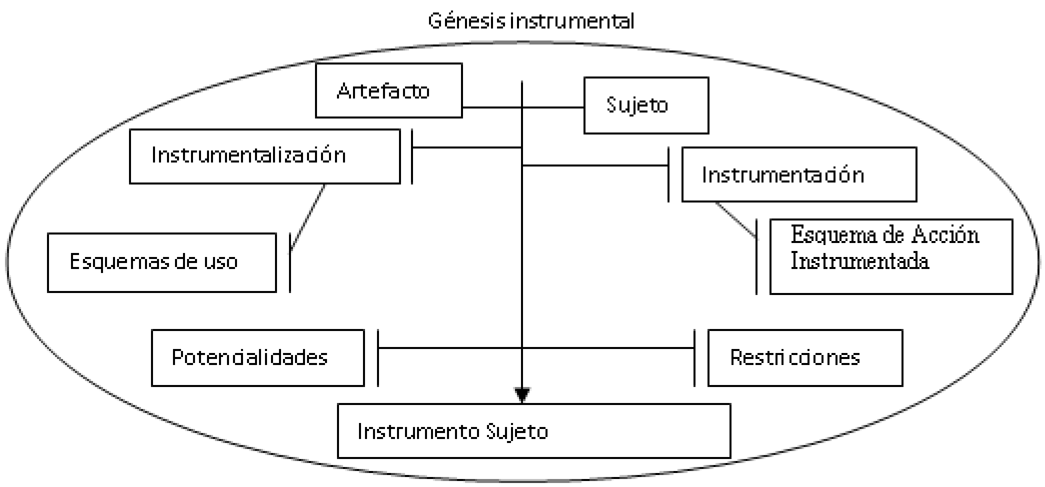


Figura D. Construcción del artefacto al instrumento producto de la Génesis Instrumental.

Por ejemplo presentamos investigaciones hechas por Guin y Trouche (1999) donde señalan las dificultades que tuvieron sus estudiantes al tratar de resolver la ecuación $tan(x) = x$, en los Reales: *En una clase de 32 alumnos (17 años), solamente cuatro estudiantes señalaron una infinidad de soluciones. Los otros estudiantes mencionaron un número finito de soluciones (correspondiente a los que es visible en la pantalla*), ver figura F.

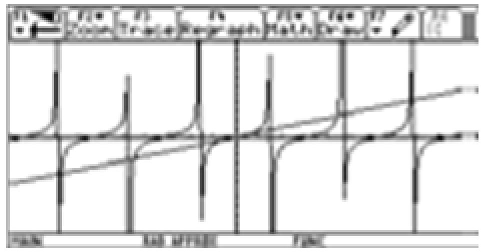


Figura F. Grafica de *f(x)=tanx y f(x)=x*

La dificultad radica en que los estudiantes no toman la pantalla como si fuera una ventana en donde solamente estamos observando una parte de ella. Otra dificultad es interpretar lo que se percibe en esa ventana. Los mismos autores (Guin y Trouche) señalan que algunos alumnos consideran las asíntotas como parte de la representación gráfica de la función y por tanto, proponen más intersecciones; y otros alumnos señalan que la intersección entre las dos funciones cerca del cero se da en una infinidad de puntos. Semejantes interpretaciones han permitido cuestionarse sobre la manera en que el artefacto está afectando al estudiante. La percepción gráfica influye mucho en sus interpretaciones, esto demuestra que no ha desarrollado los suficientes esquemas de uso (conocer el artefacto, los menús, los ambientes) pero también los esquemas de acción instrumentada están limitados, ya que no desarrolla de una tarea específica para su solución (ejecutar un zoom adecuado en la vecindad de un punto)

La aproximación socioepistemológica

La aproximación socioepistemológica estudia el entendimiento de la construcción del conocimiento matemático de acuerdo con lo que organizan los grupos humanos normado por lo institucional y cultural. Se trata de entender tal constitución para hacer que el conocimiento sea funcional, que se integre al humano para transformar al mundo, su naturaleza y por lo tanto a él. Para responder que tal conocimiento sea funcional debemos hacer estudios sobre el uso del conocimiento en situaciones especificas donde se resignifique el conocimiento matemático en cual se debate entre su funcionamiento y forma (Cordero, 2003, 2005, 2006a, 2006b). Las evidencias de las resignificaciones en cuestión descansan en el estudio del “uso de las gráficas”.

Siendo esencial el estudiar la actividad humana en su intento por transformar su realidad social o material y a su vez esta actividad humana está *normada* por diferentes prácticas sociales, concebimos a la graficación como una practica social donde se desarrolla estudios a través de su uso en prácticas institucionales. Siguiendo estos razonamientos, nuestra investigación propone entender cómo un “uso de las gráficas” es lo que norma cierta categoría matemática, propia del uso de una calculadora simbólica, esto conlleva que la graficación es lo que norma la construcción del conocimiento matemático, en este caso con el uso de la calculadora simbólica, lo que propicia formular epistemologías de prácticas del saber matemático. Así, creemos, se pudiera ampliar la “génesis instrumental”, ya que ayudaría a entender el papel del uso del instrumento en el conocimiento matemático del estudiante.

Socioepistemología como una ampliación de la Génesis instrumental

Una vez identificadas las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático requieren ser reinterpretadas para ser integradas al sistema didáctico, pues requieren de la intencionalidad para que se desarrollen en las condiciones del sistema. Para ello, se construye la situación donde la práctica se transforma en el argumento, como el eje que responda a la situación (Buendía y Cordero, 2005). Para lograr la conexión entre ambos marcos teóricos consideramos a la graficación como un tipo de modelación en una situación con el uso tecnológico, donde la modelación es el argumento en la situación. Se ha tomado la epistemología de modelación-graficación (Suárez, 2007), el cual caracteriza y articula precisamente la modelación y la graficación con el uso tecnológico. Conjuntamente con el marco de la génesis Instrumental nos ayudara a entender al papel que juega la tecnología y así obtener un marco de referencia donde hagamos de la matemática un conocimiento funcional. Así articulamos la aproximación socioepistemología a través del "uso de las gráficas" en una situación especifica, donde evidenciamos que norma cierta integración tecnológica al estudiante de tal manera que construya conocimiento matemático. Con estos marcos teóricos, la investigación da elementos en la situación de cómo el artefacto se convierte en un instrumento producto de una génesis instrumental.

Metodología (o Métodos)

La metodología para comprobar nuestra hipótesis consiste en el análisis de los datos de una situación de modelación del movimiento (Torres, 2004). Esta situación está centrada en la interacción entre el estudiante y el uso de calculadoras con sensores de movimiento. Al modelar el movimiento, los estudiantes simulan y explican sus resultados a través de las gráficas obtenidas. Es decir, hacen un "uso de las gráficas" para explicar fenómenos de cambio, donde la variación tiene un sentido específico que no depende de las propiedades analíticas de la función que ahí interviene. Con el análisis del "uso de las gráficas" damos evidencia de lo que norma la integración tecnológica en la situación, a través de su funcionamiento y forma. Con ello contestamos nuestra pregunta de investigación ¿Cómo se construye la génesis instrumental en una situación de modelación del movimiento?: a tarvés del funcionamiento y forma de las gráficas que norman la integración: instrumenlización e instrumentación.

Discusión

La discusión la proponemos sobre lo que norma la integración tecnológica en la situación de aprendizaje, De las evidencias que proporcionemos de dicha integración en los estudiantes a través del funcionamiento y forma del "uso de la grafica", que favorece la instrumentalización e instrumentación del artefacto. Sobre el marco de la génesis instrumental que estudia la construcción del instrumento que se integra al humano como algo orgánico que lo transforma y le permite construir conocimiento matemático.

Conclusiones

Desde la perspectiva de investigaciones socioepistemológicas, que busca la intervención al sistema didáctico, se buscan categorías del conocimiento. La graficación se estudiará como una categoría en donde evidenciamos que a través de estudiar su uso en una situación de modelación del movimiento tiene una función normativa. En la situación los estudiantes después de haber modelado su movimiento explican la variación a través de la gráfica obtenida, hacen un uso de la gráfica a través de su funcionamiento y forma, de tal manera que los norma a la construcción del instrumento. El proyecto de investigación entiende el papel que juego la tecnología en el conocimiento matemático del estudiante en la situación, al encontrar que el estudio del "uso de las gráficas" permite explicar cierto tipo de matemática. Con esta investigación precisamos epistemologías del funcionamiento y la forma del conocimiento matemático en situaciones específicas de los participantes, con lo cual se está construyendo un marco de referencia para conceptualizar el "uso del conocimiento matemático" (Cordero, 2006a)

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002).Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7**(3), 245-274.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame Vol. 16, Tomo 1,* pp. 73-78.

Cordero, F., (2005). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar [Resumen]. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. p. 30.

Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. , 265-286.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79. Córdoba, 7-10 de Septiembre de 2005

Buendía, G., Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics,* 58*, (3)*, 299-333.

Guin D., Trouche L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, pp. 195-227.

Hiit F. (2003) Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2*

Kutzler, B. (2003). “CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics”, en Fey *et al.* (eds.), *Computer algebra systems in secondary school education*, Capítulo 3, pp. 53-71, Reston VA: NCTM.

Suárez, L. (2007) *Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico.* Borrador de tesis doctoral en revisión no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L., Cordero, F. (2007) Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.* Manuscrito aceptado para su evaluación.

Trouche, L. (2004) Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Student's Command Process Through Instrumental Orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9 (3), 281-307

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN.

EXPERIENCIA DE CÁTEDRA USANDO HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS Y EL APRENDIZAJE COOPERATIVO

María E. Ascheri, Rubén A. Pizarro
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa — Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo y Tecnología avanzada — Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo mostramos una experiencia de Cátedra que realizamos durante el dictado de "Cálculo Numérico", en donde ponemos especial énfasis en usar herramientas informáticas.*

Para concretar esta experiencia, abordamos el tema "Solución de sistemas de ecuaciones no lineales", siendo el objetivo fundamental de la misma lograr una revisión, integración y aplicación de los conocimientos adquiridos sobre este contenido temático. Para alcanzar este objetivo, combinamos la enseñanza tradicional desarrollada en el aula con el aprendizaje cooperativo por medio de grupos formales, herramienta didáctica empleada en la sala de cómputos para resolver situaciones problemáticas utilizando el software Octave.

Presentamos el desarrollo de esta experiencia, las características sobre la metodología utilizada, una de las actividades propuestas y los resultados y conclusiones.

Palabras clave: aprendizaje cooperativo, grupo formales, herramientas informáticas

Introducción

Nuestros alumnos, futuros Ingenieros, Matemáticos y Físicos, deben estar en condiciones de usar las herramientas básicas informáticas y las técnicas numéricas para analizar aplicaciones reales. A tal efecto, realizamos una experiencia de Cátedra durante el desarrollo del tema "Solución de sistemas de ecuaciones no lineales", en el marco del curso de "Cálculo Numérico" y teniendo como meta el logro de los siguientes objetivos:

- Propiciar una comprensión profunda de este contenido temático a través de la revisión, integración y aplicación de conocimientos previos.Mostrar la utilidad de los métodos numéricos en combinación con la computadora.Ayudar a elaborar programas que puedan usarse en aplicaciones científicas.

- Alentar y guiar a los alumnos a que realicen actividades previamente seleccionadas, como integrantes de grupos formales de aprendizaje cooperativo.
- Motivar a que se produzca el intercambio de experiencias y de resultados obtenidos.
- Evaluar el aprendizaje logrado.Para alcanzar estos objetivos utilizamos las siguientes estrategias didácticas y técnicas:
- Aprendizaje basado en la transferencia de los conocimientos adquiridos, para resolver con herramientas informáticas y técnicas numéricas actividades que sean motivadoras.
- Estrategias de enseñanza: empleo de habilidades esenciales para una enseñanza eficaz y desarrollo de habilidades de pensamiento (Eggen y Kauchak, 1999).
- Estrategias de apoyo (Pozzo Municio, 1994).
- Aprendizaje cooperativo (Johnson D., Johnson R., Holubec, 1999).

Las herramientas informáticas y las técnicas numéricas que utilizamos son, respectivamente, la computadora y el software Octave (Eaton, 1997), y los métodos numéricos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales (Mathews y Fink, 2000).

Desarrollo de la experiencia

Descripción de las estrategias didácticas y las técnicas empleadas

La eficacia de los nuevos recursos informáticos y los avances en las tecnologías de la comunicación, conducen a la necesidad de plantear la incorporación de las nuevas tecnologías para propiciar cambios en el enfoque de enseñar y aprender matemática. Por ello, y para reafirmar el propósito del curso de Cálculo Numérico, nos planteamos introducir nuevas estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos temáticos que se abordan en él. El caso que presentamos se refiere al tema: “Solución de sistemas de ecuaciones no lineales”. Para efectuar el proyecto de aprendizaje de este contenido temático y para concretar esta experiencia, se organizaron y articularon en el tiempo, un conjunto de secuencias didácticas teniendo como base los resultados de una experiencia previa (Ascheri y Pizarro, 2006), y empleando ciertas estrategias didácticas y técnicas.

El primer pilar básico en la enseñanza de Cálculo Numérico es la experimentación. Desde el punto de vista pedagógico no podemos pretender que un alumno entienda la mecánica de un algoritmo sin utilizarlo en la práctica. Pero la experimentación numérica, ya sea a mano o con calculadora, enmascara la utilidad de los métodos y los convierte en algo pesado y aburrido, perdiendo la agilidad que les debe caracterizar, por lo que solamente utilizando un equipo computacional de alguna potencia se puede dar mayor coherencia a su enseñanza.

Por ello es que el segundo pilar básico de Cálculo Numérico es la implementación informática de los métodos numéricos. Sin embargo, un alumno que está realizando un primer curso de Cálculo Numérico, por lo general carece de los conocimientos suficientes sobre programación. No obstante, hemos encontrado en los software matemáticos una herramienta de gran utilidad a la hora de que los alumnos experimenten con métodos numéricos. Tal es el caso del software libre y de código abierto *Octave* (Eaton, 1997) que proponemos utilizar para el desarrollo de esta experiencia.

Es claro que los docentes tienen un impacto fundamental en la cantidad que aprenden sus alumnos. A tal efecto, Eggen y Kauchak (1999) describen las *habilidades esenciales de enseñanza* como las actitudes, habilidades y estrategias decisivas del docente necesarias para fomentar el aprendizaje del alumno. Estas son interdependientes y ninguna sola es tan efectiva como lo es en conjunto con las otras. Son habilidades esenciales las siguientes:

- *Organización efectiva por parte del docente*.
- *Foco* (*foco introductorio y foco sensorial*).
- *Retroalimentación y monitoreo*.
- *Alineamiento de la enseñanza*.
- *Comunicación del docente*.
- *Revisión y cierre*.

El *aprendizaje cooperativo basado en grupos formales* (Johnson y cols., 1999), es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos durante un período de una hora a varias semanas de clases para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. La conformación de estos grupos les brinda la posibilidad de practicar y desarrollar habilidades, de alcanzar objetivos comunes, de observar y reflexionar sobre los resultados obtenidos, de optimizar el rendimiento académico a nivel individual y grupal. El docente debe supervisar el aprendizaje de los alumnos e intervenir en los grupos para brindar apoyo en la tarea a realizar o para mejorar el desempeño interpersonal y grupal.

Las estrategias de apoyo (Pozzo Municio, 1994), son una serie de procesos de apoyo necesario para cualquier aprendizaje: mantener la atención y la concentración, estimular la motivación y la autoestima, unirlos en torno al objetivo propuesto. Esto es, al explicar una tarea, el docente debe emplear estímulos u objetos concretos. También, puede ofrecer una estructura visual adecuada al proceso de pensamiento que requiera la actividad a realizar. Son organizadores visuales (Johnson y cols., 1999):

- *Diagramas radiales, en cadena, reticulado y de Venn*
- *Mapas conceptuales*.
- *Esquemas*.
- *Gráficos*.

Contexto

Para comenzar con la elaboración de las secuencias didácticas, poniendo nuestros esfuerzos en lograr la comprensión profunda de un tema particular -*solución de sistemas de ecuaciones no lineales*- e intentando emplear habilidades esenciales para una enseñanza eficaz, tuvimos en cuenta el contexto en el cual se sitúa la asignatura Cálculo Numérico.

Carreras - Año: Ing. Civil - 2º; Lic. en Física - 3º; Prof. en Matemática - 3º.

Modalidad de cursado: Promoción sin examen final. *Régimen:* Cuatrimestral.

Número promedio de alumnos: 20. (Cada alumno dispone de una computadora).

Secuencias didácticas

Se desarrollan ocho secuencias didácticas con un total de diecisiete horas reloj,

Revisión, integración y aplicación de conocimientos previos sobre la solución de sistemas de ecuaciones no lineales utilizando herramientas informáticas v métodos numéricos.

organizadas según el objetivo a alcanzar (*organización efectiva y alineamiento de la enseñanza*):

Etapa inicial. Se realiza en el aula durante tres secuencias didácticas de dos horas reloj cada una. En ella se dan:

- Información sobre la tarea que los alumnos deberán concretar (*foco introductorio*).
- Desarrollo de los contenidos teóricos de forma tradicional (*comunicación del docente*).
- Presentación de ejemplos y ejercicios trabajados con calculadora (*foco sensorial*).

*Etapa de orientación***.** Se lleva a cabo en el aula durante una secuencia didáctica de dos horas reloj. Se explica en qué consiste la tarea que se les asigna y cómo deben realizarla, cuáles son sus alcances y los resultados esperados (*organización efectiva*, *alineamiento de la enseñanza*, *foco*, *comunicación del docente*). Esta etapa se desarrolla como sigue:

Resolver situaciones problemáticas utilizando métodos numéricos y herramientas informáticas para lograr una revisión, integración y aplicación de conocimientos relativos al tema: Solución de sistemas de ecuaciones no lineales.

- Formulación del objetivo fundamental correspondiente a la tarea asignada:
- Realización de una síntesis explicativa de los conceptos a aplicar utilizando un *esquema* como *organizador visual*. Esto permite complementar el *foco introductorio* y ayuda a mantener la atención, dando elementos visuales como forma de *foco sensorial*.
- Explicación de la metodología y los procedimientos a seguir para realizar la tarea:
    - Trabajo en la sala de cómputos.

- Empleo de grupos formales de aprendizaje cooperativo.
- Elaboración de programas para los distintos métodos numéricos utilizando Octave.
- Resolución de actividades utilizando estos programas.
- Secuencia a seguir para la redacción de un informe final por parte de cada grupo:
  - Análisis, comprensión y organización conceptual de la información. El informe contendrá los programas y las resoluciones de las situaciones planteadas.

- Explicación de los criterios de evaluación del trabajo en grupo:
  - Presentación, exposición y defensa del informe escrito.
  - Nivel participativo de los integrantes de cada uno de los grupos.
  - Trabajo académico de cada grupo con respecto a los restantes grupos.
- Nivel de rendimiento académico requerido a cada grupo para aprobar la tarea:
  - No deberá ser inferior a 7 (siete) puntos. Si todos los grupos logran una puntuación no inferior a 7 (siete), cada grupo tendrá un punto adicional.

Etapa de aplicación. Se lleva a cabo en la sala de computación durante tres secuencias didácticas de dos horas reloj cada una.

- Realización de los programas utilizando Octave y aplicación a casos reales.

La transferencia de los conocimientos adquiridos en el aula a un contexto más cotidiano constituye un problema de aprendizaje difícil de superar. Para salvar esta problemática, se realizó una búsqueda de actividades que incrementen el aprendizaje y la motivación, y que permitan alcanzar los objetivos específicos relativos a la temática aquí abordada.

En esta etapa, el docente asiste, guía y dirige a los alumnos para que puedan establecer las relaciones conceptuales pertinentes, aplicar estrategias de manera eficaz intercambiando opiniones con sus pares y con el docente, y obtener una respuesta definitiva y satisfactoria a las preguntas formuladas (*retroalimentación y monitoreo*).

Etapa de revisión y cierre. Se realiza en la sala de cómputos en una secuencia didáctica de tres horas reloj. Facilita el intercambio de experiencias, aunar criterios, efectuar tareas remediales (*retroalimentación y monitoreo*), y hacer una evaluación de las tareas con el objetivo de detectar fallas y realizar correcciones.

- Presentación, exposición y defensa del informe final.
- Discusión y puesta en común.
- Responder encuesta relativa al desarrollo de la experiencia.

Actividad

Se presenta una de las actividades que se les entregan a los grupos formales de aprendizaje cooperativo para que realicen la tarea y el informe presentado por uno de estos grupos.

Sabemos que dos elipses pueden tener como máximo 4 puntos de intersección. Queremos encontrar las coordenadas de las intersecciones de las elipses dadas por las ecuaciones:

$$(x-2)^2 + (y-3+2x)^2 = 5$$
$$2(x-3)^2 + (y/3)^2 = 4$$

Se pide realizar lo siguiente:

a) *Para obtener una idea gráfica de la situación, dibuje las elipses por medio de la función contour de Octave que permite crear curvas de nivel.*

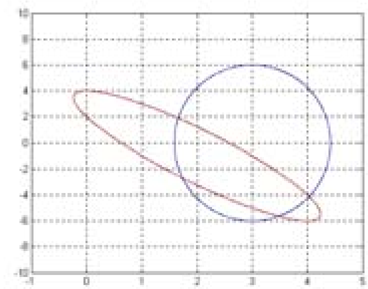
b) *Plantee explícitamente las funciones f_k para el sistema de ecuaciones dado.*

c) *Implemente el método de Newton-Crout para este problema. Experimente con diferentes valores iniciales para encontrar los 4 puntos de intersección.*

d) *Formule y fundamente una conclusión según los resultados obtenidos.*

Informe (sintético) presentado por uno de los grupos formales

a) Gráfica de las dos elipses:



b) El sistema de ecuaciones no lineales que expresa la intersección de las dos elipses es:

$$f_1(x, y) = (x-2)^2 + (y-3+2x)^2 - 5 = 0$$
$$f_2(x, y) = 2(x-3)^2 + (y/3)^2 - 4 = 0$$

c) Resultados obtenidos ejecutando el programa del método de Newton-Crout:

Ejecución	**Valores iniciales**		**Error**	**Soluciones**		**Iteraciones**
	x_0	y_0				
1	2	-5	0.0005	1.73622	-2.69261	4
2	1	0	0.0005	1.73623	-2.69291	5
3	1.5	0	0.0005	No converge		
4	2	3	0.0005	1.65807	1.89339	4
5	3	-7	0.0005	3.48289	-5.63939	5
6	3.5	-5	0.0005	3.48299	-5.63911	4
7	4	-4	0.0005	4.02873	-4.11713	3
8	4	-5	0.0005	4.02869	-4.11725	5

d) Conclusiones

- Los diferentes valores iniciales se obtienen a partir del gráfico realizado en a).
- Aplicamos el programa hecho en Octave para distintos valores iniciales, obteniendo en la mayoría de los casos los valores aproximados que solucionan el sistema.

- Sólo en uno de los casos el método no converge pues con los valores ingresados el sistema lineal resultante no tiene solución (el determinante de la matriz es nulo).

Resultados y conclusiones

La realización de esta experiencia y de otra anterior (Ascheri y Pizarro, 2006), han estado encaminadas al desarrollo de trabajos investigativos relacionados con la introducción de herramientas informáticas en conjunción con las técnicas numéricas, usando ciertas estrategias didácticas. De la concreción de ambas, podemos puntualizar algunos de los resultados alcanzados con los grupos de alumnos que cursan Cálculo Numérico.

En el comienzo de las dos primeras etapas (inicial y de orientación) observamos, en general, que los alumnos se muestran reticentes a lo desconocido, el clima en las clases es de incertidumbre. Es la primera vez que se les está pidiendo que trabajen de manera diferente. A medida que se avanza en la etapa de orientación, esta situación va variando y comienzan a comprometerse con la tarea asignada.

En la etapa de aplicación, el ánimo de la clase es más distendido y dinámico. Se forman los grupos formales de aprendizaje cooperativo y comienzan a trabajar en la tarea. Se incrementa la discusión en la clase, con respecto a las de años anteriores. Esto se ve reflejado en el hecho de que son los mismos alumnos los que proponen al grupo que integran, resolver nuevos ejercicios.

Además, con la metodología empleada, identifican errores y organizan datos en la resolución de ejercicios. Las observaciones realizadas nos permiten afirmar que la computadora ilustra y refuerza conceptos básicos, reduce la preocupación por las técnicas de cálculo y permite a los alumnos concentrarse en los conceptos matemáticos.

Pero también hemos observado ciertas falencias. Si bien las herramientas informáticas y las técnicas numéricas propuestas para la resolución de las situaciones problemáticas planteadas tienen un papel decisivo en el aprendizaje de la temática aquí abordada, tal como lo afirma Pozzo Municio (1994), éstas pueden constituir un obstáculo para los alumnos y los docentes. Esto lo hemos podido corroborar durante el desarrollo de la experiencia anterior (Ascheri y Pizarro, 2006). Aquí detectamos que algunos alumnos presentaban dificultades en el uso de las herramientas informáticas empleadas, lo cual implicó que dictáramos un curso previo al de Cálculo Numérico sobre estas cuestiones.

También observamos que algunos alumnos se muestran poco interesados, hay heterogeneidad en los grupos y existen diferencias entre los integrantes, lo cual se debe, fundamentalmente, a que son de distintas carreras, de diferentes años de cursado y además, algunos desarrollan actividades externas paralelamente al estudio, es decir, son alumnos con distintos intereses y conocimientos previos. Por ello es que debemos permanentemente asistir, dirigir y coordinar el proceso de aprendizaje, para alcanzar los objetivos propuestos y paliar algunas de las dificultades que van surgiendo a lo largo del desarrollo de la experiencia, lo que demanda un mayor esfuerzo y seguimiento por parte del docente.

De lo expresado anteriormente, podemos concluir que el proceso de transformación de los integrantes de los grupos formales de aprendizaje cooperativo al resolver las actividades, está caracterizado por avances y retrocesos.

En la última etapa (revisión y cierre), lo más importante a rescatar es que se haya logrado:

- Cumplir con los objetivos propuestos al inicio de la experiencia.
- Integrar a docentes y alumnos en tareas intelectuales con objetivos comunes.
- Que todos los grupos hayan redactado adecuadamente un informe sobre la tarea dada, y hayan podido comparar y explicar sus respuestas durante las exposiciones orales.

También podemos hacer un seguimiento y evaluación de la experiencia a partir de las sugerencias vertidas por los alumnos en la encuesta realizada. Haciendo una síntesis de la misma, consideramos relevante que un 65% expresó que si bien al comienzo le resultó bastante difícil adaptarse a esta nueva modalidad de trabajo, luego con la ayuda de los integrantes de su grupo y de los docentes pudieron entender mejor los contenidos teóricos abordados y aplicarlos en la resolución de las actividades. Esto les implicó, además, poder redactar un informe sobre la tarea asignada y obtener buenos resultados en las evaluaciones parciales. Otro resultado interesante de la encuesta es que un 32 % indicó la falta de tiempo para concretar la experiencia y el escaso compromiso de algunos de sus compañeros.

Concluimos, finalmente, que el desarrollo de este tipo de experiencias nos permite detectar ciertas debilidades de la Cátedra pudiendo, entonces, proponer modificaciones para tratar de revertir o mejorar esas situaciones.

Referencias bibliográficas

Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. (2006). Aplicación del aprendizaje cooperativo en el tema: solución de sistemas de ecuaciones lineales. J. E. Sagula (Presidente), *Memorias del VIII Seminario de Educación Matemática*. (pp. 1-19). Buenos Aires: UNLu.

Eaton, J. W. (1997). Octave: (octave). Interactive language for numerical computations (Versión 2.1.x) [Software y manual de cómputo]. Recuperado de http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/index.html

Eggen, P. D. y Kauchak, D. P. (1999). *Estrategias Docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento*. México: Fondo de Cultura Económica.

Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Buenos Aires: Paidós SAICF.

Mathews, J. y Fink, K.(2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*. España: Prentice Hall.

Pozzo Municio, J. (1994). *La solución de problemas*. Madrid: Grupo Santillana.

INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE OCTAVE: APLICACIONES A PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

María E. Ascheri, Rubén A. Pizarro
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Los avances tecnológicos y la disponibilidad de recursos informáticos se han convertido en herramientas de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje en muchas disciplinas. Es por ello que nos propusimos introducir nuevas estrategias metodológicas para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de temas de Cálculo Numérico utilizando un software matemático libre y de código abierto como Octave. Para lograr este objetivo, proponemos el dictado de un curso-taller sobre Octave con aplicaciones a problemas de matemática para aquellos alumnos que deban cursar la asignatura Cálculo Numérico y también para alumnos de Matemática en general. Luego, se implementa su uso en el dictado de dicha asignatura.*

En este trabajo presentamos las características del curso-taller, una breve descripción del Octave, algunos ejemplos, actividades propuestas y trabajos finales de los participantes.

Palabras clave: software Octave, problemas de matemática, propuesta de curso-taller

Introducción

No ajenos a los avances tecnológicos y a la disponibilidad de recursos informáticos como herramientas de apoyo al proceso de enseñanza – aprendizaje en una amplia variedad de disciplinas, nos propusimos dictar un curso-taller introductorio sobre el uso del lenguaje Octave, especialmente dirigido a aquellos alumnos que tengan en su Plan de Estudios la asignatura Cálculo Numérico y también a alumnos relacionados con el área de Matemática. Una vez concretada esta propuesta, se implementa su uso en el desarrollo de dicha asignatura con la finalidad de que ayude a los alumnos a realizar la componente numérica de los problemas que deban resolver en el laboratorio. Para la enseñanza-aprendizaje de temas de Cálculo Numérico, se siguió la siguiente metodología:

1. *Desarrollo de contenidos teóricos:* Para sistematizar los conocimientos curriculares y del software matemático utilizado en la asignatura.
2. *Resolución de ejercicios:* Para afianzar la teoría y las técnicas utilizadas.

3. *Resolución de actividades:* Para profundizar y consolidar la teoría.

Desarrollo

Características del curso -taller

El curso-taller se denominó "Introducción al software libre Octave: aplicaciones a problemas de Matemática" y fue llevado a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, Santa Rosa, La Pampa, Argentina. Los integrantes de la Cátedra de Cálculo Numérico fueron los docentes a cargo del dictado del mismo, y estuvo dirigido especialmente a los alumnos que deban cursar la asignatura Cálculo Numérico y también a alumnos relacionados con el área de Matemática.

Los objetivos del curso-taller fueron los siguientes:

- Aportar una herramienta adecuada a los avances tecnológicos y a la disponibilidad de recursos informáticos.
- Iniciar, capacitar y motivar a los participantes en el uso del lenguaje Octave.
- Mostrar su utilidad en la resolución de problemas matemáticos.
- Capacitar a los participantes para realizar trabajos acordes a sus áreas de estudio.
- Proporcionar una base sólida sobre el uso de este lenguaje para el estudio posterior de problemas que requieran de la programación de métodos numéricos para su solución.

Se detalla a continuación, el programa de contenidos mínimos desarrollado:

- Introducción
- Sintaxis de Octave
- Archivos de funciones y de scripts
- Polinomios
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones no lineales

- Gráficas
- Funciones de entrada / salida
- Otras funciones de interés

Se requirió un manejo básico de PC por parte de los participantes. Las clases fueron de carácter teórico-práctico. La metodología utilizada durante el curso-taller consistió en la resolución de actividades prácticas por parte de los participantes, constituyendo grupos formales de aprendizaje cooperativo (Johnson, Johnson & Holubec, 1999). Previamente, en una breve exposición teórica, se dieron las herramientas necesarias para poder resolver dichas actividades. Con estas herramientas y la búsqueda por medio del comando help, los grupos resolvieron una serie de actividades complementarias.

El curso-taller tuvo una duración de diez encuentros de dos horas de duración cada uno, en una de las salas de computación de la Facultad. La carga horaria total fue de cuarenta horas reloj, distribuidas en horas de aula y horas de trabajo del participante, con un cupo de hasta 20 participantes (uno por computadora).

Para aprobar el curso-taller era condición necesaria asistir al 80 % de los encuentros, presentar en forma individual y/o grupal (no más de dos participantes por grupo) un disquete con la resolución de las actividades, presentar y defender individualmente un trabajo integrador de los contenidos desarrollados y acorde a las áreas de cada uno.

Se emitieron certificados de aprobación por un total de cuarenta horas reloj para los participantes que cumplieron las condiciones pautadas, y de asistencia por un total de cuarenta horas reloj para aquellos participantes que sólo asistieron a los encuentros.

¿Qué es octave?

Octave entra en la categoría de software libre y es un lenguaje de alto nivel diseñado originalmente para realizar cálculos numéricos en la computadora. Tiene una interfase de línea de comando para resolver problemas lineales y no lineales, y un lenguaje de programación similar a su contraparte comercial MATLAB, con el que es prácticamente compatible. Octave permite abordar problemas de las ciencias y la ingeniería.

En esta propuesta utilizamos la versión 2.1.50 de Octave. Los contenidos que mostramos forman parte de un manual que elaboramos para el dictado del curso-taller (Ascheri, Pizarro y Culla, 2006). El manual de referencia más recomendable y difundido de Octave en Internet es el de su creador John W. Eaton (1997), y tanto allí como en los elaborados por García Rojo (2003) y Hamilton Castro (2004) pueden encontrarse mayores detalles.

Ejecutando Octave

Existen varias versiones de Octave, todas disponibles en forma gratuita en Internet. La página principal de Octave es http://www.octave.org.

Una de las páginas desde donde se puede obtener la distribución para Windows es: http://prdownloads.sourceforge.net/octave/octave-2.1.50-inst.exe

Una vez obtenido el instalador, se debe ejecutar el mismo y se iniciará el proceso de instalación de Octave. Para ejecutar el programa, simplemente se debe hacer doble click en el icono correspondiente. Octave muestra un mensaje inicial y un prompt indicando que está esperando órdenes del usuario.

Para poder obtener información de Octave es necesario conocer el nombre de la orden que se quiere usar. Este nombre no tiene por qué ser obvio. Un buen sitio para empezar es tipeando **help** y luego presionando **ENTER**. Si ya se conoce el nombre del comando, simplemente hay que pasarlo como parámetro.

Para editar los programas se utiliza el bloc de notas. Los archivos creados deben ser guardados con extensión **m** en *C:\Archivos de programa\GNU Octave 2.1.50\octave_files* para poder ser invocados luego desde Octave.

Algunas aplicaciones a problemas de matemática

Sin entrar en detalles sobre la sintaxis de Octave (tipos de datos, variables, operadores, funciones, expresiones de control de flujo) y otras cuestiones específicas de este lenguaje, a continuación presentamos algunos de los ejemplos dados en el curso-taller y que se encuentran desarrollados en el manual de Ascheri et al (2006), los cuales permiten ilustrar las principales características de este lenguaje y su utilidad en la resolución de problemas matemáticos. Tanto para la selección de éstos como de las actividades propuestas, algunas de las cuales se muestran en este trabajo, se tuvo en consideración hacia quién estaba dirigida la propuesta.

*Ejemplo 1***.** Para hallar la solución del siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

se puede hacer de varias maneras:

```
>> A=[1 -2 3;4 1 -2;2 -1 4]; % Introducimos la matriz de coeficientes A
>> b=[1;-1;2]; % Introducimos la matriz de términos independientes b
>> x=A\b % Vector solución según el método de eliminación de Gauss
x =
 -0.04167
 0.41667
 0.62500
>> x=rref([A b]) % Vector solución según el método de Gauss-Jordan
x =
 1.00000 0.00000 0.00000 -0.04167
```

0.00000 1.00000 0.00000 0.41667

0.00000 0.00000 1.00000 0.62500

>> x=inv(A)*b % Vector solución según el método de la inversa

x =

-0.04167

0.41667

0.62500

*<u>Ejemplo 2</u>. Si a una gráfica queremos agregarle algunas etiquetas, para que se visualicen estas modificaciones debemos ingresar cada vez la función **replot**.*

>> fplot('sin(x.^(-1))',[-6.28 6.28]) % Dibuja la función sin(1/x) en [-6.28, 6.28]

>> title('Gráfica de la función sin(1/x)') % Coloca título a la gráfica

>> replot   % Agrega los cambios

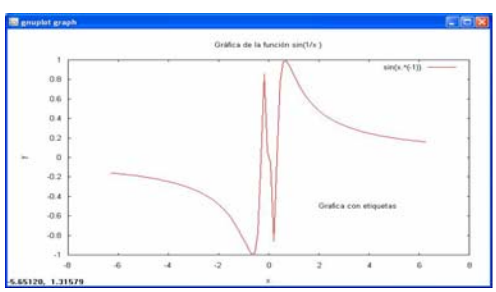
>> xlabel('x')   % Coloca un cartel en el eje x

>> ylabel('y')   % Coloca un cartel en el eje y

>> replot   % Agrega los cambios

>> text(2,-0.5,'Grafica con etiquetas') %Coloca el texto en el punto (2,-0.5)

>> replot   % Agrega los cambios



Algunas de las actividades propuestas

Mostramos aquí dos de las actividades propuestas en el curso-taller (Ascheri y cols., 2006).

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales de tres formas distintas utilizando el operador ****, la función *rref* y la función *inv( )*:

$$\begin{cases} 3x & + & 5y & - & 6z & = & -7 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 7x & - & y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

2. Realice los siguientes programas que permitan:

a) Ingresar un número natural y luego mostrar todos los números pares menores que él.

b) Calcular el valor de la hipotenusa de un triángulo ingresando los valores de sus catetos.

c) Ingresar una matriz y mostrar el mayor y el menor de sus elementos.

Algunos de los trabajos finales elaborados por los participantes

Al finalizar el curso-taller, los participantes presentaron diferentes propuestas utilizando el software Octave. La mayoría eran alumnos del Profesorado en Matemática. Éstos presentaron actividades para ser implementadas en las clases de Nivel Polimodal. Por otro lado, los demás participantes, alumnos de la Licenciatura en Física, presentaron actividades tendientes a analizar gráficamente diferentes fenómenos de su área de estudio.

Trabajo final I. Orientado a alumnos de 2° año de Nivel Polimodal.

Una *función exponencial* es una función de la forma $F(x) = k\, a^{x}$, donde k es un número real no nulo y se denomina coeficiente de la función, y a es la base de la función siendo un número real positivo y distinto de 1.

1.- Vamos a analizar las funciones de la forma $y = a^{x}$.

Grafiquen en un mismo sistema de ejes cartesianos las siguientes funciones utilizando las sentencias *hold on* y *hold off:*

a) $Y = 2^{x}$ $Y = (1/2)^{x}$ **b)** $Y = 3^{x}$ $Y = (1/3)^{x}$

Ahora realicen el análisis que se indica a continuación:

- Valor donde las gráficas cortan al eje de las ordenadas.
- Valor donde las gráficas cortan al eje de las abscisas.
- Dominio de las funciones.
- Imagen de las funciones.
- Si la base es mayor que 1 la función es.
- Si la base es menor que 1 la función es.
- Las gráficas que corresponden a funciones de bases recíprocas resultan.

2.- Vamos a analizar las funciones de la forma $y = k\,a^{x} + b$.

Grafiquen en un mismo sistema de ejes cartesianos las siguientes funciones:

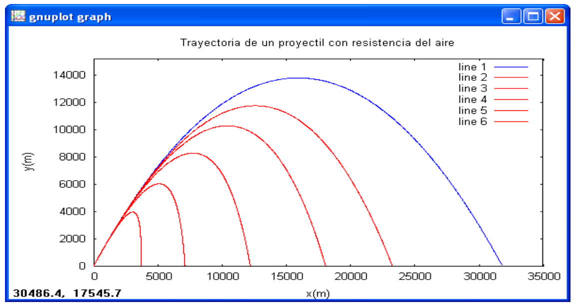
a) $Y = 2 \,.\, 3^{x} + 1$ $Y = 2 \,.\, 3^{x} - 1$ $Y = 2 \,.\, 3^{x}$ **b)** $Y = 1 \,.\, 2^{x} + 2$ $Y = 1 \,.\, 2^{x} - 2$ $Y = 1 \,.\, 2^{x}$

Ahora realicen el siguiente análisis:

- Si $b > 0$ la gráfica se desplaza.
- Si $b < 0$ la gráfica se desplaza.
- Escriban la imagen de las primeras funciones que graficaron .
- El valor de b determina.

Trabajo final II. Movimiento de un proyectil sujeto al efecto de la resistencia del aire, en un medio donde la fuerza de retardo es proporcional a la velocidad. Realiza el programa que muestre las trayectorias cuando el usuario ingresa la velocidad inicial y el ángulo inicial con la horizontal, comparándolas con el movimiento idealizado que es cuando la resistencia del medio es despreciada ($k = 0$).

Hicimos el programa y lo ejecutamos para $v_0 = 600$ m/s, $\alpha = 60°$. Obtuvimos el siguiente gráfico y concluimos que a mayor coeficiente de resistencia es más vertical la caída:



Experiencias y conclusiones

En el primer semestre del año 2006 dictamos este curso-taller, con un buen registro de inscripciones. Como el cupo máximo (20) fue superado, debimos hacer una selección de aspirantes. Del total, sólo uno no recibió el certificado de aprobación pero sí de asistencia.

La presentación y defensa de estos trabajos fue muy enriquecedora para todo el grupo, ya que cada participante presentó una posible implementación de una situación problemática relacionada con sus diferentes perfiles, esto es, acorde con las carreras de cada uno.

La mayoría de los participantes, futuros profesores de matemática, propusieron actividades en las que sus alumnos deberían utilizar la computadora para facilitar los cálculos y la realización de gráficos, arribando luego a conclusiones. De aquí, observamos que estos participantes no propusieron utilizar el software como una herramienta de apoyo para facilitar la comprensión de los conceptos a estudiar, o para modificar el tipo de actividades habituales a realizar. Simplemente, proponían realizar las mismas actividades que en una clase tradicional, ampliando sólo el número de ejercicios. Distinta fue la situación que se presentó con los alumnos del área de Física. Estos presentaron actividades con vistas a apoyar las tareas de enseñanza de los diferentes conceptos, extrayendo conclusiones.

Luego de dictar este curso-taller, hemos experimentado su implementación en el desarrollo de algunos contenidos temáticos de la asignatura Cálculo Numérico (Mathews y Fink, 2000) en los años 2006 y 2007, con la finalidad de realizar un seguimiento y evaluación de las repercusiones del curso-taller en la materia. Para ello, combinamos la enseñanza tradicional desarrollada en el aula con el aprendizaje cooperativo por medio de grupos formales (Johnson y cols., 1999), herramienta didáctica empleada en la sala de cómputos para resolver situaciones problemáticas utilizando el software Octave (Ascheri y Pizarro, 2006). En una primera instancia, podemos afirmar que los resultados obtenidos fueron positivos ya que pudimos alcanzar uno de los objetivos propuestos en la asignatura: que los alumnos tuvieran acceso a un software libre y de código abierto para poder desarrollar sus propios programas sin demasiada dificultad. Además, el uso de Octave en Cálculo Numérico redujo la preocupación por las técnicas de cálculo y permitió a los alumnos concentrarse en las ideas centrales de los conceptos matemáticos, favoreciendo a su formación académica. También, se logró que trabajaran más activamente que en años anteriores en las actividades que debían realizar en la sala de computación y usaran sus programas en las evaluaciones parciales de la materia. El haber llevado a cabo este curso-taller antes de comenzar con el desarrollo de Cálculo Numérico ha resultado de apoyo para el proceso de enseñanza y de aprendizaje, lográndose aplicar los métodos numéricos a situaciones problemáticas reales.

Sin embargo, hay que tener presente que el educador debe siempre actuar como guía del aprendizaje, definiendo un punto de equilibrio entre el empleo combinado de las nuevas tecnologías y de los métodos tradicionales, e incentivando al estudiante para que éste realice siempre el esfuerzo de analizar la coherencia de los resultados que está obteniendo, y de comprender los fundamentos teóricos en los que se basan dichos resultados.

Referencias bibliográficas

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A. (2006). Aplicación del aprendizaje cooperativo en el tema: solución de sistemas de ecuaciones lineales. J. E. Sagula (Presidente), Memorias del VIII Seminario de Educación Matemática. (pp. 1-19). Buenos Aires, Argentina: UNLu.

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A., Culla, M. E. (2006). Aplicaciones del lenguaje Octave a problemas de matemática. Manuscrito no publicado, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa, Santa Rosa, Argentina.

Eaton, J. W. (1997). Octave: (octave). Interactive language for numerical computations. (Versión 2.1.x) [Software y manual de cómputo]. Recuperado de http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/index.html

García Rojo, J. J. (2003). *Herramientas en GNU/Linux para estudiantes universitarios. GNU/Octave: Cálculo Numérico por ordenador*. Boston, USA: Free Software Foundation.

Hamilton Castro, A. (2004). Introducción al Octave. [Manual de cómputo].Grupo de Computadoras y Control, Dpto. de Física, Electrónica y Sistemas,ULL, España. Recuperado de http://cyc.dfis.ull.es/asignaturas/Curso20042005/ octave/ApuntesOctave/

octave/ApuntesOctave/ApuntesOctave.html

Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Buenos Aires: Paidós SAICF.

Mathews, J. y Fink, K.(2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*. España: Prentice Hall.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE FUNCIONES CON LA UTILIZACIÓN DE UN SOFTWARE

Daniela Müller, Adriana Engler, Silvia Vrancken
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Medio, Superior

Resumen. *A partir de nuestra experiencia docente de varios años, hemos observado, en el contexto del aula, que los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del cálculo. Para favorecer el aprendizaje de algunos de ellos, como por ejemplo: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, con el cambio de concavidad, puntos de máximo y mínimo o de inflexión, diseñamos algunas actividades de aprendizaje empleando el programa para graficación de funciones de la página de Lagares para implementarlas de manera complementaria al trabajo en el aula. En ellas se promueven estrategias de graficación que el alumno deberá combinar con estrategias analíticas para corroborar los resultados que presuponga del análisis de las gráficas.*

Palabras clave: recursos tecnológicos, estudio de funciones

Introducción

En el primer año de una carrera universitaria no matemática, la comprensión de los conceptos básicos del Cálculo, suele ser problemático para la mayoría de los alumnos. Uno de los conceptos centrales es la noción de función.

Para Farfán (1992, c.p. Ferrari y Martínez, 2002), entre las causas que hacen de la función uno de los conceptos matemáticos más difíciles de dominar y enseñar, se encuentran las diversas concepciones y múltiples representaciones de ésta, potenciadas por el hecho que la enseñanza tiende a sobrevalorar la algoritmización y los métodos analíticos por encima del desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático.

Al iniciar un curso de Cálculo los alumnos ya saben el concepto de función y deberían poder realizar sin inconvenientes conversiones entre los distintos registro de representación de la misma (gráfico, numérico, algebraico y coloquial). Para ello es importante proponer actividades que propicien el trabajo con diferentes representaciones.

Duval (1998) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. Agrega además, que no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, sino que también lo es el análisis de las actividades de conversión entre representaciones que debemos proponer a nuestros alumnos. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático.

Relativo al tema funciones, generalmente se le proponen al alumno tareas de conversión de una representación como la algebraica a su correspondiente gráfica y es poco usual que se le solicite el proceso inverso.

¿Por qué hacemos referencia a las dificultades en el aprendizaje del concepto de función?

Porque una mala concepción del mismo redundará en un bajo rendimiento en el aprendizaje del Cálculo. Debemos proponer actividades que favorezcan el desarrollo de una visión holística de las funciones y tareas de conversión de una representación a otra y viceversa ya que consideramos que esto promueve un mejor entendimiento de las funciones.

La creciente introducción de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, han generado nuevas posibilidades para mejorarlos y enriquecerlos. Integrar dichos recursos a los procesos en los que las actividades presenciales se mantienen de manera significativa, permite, entre otros aspectos, mejorar el acceso a los contenidos y a sus distintas representaciones. Esto puede complementarse con guías de estudio y propuestas de actividades (Sigalés, 2004). Además contribuye a mejorar la calidad de la docencia a través de una mayor cantidad y calidad de las interacciones entre el profesor y los alumnos y de los alumnos entre sí, como así también de una mejor adaptación a los ritmos, intereses y necesidades de cada alumno y, en consecuencia, una mayor personalización de la actividad docente.

Con el objetivo de desarrollar habilidades para trabajar dentro y entre diversas representaciones de un mismo concepto, la utilización de recursos tecnológicos resulta un complemento importante.

No perdemos de vista, tal como lo expresa Luis Moreno Armella (2002) que:

> *"Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es la tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología".*

A partir de nuestra experiencia docente de más de 20 años, hemos observado que en el contexto del aula, los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del Cálculo como por ejemplo: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, con el cambio de concavidad, puntos de máximo y mínimo o de inflexión. Para favorecer el aprendizaje de estos conceptos, diseñamos algunas actividades de aprendizaje para ser implementadas en ambientes computacionales, como complemento al trabajo en el aula que propician el trabajo con diferentes representaciones.

Para la preparación de las distintas actividades que forman parte de este trabajo, tuvimos en cuenta las consideraciones planteadas por Moreno (2002) para aquellas propuestas en las que se utiliza la tecnología para graficar funciones. En las mismas se promueven estrategias de graficación que el alumno deberá combinar con estrategias analíticas que le permitan corroborar los resultados que le sugieran las representaciones gráficas.

Desarrollo de la propuesta

El software elegido para el desarrollo de las actividades fue *"Funciones para Windows"* versión 2.7, por ser un programa de tipo freeware que puede obtenerse gratuitamente desde la página http://www.lagares.org y que además tiene requerimientos mínimos de hardware y es de fácil manejo.

Este programa permite realizar distintos tipos de gráficos de una amplia variedad de ecuaciones para las que sólo debe escribirse la expresión matemática de las mismas. Pueden personalizarse las gráficas determinando los intervalos de representación sobre cada uno de los ejes cartesianos.

Para una función cualquiera, el programa calcula sus ceros, valores máximos y/o mínimos, intervalos de crecimiento y de concavidad, puntos de inflexión, entre otros, mostrando en cada caso la representación gráfica de ellos.

Los alumnos están familiarizados con el manejo del programa a través de otras actividades realizadas con anterioridad, en las que no sólo se promueven la utilización de las distintas representaciones y la conversión de unas representaciones en otras, sino que también se refieren a la elección de la ventana óptima en la que se dibuje la gráfica.

Para obtener la ventana de visualización de la función, además de ingresar la expresión algebraica de la misma, los alumnos pueden establecer la escala en cada uno de los ejes y los intervalos de variación de las variables x e y. Estos intervalos son los que modifican reiteradamente hasta obtener la gráfica en la que se observen todas las características particulares de la función que se representa. Es importante que los alumnos practiquen estas cuestiones con diferentes funciones que se desarrollan en clase, como por ejemplo las polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

En el contexto del aula, al realizar el estudio de una función, se busca representarla o tener una idea bastante aproximada de su aspecto a partir de la expresión algebraica y de cierta información adicional sobre las características de la gráfica. Esta información se obtiene a partir de la determinación del dominio, de las intersecciones con los ejes coordenados, del análisis de la paridad y simetrías, de la obtención de los puntos de discontinuidad y de la determinación de las ecuaciones de las asíntotas, del análisis de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, junto a la determinación de los extremos relativos (máximos y/o mínimos), del estudio de la concavidad y de la obtención de los puntos de inflexión.

En las actividades que se proponen a continuación, se sigue otro procedimiento. A partir de la gráfica de la función, se analizan cada una de las características enunciadas.

Todas las respuestas pueden ser controladas mediante comandos propios del programa y se encuentran en el menú que se despliega al presionar en la barra superior *1fu*.

Por razones de extensión sólo presentamos el enunciado de algunas de las actividades de la propuesta junto a los comentarios sobre su resolución que aparecen en cursiva.

Enunciado de la Actividad

Representе gráficamente $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + 3x^2\right)$

Observando la gráfica de la función, determine:

a) Dominio: .

Conjunto imagen: .

b) Intersecciones con el eje x (ceros): .

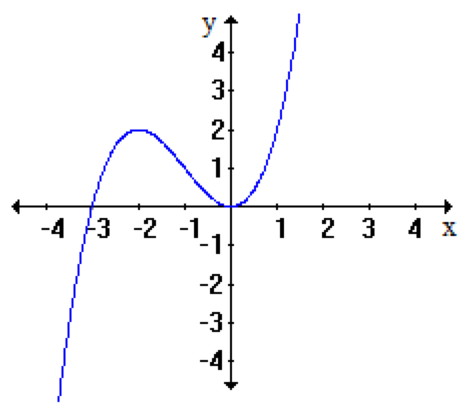
c) Intersección con el eje y (ordenada al origen): .

d) Analice el comportamiento de la función:

↳ cuando $x \to +\infty$.

↳ cuando $x \to -\infty$.

El alumno obtiene:



Para controlar sus respuestas, del menú selecciona Raíces e Imagen.

e) Indique, si presenta, los puntos de discontinuidad .

f) Determine (en caso de existir):

Asíntotas verticales: ………….. Asíntotas horizontales: …………….

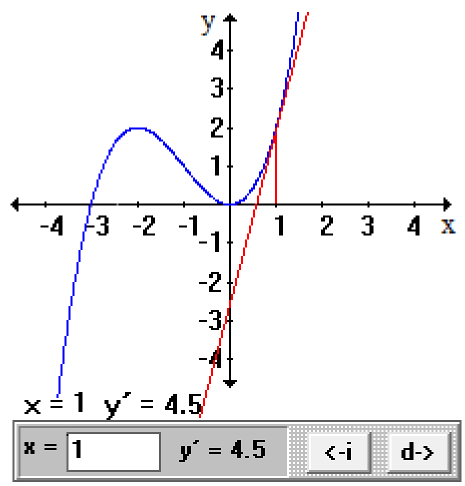
g) Obtenga analíticamente f '(x) = …………………….

h) Analice el signo de la derivada primera en todo el dominio de la función

i) Indique los valores de x que anulan la derivada primera o donde no existe …………

Los valores del dominio de una función donde la primera derivada se hace cero o no existe, son los *puntos críticos* de la función dada.

Para analizar el valor y por lo tanto el signo de la derivada primera, seleccione Derivada en un punto… y en el cuadro de diálogo correspondiente a x introduzca el valor de la abscisa del punto de la gráfica en el que desea calcular la derivada. Utilizando los botones <–i o d–> puede obtener la derivada en puntos próximos al anterior. Para cada punto considerado se visualiza en color rojo la recta tangente a la gráfica en dicho punto. Esto puede observarse en la gráfica que se encuentra a la derecha:

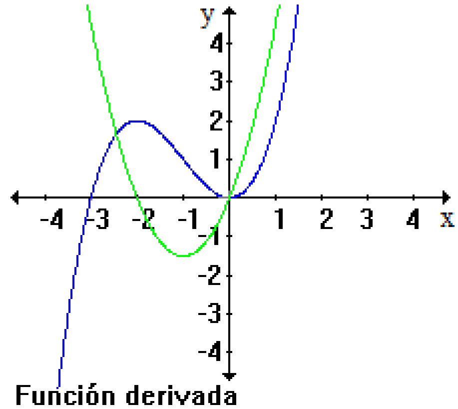


j) Grafique la función derivada.

Seleccione Función derivada y obtendrá una gráfica en color verde superpuesta a la anterior.

Observando esta gráfica, complete: Dominio de f '(x) = ……………………

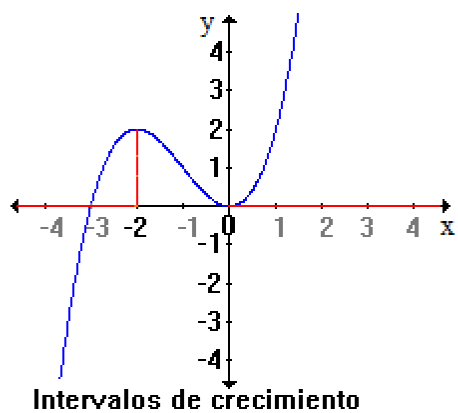
La función derivada se hace cero en x = …… y no existe en x = ……



k) Compare las dos gráficas. Considerando los intervalos que determinan los puntos críticos, complete el siguiente cuadro indicando el signo de la derivada primera y si en cada intervalo la función es creciente o decreciente:

Intervalo	Signo de f '(x) *(gráfica verde)*	Comportamiento de f(x) *(gráfica azul)*
(……, ….)		
(……, ….)		
(……, ….)		

Seleccionando Intervalos de crecimiento e Intervalos de decrecimiento. Se observa una línea roja sobre el eje de las abscisas que indica dónde la función es creciente o decreciente según sea el caso, quedando determinados además los extremos de los intervalos.



Por lo tanto, de acuerdo al signo de la derivada primera, puede concluir sobre el crecimiento de la función que:

Si la derivada de una función es …………… en un intervalo, la función dada es …………………… en dicho intervalo.

Si la derivada de una función es …………… en un intervalo, la función dada es …………………… en dicho intervalo.

l) Determine los máximos y/o mínimos relativos.

Mínimo: y = ……… en x = ……….. ⇒ Mínimo relativo (……, ……)

Máximo: y = ……… en x = ……….. ⇒ Máximo relativo (……, ……)

Seleccione las opciones Máximos y Mínimos del menú para controlar su respuesta.

m) Calcule f ''(x) = …………………….

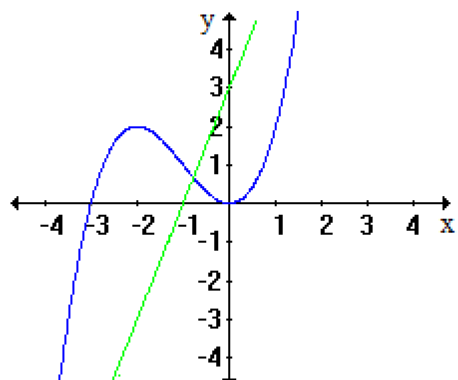
n) Grafique la segunda derivada de la función.

Seleccione Segunda derivada y obtendrá una gráfica en color verde superpuesta al de la función dada.

Complete:

Dominio de f ''(x) = …………………….

La segunda derivada se hace cero en x = …… y no existe en x = ………..



Función derivada segunda

o) Compare las dos gráficas. Considerando los intervalos que determinan los posibles puntos de inflexión, complete el siguiente cuadro indicando el signo de la derivada segunda y si en cada intervalo la gráfica de la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo:

Intervalo	Signo de f ''(x) *(gráfica verde)*	Comportamiento de f(x) *(gráfica azul)*
(……, ….)		
(……, ….)		

Seleccione Intervalos de concavidad (para la concavidad hacia arriba) e Intervalos de convexidad (para la concavidad hacia abajo).

Por lo tanto, de acuerdo al signo de la derivada segunda, puede concluir sobre la concavidad de la gráfica que:

Si la derivada segunda de una función es ………… en un intervalo, la gráfica de la función dada es ……………………….. en dicho intervalo.

Si la derivada segunda de una función es ………… en un intervalo, la gráfica de la función dada es ……………………….. en dicho intervalo.

p) Indique los puntos de inflexión.

En x = ……… la gráfica de la función presenta un *punto de inflexión*.

Por lo tanto el punto de inflexión es (……, ……)

Seleccione Puntos de inflexión.

Reflexiones

La simple aplicación de estas actividades no es suficiente para alcanzar los beneficios deseados. Es preciso fomentar un cambio en la conciencia de los alumnos.

Consideramos sumamente importante transmitir nuestro interés por el progreso de los alumnos y el convencimiento de que un trabajo adecuado terminará produciendo buenos resultados, aún cuando inicialmente aparezcan dificultades.

Todas las estrategias didácticas que podamos utilizar deberían orientarse hacia el planteo de actividades que permitan obtener mejores resultados en el aprendizaje y crear un clima de actitudes positivas hacia la Matemática. Cuanto más amplias y complejas sean las relaciones que se establezcan, mayor será la capacidad de los alumnos de utilizarlas en situaciones cotidianas, en la construcción de nuevos significados y en el establecimiento de nuevas relaciones.

También, es necesario utilizar en forma coherente diferentes representaciones de los distintos conceptos que nos permita abordar los temas de manera más eficiente. Además, es importante hacer un uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan darle un significado concreto a las nociones matemáticas.

Al diseñar las actividades descriptas, la principal característica que quisimos impartirles para que jueguen un papel orientador e impulsador del trabajo de los alumnos, es que ellos puedan percibirlas como ayuda real, generadora de expectativas positivas.

Referencias bibliográficas

Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S., Hecklein, M. (2005). *El Cálculo Diferencial.* Santa Fe, Argentina: Centro de Publicaciones. Universidad Nacional del Litoral.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica : México. Traducción de: *Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol. 5* (1993).

Ferrari, M., Martínez, G. (2003). Construcción de funciones con calculadoras graficadoras. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16* (pp. 710-716). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME.

Moreno, L. (2002). Graficación de funciones. En *Memorias del Seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp. 110-140). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Sigalés, Carles (2004, septiembre). Formación universitaria y TIC: nuevos usos y nuevos roles. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC)*. Vol. 1, nº 1. Recuperado el 20 de febrero de 2005, de http://www.uoc.edu/rusc/1/index.html

EVALUACIÓN DE UN TEXTO INTERACTIVO PARA ENSEÑAR FUNCIONES

José Luis Díaz Gómez, Lina Morales Peral
Universidad de Sonora México
jdiaz@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Medio y Superior

Resumen. *En este artículo se presenta la evaluación de un texto interactivo sobre el concepto de función. Para la creación de este medio didáctico se retoman algunos aspectos de los textos tradicionales y las nuevas tecnologías bajo un esquema didáctico derivado de la teoría de aprendizaje de Jean Piaget y los registros semióticos de representación. El texto creado tiene el formato de un Archivo de Ayuda HTML de Windows, con todas las bondades que ofrece este tipo de documentos, ordenadas como un texto en capítulos y secciones con un índice, una sección de búsqueda y hasta un glosario. Por ser una página web es posible insertar en él sonido, animación, video, y programas en Java. La evaluación se realizó con estudiantes universitarios y se encuentra que a pesar de las bondades manifestadas por los estudiantes sobre el texto, los estudiantes prefieren estudiar con el maestro y el texto.*

Palabras clave: textos interactivos, función, didáctica, hipertexto

Introducción

Una parte importante en la educación en matemáticas es la redacción de libros de texto, y es conocido que en el medio educativo tradicional, para la enseñanza de las matemáticas, se utiliza con frecuencia el libro de texto. En el análisis de los libros de texto se han detectado los siguientes inconvenientes: (1) Los libros en general son escritos por investigadores en el medio matemático, los cuales cuentan con un buen fundamento teórico pero carecen de un fundamento didáctico para ilustrar los conceptos a enseñar y que además regule la redacción del texto. (2) Con frecuencia, se adoptan textos de matemáticas realizados por profesores para universidades extranjeras, lo cual trae consigo en la mayoría de las veces, que tanto el lenguaje utilizado, como los antecedentes matemáticos implícitos no sean los más adecuados para nuestras universidades. Así mismo los ejemplos utilizados carecen de un contexto atractivo y pierden sentido para los estudiantes de nuestro país.

El vertiginoso desarrollo tecnológico ha modificado substancialmente muchos de los objetivos de la educación matemática y la mayoría de los libros de texto no han podido asimilar este desarrollo.

El día de hoy somos testigos de una nueva forma de comunicación que ha cambiado la forma de enseñar y aprender: el lenguaje escrito-interactivo (hipertexto). Ahora bien, ¿qué es lo que podemos entender por hipertexto? Sin entrar en profundidades, sobre la definición a adoptar, creo que debemos de tener presente que como elemento claramente diferenciador de otros medios textuales y gráficos, los hipertextos se refieren a una organización no lineal y secuencial de la información, donde es el usuario el que decide el camino a seguir, y las relaciones a establecer entre los diferentes bloques informativos que se le ofrecen. En esta ponencia presentamos un ejemplo de un texto (hipertexto) interactivo sobre un tema de matemáticas llamado función y una evaluación del mismo realizada con estudiantes universitarios.

Los hipertextos

Con la digitalización de la información se está rompiendo con su tradicional estructura lineal. Al digitalizar la información ésta se hace discreta y, por lo tanto, compartible, manejable en partes y transportable. En nuevos soportes y espacios de la comunicación (pantallas y no papeles) se nos está abriendo una nueva era de la comunicación en la que una nueva palabra parece que puede curar los males del papel: la *interactividad* con el medio (Baeza, 1995). Ahora el receptor en función de sus intereses o necesidades, recorre la información presentada en el medio, puede interferir el mensaje y decidir en parte o totalmente lo que va a recibir. Al menos no de una manera tan rígida como en otros medios, tales como un libro de texto tradicional. No estamos obligados a seguir la linealidad narrativa del papel y su obligatoria jerarquía causal, sino que, en principio, podemos establecer nuestro itinerario. Un término nos simboliza estas posibilidades: *hipertexto*. Con las nuevas tecnologías de la comunicación, sea cual sea el tipo de información (textual, sonora o imágenes), la estructura y organización ya no es lineal sino hipertextual.

¿Y qué se consigue con todo esto? Con las nuevas posibilidades del hipertexto y en general con los multimedia, o mejor dicho, con una de sus características esenciales, la interactividad, se desarrolla uno de los factores esenciales de la enseñanza: el *aprendizaje*. El alumno deja de ser mero receptor pasivo de información a través de la tradicional clase magistral, y, transportando parte de las materias a los nuevos soportes, se le motiva fomentando su participación.

Sin embargo, como lo señala León (1996), los hipertextos, ni cualquier otro recurso educativo, mejoran por sí mismos el aprendizaje ni la instrucción. Por esto, una parte importante del texto que proponemos es un esquema didáctico derivado de la teoría de aprendizaje de Jean Piaget y los registros de representación

Modelo didáctico

En este proyecto se retoman algunos aspectos de los medios mencionados anteriormente para la creación de textos interactivos para la enseñanza de las matemáticas que combinan las actividades vía papel, lápiz, el uso de programas computacionales de matemáticas (applets), hipertexto y los textos tradicionales bajo un esquema didáctico derivado de la teoría de aprendizaje de Jean Piaget (Aebli, 1958; 1995) y los registros semióticos de representación (Duval, 1988; 1999)

El esquema didáctico, centrado en el aprendizaje de nociones o conceptos, asegura que el aprendizaje de un concepto, se consigue mediante la asimilación de las operaciones intelectuales que lo constituyen. Se tiene un arquetipo muy dinámico de la adquisición de un concepto, al traducirlo a operaciones intelectuales. Los conceptos, según esta teoría, se aprenden de un modo activo, esto es, a través de la actividad del sujeto, quien realiza las operaciones inherentes al concepto primero en forma efectiva (p. e. contextualizada, en casos particulares) y posteriormente estas acciones son interiorizadas, constituyendo las operaciones intelectuales y adquiriendo entonces la noción o el concepto.

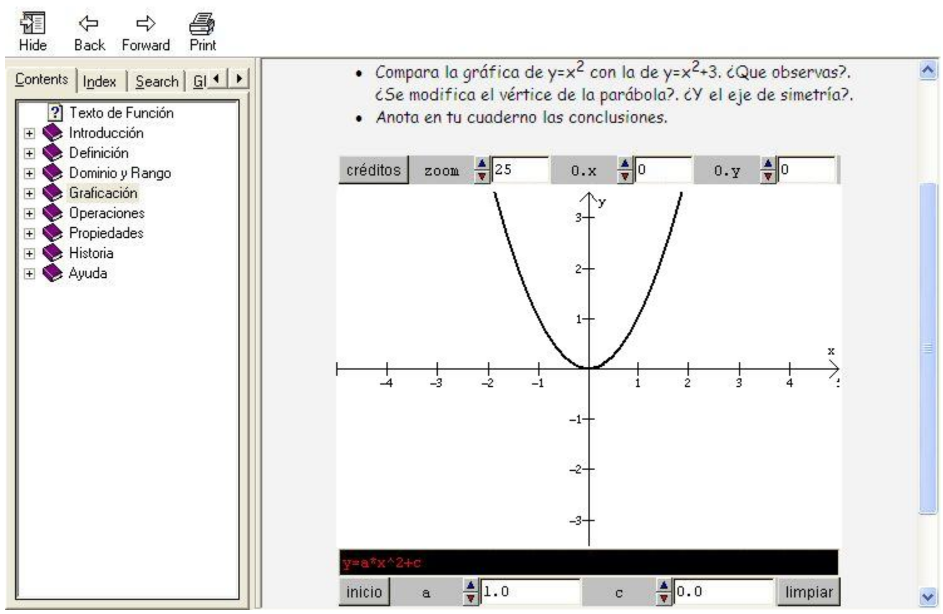
Desde el punto de vista didáctico, se propone entonces la enseñanza de un concepto, haciendo al alumno ejercitar ciertos prerrequisitos o componentes del mismo, primero en una dirección efectiva, esto es, en contextos particulares, orientado su actividad en una dirección y luego en la “opuesta” (inversa) y haciéndole combinar sus actividades, agrupando resultados parciales conducentes a un mismo fin, de distintos modos (asociando). Se propone sin duda una enseñanza activa.

El Texto Función

Habiendo mencionado algunos aspectos relevantes de nuestro marco teórico, hablaremos ahora de nuestro prototipo. El tema elegido para el prototipo es un tema central en la matemática como lo es el concepto de Función. Con este texto se trata de aprovechar las potencialidades propias de las microcomputadoras, entre las que destaca la posibilidad de interaccionar con el educando. Esto es, la ventaja, de ofrecer una presentación adaptable al usuario y no simplemente un texto fijo. Una de las características del texto es que el alumno lo puede manipular sin requerir experiencia previa en programación. Nuestra meta es diseñar el texto a prueba de errores, lo que permite que el alumno sea un usuario en el sentido más pobre de la acepción.

Ahora bien, el material que se pretende desarrollar no contempla la posibilidad de ser autocontenido, es decir, que el curso del texto se desarrolle sin el auxilio del profesor. Con esto quiero decir que no pretendemos sustituir al profesor por el texto. Sin embargo, no debe entenderse el auxilio del profesor en el sentido que se requiere su ayuda cuando el alumno está interactuando el alumno con el texto educativo.

El texto creado tiene el formato de un Archivo de Ayuda HTML de Windows. Este tipo de archivos consiste en páginas web con formato html, con todas las bondades que ofrece este tipo de documentos (hipertexto, animación, color, sonido, etc.), ordenadas como un texto en capítulos y secciones con un índice, una sección de búsqueda y hasta un glosario. Por ser una página web es posible insertar en él sonido, animación, video, y programas en Java o JavaScript. Son altamente comprimidos y no se requiere estar conectado a la red para trabajar con ellos. Sólo se requiere el sistema Windows 98 o posteriores, con capacidad de manejar programas en java y 812 KB de memoria.



La Evaluación

Para llevar a cabo la evaluación del texto función se eligió un grupo de estudiantes universitarios que cursaban por segunda ocasión el curso de Cálculo Diferencial e Integral. Esto aseguraba que los estudiantes conocían el tema y estaban en condiciones de emitir una opinión sobre el mismo. La muestra fue de 20 estudiantes.

Entre los objetivos que se buscaba con la implementación del texto, sin mencionar aquí los cognitivos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, era la de evaluar la presentación del texto, la dificultad de la lectura, de los problemas y actividades resueltas y planteadas. Si este realmente es interactivo, e interesante.

La implementación se llevó a cabo de la siguiente manera:

1. Se seleccionaron los siguientes temas del texto: (a) Dominio y Rango; (b) Graficación; (c) Operaciones y; (d) Propiedades.
2. Se les proporcionó una copia del Texto a cada estudiante.
3. Se conocía que cada estudiante tenía acceso a una computadora.
4. No se conocía cual era su nivel de conocimiento sobre el manejo de software y de la computadora.
5. Se les dio una única clase de 50 minutos sobre el manejo global del texto interactivo.
6. Se les pidió que trabajarán con el texto solo o acompañado de otro estudiante.
7. Se les dio tres días para estudiar cada tema y al cuarto se aplicaba un examen del tema y al día siguiente se aplicaba una encuesta de evaluación sobre el tema examinado.
8. La calificación del tema de funciones sería el promedio de las calificaciones de los cuatro temas seleccionados. Esta calificación sería parte de su calificación final del curso de Cálculo.

A continuación se muestra un formato de la encuesta de evaluación y el porcentaje global obtenido en cada pregunta de las cuatro evaluaciones. El formato fue el mismo, el único cambio que se le hace aquí es que se cambió el nombre del tema por la palabra *TEMA*.

Encuesta sobre los Temas

Nombre____Fecha:_________

Marca con una X en el cuadro, la respuesta que te parezca más indicada:

1. Del TEMA conocías:

0% nada 30% poco *61% algo* 9% mucho.

2. Las lecciones sobre el TEMA te parecieron:

0% aburridas 15% poco interesantes *67% interesantes* 18% muy interesantes

3. La redacción de las lecciones del texto sobre el TEMA te pareció:

0% difícil de leer 9% más o menos fácil 40% fácil de leer *51% muy fácil de leer*

4. Los ejercicios resueltos en el texto sobre el TEMA te parecieron:

0% aburridos 20% poco interesantes *63% interesantes* 17% muy interesantes

5. Las actividades propuestas para hacer con los programas del TEMA te parecieron:

6% aburridos 14% poco interesantes *52% interesantes* 28% muy interesantes

6. En cuanto a dificultad las actividades del TEMA te parecieron:

0% muy difíciles 3% difíciles 6% regulares *64% fáciles* 27% muy fáciles

7. Con las lecciones del texto aprendiste sobre el TEMA:

4% nada 21% poco *54% algo* 21% mucho.

8. Asígnale una calificación a cada una de las siguientes consideraciones sobre el Texto del TEMA que te ayudaron a aprender: (de 0 más bajo a 5 más alto):

Porcentaje de valor 5 y 4	*Característica*	*Porcentaje de valor 5 y 4*	*Característica*
82	Es dinámico	78	Explicaciones claras
84	Se refuerza lo aprendido	84	Mayor profundidad en el tema
75	Los ejercicios resueltos	88	Las actividades con las graficas
93	*Es ilustrativo*	*92*	*Es interactivo*
78	Estudio a la hora que puedo		

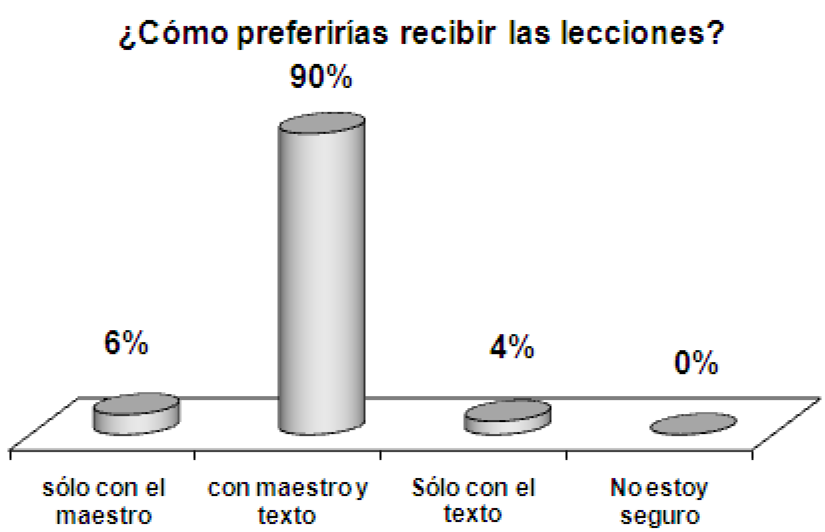
9. Preferirías recibir la lección del TEMA (marca con una X tu elección):

6% Sólo con el maestro (sin el texto interactivo)

90% Con el maestro y el texto interactivo.

4% Sólo con el texto interactivo (sin maestro)

0% No estoy seguro.



Conclusión

En este artículo se ha presentado un modelo de un texto interactivo al que se le ha llamado, Texto: Función(x), cuyo objetivo es el de enseñar el concepto de función. Con el 1033 se intenta utilizar las nuevas tecnologías para enriquecer los contenidos docentes, bajo un marco teórico bien definido.

Es claro que el programa no tiene la espectacularidad de una aplicación desarrollada por profesionales del área de la computación, aunque a menudo estos adolecen, en muchos casos por la falta de rigor o adecuación a los contenidos escolares, además se dirigen siempre a un público mayoritario quedándose, por tanto, prácticamente en los conceptos elementales. Una de las ideas que hay detrás de la elaboración de estos textos es el de plasmar en ellos la experiencia adquirida por los profesores a través de enseñar por muchos años estos temas.

Los resultados de la evaluación nos muestran que el texto fue aceptado por los estudiantes. A cerca del 70% de los estudiantes las lecciones, las actividades, las calificaron como interesantes y no difíciles.

Por otro lado nos muestra que el 70% sabían algo del tema y que el 75 aprendió algo más del tema. Que en realidad es interactivo, pero que prefieren tomar las lecciones con el texto conjuntamente que con el maestro.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Buenos, Aires: Ed. Kapelusz S. A.

Aebli, H. (1995). *Doce formas de enseñanza; Una didáctica basada en la psicología*. 2a. Edición. Madrid, España: Narcea S. S. de Ediciones.

Baeza, L. (1995). *Elaboración de documentos hipertextuales. Reflexión sobre experiencias y retos.* En Salinas, J. et al. (1995). Edutec Redes de comunicación, redes de aprendizaje. Universitat de les Illes Balears. http://www.uib.es/depart/gte/baeza.html.

Correa P. Ana, D. Y Area M. M. (1992): ¿Qué opinan los profesores de E. G. sobre el uso del libro de texto en las escuelas? *Qurriculum: Revista de teoría, investigación y práctica educativa, ISSN 1130-5371, No. 4,* pp. 101-106.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales*, Trad. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Duval, R., (1988). *Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Francia, pp. 235 - 253.*

León, J. A. (1998): "La adquisición de conocimientos a través del material escrito: texto tradicional y sistema de hipertexto", en León, J.A. y Vizcarro, C. (Eds.): *Nuevas tecnologías para el aprendizaje.* Madrid, España. Ediciones Pirámide.

DISEÑO DE ACTIVIDADES DE MATEMÁTICAS CON EL USO DE TECNOLOGÍA

Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa, Jorge Tuyub Moreno
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán México
smoguel@uady.mx, alanda@uady.mx, nuevogeo@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Medio

Resumen. *La presencia de las nuevas tecnologías de información y comunicación en prácticamente todos sectores sociales, ha despertado el interés de diversos investigadores en matemática educativa por generar entendimiento respecto al papel que estas tendrían o tienen en la educación matemática. En este sentido, nos hemos dado a la tarea de indagar y reportar en este escrito, algunas consideraciones de corte didáctico que un profesor interesado en incorporar el uso de la computadora en su práctica docente, debe tener presente si su deseo es promover el desarrollo del pensamiento matemático entre sus educandos.*

Palabras clave: Diseño de actividades, aprendizaje, tecnología, formación de profesores

Introducción

Se vive hoy día un intenso desarrollo científico y tecnológico, se puede decir que las llamadas tecnologías de la información (TICS) son parte de nuestra cultura y educación, y su desarrollo de poco en poco ha impregnado nuestros estilos de vida. Sobre su incidencia en la educación matemática, la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) declara que el currículo de matemáticas debe incorporar la tecnología educativa en pro de un aprendizaje más efectivo y el desarrollo de habilidades por parte del estudiante.

Para la mayoría de los profesionales de la educación, es claro que la tecnología debe ser considerada como un recurso imprescindible en los procesos instruccionales de las ciencias, en particular, de matemáticas. Empero, la incorporación de la tecnología en el currículo conlleva la reformulación de objetivos, contenidos, modificación de roles del profesorado y de los estudiantes, cambios en la metodología de enseñanza y formas de evaluación de los aprendizajes. En palabras simples, se requiere de un rediseño del currículo escolar en el que la tecnología sea constituyente del proceso educativo.

Al respecto, diversos expertos en materia de tecnología educativa, han generado una cantidad considerable de propuestas sobre la incorporación de las TICS en el ámbito escolar, quizás entre las más ampliamente aceptadas y compartidas, esté la de considerarlas como medios para lograr aprendizajes y desarrollar formas de pensamiento entre los educandos. En esta dirección un grupo de profesores que conformamos el Departamento de Matemática Educativa en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México, nos hemos dado a la tarea de investigar, diseñar e implementar una serie de propuestas didácticas que incorporan el uso de diversas herramientas computacionales (Cabri-Géomètre, Excel, Sketchpad, entre otros) en cursos de capacitación matemática-tecnológica para profesores en servicio de los niveles educativos, básico y medio.

Las actividades implementadas con profesores de nivel medio, presentan dos características básicas, por una parte, se consideran a la TICS como recursos que favorecen un aprendizaje visual al tiempo que permiten establecer dialécticas. Por otra parte, se considera coadyuvan en una "óptima economía" de los tiempos didácticos establecidos en los programas educativos y promueven la figura del profesor como facilitador o guía de los aprendizajes.

Taller de actividades didácticas con computadora

El taller presentado durante la vigésimo primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Relme 21, es el producto de nuestras experiencias en la investigación y formación de profesores de matemáticas. Con dicho taller se buscó ofrecer a los profesores participantes, una base conceptual sobre la cual pudieran orientar sus propios diseños de actividades de aprendizaje matemático con el uso de la computadora. Entre las características de las actividades manejadas en el taller, se encuentran las de propiciar en los estudiantes, el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático tales como:

establecer conjeturas, hacer razonamientos lógicos, hacer inferencias; así como, promover el uso de elementos discursivos y gestuales para comunicar y generar argumentos.

La idea central consistió en tomar a las nociones matemáticas de variación y cambio que se abordan durante el estudio de los contenidos de geometría analítica y cálculo en el bachillerato, para discutir y enfatizar cómo el tipo de tratamiento escolar que le es conferido a tales contenidos, dejan de lado ciertos aspectos cognitivos y formas de trabajo en el aula que a la postre son necesarios para lograr mejores aprendizajes y habilidades entre los estudiantes. Cabe decir, que las actividades estuvieron conformadas por hojas de trabajo con instrucciones y preguntas para el participante y de aplicaciones de trabajo en software: hojas electrónicas de cálculo (Excel), Cabrí Geometer y Sketchpad.

La integración de diversas herramientas de estos programas de cómputo para manipular y construir tablas, funciones, gráficas, controles de número, entre otras, hacen posible diseñar actividades de corte didáctico que representen alternativas de aprendizaje para los estudiantes. Esto es, les posibiliten llevar a cabo procesos de experimentación y de análisis de situaciones diversas para establecer propiedades y características de los objetos matemáticos de estudio. Al respecto, Cuevas y Martínez (2005) opinan, como diversos investigadores, que mediante el uso de la computadora es factible lograr que los estudiantes investiguen y construyan ideas matemáticas.

Nuestra propuesta consiste en considerar y utilizar la tecnología como un recurso para promover formas de construcción de conocimiento, y no como el objeto de enseñanza en sí, fomentando interactuar con la computadora a partir de actividades matemáticas específicas.

Algunas consideraciones para el diseño de actividades didácticas

Según Duval (1999), las representaciones de los objetos matemáticos no sólo cumplen el papel de informar o representar, y la posibilidad de realizar manipulaciones sintácticas, sino también juegan un papel importante en el desarrollo del pensamiento matemático y en los procesos de construcción de conocimiento. Así, la habilidad manifiesta de las personas para transitar de un registro de representación a otro, da cuenta de la existencia de una actividad cognitiva llamada conversión, que a su vez refleja cierto grado de dominio y aprendizaje del estudiante sobre el concepto representado. De modo que, entre nuestras consideraciones para el diseño de actividades, está el que no basta representar o hacer visible un concepto matemático con el uso de la tecnología, sino que se hace necesario plantear la exigencia de procesos de codificación y decodificación por parte de quienes participan en la actividad matemática. Por tanto, el papel de la tecnología en los procesos de generación de aprendizajes matemáticos, va más allá de una simple representación y manipulación de "objetos", es un recurso que permite reorganizar la estructura conceptual de los estudiantes respecto a los conceptos tratados.

En la figura 1 presentamos un esquema que sintetiza lo expuesto hasta el momento.

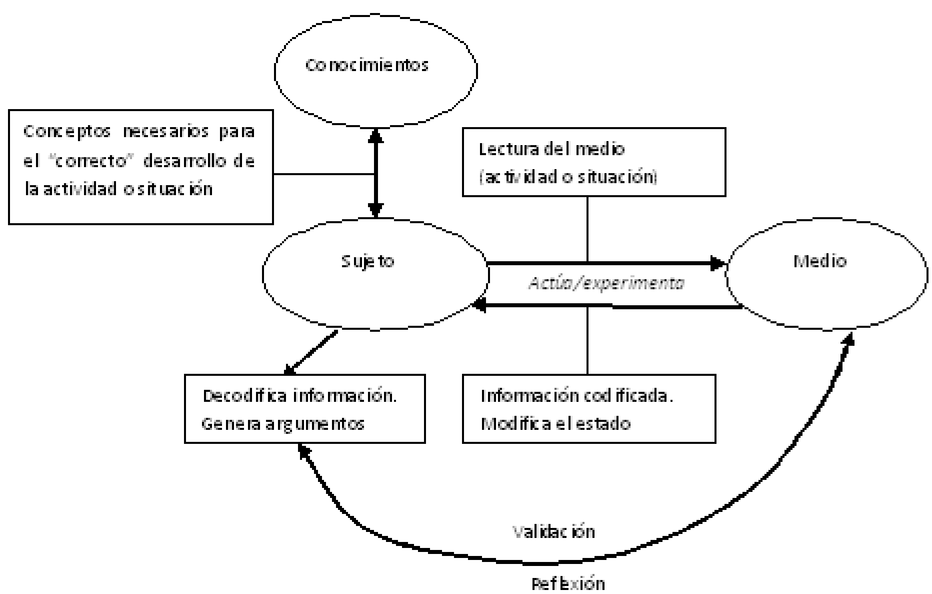


Figura 1. Elementos y su interacción para el diseño de actividades matemáticas con tecnología

A continuación mostramos tres actividades trabajadas durante el taller en la Relme 21.

En la primera actividad, ver figura 2, se trataron aspectos relacionados al estudio y tratamiento de la amplitud y periodo de funciones trigonométricas. La idea es que los participantes manipulen los botones de control de la hoja electrónica para analizar las transformaciones que sufre la gráfica de la función y = *a*cos(*bx*) al modificar los parámetros, *a* y *b*, y conjeturar cómo determinar la amplitud y el periodo de la función para hacer un bosquejo de su gráfica cuando solo se conoce la fórmula que la representa.

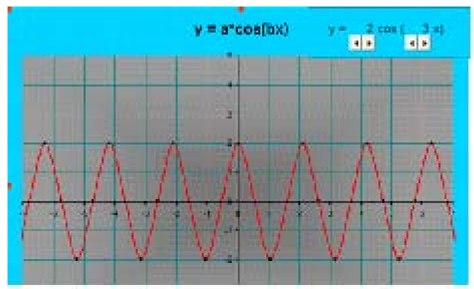


Figura 2. Actividad: “Amplitud y periodo de la función $y = a\cos(bx)$”

Los participantes logran argumentar sobre su conjetura mediante explicaciones referentes al comportamiento de la gráfica que involucran un estudio global y puntual de la misma, describir el efecto que cada parámetro tiene sobre la gráfica, identificar patrones de comportamiento, relaciones y realizar generalizaciones.

En la segunda actividad, ver figura 3, se trataron aspectos relacionados con la pendiente de una recta partiendo de una situación de razón de cambio, en la que se requería cuantificar el rendimiento de combustible de un auto con base en el registro del combustible suministrado y la distancia recorrida a una velocidad constante. La idea es que los participantes varíen los valores de la tabla de registro en una hoja electrónica de cálculo y describan, tanto cuantitativa como cualitativamente, la variación en la distancia recorrida según los litros de combustible suministrados al auto.

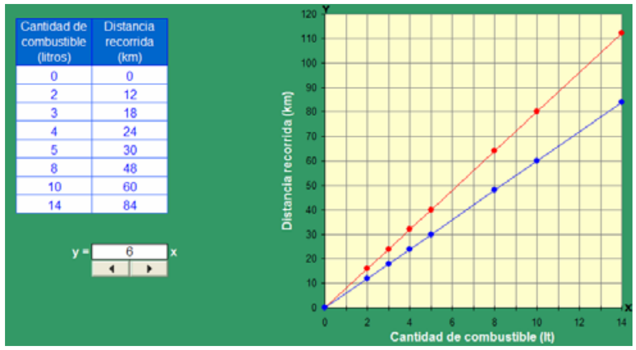


Figura 3. Actividad: “Pendiente de una recta”

Al cambiar los valores de la tabla, se modificaba de manera sincrónica la gráfica que representaba los pares ordenados de puntos cuyas componentes indicaban, la cantidad de combustible y la distancia recorrida, respectivamente. Posteriormente, se les solicitó a los participantes modificaran el botón de control correspondiente a la pendiente de la recta para argumentar sobre la variación cuando se tenían dos automóviles con rendimientos distintos. Dicha situación podía ser analizada a partir de las gráficas que se generaban, ver Figura 3. A su vez, en la situación planteada en esta actividad se exploran aspectos que permiten forjar una estructura conceptual de la recta y el tipo de situaciones o fenómenos que con ésta se modelan. Esto es, involucra las nociones de recta como sucesión o conjunto de puntos, como lugar geométrico y como modelo de situaciones cuyas variables se relacionan de manera directamente proporcional, mediante una razón constante.

Los participantes pudieron dar explicaciones con respecto a la pendiente de una recta, relacionando su inclinación con el rendimiento de combustible, tuvieron lugar argumentaciones de los participantes en las que describían la inclinación de las rectas según aumentaba o disminuía su pendiente, conforme variaba el rendimiento de combustible o con relación a la distancia recorrida. Por otro lado, describieron que características deben tener un conjunto de puntos para pertenecer o no a una recta y ejemplificar situaciones que pudieran representarse gráficamente con una recta.

En la tercera actividad, ver figura 4, se buscó introducir a los participantes en el estudio de la continuidad puntual, función continua en un punto. El aspecto central estuvo precisamente en que la pregunta realizada a los participantes no era sobre la propiedad de continuidad, sino sobre la posibilidad de asociar una función con tal o no propiedad, a lo que en la pantalla de su computadora se estaba representando. Por nuestra experiencia, esperábamos que esto llevara a los participantes a discurrir sobre las nociones de continuidad y discontinuidad de una función. Así pues, se planteó la siguiente pregunta: *¿Existirá una función real de variable real asociada a la representación que mira en la pantalla de su computadora? Explique*.

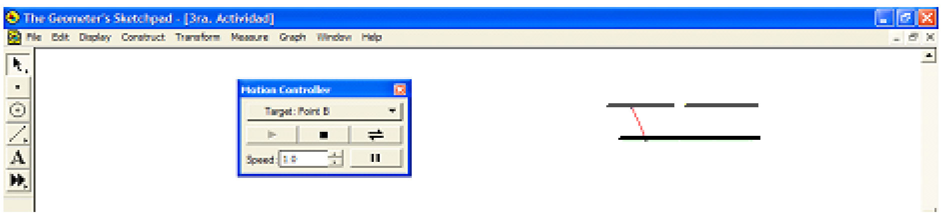


Figura 4. Actividad: "Discontinuidad"

Cabe decir que previo a la actividad en la computadora, se preparó a los participantes para poder realizar una lectura adecuada de la situación. En esta actividad los participantes logran con relativo éxito, dar una respuesta satisfactoria apoyándose en argumentos de tipo gestual, nociones físicas y matemáticas. Por ejemplo, emplean expresiones lingüísticas tales como: velocidad, perpendicularidad, hueco y las acompañan con expresiones gestuales como el desplazar las palmas de un lado a otro, cerrar los puños para reasentar los puntos que se mueven sobre la pantalla.

Consideraciones didácticas para la implementación de actividades con tecnología

Las actividades representan "situaciones didácticas" en cuyo diseño se consideró conjugar aspectos tales como: dotar de sentido y significados a los objetos de estudio y a la actividad del participante, favorecer la acción de visualizar y transformar una representación de un registro a otro mediante el uso de tecnología computacional.

Concretamente, se elaboraron aplicaciones en computadora que incitaran a los participantes a organizar su actividad de resolución del problema planteado, formular conjeturas o resultados y comunicarlos, así como generar argumentos o pruebas que respaldasen sus afirmaciones. Es decir, se integró la tecnología para el desarrollo de las fases a-didácticas de acción, formulación y validación (Brousseau, 1997), respectivamente, en las actividades propuestas.

Con base en la experimentación de las actividades con el uso de la computadora y tomando en cuenta las fases que propone Llinares (1994) para la organización de actividades en el aula, se pudo obtener orientaciones para llevar a las aulas nuestro trabajo de investigación, identificando algunas consideraciones para la implementación de actividades con tecnología por parte de los profesores, las cuales sintetizamos en las siguientes fases:

i) *Experimentación*. El alumno interactuará con la computadora a través de las actividades elaboradas, es decir, visualizará, experimentará y manipulará la computadora a merced de las tareas a realizar y cuestiones que se le presenten, para establecer una conjetura o resolver un problema.

ii) *Argumentación*. En esta fase los alumnos se integran en una discusión y debate que les permite articular y defender posiciones sobre cuestiones problemáticas, evaluar alternativas, sugerir soluciones o comprobar las explicaciones o conjeturas. Se espera que los estudiantes evoquen distintas formas de argumentación: simbólica, discursiva contextual (mayor o menor velocidad, comparación de magnitudes), gestuales, etc. describiendo el comportamiento de una gráfica u otra.

iii) *Validación*. Los estudiantes articularán de manera sistemática los resultados de sus exploraciones, conocimientos matemáticos previos, ideas generadas a través de la discusión, argumentaciones y acciones realizadas anteriormente, para dar una prueba formal de su conjetura o solución propuesta.

iv) *Reflexión***.** Profesor y alumnos, realizarán una síntesis, reflexión y evaluación de lo realizado hasta este momento para poder explicitar el tipo de información que se está manejando y su idoneidad en relación al objetivo general planteado por la actividad propuesta, con el fin de consensuar un resultado sobre algún aspecto de un concepto o proceso matemático.

Reflexiones finales

Tras un análisis de los resultados obtenidos en diversas aplicaciones que hemos realizado de un conjunto de actividades matemáticas relativas a los conceptos elementales de geometría analítica y cálculo, y de las experiencias de discusión de las mismas con profesores y estudiantes que han participado en nuestro taller, consideramos que es importante ubicar al estudiante en dónde lo que tenga sentido no sea propiamente el contenido temático sino la actividad misma. Es decir, le atribuimos a la actividad un papel protagónico por sobre los contenidos y el tipo de herramienta tecnológica a emplear. Luego entonces, el centro de atención en el diseño de actividades estará en el tipo de relaciones que es posible establecer entre el individuo y la tecnología, a la luz de una actividad matemática específica.

Finalmente, diremos que las actividades diseñadas con apoyo de la tecnología computacional en las áreas de geometría analítica y cálculo, deben ante todo: promover procesos de visualización matemática; contextualizar las propiedades de los conceptos matemáticos; favorecer la exploración y experimentación, permitir el establecer conjeturas, realizar inferencias, generar argumentos lógicos.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 7-30.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfiel, V., Trads.). Gran Bretaña: Kluwer Academic Publishers. (Trabajo original publicado en 1990).

Cuevas, C., Martínez, M. (2005). Algunos usos de la computadora en el aula. En Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, J. (Eds.), Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18(1)*, 733-739.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombi: Peter Lang, S. A. Editions scientifiques européennes.

Llinares, S. (1994). La enseñanza de las matemáticas. Perspectivas, tareas y organización de la actividad. En Santaló, et al (Eds). *La enseñanza de las matemáticas en educación intermedia* (pp. 275-295). Madrid, España: Rialp.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). The Use of Technology in the Learning and Teaching of Mathematics. Obtenido en enero, 10 de 2006 de http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=6360&itemid=6360&linkidentifier=id

MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO EN UN AMBIENTE TECNOLÓGICO: UNA CATEGORÍA DE MODELACIÓN-GRAFICACIÓN PARA EL CÁLCULO

Liliana Suárez Téllez, Francisco Cordero Osorio
CINVESTAV-IPN México
lsuarez@cinvestav.mx
Campo de investigación: Modelación matemática, Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El resultado de esta investigación es el planteamiento de una epistemología para la modelación escolar caracterizada a través de un uso de las gráficas. Esta epistemología está conformada por dos aspectos de construcción social de conocimiento, el funcionamiento, es decir, aquellas circunstancias relacionadas con el uso y la modelación, que hacen de un conocimiento útil para resolver un problema o para integrar una teoría y la forma, es decir, las clases de tareas que quedan determinadas por el funcionamiento pero también determinan nuevas formas y funcionamientos.*

Palabras clave: modelación, movimiento, modelación-graficación, socioepistemología

Introducción

La Matemática Educativa como escuela de pensamiento requiere de la conformación de grupos de investigación que crucen las fronteras de instituciones y países. En este escrito reportamos las conclusiones de uno de los proyectos de la líneas de Modelación y Tecnología (MyT) que forma parte un programa de investigación en el que participan profesores e investigadores de Argentina, Chile y México y tiene tres ámbitos de reflexión: lo epistemológico, lo científico y lo social (MENS, 2006). La línea de MyT toma como uno de sus marcos de referencia a la categoría de modelación-graficación discutida en Cordero (2006a) y desarrollada por Suárez (2006) para la modelación del movimiento en un ambiente tecnológico. Los antecedentes de nuestro proyecto están conformados por un Estado del Conocimiento de la modelación y la graficación como objetos de estudio dentro de la Matemática Educativa. La modelación se ha estudiado en su relación con la variedad de representaciones 'más accesibles' y que ayuda a la comprensión de los conceptos matemáticos (Molyneux-Hodgson et al, 1999). Es nuestra investigación se avanza hacia considerarla como una herramienta que transforma tanto la matemática como el fenómeno que estudia (como lo considera Arrieta, 2003). La graficación se ha investigado en relación con el estudio de las funciones (Leinhardt et al, 1990). Nuestra investigación estudia el 'uso de las gráficas' que resignifica la variación en fenómenos de cambio.

La investigación

Desde una perspectiva socioepistemológica se formula un marco de referencia que dé cuenta de la articulación de las características de la modelación y de la graficación para la construcción de las ideas del cambio y la variación. Este marco está centrado en las características que se identifican en el estudio epistemológico como aquellas que permitan la constitución social de tales conceptos, "en 'aquello' que hace que el conocimiento sea así y no de otra manera. El 'aquello' es de naturaleza social que reconoce al grupo humano con su organización, su historia, su cultura y su institución que lo lleva a proceder de una manera y no de otra, es su *práctica social* generatriz de su conocimiento" (Flores, 2005).

Marco Teórico

La aproximación socioepistemológica consiste en el estudio sistémico del uso del conocimiento matemático en situaciones específicas. Se reconoce una distinción entre el funcionamiento de una actividad matemática, la que realizan los matemáticos en su carácter de constructores de conocimiento matemático en su comunidad, y la actividad humana, la que realiza una persona haciendo uso de conocimiento matemático para responder preguntas de su vida diaria o profesional. Podemos ver que la primera está incluida en la segunda, sin embargo delimitamos la naturaleza de la primera ya que está dada no sólo por la naturaleza misma del conocimiento sino por el conjunto de aspectos que norman el quehacer de un matemático en su vida profesional. De tal manera, en la actividad humana no se asignan objetos matemáticos a una realidad separada sino que dependen del contexto en el que se presente. La distinción entre actividad humana y actividad matemática desplaza la centración en los conceptos como la parte central de la construcción de conocimiento matemática hacia las actividades que implicar hacer de las matemáticas una herramienta para modelar. Se concluye la búsqueda de esas categorías basadas en estudios de uso. Los elementos para el diseño de las acciones didácticas tiene como núcleo la construcción de un marco epistemológico del conocimiento matemático que se llamará *epistemología* del contenido en cuestión (Cordero, 2001). La construcción de este marco será a través de las explicaciones que se logren del funcionamiento y la forma (Cordero y Flores, 2007) del conocimiento asociado al concepto matemático en cuestión. Este marco está compuesto de significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos. Esta mirada socioepistemológica da elementos para formular un nuevo estatus para la modelación y para la graficación, un estatus que las orienta como generadoras de conocimiento más que como habilidades o actividades. De esta forma proponemos una *categoría de modelación-graficación* que manifiesta la resignificación de la variación en situaciones de modelación del movimiento.

La Socioepistemología de la Modelación Graficación

El estudio de la Obra de Oresme (1379) sobre la figuración de las cualidades proporciona una explicación de transformación de uso de las matemáticas de la época para abordar la problemática de las situaciones de cambio y variación, esta transformación, caracterizada en este trabajo a partir del debate entre el funcionamiento y la forma del uso de las figuras geométricas, aporta los principales elementos de la hipótesis epistemológica sobre el uso de las gráficas en situaciones de modelación del movimiento para resignificar el cambio y la variación y que se describen a continuación:

- Datos epistemológicos, es decir aspectos propios del conocimiento que dan información sobre el uso del conocimiento matemático referido a las formas geométricas y de proporciones para obtener una funcionalidad en situaciones de variación.
- Una génesis del uso de gráficas para modelar situaciones de variación y cambio, en particular para modelar el movimiento (M-M).
- Una articulación de los datos epistemológicos (DE) aportados en el estudio del uso de las gráficas en el Tratado de Oresme con los aspectos distintivos del binomio modelación–graficación que, como se ha mencionado en el capítulo anterior, es una manifestación del uso de las gráficas en la construcción de ideas del Cálculo y el Análisis.

La articulación de estos resultados conforma una epistemología para la modelación escolar que está anclada en las gráficas, que se llamará una *socioepistemología de la modelación-graficación S(M-G),* y que proporciona un marco de referencia para que los estudiantes resignifiquen sus conocimientos matemáticos.

Metodología

La información que permite dar cuenta del problema de investigación se obtiene mediante un diseño de investigación con orientación cualitativa en una experiencia de laboratorio con una fuerte base epistemológica. De la confrontación entre las hipótesis de construcción específicas a partir de la Categoría Modelación-Graficación, C(M-G), y el desempeño de los estudiantes en una Situación de Modelación del Movimiento, SMM, se obtiene la caracterización del uso de las gráficas en la modelación que proporciona elementos para una reorganización en la matemática escolar de las ideas del cambio y la variación.

Diseño de una Situación de Modelación del Movimiento

En el Diseño de la SMM entran en juego el conjunto de elementos que conforman la Socioepistemología Modelación-Graficación de la siguiente manera. Por un lado, 1) la situación establecerá como condición el uso de las gráficas para estudiar un fenómeno de variación, de tal manera que sea propensa a generar, por parte del estudiante y el profesor, un conjunto de preguntas sobre la cantidad o calidad de una variable con respecto al tiempo, esta variable será, principalmente la distancia de un móvil a un punto fijo de referencia, pero se pueden usar en otras variables físicas, 2) la situación será susceptible a simularse mediante una toma de datos de la variable en diversos instantes de tiempo generando por parte del estudiante múltiples realizaciones, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo en el razonamiento, 3) en el Diseño de Situación de una Situación de Modelación del Movimiento se espera encontrar la construcción de argumentos relacionados con el funcionamiento de la modelación de la variación, se espera que los estudiantes realicen una reorganización de sus conocimientos para establecer una nueva forma del uso de las gráficas para la realización de estas tareas y, también se espera, que los estudiantes hagan funcionales algunos de los argumentos construidos. Es por eso que, para fines de análisis del D (SMM) se identifican tres momentos, que por lo descrito anteriormente no se espera que aparezcan de forma secuencial.

Momento I. Forma (SMM-MI)

El propósito de este primer momento del diseño de situación de modelación del movimiento (SMM-MI) es establecer con el estudiante los elementos de forma de la gráfica que se usarán para describir la situación de modelación del movimiento. Es en este momento, SMM-M1, cuando los estudiantes toman decisiones explícitas o implícitas sobre algunos de los siguientes aspectos del sistema de ejes coordenados: la elección de las variables que intervienen en la situación, el cuadrante o los cuadrantes donde tendrá sentido la gráfica, Las unidades de medición de las variables, los valores máximos y mínimos para cada variable, la elección de un punto de referencia.

Momento II. Argumentación (SMM-MII)

Este segundo momento del diseño de situación de modelación del movimiento (SMM-M2) proporciona un espacio para que los estudiantes justifiquen la elección de las gráficas en realizadas en el SMM-M1. La justificación tendrá sentido en función de la relación que guarden las gráficas con la situación de movimiento planteada. Los estudiantes recurren a *procedimientos* donde ponen en juego los significados, establecen relaciones *proceso-objetos*, logrando construir los *argumentos* relacionados con el funcionamiento de una situación de modelación del movimiento. Algunos de estos procedimientos son: 1) Calcular la velocidad en los trazos rectos, 2) Calcular la velocidad promedio en algunos intervalos en los trazos curvos, 3) Estimar la pendiente de la curva, asociando la pendiente a la velocidad, 4) Encontrar una expresión algebraica para gráfica y derivarla analíticamente para, de esta manera dar cuenta de la velocidad. Los estudiantes establecerán las siguientes relaciones proceso-objetos: 1) La velocidad de una gráfica creciente es positiva, 2) La velocidad de una gráfica decreciente es negativa, 3) La velocidad de una recta será constante, 4) La velocidad de una gráfica creciente cóncava hacia arriba será decreciente, 5) La velocidad de una gráfica creciente cóncava hacia abajo será creciente, 6) La velocidad de una gráfica decreciente cóncava hacia arriba será decreciente y 7)La velocidad de una gráfica decreciente cóncava hacia abajo será creciente. La construcción de argumentos que se espera está relacionada con los elementos de funcionamiento: 1) La necesidad de 'comprender' fenómenos, 2) Relación entre figuras geométricas y cualidades de los fenómenos, 3) Distinción entre cantidad y calidad de movimiento, 4) Caracterización de los extremos a partir de la constancia de disminución de la variación en sus proximidades, 5) La suma continua para calcular la distancia como el área de la velocidad.

Momento III. Funcionamiento (SMM-MIII)

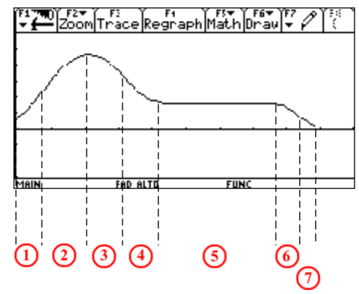
El propósito de este tercer momento es que el estudiante use los significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos descritos en los momentos anteriores. El estudiante pone en funcionamiento la construcción a través del uso de argumentos que incorporan significados, procedimientos y relaciones.

Análisis de datos

Tenemos evidencia de que los elementos de funcionamiento de la figuración de las cualidades surgen en una SMM al identificar las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad que los participantes logran establecer como *argumentos* para explicar la variación en una situación de cambio. Y tenemos evidencias de las formas de uso de las gráficas a partir de la caracterización de los *significados* y los *procedimientos* que los participantes ponen en juego al establecer las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad en una situación de cambio en los momentos del diseño de situación: donde establecen la forma, construyen los argumentos y los ponen en funcionamiento.

A modo de resumen la siguiente figura presenta una de las gráficas posibles de SMM.

En él, se han destacado aquellos intervalos donde se observan cambios en el crecimiento o concavidad o se transita desde un tipo de trazo curvo a uno recto o viceversa, sobre los cuales deberían focalizarse los argumentos de los estudiantes para el paso de una gráfica de posición a una gráfica de velocidad. La tabla siguiente contiene un resumen algunas de las evidencias encontradas que proporcionan los argumentos conducentes a la construcción del argumento global.



Se han destacado también aquellos intervalos mencionados en la gráfica anterior.

La velocidad de una gráfica de posición	*Algunas evidencias tomadas del trabajo de los estudiantes*
1. creciente es positiva	• *"Aquí ocurre una velocidad positiva y,…"*
2. decreciente es negativa	• *"…una velocidad negativa hacia acá…"* • *"La negativa es cuando regresa, la parte negativa está regresando,…"*
3. lineal será constante **(5)**	• *"…llega aquí y no hay velocidad…"*
4. creciente y cóncava hacia arriba (creciente y que crece) será creciente **(1)**	No existen evidencias explicitas para este caso
5. creciente y cóncava hacia abajo (creciente y que decrece) será decreciente **(2)**	• *"Esto significa que hay una disminución de la velocidad, entonces cuando va a dar la vuelta, hay una disminución,…"*
6. decreciente y cóncava hacia arriba (decreciente y que crece) será creciente **(4 y 7)**	• *"…Y si se conduce por donde va la parte roja, estamos considerando que va a acelerar…"* • *"…que cuando va llegando a su objetivo, voy disminuyendo mi velocidad,"*
7. decreciente y cóncava hacia abajo (decreciente y que decrece) será decreciente **(3 y 6)**	• *"…llega aquí y no hay velocidad, comienza nuevamente a caminar y hay otra velocidad."* • *"…cuando llego al final de esos 4 minutos vuelvo a meter velocidad poco a poco no de golpe."*

El análisis del trabajo de los estudiantes a través del contraste entre los análisis a priori y a posteriori se observa la existencia de los Momentos del Diseño de Situación.

Efectivamente, en el análisis que se encuentra en la ilustración anterior, un trazo de forma global incluye decisiones sobre la elección de las variables a representar por cada uno de los ejes coordenados, la elección de un punto de referencia, la elección de los cuadrantes y la percepción de aspectos característicos de la gráfica como puntos iniciales y finales, así como puntos extremos. A este momento se le caracteriza por *las tareas del establecimiento de la forma, MI-SMM.* Sin embargo, es la problematización sobre la variación a partir de la modelación-graficación lo que permiten observar la formulación de procedimientos y procedimientos que al intentar validar o justificarlos propicia que emerjan relaciones que se establecen como argumentos. Se notó una ausencia, la de funciones algebraicas para determinar la relación analítica que podría definir la situación de variación. A este momento se le caracteriza por *la construcción de argumentos, M2-SMM.* Las evidencias del momento de *funcionalidad, M3-SMM* se muestran en las ilustración donde se hacen explícitas las relaciones que los estudiantes logran establecer para las formas básicas de graficación.

Conclusiones

Una Situación de Modelación del Movimiento que se sustenta en la socioepistemología de Modelación-graficación, propicia una resignificación de la variación. Tenemos evidencia de la existencia de un 'uso de las gráficas' que está determinado por una problematización que promueve el interés por el estudio del cambio. Las gráficas de las funciones son herramientas para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración donde podrían intervenir conceptos como la razón de cambio, la relación de una función con su derivada, manejo simultáneo de dos o más órdenes de variación, máximos o mínimos o la acumulación de una función. Pero también, y más importante para las hipótesis de trabajo de nuestra investigación, las gráficas de las funciones son el conocimiento mismo que se desarrolla y que hoy aportan datos epistemológicos que propician nuevas hipótesis para trabajar la variación en la matemática escolar. Por un lado, tenemos explicaciones sobre cómo la graficación conforma elementos importantes de construcción para las ideas de la variación y que se desarrollan de manera independiente, en este caso anterior al desarrollo analítico del concepto de función. También tenemos explicaciones sobre un uso argumentativo ya que la gráfica pasa a ser un elemento central en explicaciones como el de la caracterización de los puntos extremos o en el establecimiento de la veracidad de relaciones físicas o numéricas conocidas.

Reconocimiento.

Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior. Clave: No. 47045.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del DME, Cinvestav–IPN.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 4, (2),* 103-128.

Cordero, F. (2006a). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *20, (1)*, 59-79.

Cordero, F. (2006b). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. 265-286.

Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 10, (1)*, 7-38.

Flores, R. (2005). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60, (1)*, 1–64.

MENS. (2006). Grupo de Matemática Educativa del Nivel Superior. Documento interno de trabajo. Magíster en Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas de la PUCV, Chile.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: the interaction of culture and practice. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 167-183.

Oresme, N. (1379). Tractatus de configurationibus qualitatum et motumm. En Clagett, M. (1968) Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Madison: University of Wisconsin Press.

Suárez, L. (2006) El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico para la modelación del cambio en un ambiente tecnológico. Memoria predoctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L., Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.* © ISSN 1850 - 6666 / NIECYT – UNICEN **(**Aceptado para su publicación).

UN LABORATORIO TECNOLÓGICO COMO SISTEMA DIDÁCTICO PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS[23]

Gabriela Buendía Abalos, Adriana Cordero Guadarrama
Centro De Investigación En Ciencia Aplicada Y Tecnología En Avanzada, IPN. México
Universidad Autónoma de Chiapas.
buendiag@hotmail.com, veyda07@hotmail.com
Campo de investigación: Tecnología Nivel: Medio

Resumen. *Presentamos una propuesta didáctica para utilizar la calculadora graficadora de una manera inteligente en el aula de matemáticas. Se propone en forma de prácticas de laboratorio a fin de favorecer la idea de un espacio para hacer matemáticas.*

Palabras clave: calculadora graficadora, prácticas sociales

Introducción

El laboratorio tecnológico como sistema didáctico para el aula de matemáticas se propone a través de la realización de un manual de prácticas en donde, como herramienta principal, se maneja el uso de la calculadora graficadora.

Dicho manual nos parece oportuno al cambio que se plantea en educación matemática en la reforma mexicana del año 2006 (SEP, 2006), en el que se plantea el uso de tecnología en la educación secundaria (12- 16 años de edad) con el objetivo de promover la creación de condiciones que hagan posible una actividad matemática verdaderamente autónoma y flexible. La actitud positiva hacia las matemáticas se establece como una meta prioritaria y ésta consiste en despertar y desarrollar en los alumnos la curiosidad y el interés por investigar y por resolver problemas, la creatividad para formular conjeturas, la flexibilidad para modificar su propio punto de vista y la autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones desconocidas. Hay, entonces, "que promover modelos de utilización que permitan nuevas formas de apropiación del conocimiento, en las que los alumnos sean

[23] Este trabajo recibió apoyo de las Fondos Mixtos del CONACYT (15018)

agentes activos de su propio aprendizaje, pongan de manifiesto sus concepciones y reflexionen sobre lo que aprendan" (p. 25 SEP, 2006 a).

En ese marco, la utilización de la tecnología se perfila ya no sólo como una realidad del aula del siglo XXI, sino como un medio que ofrece posibilidades didácticas y pedagógicas de gran alcance. El uso inteligente de la calculadora proporciona una estrategia educativa que fomenta la interacción, el desarrollo de habilidades cognitivas y visuales, así como un saber matemático articulado y significativo. Sin embargo, es importante decir que el instrumento tecnológico, no es lo que favorece una estrategia didáctica, sino más bien el uso que le demos a ese instrumento a través de diseños que en este caso, toman la forma de práctica.

En ellas, se favorece el desarrollo de habilidades como la visualización, predicción, modelación y, por otra parte, el desarrollo de ambientes de clase interactivo y comunicativo. Esto da la pauta a posibilitar la construcción de un conocimiento matemático de una manera mas completa y significativa, permitiéndole entre otras cosas, transitar entre diferentes contextos, como el algorítmico y el grafico.

Es importante recalcar que hay que evitar las tendencias a pensar que la tecnología puede sustituir al docente, que es un fin en sí misma o suponer que su sola presencia mejorará la calidad de la educación. En el libro del maestro de la Secretaría de Educación Pública (México) que se utilizaba se menciona que "contrariamente a lo que a veces se piensa, el uso de la calculadora ni vuelve dependientes a los alumnos, ni empobrece la enseñanza de las matemáticas. En cambio, bien utilizada puede enriquecer los contenidos del curso y aumentar las posibilidades de un aprendizaje significativo". (pag. 74; SEP, 1994).

Así, se menciona en el bloque correspondiente al 6º semestre (SEP, 2006) lo siguiente:

> ***Bloque III. El uso de la calculadora en el aula.***
>
> *En este bloque se pretende que los estudiantes normalistas reflexionen en torno a las ventajas que puede ofrecer la calculadora como una herramienta*

didáctica, y que cuenten con elementos que les permita optimizar el uso de este recurso tanto en beneficio propio como en su futuro quehacer docente.

3.1.- La calculadora como una herramienta didáctica.

3.2.- Tipos de calculadora.

3.3.- La calculadora y el estudio de algunas propiedades de los números y sus operaciones.

3.4.- Patrones numéricos y el estudio del algebra.

Propósitos

- *Que los estudiantes normalistas sepan utilizar la calculadora para resolver problemas.*
- *Que los estudiantes reconozcan las ventajas que puede aportar el uso adecuado de la calculadora para enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*
- *Que los estudiantes normalistas tengan los elementos que les permitan usar las calculadoras en su futuro.*

En este marco es que planteamos un laboratorio móvil de calculadoras que apoya lo realizado por el docente en el aula de matemáticas, y que promueve la motivación del alumno despertando el interés hacia temas de matemáticas.

Investigación en Matemática Educativa

Con respecto a las investigaciones realizadas por colegas en Matemática Educativa acerca del uso de la calculadora en el aula de matemáticas, Ferrari y Martínez (2003) realizaron una investigación con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. Los resultados que obtuvieron fueron de considerar a las calculadoras graficadoras como una *variable didáctica* para el diseño y puesta en escena de *ingenierías didácticas* para la construcción de funciones. Específicamente trabajaron con la construcción de polinomios de variable real a través de operaciones gráficas ya que investigaciones que han encontrado dan evidencia de que la utilización de calculadoras graficadoras ayudan a desarrollar una comprensión más global del concepto de función pues permiten visualizar sus gráficas y establecer relaciones entre éstas y expresiones algebraicas de las funciones correspondientes.

Las tareas que realizan se refieren a la variación de parámetros, completar binomios y trinomios para poder graficar y a operaciones elementales con funciones. La calculadora juega el papel de herramienta tecnológica que permite generar un universo gráfico rico en significados.

En el trabajo desarrollado por Apreza y Ramiro (2005) se señala que en algunas escuelas secundarias de la República Mexicana existen las denominadas aulas para la enseñanza de la matemática con tecnología, EMAT, y Secundarias para el Siglo XXI (Sec 21) en las que se demuestra que trabajando en este ambiente los alumnos activan diversos procesos cognitivos y metacognitivos .Los docentes transforman sus concepciones acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura y la escuela se organiza para promover el desarrollo de sus funciones sustantivas.

El propósito de esa investigación es elaborar el diseño de una situación didáctica en el tema de gráficas de funciones donde calculadora graficadora entra en juego para ser una de las herramientas principal en los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas.

Resulta notorio que una de las cuestiones que reportan estos investigadores es que con la utilización de la calculadora graficadora se rompe con las estructuras de monotonía en el docente. Consideramos que todos estos beneficios son para motivar el desarrollo y capacitación del docente, que en gran medida se ha quedado rezagado, cuando las nuevas generaciones vienen creciendo e interactuando con tecnología.

De forma general, pareciera que los investigadores están de acuerdo en que "*al introducir las calculadoras en el aprendizaje, se termina produciendo una nueva actividad que, a su vez, generará una re-organización en el conocimiento matemático de los alumnos. Un estudiante dotado de una calculadora graficadora tiene el potencial de desarrollar nuevos métodos, nuevas estrategias de graficación, sacando partido de las capacidades de procesamiento de graficación de su calculadora*" (Proyecto, 2006)

Nuestra propuesta es la de promover un laboratorio tecnológico que, a través de la calculadora, aborde temas matemáticos que son vistos en la educación secundaria (12-16 años de edad). Creemos que las prácticas que se están diseñando resultan también relevantes para todas aquellas personas que se interesan por el estudio de los conceptos matemáticos, como es el caso de la comunidad de matemáticos educativos.

El manual de prácticas utilizado en este taller involucra temas en donde se aborda el uso de signos de desigualdad, el reconocimiento de parámetros de una función, el manejo de los cuadrantes del eje coordenado, análisis de las regiones del plano, así como temas relacionados al teorema de tales y triángulos semejantes.

Mostramos a continuación una práctica y una muestra del desarrollo, en forma resumida, con la ClassPad de Casio. Las secciones que la componen son: un planteamiento general, información sobre su ubicación en los programas de estudio vigentes en México, el diseño de la práctica, una explicación detallada sobre cómo se utiliza la calculadora y algunos comentarios finales.

Práctica: Efectos de escala

Planteamiento general

Se propone el estudio del área y perímetro de triángulos semejantes a fin de reconocer los efectos de escala. En particular, se analiza la homotecia entre dos triángulos a fin de analizar los efectos en el área y perímetro. La calculadora facilita la manipulación y asignación de las medidas de los segmentos del triángulo a fin de lograr varios ejemplos que permitan una comparación.

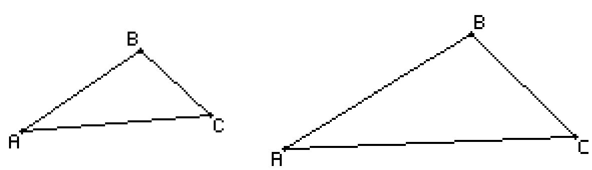
Ubicación en los Planes de estudio

Grado sugerido: Segundo y Tercero

En el programa vigente de segundo grado se inicia la práctica del dibujo a escala promoviendo la observación del efecto de una reducción o ampliación a escala sobre las dimensiones lineales, el área y el volumen de una figura. Posteriormente, en tercer grado se introducen las aplicaciones de la semejanza al estudio de las homotecias y de las homotecias al dibujo a escala

La práctica

I. Dibujar dos triángulos de tal manera que los lados respectivos del segundo triángulo sean construidos utilizando alguna escala sobre el primero.



II. Obtener el perímetro y área de cada uno de los triángulos y registrar los valores en una tabla. Borra este primer par de triángulos y construye cinco nuevos pares de triángulos respetando la escala propuesta y calcula nuevamente el perímetro y área de cada par. Estos triángulos son semejantes. ¿Por qué?

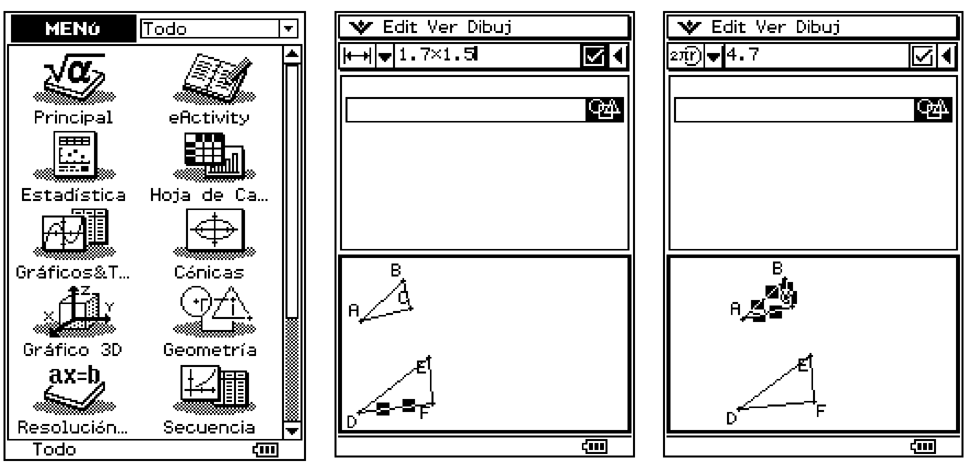
	perim1	perim2	comp1	area1	area2	comp2
1						
2						
3						
4						
5						

Al terminar de registrar los datos de perímetro y área de los pares de triángulos, agrega dos columnas a fin de discutir cómo varía el perímetro y el área.

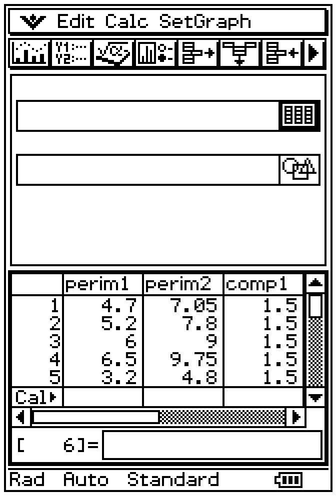
III. En las columnas de comparación, analizar los valores del área y del perímetro. ¿Cómo cambia el perímetro 2 con respecto al perímetro del triángulo original? ¿Qué pasa con el área 2? ¿Qué relación existe con la escala escogida para construir el triángulo semejante?

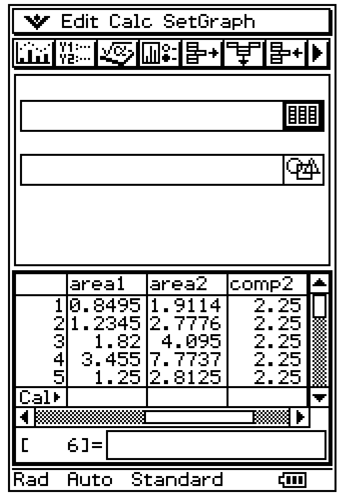
Desarrollo en la calculadora

I. Se pide dibujar un triangulo y uno semejante a él con base a una escala. Se puede utilizar el menú de *eActivity*, seleccionando la inserción del menú geometría. Se construyen los triángulos. Deberá ajustarse la medida de cada lado del segundo triángulo a fin de que sea un múltiplo (en el ejemplo se utilizó 1.5) del lado correspondiente del primer triángulo. Se calcula el perímetro y área de cada triángulo.



II. Una vez obtenido el cálculo de perímetro y área, se inserta el menú de e*ditor de listas* para ir pasando los valores de los perímetros y áreas de los cinco pares de triángulos. Esto con la finalidad de realizar las comparaciones entre valores.





III. Para realizar la comparación se sugiere dividir *perim2/perim1* y posteriormente *area2/area1*. Después de realizar lo anterior se pregunta al alumno su conclusión sobre el análisis de la comparación, haciendo preguntas sobre la escala con relación al perímetro y con relación al área.

Comentarios finales

La calculadora facilita la aplicación de homotecias y se puede percibir su papel de herramienta en la construcción de conocimiento matemático. Si bien, la semejanza no es una propiedad discutida explícitamente, es factible hacer comentarios una vez que se tienen visualizados ambos triángulos en la pantalla.

El uso de listas favorece el aspecto numérico del análisis y favorece el establecimiento del cociente como un criterio de comparación. El número de casos concretos que el alumno puede crear depende más que nada de la habilidad que haya logrado con la manipulación de la calculadora. En cualquier caso, la calculadora está jugando un papel de herramienta facilitadora en el descubrimiento de una propiedad referida a la homotecia.

Referencias bibliográficas

Apreza, E., Ramiro, S. (2005). El Uso de la Calculadora Graficadora en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*. pp. 723-726

Buendía,G., Cruz,C., Poirier,P., Hernández,H., Velasco,E., Megchún,J.(2006) *La Tecnología en el aula de matemáticas: prácticas de laboratorio y medios virtuales*. México: Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Chiapas. ISBN: 970-9825-11-9

Ferrari, M. y Martínez, G. (2003) Construcción de funciones con calculadoras graficadoras. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16 tomo 2

Proyecto (2006). Proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas en la educación básica secundaria y media en Colombia. Obtenido en http://www.eduteka.org/reportaje.php3?ReportID=0004

Secretaría de Educación Pública (1993a). Plan y Programas de estudio. Educación básica. Primaria. México: SEP

Secretaría de Educación Pública (1993b). Plan y Programas de estudio. Educación básica. Secundaria. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (1994). Libro para el maestro. Matemáticas. Segundo grado. México: SEP

SEP (2006a) *Plan de Estudios 2006. Educación básica, Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública

SEP (2006b). *Matemáticas. Antología Primer Taller de Actualización sobre los programas de estudio 2006*. México: Secretaría de Educación Pública

SEP (2006c) *Matemáticas. Educación Básica, Secundaria. Programas de Estudio 2006*. Secretaría de Educación Pública

SEP (2006d). Planes y programas de estudio para normalistas. Obtenido en http://normalista.ilce.edu.mx/normalista/r_n_plan_prog/secundaria/6semes/matematicas/2bloque3.htm

ACTIVIDADES DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA CON TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN

José Luis Torres Guerrero, Liliana Suárez Téllez, Blanca Ruiz Hernández, Pedro Ortega Cuenca, María Eugenia Ramírez Solis
Instituto Politécnico Nacional. México
jeluistg@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Medio

Resumen. *El Taller Actividades de Aprendizaje de Probabilidad y Estadística con Tecnologías de la Información y la Comunicación (APETIC) tiene como uno de sus objetivos de largo alcance del la conformación de una Comunidad para la realización de innovación e investigación en Educación Estadística que tome en cuenta los estados del conocimiento de la disciplina. En el taller se presenta una propuesta para la planeación de actividades de aprendizaje para el curso de Probabilidad y estadística que integren Tecnologías de la Información y la Comunicación, particularmente de calculadores, editores de datos y software de estadística dinámica. Se sigue como aspecto metodológico la idea de 'historiar los problemas' como una actividad colectiva de la Comunidad.*

Palabras clave: paquete, historiar, red, estadística dinámica, simulación

Introducción

El diseño del Taller 'Actividades de Probabilidad y Estadística con Tecnologías de la Información y de la Comunicación' está basado en la caracterización que se hace de las *actividades de aprendizaje* (AA) que integran las redes y secuencias de aprendizaje del 'Paquete Didáctico del Curso de Probabilidad y Estadística' del Bachillerato del Instituto Politécnico Nacional (IPN) de México. Para este paquete se toma de referencia para el diseño de las AA'Un Marco para la elección de Problemas' (Alarcón, 1995) y el reconocimiento del conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas (Rico, 1998).

En el diseño del taller se consideran los resultados de la investigación en Educación Estadística (Batanero, 2001), particularmente los relativos al uso de la modelación de problemas de probabilidad por medio de simulaciones para confrontar y superar las intuiciones primarias en algunos conceptos y teoremas importantes, como la probabilidad condicional y el teorema del límite central. Por ello se han seleccionado AA que tratan conceptos, tanto de probabilidad como de estadística, que pueden simularse utilizando diversas herramientas tecnológicas, en particular *Fathom*, programa de Estadística Dinámica. Se eligió el programa porque permite representar y manipular objetos matemáticos, así como sus relaciones, utilizando animaciones, que son herramientas propias del programa, las cuales ayudan a la mejor comprensión de los conceptos y procesos involucrados. Pero esto software no es indispensable para el taller, también se puede utilizar uno menos especializado pero más accesible como es *Excel* (en la versión que se trabajó en la RELME 21 se utilizó *Excel* y se mostró un ejemplo con *Fathom*). En el taller se discuten algunos resultados de investigación en Educación Estadística, asociados a una red de actividades para que los profesores participantes, a partir la realización de las AA como discentes y de su reflexión como docentes, diseñen, organicen e instrumenten actividades y planes de clase en los que utilicen las TIC, formando comunidades de aprendizaje que integren adecuadamente estas tecnologías en su práctica docente para mejorar la comprensión y el uso de las ideas de la probabilidad y la estadística. La versión del taller APETIC que se presentó en la RELME 21 es una muestra de lo que se trabaja en el diseño original en donde se cuenta con no menos de 40 horas presenciales y cuyos destinatarios son profesores en activo de matemáticas del IPN.

Redes de Actividades de Aprendizaje para Estadística y Probabilidad

El diseño de este taller aprovecha la experiencia de profesores en activo del Nivel Medio Superior del IPN y reconoce el esfuerzo de quienes se han formado como especialistas en educación matemática. Ya que se busca fomentar la formación de especialistas en las áreas que constituyen los saberes propios de la docencia profesional en Matemáticas, la tarea de los coordinadores del taller va más allá del periodo destinado al mismo, pues dan seguimiento al uso de las actividades en las clases y en proyectos de investigación sobre Educación Estadística.

Para que el profesor esté en condiciones de establecer un compromiso con su trabajo en el taller es indispensable que haga suya la compleja problemática del desarrollo de la cultura matemática de los estudiantes en el nivel medio superior y que advierta las diversas dimensiones que comprende. Los participantes son corresponsables del diseño de los planes de seguimiento y evaluación del programa y su paquete didáctico para aprovechar su experiencia y darle, así, viabilidad a la planeación.

La participación activa es indispensable para que el intercambio sea fructífero. Como la perspectiva que se tiene es la del profesor de matemáticas que trabaja con los grupos, en las sesiones del taller se pone en juego la dialéctica discente y docente, alternando los papeles de estudiante y profesor. Primero se vive la experiencia del aprendizaje en las modalidades que se le proponen al estudiante y después se considera la perspectiva didáctica, en la que se discuten la planeación, la instrumentación y la evaluación de las actividades y de los cursos.

Los documentos centrales que se toman en cuenta en el diseño de este taller son el programa, la versión preliminar del paquete didáctico y los artículos de investigación en Educación Estadística. En el *Libro para el Estudiante* del paquete se presentan secuencias de aprendizaje que incluyen el conjunto de actividades de aprendizaje (problema, problemas guiados, proyecto, ejercicios, lecturas y autoevaluaciones) para desarrollar cada una de las unidades del curso de Probabilidad y Estadística. Además se incluyen algunos materiales auxiliares para la organización del aprendizaje. En el *Libro para el Profesor* se presenta además la justificación de las secuencias de actividades, así como ejemplos de *historias de actividades*, que son documentos útiles para su trabajo (contienen solución de las actividades, clasificación de las actividades según un marco que considera diez características y un comentario global de los objetivos de aprendizaje de dichas actividades).

En el taller también se trabaja con *Fathom*, que es un software de Estadística Dinámica y otros materiales digitales, ya que estos apoyos tecnológicos se conciben como una herramienta más para la comprensión de las matemáticas. Uno de los productos principales del taller es la historia de un problema considerando su caracterización según el marco, las evidencias del trabajo de los estudiantes, en reportes y video, y la experiencia de los participantes en problemas de estructura similar. El trabajo a profundidad con una actividad permite pasar después a la construcción de redes de problemas y secuencias de actividades aprovechando las historias desarrolladas por el conjunto de participantes.

La caracterización de las actividades

Para conformar y caracterizar la red de actividades que comprende el paquete, se definieron diez características: 01. Experiencia de aprendizaje, 02. Modalidad de trabajo, 03. Lugar de realización, 04. Herramientas tecnológicas, 05. Tiempo, 06.Producto, 07.Referencias curriculares, 08.Representaciones, 09.Estrategias, 10.Evaluación.

Con esta caracterización de las actividades de aprendizaje, se puede establecer explícitamente la vinculación que hay entre ellas desde perspectivas diferentes que se deben articular para organizar una sesión de clase. En el rubro de 'Referencias curriculares' se consideraron, además de los contenidos que marca el programa, algunos contenidos procedimentales y actitudinales, las competencias básicas del estudiante de bachillerato y los estándares 9-12 del NCTM. La complejidad del diseño y de la instrumentación de las actividades no se riñe con una consideración del tiempo disponible, que debe ser suficiente para que los estudiantes puedan realizar realmente las actividades, y de otros factores importantes como el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes, sus ideas previas, sus expectativas y la pertinencia de los contenidos, que suelen variar para cada grupo de estudiantes en particular. Por el contrario, si el profesor dispone de más información se espera que la use para armonizar un trabajo que conduzca a un aprendizaje verdaderamente significativo para el estudiante.

Actividades de Aprendizaje para Estadística y Probabilidad

En el paquete se incluyen algunos ejemplos de los documentos que se consideran útiles para el trabajo del profesor. Se presenta el desarrollo de la solución que podemos esperar que produzcan los estudiantes del nivel medio superior y que se llama 'de referencia', sin dejar de lado las variantes posibles. También se incluye un comentario de la actividad que se detiene en las distintas vías que puede seguir un estudiante, con la aplicación de las estrategias correspondientes, para avanzar en la solución de la actividad y describe la articulación de las representaciones. Apunta algunas sugerencias para la interacción con los estudiantes, en forma individual o en equipo, durante la realización de la actividad y para la discusión de las soluciones que se hace con todo el grupo. El comentario concluye con una ficha que resume los aspectos más importantes. Así se van conformando historias de problemas, en particular, y de actividades, en general, que se robustecerán cada vez que se trabajan en clase. Estas historias son más detalladas y útiles en la medida en que se puedan elaborar los documentos que la constituyen. Para esta labor se pueden aprovechar las comunidades de aprendizaje y una red de interacción académica en Internet.

Un ejemplo de Red de Actividades: *el método de simulación como estrategia didáctica*

Para el taller APETIC ya se tiene en particular una red sobre *el método de simulación como estrategia didáctica.* Esta red tiene como objetivo el uso de la simulación para resolver problemas y para la comprensión de conceptos de estadística descriptiva (las tablas de frecuencia, el histograma, medidas de centralización y dispersión), de probabilidad (la aleatoriedad y la probabilidad condicional) y llegar a la comparación de una distribución empírica con una teórica.

Esta red consta de una lectura (*Montecarlo*), tres problemas (*El basquetbolista, los amantes del metro Pino Suárez* y *el varoncito*) y un problema guiado (*Racha de cinco*). Se inicia con *Montecarlo*, que es una lectura breve en el que se explica la simulación. La actividad tiene tres momentos: trabajo en equipo, discusión grupal y discusión virtual. Las dos primeras se desarrollan en el salón de clase, una seguida de la otra, y la tercera se da a lo largo del desarrollo de la red de actividades. Esta discusión se da en un blog en el que se puede hacer alusión a cualquiera de las actividades de la red ya realizada en el momento de la participación. Hay dos ejes principales a desarrollar: la simulación como estrategia para resolver problemas y el uso de modelos matemáticos.

Al final de la lectura se tienen preguntas que se responden en un reporte por escrito que entrega cada equipo y que le sirve para exponer su trabajo, si es necesario, ante el resto de los equipos. En sus respuestas los alumnos muestran que hay una aparente comprensión inmediata de los dos ejes ya mencionados. Para la segunda etapa se pasan a equipos elegidos por el profesor para presentar ante los demás lo que se discutió y las conclusiones a las que llegaron, esto permite establecer una discusión sobre el significado y sentido de la simulación, se proponen ejemplos y se ilustra con monedas, dados y algún otro objeto o dispositivo. Aquí se plantean preguntas que serán retomadas en otras actividades de la red y se reconoce la dificultad de la lectura. En la discusión virtual se continúa la discusión; aquí se tratan los conflictos alrededor del concepto de probabilidad y se ponderan ventajas y desventajas de un modelo matemático.

Le sigue *Racha de cinco*, un problema guiado algo menos complicado que el propuesto en la lectura *Montecarlo* y que permite al alumno familiarizarse con un software de estadística dinámica (*Fhatom* o si no es posible éste, *Excel*) en el que se pueden hacer simulaciones para resolverlo. Cuando se tiene el trabajo en equipo los alumnos reciben orientación y cierta ayuda para la formulación de un modelo matemático. Se observa en ellos una resistencia a dejar de hacer una simulación con objetos y se manifiestan los primeros problemas conceptuales a los que se enfrentan. Para la discusión grupal se tiene la oportunidad de comparar la simulación con objetos y con algún software y observar la relación entre una tabla de datos y la de frecuencias. Entre las dificultades que se identifica en los alumnos está la confusión entre la tabla de frecuencia con la de los datos, la no vinculación de los datos con el problema y dificultad en la interpretación de los parámetros calculados.

La tercera actividad es *El basquetbolista*, situación planteada en la lectura *Montecarlo*. Ya familiarizados con el software los alumnos pueden concentrarse en las características del problema y establecer un modelo mediante el cual puedan resolverlo. En esta actividad el profesor busca orientar a los alumnos en la interpretación de los parámetros y en el diseño de un modelo matemático pertinente.

Los alumnos muestran dificultades para definir la variable del modelo y no distinguen la diferencia entre frecuencia relativa y probabilidad. En la discusión grupal se tiene la oportunidad de agrupar los datos de todo el grupo, de evaluar la aleatoriedad e iniciar la discusión de las características de un modelo teórico y de uno práctico. Los alumnos se preguntan cuando la frecuencia se convierte en probabilidad, la legitimidad de los datos y hacen una autoevaluación de sus intuiciones.

Los otros dos problemas permiten confirmar los aprendizajes logrados para aprovechar la simulación en la solución de problemas, así como refutar intuiciones en torno a la probabilidad como es la falacia del jugador.

Conclusiones

El taller APETIC fue diseñado como parte de la difusión entre profesores del paquete didáctico de probabilidad y estadística. Como producto de él se tienen evidencias de los alumnos, experiencia de profesores, enriquecimiento de la historia de problemas y diseños de redes de problemas.

La elección de actividades de modelación y simulación con herramientas tecnológicas se ha realizado por la potencia que proporcionan para representar y manipular objetos matemáticos, así como sus relaciones, utilizando animaciones, que son herramientas propias de un software de estadística dinámica, las cuales ayudan a la mejor comprensión de los conceptos y procesos involucrados. Se reconoce el grado de dificultad que existe para comprender conceptos como, muestreo, variable aleatoria, probabilidad, funciones probabilísticas y se opta por estas actividades que permiten la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios, que de otro modo serían mucho más abstractos.

En el taller se discuten algunos resultados de investigación en Educación Estadística, asociados a una red de actividades para que los profesores participantes, a partir la realización de las *actividades de aprendizaje* como discentes y de su reflexión como docentes, diseñen, organicen e instrumenten actividades y planes de clase en los que utilicen las Tecnología de la Información y la Comunicación, en particular un software de estadística dinámica, formando comunidades de aprendizaje que integren adecuadamente estas tecnologías en su práctica docente para mejorar la comprensión y el uso de las ideas de la probabilidad y la estadística.

La red de actividades 'El método de simulación como una estrategia didáctica' surge de la lectura 'Montecarlo'. A partir de los registros y análisis que se hicieron de las primeras puestas en práctica con los alumnos se fue formando y robusteciendo esta red. Lo antes descrito es parte de la historia de las actividades y describen el trabajo del profesor y sus estudiantes al realizar éstas en una clase de estadística.

Historiar las actividades es una forma de recapitular y aprovechar la experiencia docente. Constituye un ejemplo de cómo una comunidad de profesionistas apoya y potencia el trabajo del individuo.

La necesidad del desarrollo de una cultura estadística y el uso de las TIC en las clases de estadística hace pertinente que se organicen talleres como el descrito.

Referencias bibliográficas

AIM-NMS-IPN (2001). *Proyecto Paquetes Didácticos para los Cursos de Matemáticas*. México: AIM-NMS-IPN.

Alarcón, J. (1995). *Seminario Precálculo y Resolución de Problemas*. Manuscrito no publicado.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Rico L. (1998) Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1, (1),*22-39*.*

Servín, C., Suárez, L., Ortega, P. (2005). *Actividades de Probabilidad y Estadística con Tecnologías de la Información y de la Comunicación (APETIC)*. Resumen del cartel aceptado para su presentación en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 2005. Porto, Portugal.

Suárez, L., Cordero, F., Daowz, P. Ramírez, A., Ortega, P., Torres, J.L., Romano, S., Servín, C., Téllez, J., Contreras, B. (2006) *De los paquetes didácticos hacia un repositorio de objetos de aprendizaje: un reto educativo en matemáticas*. Extenso publicado en las Memorias de Virtual Educa 2006. Bilbao, España 2006. Extraído el 5 de enero de 2007 desde http://somi.cinstrum.unam.mx/virtualeduca2006/pdf/124-LST.pdf

Suárez, L., Ortega, P., Servín, C., Téllez, J., Torres, J.L. (2005) *Paquetes Didácticos de Matemáticas: Integración de la investigación y la innovación tecnológica*. Extenso publicado en las Memoria de Virtual Educa. México, D.F. 2005. Extraído el 19 de octubre de 2005 desde http://somi.cinstrum.unam.mx/virtualeduca2005/resumenes/2005-03-31456Matematicas_VirtualEduca.doc

Suárez, L., Torres, J.L., Ortega, P., Daowz, P. y Ramírez, M.E. (2007) *Hacia un marco para el diseño de contenidos digitales en matemáticas de bachillerato: de los paquetes didácticos* *a los repositorios de objetos de aprendizaje*. Memorias del IV Seminario Nacional de Enseñanza de las Matemáticas a Distancia. Ciudad Guzmán, México, enero de 2007.

DESARROLLO DE UN TUTORIAL WEB DE CÁLCULO NUMÉRICO CON HERRAMIENTAS DE GESTIÓN DE CURSO PARA LA UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DE GUAYANA

Sandra Castillo, Luzmín Núñez, Guillermo Perozo
Universidad Nacional Experimental de Guayana Venezuela
sandralilianacastillo@gmail.com, luzmin@gmail.com, gimopezo@gmail.com
Campo de investigación: Recursos Instruccionales para la Enseñanza de la Matemática Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se detalla el proceso de desarrollo de un tutorial web, con herramientas de gestión de curso, de la asignatura Cálculo Numérico, la cual forma parte del pensum de estudios de la carrera de Ingeniería en Informática de la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG). Esta investigación es de tipo documental debido a que el contenido del Tutorial Web está basado en documentos de los docentes encargados de la asignatura de Cálculo Numérico y en material bibliográfico encontrado en la Web; es descriptiva dado que se detalla, registra, analiza e interpreta la naturaleza actual, composición y procesos del tutorial; y por último es aplicada ya que el resultado de la investigación será el tutorial que se utilizará en la universidad. El marco teórico tiene elementos de la teoría del aprendizaje constructivista, una de las principales teorías a desarrollar e implantar en los entornos de enseñanza y aprendizaje basados en los modelos b-learning. La metodología empleada para el desarrollo del tutorial es la propuesta por Álvaro Galvis (1994) haciendo énfasis en una serie de aspectos que son fundamentales como análisis de necesidades educativas, diseño del tutorial, desarrollo y pruebas. El tutorial está adaptado a las necesidades de la asignatura mencionada en pro de constituirse en un medio o instrumento de mucha ayuda para el profesor, en particular, y al alumnado, en general, a través de herramientas de gestión de curso con la finalidad de lograr un aprendizaje activo, dado que los sistemas de b-learning pueden complementar eficazmente la formación presencial, llevándola a una nueva dimensión que permite la interacción continua entre profesores y alumnos.*

Palabras clave: herramientas de gestión de cursos, tecnologías de Información y comunicación, proceso de desarrollo de tutoriales

Introducción: Planteamiento del problema

El progreso de las tecnologías de la comunicación y la información está suponiendo profundos cambios en muchos aspectos de la vida del ciudadano común. La universidad, que siempre ha representado la delantera a nivel científico, humano e intelectual en la sociedad; no debe, ni puede, ignorar en su estructuración, estas innovadoras tecnologías. Es por ello, que se llama a la reflexión, dada la necesaria formación del alumnado en la nueva comunicación que supone la integración de una "cultura global" en nuestra universidad.

Es común encontrar, entre los profesores universitarios, la opinión de que la práctica de “dar clases” es el método más adecuado para aprender, reduciendo así la forma de transmitir conocimientos a una manera monótona de “dar” la materia y los alumnos a “aprenderla”. Esto trae como consecuencia que los hábitos, un tanto arcaicos de algunos profesionales de la docencia, se conviertan en una barrera para el avance de ciertas Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) que abren las puertas a un nuevo horizonte de aprendizaje.

Las asignaturas pertenecientes al área de matemática, tienen un nivel alto de dificultad y requieren de conocimientos previos, lo que deja al descubierto una base deficiente que arrastran los estudiantes desde la educación secundaria, técnica y/o superior, en el caso de las asignaturas que prelan a éstas, lo cual se constituye en un factor determinante en el índice de reprobados durante el curso de la carrera.

Se propone, como posible solución al problema presentado, una investigación que actúe en beneficio de la apropiación del conocimiento matemático del alumnado de la UNEG y, al mismo tiempo, funcione como asistencia al profesorado en la facilitación del proceso enseñanza utilizando tecnología de punta. Para ello, se inicia esta investigación con una alternativa educativa que consiste en el desarrollo de un Tutorial Web de Cálculo Numérico que cuente con herramientas de gestión de curso, como material de apoyo tanto para estudiantes como para profesores pertenecientes a la carrera de Ingeniería de Informática de la UNEG.

Objetivos

Objetivo General:

Desarrollar un Tutorial Web de Cálculo Numérico que cuente con herramientas de Gestión de Curso para la Universidad Nacional Experimental de Guayana.

Objetivos Específicos:

- Seleccionar las herramientas adecuadas para el diseño del tutorial.
- Determinar las teorías pedagógicas que favorecen y sustentan el diseño de un tutorial.
- Seleccionar la metodología adecuada para el diseño del contenido del tutorial.
- Seleccionar la información necesaria referente a la asignatura de cálculo numérico y organizarla con el fin de estructurar el contenido del tutorial.
- Consultar fuentes de tutoriales ya existentes, de tal manera, que permita comparar y guiar el desarrollo del tutorial propuesto en esta investigación.
- Desarrollar el tutorial mediante la metodología seleccionada, que permita la instrucción de la asignatura de Cálculo Numérico.
- Realizar la prueba preliminar del funcionamiento del tutorial desarrollado en compañía de la Tutora de la investigación.
- Depurar posibles errores antes de entregar la versión final del tutorial Web desarrollado.

Marco teórico

Antecedentes

Luego de más de diez años de investigación, *el Grupo de Ingeniería de Organización de la Universidad Politécnica de Madrid* ha elaborado **e-thalent**, una nueva plataforma para el manejo vía Web de instituciones educativas y empresas**.** Según sus creadores “e-thalent, es un nuevo sistema de e-learning para la gestión y formación en línea". En México, se encuentra MathPro el cual es un software totalmente interactivo diseñado para la enseñanza de las matemáticas; este le permite al estudiante ejercitar el lado práctico de la materia y al mismo tiempo guiarlo en el proceso de resolver los problemas.

A nivel de la UNEG se destaca el trabajo de mérito presentado por Valera (2002) como requisito para el ingreso al escalafón universitario titulado "Propuesta para el Diseño Instruccional de un Material Educativo Computarizado (MEC's) sobre la teoría y ejercitación de derivaciones lógicas en el Lenguaje Ss de la asignatura Lógica para el Proyecto de Carrera Ingeniería en Informática de la UNEG", en el cual de manera muy acertada se exponen y detallan aquellos elementos y especificaciones necesarias para llevar a cabo el diseño instruccional de un software educativo.

Por otro lado en el registro de Publicaciones Periódicas recientemente se puede consultar una investigación que fue realizada por Kam y Portmann (2005) titulada: "Portal Educativo para la Asignatura Juegos Instruccionales del Proyecto de Carrera de Educación Integral de la UNEG". Su trabajo consistió en la construcción de un portal educativo especialmente diseñado para la asignatura de Juegos Instruccionales de la carrera de Educación Integral en donde buscaron darle un enfoque práctico a dicha asignatura.

Otra investigación a reseñar es el Trabajo de Grado de Maestría desarrollado por Castillo (2002) titulado: "Habilidades Metacognitivas desarrolladas por Estudiantes que Resuelven Problemas de Matemática usando el Software Mathgraph" de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador en común acuerdo con la UNEG; en el cual al plantear las recomendaciones expresa la necesidad de adoptar el uso de materiales educativos computarizados (MECs) dentro del aula de clase como parte de las estrategias del proceso de enseñanza aprendizaje.

Bases Teóricas

El B-Learning es un término de origen inglés aplicado a la enseñanza y que se le puede dar la traducción de “Aprendizaje Combinado”, en el cual está inmersa una modalidad de estudio que incluye una parte presencial y una parte no presencial (cursos online conocidos como E-Learning). En dicho sistema el docente asume su rol tradicional, pero con la significativa diferencia que puede llevar a cabo su función de dos maneras: como tutor a distancia y como educador tradicional (cursos presénciales).

La Teoría Constructivista es una de las principales teorías a desarrollar e implantar en los entornos de enseñanza y aprendizaje basados en los modelos b-learning; este tipo de modelo fortalece el objetivo principal pedagógico que es el adecuado conocimiento que el alumno ha de adquirir y construir. Cabe destacar que dicho aspecto siempre se ha obviado u omitido en un sistema pedagógico basado únicamente en resultados académicos (calificación final del alumno) sin que se tome en cuenta si éste ha adquirido los conocimientos necesarios enfocados en su futuro profesional.

En este orden de ideas, se propone la adecuación del Tutorial Web a diseñar a un modelo conceptual que se basa en la estructura de un sistema educativo orientado a la correcta administración del conocimiento. El papel que juega la antes mencionada teoría Constructivista es indicar cómo el conocimiento está construido de forma activa por el alumno en donde éste jugara el papel de un participante activo, consciente y responsable de su propio aprendizaje, claro esta, bajo la supervisión tanto del docente como de la Institución o casa de estudio de la que forme parte. Cabe destacar que los sistemas b-learning, se adaptan perfectamente al modelo basado en la solución de problemas, cuya meta final es el aprendizaje cognoscitivo.

Marco metodológico

Fuentes de Información

De acuerdo con los objetivos definidos en la investigación y para llegar a su cumplimiento se realizó la lectura de material bibliográfico o documental necesario para la estructuración del Marco Teórico; dicho material se obtuvo de diferentes fuentes como por ejemplo la biblioteca con que cuenta la UNEG. De manera adicional se acudió a la Unidad de Publicaciones Periódicas de dicha institución de educación superior en busca de investigaciones relacionadas o similares a la presente con el fin de sentar las bases del presente estudio.

Cabe destacar que periódicamente el grupo de investigadores en conjunto con la Tutora realizó reuniones en donde, dependiendo de la etapa de la investigación, se aplicaron entrevistas informales no estructuradas a la Tutora; y en cuanto a la información técnica, ésta fue recopilada en su mayoría de Internet así como también de varios profesores de la UNEG que, de manera muy amable, decidieron colaborar con la investigación.

Instrumentos utilizados

En esta investigación se llevaron a cabo entrevistas informales (llevadas a cabo de forma individual) para recabar información en forma verbal, a través de preguntas propuestas por los analistas a la Tutora de la investigación, así como también a alumnos estudiantes de la carrera de Ingeniería de Informática del séptimo semestre en adelante, los cuales son usuarios potenciales del sistema propuesto y serán afectados de una manera u otra por la aplicación.

Procedimiento General

A continuación se resume en una serie de pasos el procedimiento general que se siguió para la elaboración del producto final y levantamiento de este informe:

1. Se buscó, revisó y analizó el Programa de la asignatura de Cálculo Numérico del proyecto de carrera de Ingeniería en Informática.
2. Se investigó y analizó los diferentes tipos de tutoriales existentes con el fin de establecer cual era el más idóneo a elegir.
3. Seguidamente se estableció la estrategia de implementación del Tutorial, es decir, modulo virtual – clase presencial – modulo virtual.
4. Se realizó una recopilación bibliográfica de las diferentes fuentes utilizadas.
5. Se llevó a cabo una revisión bibliográfica de la Ing. de Software Educativo, para determinar o seleccionar la metodología a utilizar.
6. Se revisó de manera minuciosa la metodología propuesta por Alvaro Galvis para el desarrollo de MECs con la intención de generar un Tutorial de calidad.
7. Se realizó la Idea Proyecto la cual fue aprobada en fecha 19 de Julio de 2005.
8. Se realizó el Anteproyecto, el cual fue aprobado en fecha 6 de Abril de 2006.
9. Se desarrolló el Tutorial de Cálculo Numérico con herramientas de gestión de curso cumpliendo con las exigencias y parámetros de la Ingeniería de Software Educativo para obtener un producto de calidad.
10. Se llevó a cabo la prueba preliminar del Tutorial desarrollado en conjunto con la Tutora, para realizar las correcciones y mejoras necesarias.
11. Se realizó el informe final respetando los lineamientos y bajo la estructura establecida por el Programa de Investigación y Desarrollo de la UNEG.

Procedimiento para el desarrollo del Tutorial

Existen diferentes metodologías para el desarrollo de MEC(s), sin embargo en la propuesta por Galvis P., toda investigación de esta índole debe atravesar 5 etapas principales a través de las cuales se logró la maduración y completación del Tutorial, las cuales son:

- *Análisis:* análisis de necesidades educativas, análisis de posibles causas en problemas detectados, análisis de alternativas de solución, establecimiento del papel del computador y selección o planeación del desarrollo del Tutorial.
- *Diseño*: entorno, diseño educativo, diseño de comunicación y diseño computacional.
- *Desarrollo del Tutorial*
- Las etapas denominadas “Prueba Piloto” y “Prueba de Campo” no serán descritas ni llevadas a cabo en esta investigación debido al alcance establecido.

Resultados

El resultado final de este proyecto es el Tutorial de Cálculo Numérico con herramientas de Gestión de Curso para la UNEG, el cual está conformado por el programa computacional, el manual de usuario, el manual del sistema y la configuración inicial para su correcto funcionamiento. Dicho tutorial presenta entre sus principales características:

- Constituirse en un sistema sencillo que no necesita ningún entrenamiento previo para su uso.
- A nivel de contenido:
  - La información que se presenta a través del Tutorial tienen una adecuada *variedad*.
  - Su estructura en cuanto a presentación, redacción, gráficas etc., fue bastante cuidada, debido a que una buena organización de la información ayuda a la comprensión de ésta y a su retención.
  - Los elementos visuales como tablas y gráficas se utilizan para ilustrar la teoría, completar los textos y favorecer la comprensión del mensaje.
- Los servicios de foro, chats y correo electrónico facilitan el contacto entre profesores y alumnos.
- A través de las herramientas de gestión de curso se le permite al Profesor:

- Crear un banco de "preguntas tipo" o preguntas modelo.
- El Profesor podrá diseñar las evaluaciones de tipo Examen y Talleres con base en combinaciones de los ítems alojados en el banco de preguntas, por otro lado están las evaluaciones de tipo Exposiciones y Proyectos las cuales podrán ser publicadas en el sistema y controlar su tiempo de entrega.
- Crear cronogramas de evaluación y cronograma de actividades.
- Llevar un control del rendimiento académico de los alumnos inscritos en el Tutorial.

- El alumno por su parte:
  - Tendrá total acceso a todo el contenido que conforma la asignatura de Cálculo Numérico distribuido en cinco diferentes unidades, así como también podrá practicar a través de ejercicios modelos, ejercicios propuestos y "evaluaciones tipo" publicadas por el Profesor.
  - Podrá llevar un control de las actividades pendientes que tiene que realizar con respecto a la asignatura, así como también estar al día con el acumulado de notas que tiene al momento de realizar la consulta.
  - Tendrá la opción de presentar evaluaciones en línea ya sean talleres, exámenes, o realizar la entrega vía on-line de Proyectos de acuerdo al diseño realizado por el Profesor de la asignatura.

Conclusiones

La realización del Tutorial de Cálculo Numérico con herramientas de gestión de curso supera las barreras de espacio y tiempo de acceso a la información de dicha asignatura que conlleva la formación presencial, y aminorar los inconvenientes principales de la formación a distancia.

El empleo de estas tecnologías como complemento y apoyo a su modelo didáctico, añade todas las ventajas que las tecnologías hacen posible. Por tanto se concluye que:

- Es favorable el realizar estudios orientados a la búsqueda de un método de desarrollo de materiales educativos computarizados que haga uso de pedagogías activas, de manera que se sigan modelos más firmes para la creación de software para el aprendizaje y enseñanza con este enfoque.
- Los sistemas de b-learning pueden complementar eficazmente la formación presencial, llevándola a una nueva dimensión que permite la interacción continua entre profesores y alumnos, en donde la teoría del Constructivismo es la más adecuada a aplicarse en este tipo de entornos debido a que refuerza el apropiado conocimiento que el alumno debe construir y obtener.
- Al armar el contenido de cualquier Tutorial es sumamente importante cuidar detalles como la presentación, organización, redacción, claridad y variedad de la información.
- En cuanto a las herramientas de desarrollo es importante seleccionar aquellas que se adapten a lo que se desea obtener y que garanticen un software que soporte de manera eficiente todas las funciones que éste ofrezca.
- Finalmente se considera que el Tutorial desarrollado puede llegar a ser muy efectivo pues implementa las recomendaciones generales para la elaboración de software educativo, ofrece herramientas para facilitar el aprendizaje y asiste al Profesor.

Referencias bibliográficas

Castillo, S. (2002). Habilidades Metacognitivas desarrolladas por Estudiantes que Resuelven Problemas de Matemática usando el Software Mathgraph. En *Memorias del V Simposio de Educación Matemática. Vol. 5. I.B.S.N 987-20239-1-3*. Chivilcoy, Argentina.

Galvis, A. (1994). *Ingeniería de Software Educativo.* Santa Fé de Bogotá: Ediciones Unidades.

Kam, E; Portman R. (2005). *Portal Educativo para la Asignatura Juegos Instruccionales del Proyecto de Carrera Educación Integral de la UNEG.* Trabajo de grado no publicado. Universidad Nacional Experimental de Guayana, Ciudad Guayana.

Redacción de Baquia (2004). *e-thalent, el primer sistema español de b-learning* [Documento en Línea] Disponible: http://www.baquia.com/index.php [Consulta 2005, Agosto].

TC-QUEST (2005) *MathPro Ayuda al Profesor y Beneficia al Alumno.* [Documento en Línea] Disponible: http://www.tec-quest.com/mathpro.htm [Consulta 2005, Diciembre].

Valera, F. (2002). *Propuesta para el diseño instruccional de un material educativo computarizado (MEC(s)) sobre la teoría y ejercitación de derivaciones lógicas en el lenguaje Ss de la asignatura Lógica para el Proyecto de Carrera Ingeniería en Informática de la UNEG.* Trabajo de Mérito no publicado presentado como requisito para el ingreso al escalafón universitario. Universidad Nacional Experimental de Guayana.

ACERCAMIENTO INTUITIVO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA

José Carlos Cortés Zavala
Facultad de Físico Matemáticas, Universidad Michoacana México
jcortes@umich.mx
Campo de investigación: Tecnologías Avanzadas Nivel: Medio

Resumen. En el siguiente artículo se propone un acercamiento numérico y gráfico al concepto de derivada y de función derivada. Para ello se propone iniciar introduciendo las ideas de diferencias, incrementos y razón de incrementos. El que esto escribe diseño y desarrollo un software de apoyo a la introducción de estas ideas. Para abordar la temática se exponen ideas teóricas, una exposición de lo propuesto en el software y algunos resultados obtenidos.

Palabras clave: derivada, tecnología, visualización

Introducción

Diversos investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio. Basado en está idea inicial se diseño y desarrollo un software, que hemos denominado “Funciones y Derivadas”. En el software propuesto (Cortés. 2002) se incorporaron actividades que resaltan los aspectos relacionados con diferencias, incrementos y razón de incrementos, se toma como base las ideas visuales. Hughes (1990) ha observado que muchos estudiantes pueden calcular algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar en una gráfica en qué lugares la función tiene derivada positiva y en cuales negativa. Además, la autora nota que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede (1) iluminar la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y (2) la presentación algebraica. Por su parte Scher (1993) realizó un estudio sobre la utilización de múltiples representaciones para conceptualizar la derivada. El autor concluye que existe la necesidad de promover el uso de tales representaciones para que el estudiante obtenga un entendimiento adecuado de los conceptos del cálculo. También menciona, por ejemplo, que “*la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes*” (Scher, 1993, p. 16).

Sabemos, con base en diversos estudios, que el concepto de derivada es tratado para su enseñanza con métodos puramente algebraicos los cuales ocultan información relevante para su aprendizaje. El tratamiento numérico y grafico pocas veces es usado y cuando lo es solamente sirve como una introducción al proceso algebraico. Propuestas como la de Duval (1988, 1993 y 1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002) y Pluvinage (2005) mencionan la importancia, que tiene para el aprendiz, el manejo gráfico y numérico. Los aspectos numéricos, gráficos y algebraicos son representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto. Cuando solamente se usa un tipo de representación se corre el riesgo, como lo menciona Duval (1988), de confundir al objeto con la representación, por lo que como metodología de trabajo, este investigador, propone el uso de múltiples representaciones de un objeto.

Como ya se menciono, en el párrafo anterior, cada representación deja visible un tipo de información, pero también oculta otra y cada una de ellas nos permite realizar cierto tipo de operaciones. Por ejemplo: Sí tenemos la función cuya representación algebraica es: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, su gráfica está representada en la figura 1 y evaluada en algunos valores numéricos da como resultado la tabla 1.

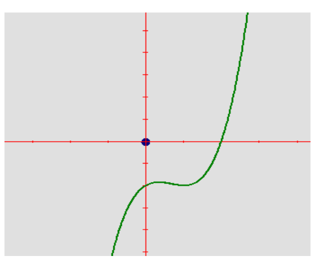


Figura 1

Inc. x	1	1	1	1	1	1	1	
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-2.	-2.	0.	10.	34.	78.	148.	250.
Inc. y	0.	2.	10.	24.	44.	70.	102.	

Tabla 1

A partir de estas representaciones podemos hacernos las siguientes preguntas:

¿En cuál de ellas nos basaríamos para afirmar que la función tiene dos raíces complejas?

¿Cuál de ellas nos permite visualizar en que intervalos la función es decreciente y en que creciente?

¿Cuál de ellas nos permite realizar la siguiente operación $\lim_{x \to a} f(x)$?

¿En cuál podemos visualizar en forma más rápida que $f'(2) > 0$?

Para contestar algunas de estas preguntas es necesario contar con experiencia en el manejo del registro seleccionado y esta se obtiene de trabajar en cada representación. Es en este sentido que Duval (1988) menciona que es necesario realizar “tratamiento” en cada sistema de representación y conversión entre representaciones con la finalidad de lograr una articulación entre representaciones que nos permitirá acercarnos al concepto matemático.

Dentro del desarrollo de la presente experimentación se detectó que la idea de incremento de una variable no es entendida fácilmente por los estudiantes, lo cual dificulta entender la razón de cambio y por supuesto el concepto de derivada.

La Propuesta

El planteamiento propuesto en el software se ubica dentro de la teoría de sistemas de representación semióticos, por lo que el software deberá permitir la manipulación de diferentes representaciones relativas a diferentes registros de representación, además de motivar las tareas de conversión entre representaciones; es decir, deberá permitir tratamiento de representaciones en cada uno de los registros y conversión entre representaciones.

Tratamiento numérico

Se propone un acercamiento numérico al concepto de derivada, a través de razón de cambio. Un primer acercamiento para lograrlo es introducir las progresiones aritméticas y motivar al estudiante a desarrollar estrategias manipulando incrementos que le permitan resolver los ejercicios. El proponer un acercamiento discreto al concepto de derivada (a través de razones de cambio) permite que el estudiante trabaje con elementos que para él son concretos; además, posteriormente se puede introducir la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, dar significado a lo que representa una razón de cambio.

Progresiones Aritméticas para Introducir la noción de Diferencia de dos datos

El tema de *Progresiones Aritméticas* se aborda en cuatro niveles (fig. 2), con el objetivo de iniciar un acercamiento numérico al concepto de Razón de Cambio.

Nivel I

posición	1	2	3	4	5	6	7	8
valor	28	30	32					

Nivel II

posición	1	11	21	31	41	51	61	71
valor	8	28	48					

Nivel III

posición	1	14	33	48	64	77	80	94
valor	-1	38	95					

Nivel IV

posición	1	19	33	44	60	72	85	93
valor		15			56			

Figura 2

Incrementos de Variables

En el tema de *Incrementos* el objetivo es introducir esta noción en los estudiantes. Proponiendo un primer acercamiento gráfico (fig. 3) y se aborda el trabajo con cuatro niveles.

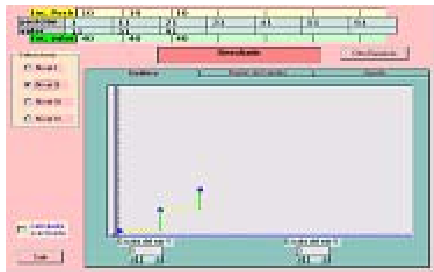


Figura 3

Razones de Cambio

Bajo este acercamiento discreto al concepto de *Razón de Cambio* se logra que el estudiante trabaje con elementos que para él son concretos. Además, se puede introducir después la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, dar significado a lo que representa una razón de cambio. La opción *Razón de Cambio* se aborda como el cociente de dos incrementos, obteniéndose una nueva función. Se pueden seleccionar diferentes tipos de funciones. Si se Selecciona una función cúbica de la forma, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se generan aleatoriamente los parámetros *a, b, c* y *d (fig. 4 y 5).*

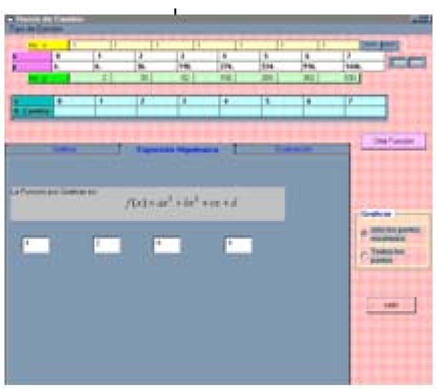


Figura 4 Figura 5

Tratamiento Gráfico

El tratamiento geométrico que proponemos en torno al concepto de derivada siempre parte de una Línea Secante que se convierte en Línea Tangente. En relación con lo anterior Wenzelburguer (1993 p.3) menciona:

> *"Normalmente se usa el problema de la tangente geométrica como motivación para introducir la derivada. Este método tiene muchas desventajas porque no es fácil de entender que el límite de la pendiente de una familia de secantes es la pendiente de la tangente a la cual se llama derivada. Además, no se ve una conexión inmediata entre una tangente geométrica que es un fenómeno estático y el dinamismo de una derivada que describe el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra."*

La propuesta que aquí se realiza va en este sentido y consideramos que un tratamiento gráfico de la línea secante, de la línea tangente de la función razón de cambio y de la función derivada servirá para franquear esta barrera. A continuación exponemos estas ideas:

Primeramente introducimos gráficas de funciones de la forma general, por ejemplo una función polinomial de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, en la cual tenemos parámetros manipulables *a, b, c,* y *d* para modificar la función polinomial. Podemos seleccionar el trazar una Línea Secante (Figura 6) o una Línea Tangente (Figura 7) o la Gráfica de la Función Razón de Cambio (Figura 8) o la Gráfica de la derivada (Figura 9) obteniendo, de acuerdo a la selección, la tabla correspondiente.

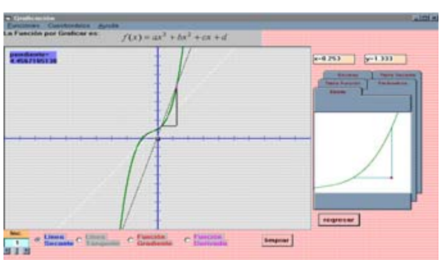


Figura 6

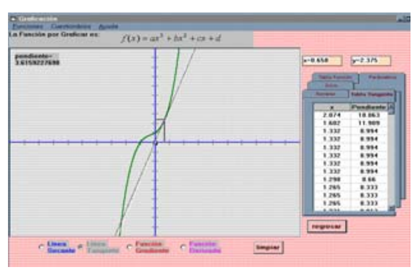


Figura 7

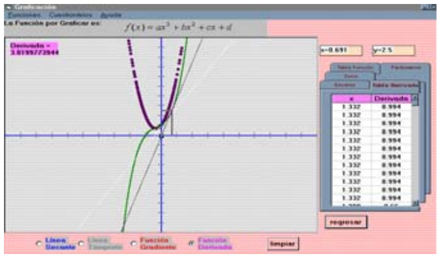


Figura 8

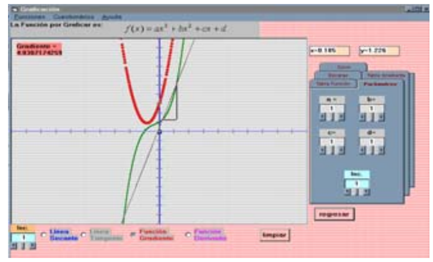


Figura 9

A través del uso de estas actividades se pretende que el estudiante comprenda la noción de incremento, de razón de cambio, de cómo la línea secante se encuentra relacionada con la razón de cambio, de cómo la tangente se relaciona con la razón de cambio cuando el *incremento de x* se hace pequeño, de cómo al graficar las pendientes de la línea secante se obtiene algo parecido a la gráfica de la derivada, que a su vez es la gráfica obtenida de las pendientes de la línea tangente.

Experimentación

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante doce horas, repartidas en cuatro sesiones. Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. Se formaron tres equipos de trabajo (dos con dos estudiantes y uno de uno) y cada uno de ellos trabajó en una computadora con el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones siguientes el estudiante navegara libremente los contenidos permitidos en el software. El instructor se desempeñó básicamente como un observador pero podía intervenir para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas o para hacer preguntas que propiciaran que los estudiantes encontraran por sí mismos la estrategia correcta. Los estudiantes podían comunicarse libremente las ideas o las estrategias de solución, las cuales fueron grabadas en video.

Se experimentó con la parte del software correspondiente al tratamiento numérico (progresiones, incrementos y razón de cambio). Primeramente, se trabajó con el apartado de progresiones aritméticas. El software genera, en forma aleatoria, una tabla en la cual se presentan espacios vacíos, siendo la tarea del usuario el llenarlos (figura 1); el software realiza la evaluación del dato introducido y muestra si es correcto o incorrecto. Esta opción presenta una introducción y cuatro niveles.

Observaciones generales

Los integrantes de los equipos no tuvieron ningún problema en la navegación con el software y entendieron rápidamente la tarea por desarrollar. Tuvieron algunos conflictos para encontrar la estrategia adecuada, pero al final lo lograron.

Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

El análisis de esta experimentación se centrará en explicar, con base en las video-grabaciones, si las ideas de incremento de una variable y de razón de cambio fueron entendidas por los estudiantes. Asimismo, este análisis será un primer contacto para vislumbrar la posibilidad de que un acercamiento por medio de la función razón de cambio permita a los estudiantes transitar al concepto de derivada.

Opción de progresiones

En esta primera tarea (u opción) del software, se presenta a los estudiantes una introducción a lo que es una progresión aritmética y cuatro niveles de ejercicios. Todos los estudiantes entendieron bien la introducción y la tarea por desarrollar. El nivel I y nivel II no presentaron ningún problema para encontrar la solución requerida en cada caso. Pero en el nivel III y nivel IV, fue muy difícil para los estudiantes dar una respuesta adecuada al tipo de ejercicio propuesto. Sólo un equipo de trabajo encontró una estrategia para resolver lo requerido en el nivel III. A continuación se describe cómo fue el desempeño del equipo con respecto a la tarea solicitada.

Elizabeth y Leticia están intentando resolver el siguiente ejercicio:

Posición	1	6	25	42	52	53	81
Valor	4	14	52				

*Elizabeth: veamos cuánto es. [*comienza a escribir en su libreta, haciendo cuentas*] son 17 por 2 que son 34 y le sumamos 52.*

Investigador: ¿Me explicas cómo lo obtuviste?

Elizabeth: Del 1 al 6 hay 5 espacios. Sé que si 1 es igual a 4 y hay 2 espacios entre uno y otro, y se va incrementando de 2 en 2 entonces son 42 menos 25 para sacar los espacios; multiplicado por 2, y le sumo el valor de 52.

Leticia: Sacamos el espacio que hay de un lado a otro y, como ya sabemos que va de 2 en 2, de 52 a 53 hay un espacio y lo multiplicamos por 2.

Investigador: Ese número que obtuvieron es muy importante (el 2). ¿Cómo lo sacaron?

Elizabeth: Muestra una tabla y me da una explicación sobre ella.

Posición	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Valor	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*

Llenaron la tabla con los valores que faltaban del 1 al 6, y determinaron que se va incrementando de 2 en 2 cada posición. Se les sugirió que revisaran la opción de incrementos y la definición de razón de cambio. Después de revisar la opción y la explicación de lo que es una razón de cambio, concluyeron:

Elizabeth: ¡Ya! Lo que pasa es que con el incremento que le damos, lo podemos sacar al dividir el incremento de x entre el incremento de y.

Leticia: Es al revés.

Elizabeth: Y ya nos ahorramos lo que estábamos haciendo.

Como podrá observarse para la solución de ejercicios de este tipo es necesario utilizar la razón de cambio, lo cual fue logrado por este equipo. En tareas posteriores ya tenían esta idea y la aplicaron.

A manera de conclusión

Por medio del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan y usen la razón de cambio. Con esto, pueden empezar a construir una nueva función y a partir de ella, los educadores pueden introducir la función derivada.

Referencias bibliográficas

Cortés, C. (2002) *Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial* Tesis doctoral, no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.

Cortés, C. García, J., Núñez, G. (2005). *Software para la enseñanza de la derivada*. Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. México: Editorial Morevallado.

Confrey, J.(1993). *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations.* (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), April, 1993.

Duval R. (1988) *Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres*. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones:

la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

Hitt F. (2002) *Funciones en contexto*. México: Editorial Pearson Educación.

Hugues, D. (1990). *Visualization and Calculus Reform*. In Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19). Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

Mejía, H.(1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *VIII seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática*. Pp.315-322. México: Universidad de Sonora.

Pluvinage F. (2005) *Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo* en Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. México: Editorial Morevallado.

Scher, D.(1993). Student's Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics in College* (Fall): 3-17.

Wenzelburguer, E. (1993). *Cálculo diferencial*. México: Editorial iberoamérica.

APROXIMACIONES AL VALOR DE LA INTEGRAL DEFINIDA UTILIZANDO UNA CALCULADORA GRAFICADORA

Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Nelson Hernández Reyes, Pablo Gómez Fuentes, Débora Oliva Alfonso, Danelia Sánchez Camaraza
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría Cuba
e_hazday@yahoo.com, ecarlos48@yahoo.com, nelsonh@ind.cujae.edu.cu, pablog@ind.cujae.edu.cu
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. Este trabajo muestra una experiencia llevada a cabo con un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería a través de un curso facultativo en el que se retomó el cálculo de integrales definidas, utilizando la tecnología, con el propósito de:

- Consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica.
- Mostrar otras formas de calcular una integral definida mediante aproximaciones numéricas y su interpretación geométrica.

El recurso tecnológico utilizado en este caso fue una calculadora graficadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma desde el punto de vista geométrico y de programación, que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: integral definida, calculadora graficadora, métodos aproximados

Introducción

Este trabajo muestra una experiencia llevada a cabo con un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería a través de un curso facultativo en el que se retomó el cálculo de integrales definidas, utilizando la tecnología, con el propósito de consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica y de mostrar otras formas de calcular una integral definida mediante aproximaciones numéricas y su interpretación geométrica.

El recurso tecnológico utilizado en este caso fue una calculadora graficadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma desde el punto de vista geométrico y de programación, que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes. La calculadora se utilizó como un medio de enseñanza o sea como un instrumento o equipo que apoya la actividad de docentes y alumnos en función del cumplimiento del objetivo.

En el curso se calculó una integral definida utilizando la definición para diferentes particiones y se analizó la convergencia de la misma hacia su valor exacto, el mismo proceso se repitió utilizando el cálculo numérico mediante los métodos de Trapecios y Simpson para distintos números de subintervalos, y se compararon los mismos entre sí, analizando ventajas y desventajas.

Acerca de la definición de integral definida

Comencemos con un análisis de la definición de la integral definida, primero con una definición rigurosa.

DEFINICIÓN (Fikhtengol´ts, 1965).

Sea la función *f(x)* definida sobre el intervalo [a,b] . Formemos una partición del intervalo [a,b] subdividiendo arbitrariamente este intervalo al introducir entre a y b los puntos x_0, x_1, x_2, ..., x_n

La mayor de las diferencias

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,2,...,n-1)$$

será denotada por λ.

Tomemos algún punto arbitrario ξ_i en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \quad (i = 0,1,2,...,n-1)$$

y formemos la suma

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Ahora procedamos a establecer la existencia de un límite finito de esta suma

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

Supongamos que el intervalo [a,b] es dividido sucesivamente en partes, primero de una forma, luego de otra forma y así sucesivamente. Esta sucesión de particiones del intervalo será llamada “fundamental” si la correspondiente de valores $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ tiende a cero.

Entonces el límite $I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$ se entiende en el sentido de que la sucesión de valores de las sumas σ correspondientes a una sucesión fundamental arbitraria de particiones de el intervalo, siempre tiende a un límite I para todos los posibles valores de ξ_i

El límite finito I de la suma σ cuando $\lambda \to 0$ es llamado la integral definida de la función *f(x)* en el intervalo [a,b], y se denota por el símbolo

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

y la función *f(x)* se dice que es integrable sobre el intervalo [a,b].

Por lo general en los textos de Cálculo esta definición se “simplifica” al obtener “el límite” de las sumas de Riemann. Una definición de integral definida en un libro de Cálculo se trata de la siguiente manera:

Una vez obtenida la suma $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, si para cualquier partición del intervalo [a,b], existe $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ independientemente de los valores de ξ_i, entonces este límite se denomina integral definida de *f(x)* desde *x = a* hasta *x = b*. En esta definición el límite significa que, para una partición cualquiera del intervalo, si la norma de la partición λ está suficientemente cerca de cero, y siendo arbitrarios los números ξ_i en los subintervalos [x_i , x_{i+1}] de la partición, entonces cualquier suma de Riemann está cerca de *I*.

En esta definición, aunque se trate con rigor la definición de límite de una función, no se aprecia el sentido del “límite de la sucesión fundamental de particiones” y se “diluye” el concepto, se simplifica. La interpretación geométrica, en el mejor de los casos utilizando la tecnología, reafirma el concepto.

Otros métodos utilizados

En este curso se explicó además la utilización en el cálculo de integrales definidas de métodos aproximados: Métodos de los Trapecios y Método de Simpson.

El Método de los Trapecios se basa en dividir el intervalo de integración en n subintervalos de igual amplitud y descomponer la integral en n integrales. Cada integral se obtiene a partir de sustituir el integrando por un polinomio interpolador de primer grado, el cual cuando se integra, el resultado obtenido coincide con la fórmula para el área de un trapecio. Por tanto la suma de todos los resultados nos dará una aproximación del valor de la integral buscado. El Método de Simpson se basa en el mismo análisis anterior, pero el integrando es sustituido por un polinomio de segundo grado.

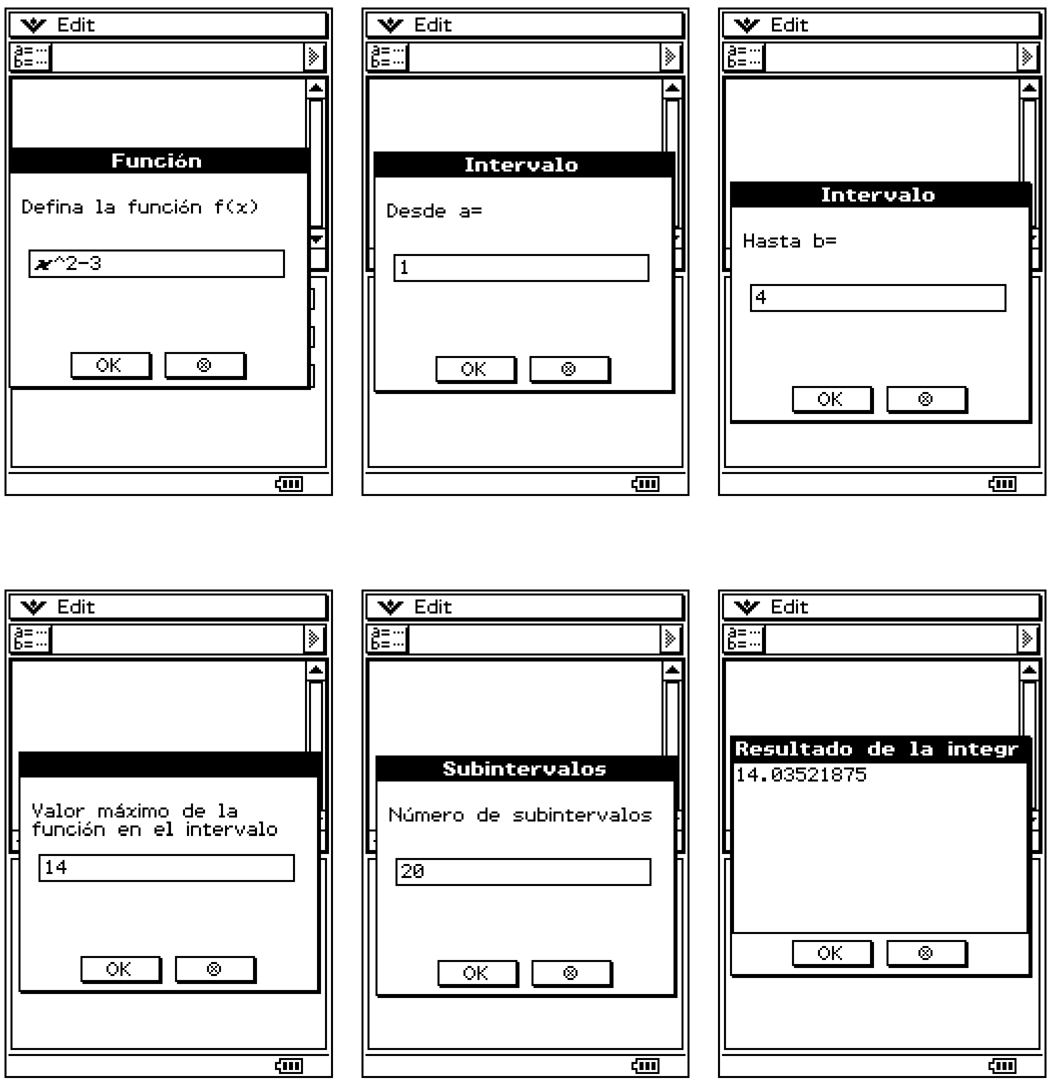
La experiencia metodológica

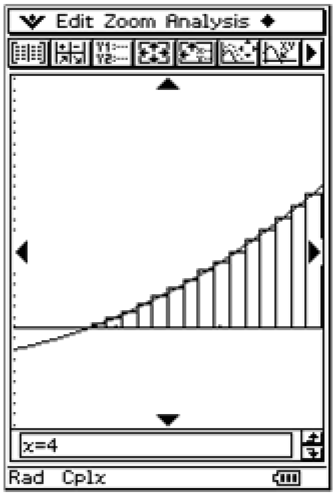
El presente trabajo muestra una experiencia metodológica en la cual se utiliza la calculadora graficadora. La calculadora no se utiliza como herramienta para hacer cálculos sino como un recurso didáctico, contribuyendo a crear un ambiente adecuado en el aprendizaje (Carlos y Fernández, 2005).

En la experiencia se puso en práctica el Principio Didáctico a partir del enfoque Histórico Cultural (Vigostky, 1966), relativo al Carácter Audiovisual de la Enseñanza y la Unidad de lo Concreto y lo Abstracto (Zilberstein, 2003)., que señala aquellas acciones específicas que son necesarias para revelar el contenido del concepto a formar y para representar este contenido primario en forma de modelos conocidos de tipo material, gráfico o verbal y además, proponerse que los estudiantes intervengan activa y conscientemente con los medios de enseñanza que están a su.

Para este curso se desarrollaron varios programas que permitieron analizar el concepto de integral definida para diferentes particiones, a partir de su interpretación geométrica, además de la convergencia de la misma hacia su valor exacto.

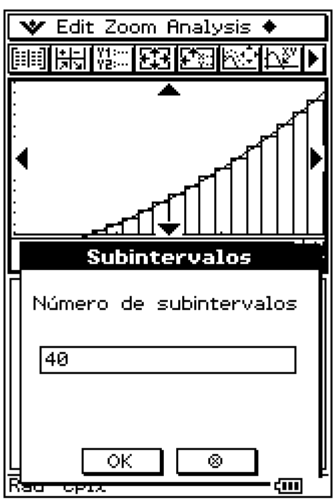
A continuación se muestran algunas pantallas de la calculadora CASIO Classpad 300, tomando como ejemplo la función f(x) = x2 - 3 en el intervalo (1;4), en las que se puede apreciar el concepto de integral a partir de diferentes particiones. Primeramente se realizó el cálculo tomando 20 subintervalos.

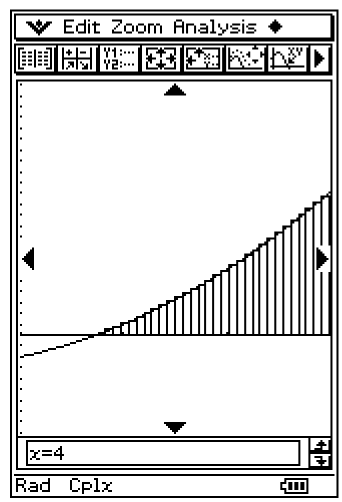




Como se observa no sólo se logra obtener el resultado de la integral sino que se puede visualizar gráficamente las particiones realizadas para el cálculo de la misma.

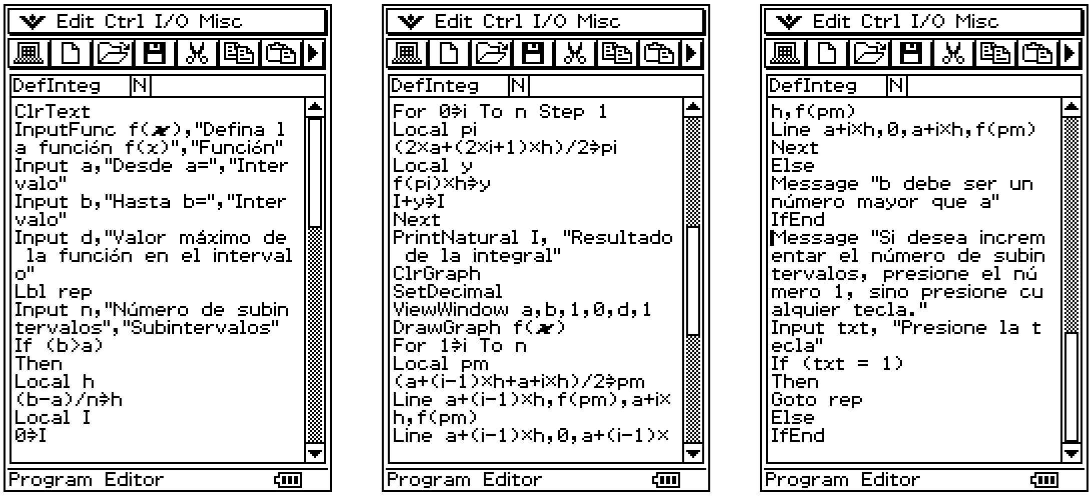
Posteriormente se realizaron los cálculos tomando el doble de los subintervalos. Este análisis se muestra en las siguientes pantallas de la calculadora.





De esta forma el estudiante puede observar y analizar que en la medida que aumenta la cantidad de subintervalos (las particiones tienden a cero) en que se divide el intervalo original, mejor es la aproximación de la integral.

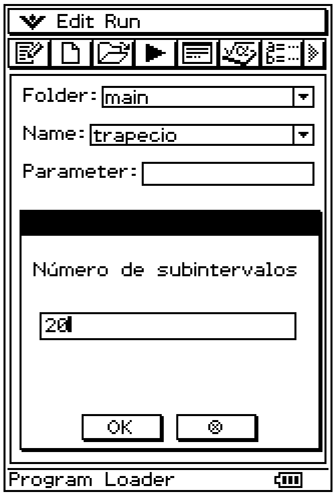
A continuación se muestra el programa utilizado para obtener los resultados mostrados anteriormente.

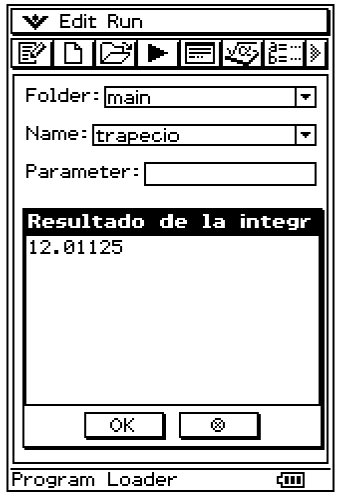


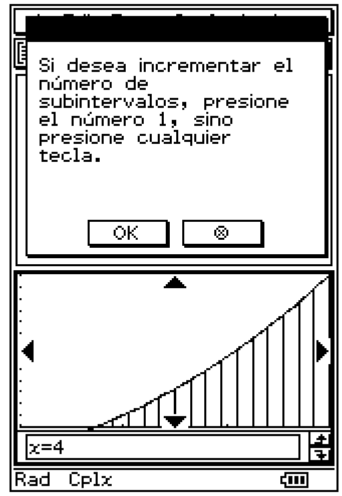
De igual forma, se realizó un programa que calculara las sumas inferiores, las superiores y la diferencia de ellas así como el gráfico de ambas. Permite a su vez, volver a realizar los cálculos disminuyendo la cantidad de subintervalos, demostrándose que en la medida que la diferencia entre las sumas superiores e inferiores tienda a cero la aproximación al valor real de la integral es mayor.

Para mostrar los resultados por el Método de los Trapecios y el Método de Simpson se utilizó la programación.

En el caso del Método de los Trapecios se muestra no sólo el resultado de la integral sino el gráfico correspondiente. Veamos algunas pantallas del mismo.







Para el Método de Simpson se incluyó la obtención del error por el método de doble cálculo. Este error no es más que el cálculo aproximado del mismo a partir del resultado de la integral con diferentes valores de la amplitud de los subintervalos, es decir, utilizando la fórmula $R_h \approx \dfrac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1}$.

Uno de los recursos que se utilizó para el estudio de los algoritmos fue el esquema de cálculo, con el cual se podía mostrar al estudiante, mediante la realización de varios pasos, la convergencia de un método (Carlos y Ansola, 2003).

Conclusiones

Los resultados de experiencias anteriores con el uso de esta tecnología muestran que los estudiantes consideran que la calculadora es una herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente y les permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa (Ansola y Carlos, 2006). En la experiencia presentada en este trabajo se reafirmó este criterio.

El uso de la tecnología no sólo permitió visualizar resultados que sin su uso hubiera sido muy engorroso mostrar en el pizarrón, sino que permitió hacer análisis comparativos de la convergencia de la definición al valor de la integral con distintas particiones, así como comparar resultados obtenidos con distintos métodos aproximados, todo lo cual redunda en el mejoramiento del aprendizaje del concepto. La calculadora se utilizó como un medio de enseñanza o sea como un instrumento o equipo que apoya la actividad de docentes y alumnos en función del cumplimiento del objetivo.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M, Guerra, A. y Lau, R. (2004). *Matemática Numérica*. La Habana. Cuba. Editorial Félix Varela.

Ansola, E., Carlos, E. (2006) “Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica”. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 19. pp. 930-935

Carlos, E., Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica. Experiencias didácticas. Resúmenes de la Séptima Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero, México. Diciembre de 2003.

Carlos, E., Fernández, L. (2005). La calculadora gráfica como recurso didáctico en el aprendizaje del cálculo de integrales dobles. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 18. pp.799-805

ClassPad 300 Guía del Usuario. (s. f.). Recuperado de http://world.casio.com/edu_e/

Fikhtengol´ts, G. M. (1965). *The Fundamentals of Mathematical Analysis.* Volume 1. USA: Pergamon Press.

Martín, A. (2000). *CÁLCULO 2000*. *Matemática con calculadora gráfica.* Barcelona, España. División Didáctica Calculadoras Científicas CASIO.

Preiss, R, Arancibia, S, Riera, G., Moscoso, E. (2003). Optimización de la programación con calculadoras y su aplicación en la Matemática. En Preiss, R. (Eds.). *Programación en calculadoras y su optimización.* (pp. 1-47). Santiago, Chile. Edición Unidad Diego Portales.

Stewart J. (2002). *Cálculo. Trascendentes Tempranas. Cuarta Edición.* México: Thomson Learning.

Vigostky, L. S. (1966). *Pensamiento y Lenguaj*e. La Habana, Cuba: Edición Revolucionaria.

Zilberstein, J. (2003). Principios Didácticos en un Proceso de Enseñanza- Aprendizaje que Instruya y Eduque. En Preparación Pedagógica Integral para Profesores Universitarios (pp. 19 - 31). La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON CALCULADORAS GRAFICADORAS

Nelson Hernández Reyes, Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Pablo Gómez Fuentes
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría Cuba
nelsonh@ind.cujae.edu.cu, e_hazday@yahoo.com, ecarlos48@yahoo.com, pablog@ind.cujae.edu.cu
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Como parte de la preparación matemática de un grupo seleccionado de estudiantes de nivel medio, se impartió un curso que incluye los tres grandes grupos de problemas de la Geometría: cálculos, demostraciones y construcciones geométricas. Los objetivos propuestos para el tema de construcciones geométricas fueron los siguientes:*

- *Consolidar los conocimientos de Geometría adquiridos por los estudiantes en el nivel de Secundaria Básica.*
- *Desarrollar en los estudiantes habilidades en la construcción de figuras geométricas utilizando lugares geométricos conocidos.*

Este curso se diseñó con las calculadoras graficadoras y para ello se utilizó la calculadora Casio ClassPad 300.

Palabras clave: calculadora graficadora, construcciones geométricas

Introducción y objetivo

En las etapas iniciales, la enseñaza de la geometría tiene por objeto, además de comunicar a los alumnos los resultados geométricos, darles a conocer el método con la ayuda del cual se obtienen estos resultados. Sabido es que los resultados geométricos son obtenidos por medio de razonamientos lógicos a partir de determinados planteamientos.

Los razonamientos lógicos son parte indispensable de todo el saber, y la geometría se destaca por la claridad y sencillez tanto en el enunciado del resultado como en los planteamientos de partida, de donde se obtendrán los resultados deseados. Es por esto que la geometría nos brinda muchas oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en nuestros educandos.

Al impartir este curso partimos de que la tarea esencial de la enseñanza de la geometría en la escuela consiste en conducir al alumno a razonar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostrarlas.

En el trabajo con la geometría se presentan tres grandes grupos de problemas:

- Problemas de cálculo.
- Problemas de demostración.
- Problemas de construcción.

Estos últimos son los menos tratados en nuestros programas escolares, sin embargo, las construcciones geométricas contribuyen al desarrollo de la búsqueda de soluciones y al entrenamiento en las demostraciones.

Actualmente, en nuestra enseñaza, estos contenidos son abordados con regla y compás y uno de nuestros propósitos es introducir el uso de la tecnología, en particular el trabajo con calculadoras graficadoras Casio ClassPad 300.

Un aspecto notable en el uso de la tecnología es que permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas (Santos, 2000).

La experiencia

Este trabajo consistió en desarrollar encuentros sobre construcciones geométricas haciendo uso de la tecnología, con estudiantes que aspiran a matricular carreras con amplia base matemática.

En la experiencia se puso en práctica el Principio Didáctico a partir del enfoque Histórico Cultural (Vigostky, 1966), relativo al Carácter Audiovisual de la Enseñanza y la Unidad de lo Concreto y lo Abstracto (Zilberstein, 2003)., que señala aquellas acciones específicas que son necesarias para revelar el contenido del concepto a formar y para representar este contenido primario en forma de modelos conocidos de tipo material, gráfico o verbal y además, proponerse que los estudiantes intervengan activa y conscientemente con los medios de enseñanza que están a su alance.

En estos encuentros se abordaron dos componentes, uno directamente relacionado con el manejo de tecnología y otro de índole matemático, ambos factores necesarios para el estudio actual de las Matemáticas de la Enseñanza Superior.

El primer componente, de índole tecnológica, se alcanza mediante la utilización de la calculadora graficadora Casio ClassPad 300. La calculadora gráfica como herramienta tecnológica nos ofrece la posibilidad de despertar el interés del estudiante y estimular su comprensión. (Edwards, 2000)

El segundo componente, de índole matemática, es emprendido a través de actividades que apuntan al esfuerzo lógico, analítico y/o crítico, abordando temas básicos de la geometría que son primordiales para el estudiante, a la hora de enfrentar con éxito sus exámenes de ingreso así como el primer semestre de la Universidad.

Estos encuentros forman parte de un curso facultativo para aquellos estudiantes que lo soliciten.

¿En qué consisten los problemas de construcción?

En estos problemas se trata de construir una figura geométrica con instrumentos de dibujo dados, usualmente son la regla y el compás los cuales se sustituyen por la calculadora.

La solución del problema consiste no tanto en la construcción de la figura como en explicar el modo en que se realiza y en efectuar la demostración correspondiente. El problema se considera resuelto si se ha señalado el método de construcción de la figura y se ha demostrado que realizando las construcciones indicadas se obtiene efectivamente la figura con las propiedades pedidas.

Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permiten transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones. (Arcavi y Hadas, 2000)

Las ventajas antes señaladas se pusieron de manifiesto en los problemas resueltos, pues con el uso de la tecnología podemos conservar la construcción ya realizada, realizar reflexión, traslación, rotación, dilatación y transformación general, de forma tal que los alumnos pueden en algunas ocasiones comprobar que su intuición del problema a resolver era correcta. También pueden comprobar si las soluciones que se obtienen son únicas así como encontrar vías para realizar las demostraciones, sobre todo aquellas que se efectúan por movimientos, las cuales, nuestra experiencia como docentes nos ha mostrado, que muy pocos estudiantes acuden a ellas.

De igual manera el ambiente dinámico les permite descubrir que hay problemas que tienen soluciones sujetas a determinadas condiciones. Por lo que no nos cabe duda que las posibilidades de éxito ante un problema de un estudiante que haya sido preparado con el uso de la tecnología son mayores, aun no disponiendo en ese momento de la calculadora o computadora, ya que lo importante no es el uso de la tecnología para resolver el problema, sino todos los análisis, reflexiones que nos permite hacer la tecnología para reforzar las estrategia a la hora de resolverlo.

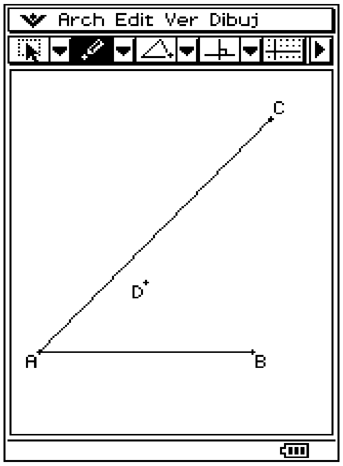
Veamos lo anterior a partir de un ejemplo.

Se da un punto D dentro de un ángulo CAB. Se requiere trazar una recta l por el punto M de tal manera que forme con dicho ángulo un triangulo de área mínima.

Para resolver el problema debemos plantarnos dos casos.

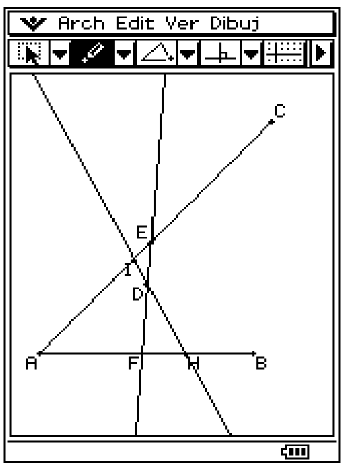
- El ángulo dado es agudo
- El ángulo dado es obtuso

Ocupémonos del primer caso cuando el ángulo dado es agudo.

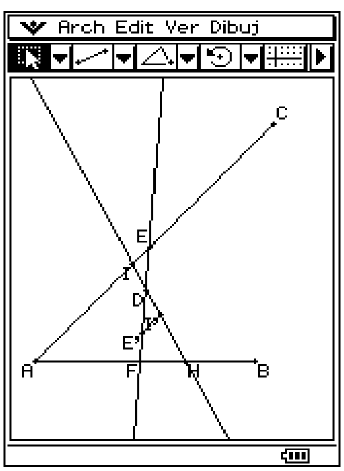


Observemos que en el punto D se pueden trazar infinitas rectas que determinen un triángulo con el ángulo dado, se trata de encontrar aquella que determine el triángulo de área mínima.

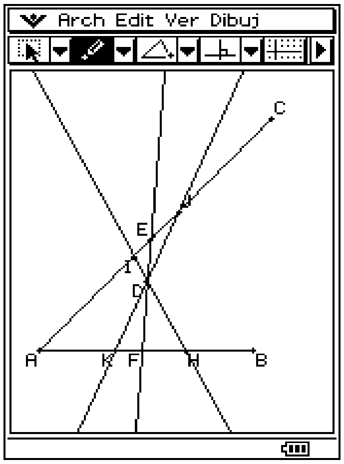
Tracemos una recta cualquiera y analicemos si es posible disminuirle el área al triángulo formado.

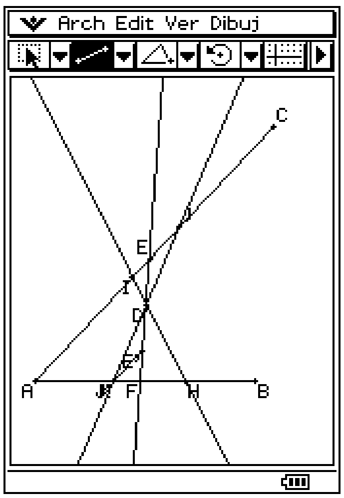


Al trazar la recta IH obtenemos el triángulo AIH y al trazar la recta EF se tiene el triángulo AEF el cual tiene un área menor que el primero luego la recta IH no puede ser la recta deseada



Observemos que si realizamos una rotación de centro en D y ángulo de 180^o sobre los puntos E e I se obtienen las imágenes E' e I' y por tanto los triángulos IED y $DE'I'$ son iguales lo que nos muestra que el área del triángulo AEF es menor que la del AIH.





Al trazar JK se obtiene el triángulo AJK cuya área es menor que la del triángulo AEF por tanto EF no era la recta deseada. Pues rotando los puntos E y J con centro en D podemos comprobar lo antes planteado.

La pregunta sería ¿hasta cuando se podrá seguir minimizando el área del triángulo?, el alumno podrá seguir trazando rectas hasta que logre conjeturar que esto sucederá cuando D sea el punto medio del segmento que determina la recta al cortar los lados del ángulo.

Ahora nos queda formalizar nuestro problema, en primer lugar construir la recta y posteriormente realizar la demostración del triángulo de área mínima.

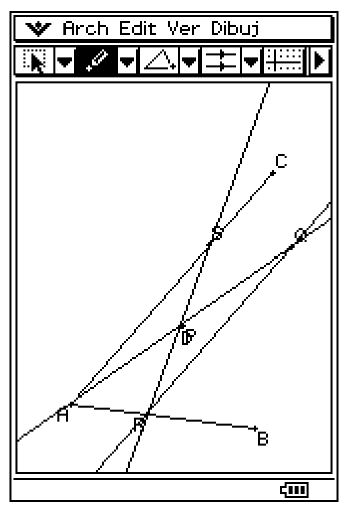
Construcción

Tracemos la recta AD.

Marquemos en ella el segmento AD =DQ.

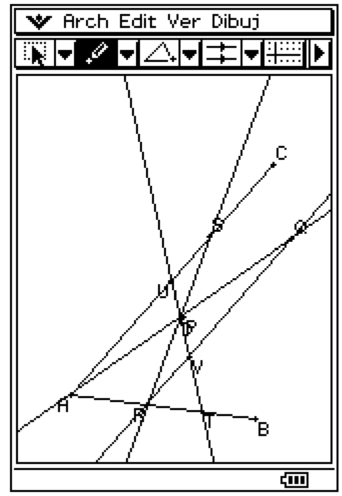
Por el punto Q tracemos una recta paralela a uno de los lados del ángulo (AC) hasta que corte al otro lado en el punto R.

La recta buscada pasa por los puntos RD



Demostración

Para realizar la demostración realicemos los razonamientos que nos llevaron a encontrar la recta deseada. Sea l una recta arbitraria que pasa por el punto D y corta a los lados en los puntos U y T.



Como el triángulo UDS es igual al triángulo DRV por (ala) Entonces el triángulo ASR y el cuadrilátero AUVR tienen igual área cuya área es menor que la del triángulo AUT

Si el ángulo es obtuso, la construcción se efectúa de modo análogo (el lector puede hacerla)

De manera general, el software funciona como una herramienta útil para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las soporten. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de software (Santos, 2001).

Conclusiones

La experiencia obtenida en este trabajo demostró que el uso de la tecnología favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, lo cual se manifestó en la motivación de los estudiantes al abordar los problemas, conjeturar resultados y demostrar los mismos.

Además se corroboró que a partir de la realización de los problemas propuestos los estudiantes aumentaron sus habilidades en la utilización de la calculadora incluso para resolver otros problemas matemáticos, lo cual sirvió para proponer la realización de diferentes cursos abordando otras temáticas.

Se comprobó que los estudiantes que asistieron a este curso obtuvieron mejores resultados en las evaluaciones realizadas en su curso académico. Esta herramienta, puede apoyar funciones cognitivas como la visualización o entendimiento a partir de las representaciones geométricas que proporciona.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A., Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp.25-45.

ClassPad 300 Guía del Usuario. (s. f.). Disponible en : http://world.casio.com/edu_e/

Edwards,B. (2000). Motivando temas de matemáticas con la calculadora gráfica. *Revista de didáctica de las matemáticas*. Volumen 41, pp. 45–48.

Lidski. V. (1986). *Problemas de matemática elemental*. Moscú: Editorial Mir.

Muñoz, F., Campistrous, L. (1981). *Problemas de matemática elemental*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Pogorelov, A.V. (1974). *Geometría Elemental*. Moscú: Editorial Mir.

Santos, L. M. (2001). El Uso de Software Dinámico en el Desarrollo de Significados y Conexiones en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Memorias Conferencia Internacional Sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Santos, M. (2000). Students' approaches to the use of technology in mathematical problem solving. Paper presented at the working group *Representation and Mathematics Visualization. PMENA*, Tucson, Arizona.

Tsipkin, A.G. (1979). *Manual de Matemática para la Enseñaza med*ia. Moscú: Editorial Mir.

Vigostky, L. S. (1966). Pensamiento y Lenguaje. La Habana: Edición Revolucionaria

Zilberstein, J. (2003). Principios Didácticos en un Proceso de Enseñanza- Aprendizaje que Instruya y Eduque. En *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Universitarios* (pp. 19 - 31). La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

ASISTENTE MATEMÁTICO. HERRAMIENTA NECESARIA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Pedro Castañeda Porras, Arely Quintero Silverio, Eugenio Hernández Vargas
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca" Cuba
pcasta@mat.upr.edu.cu; arelys@mat.upr.edu.cu ; eugenio@mat.upr.edu.cu
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se propone el uso de un Asistente Matemático en la carrera de Ciencias Técnicas. Se persigue que el uso de este asistente matemático conlleve a un perfeccionamiento dentro del proceso docente-educativo, que ponga al estudiante como centro del mismo, a través del uso de métodos y técnicas participativas, donde el alumno se sienta inmerso en este desarrollo (Castañeda, 1998). La introducción del asistente matemático como herramienta de trabajo en la Disciplina Matemática actuará como un nuevo elemento Didáctico Integrador en las carreras de Ciencias Técnicas. El uso del asistente matemático se ha ido incrementando paulatinamente y actualmente se hace una necesidad como un elemento más dentro del proceso Enseñanza – Aprendizaje. (Castañeda, 2001).*

Palabras clave: tecnología. DERIVE.

Desarrollo

Todo educador está de acuerdo en que la enseñanza actualmente tiene que ser formativa y contribuir a desarrollar el pensamiento creador. No obstante, la experiencia en la enseñanza de la Matemática en aquellas carreras que la utilizan como instrumento de trabajo, ha permitido lograr que esta ciencia sea el lenguaje a través del cual el futuro especialista se forme, no sólo, las representaciones sobre los problemas planteados en su profesión, sino también logre encontrar las soluciones a estos problemas.

Un Asistente Matemático es una herramienta computacional que permite dar solución a problemas de manera más asequible para el estudiante y favorece la interiorización de los conceptos y procedimientos de modo que estos permanezcan a más largo plazo, su carácter interactivo permite una retroalimentación inmediata, además de ampliar el abanico de manipulaciones posibles y el de visualización. Su capacidad gráfica facilita la integración de diversas imágenes conceptuales, que constituyen un obstáculo para el aprendizaje (Miyar y Legañoa, 2007).

En este trabajo se propone el uso de Asistentes Matemáticos como una herramienta importante para la solución de problemas en las carreras de Ciencias Técnicas. Esto coadyuvará al desarrollo de un pensamiento productivo y creador.

La incorporación de asistentes matemáticos a la enseñanza no debe verse sólo como medio didáctico, sino que debe significar una innovación importante que conducirá a profundos cambios de los objetivos, contenidos y métodos de enseñanza, sin dejar de tomar en consideración sus influencias positivas y negativas.

Ventajas y Desventajas en la utilización de la computación con fines docentes

Por ningún profesor son puestas en dudas las ventajas que tiene la introducción de la computación en la docencia, sólo que en ocasiones no se tienen en cuenta los inconvenientes. Entre las ventajas se pueden mencionar (Pérez, J. 1996):

• Ayuda a progresar hacia niveles superiores de pensamiento formal.

• Facilita la integración de diversas imágenes conceptuales, a través de su capacidad gráfica, que de no producirse serían un obstáculo para el aprendizaje.

• Amplía el abanico de manipulaciones posibles y el de visualización.

• Favorece la interiorización de los conceptos y procedimientos, de forma que éstos permanezcan a más largo plazo.

• Propicia la investigación y el descubrimiento.

• Facilita el desbloqueo del estudiante en la resolución de problemas, en la medida en que permite experimentar con rapidez y seguridad.

• Provoca una retroalimentación inmediata, debido a su carácter interactivo.

Sin embargo, la utilización de la computación en la enseñanza puede traer cierto peligro. Es por ello que se debe tener presente que los sistemas de cálculo simbólico no son la solución general, aunque sí pueden contribuir, integrados dentro de una metodología adecuada, a mejorar la calidad de la enseñanza. Esto sería desde dos vertientes: *como medio para mejorar el aprendizaje y como herramienta con la que los alumnos deben familiarizarse para una adecuada formación* (Rey, A. y Sarría, J., 2007).

Algunas de las desventajas de la utilización de la computación en la enseñanza, que deben ser vigiladas por el profesor y que se tuvieron en cuenta en el desarrollo de la experiencia expuesta en este trabajo son:

• Que el "Programa" se convierta en sujeto en lugar de la Matemática.

• Que se confíe en la mera interacción entre el alumno y la computadora en el proceso docente.

• Que se pierdan destrezas básicas para interpretar el modelado o respuesta de un problema.

• Que se asuman respuestas no esperadas.

• Que las dificultades en el aprendizaje de un programa dado lleguen a ser un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas.

• Que se produzca una excesiva dependencia del asistente matemático.

De esta manera, las nuevas tecnologías no ofrecen solo una nueva herramienta para realizar con nuevas estrategias las tareas de siempre, sino que pueden transformar la naturaleza de los problemas que se plantean. Sin dudas con la introducción del asistente matemático es posible incrementar el número de experiencias personales del alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que éste puede resolver personalmente gran cantidad de problemas y profundizar en su estudio e interpretación. En la gran mayoría de las teorías pedagógicas, los conocimientos son adquiridos a través de experiencias personales. Se puede suponer que el incremento de éstas facilitará la adquisición de los conocimientos por parte de los estudiantes. "*Estas experiencias están sustentadas por el método de descubrimiento desarrollado por David Ausubel, el cual consiste en que el docente debe inducir a que los alumnos logren su aprendizaje a través del descubrimiento de los conocimientos. Es decir, el docente no debe dar los conocimientos elaborados sino orientar a que los alumnos los descubran progresivamente a través de experimentos, investigación, ensayos, error, reflexión, discernimiento, etc. Las diferencias con otros métodos didácticos están relacionadas con la filosofía educativa a la que sirven, con los procesos que desarrollan y con los resultados que logran. Este tipo de técnicas pretenden que el alumnado se convierta en agente de su propia formación, a través de la investigación personal, el contacto con la realidad objeto de estudio y las experiencias del grupo de trabajo*…". (Infantas, L. 2007, s/n).

Con esta nueva propuesta metodológica es posible obtener logros importantes en el proceso de enseñanza aprendizaje:

- **El problema se hace más asequible:** La parte del problema que tiene que resolver el alumno no incluye los cálculos "engorrosos y rutinarios", ahora los realiza el asistente matemático, por tanto el alumno se adentra más en la parte física del problema.
- **La confianza en los cálculos:** El alumno se siente seguro en los cálculos que ha realizado el asistente, por lo que tendrá también una seguridad en los cálculos que él realiza.
- **La Práctica:** La cantidad de ejercicios y problemas que realiza el alumno con el uso del asistente matemático será mucho mayor. Por lo tanto se habrán incrementado el número de experiencias personales.

No obstante no se pueden obviar algunas precisiones para evitar se produzcan dificultades que entorpezcan el buen desenvolvimiento del proceso. Con este fin se deben considerar los siguientes aspectos:

1. Los problemas deben ser elegidos cuidadosamente para que puedan ser resueltos sin dificultad con la ayuda del asistente y para que contengan la parte de razonamiento y cálculos que interesa que desarrolle el alumno.
2. El profesor debe tener un dominio de la informática y del asistente.
3. El asistente matemático debe ser muy fácil de manejar, no se trata de dar una asignatura sobre un asistente, sino de utilizar las facilidades de éste.
4. El asistente matemático debe realizar "exclusivamente" los cálculos engorrosos, no interesa que pueda resolver completamente los problemas.
5. Se debe dedicar un tiempo de docencia a la explicación de cómo utilizar el asistente matemático.

Entre las diferentes opciones de asistentes matemáticos se sugiere el uso del DERIVE, MATLAB, del MATHEMATICA. A continuación mostraremos algunos ejemplos resueltos a través del DERIVE. Se utiliza este asistente por ser asequible, amigable, fácil de manejar por el estudiante y estar disponible libremente en Internet, además de ocupar poca capacidad de memoria. Se resuelven por, este medio, problemas de Cálculo Avanzado, tales como:

a) Convergencia de series numéricas (Ejemplo: Utilizando el criterio de la integral).

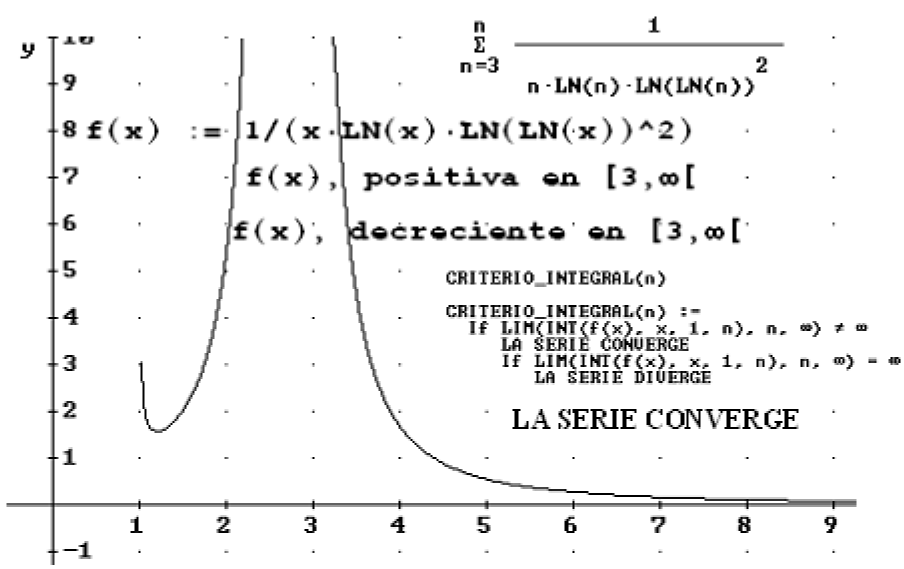
b) Resolución numérica de ecuaciones (Ejemplo: Localización de raíces).

c) Resolución de problemas que conducen a ecuaciones diferenciales (Ejemplo: Trayectorias ortogonales).

Para dar solución a estos problemas a través del uso del asistente matemático se necesita seguir la siguiente metodología de trabajo:

1. Realizar un diagnóstico del problema. Luego de una lectura detallada de la situación planteada el estudiante debe decidir qué teoría y técnicas matemáticas utilizar.
2. Diseñar las tareas para dar solución al problema. En las tareas el estudiante debe representar o formular matemáticamente lo más fiel posible el problema planteado y determinar el algoritmo de trabajo a seguir.
3. Ejecutar el proceso de solución. Con la ayuda del asistente matemático el estudiante debe introducir correctamente los datos y auxiliarse de algunos ficheros que ya existen en el mismo o hacer una programación sencilla que le permita arribar a la solución del problema.
4. Evaluar los resultados. Luego de obtenida la solución, el estudiante debe dar respuesta al problema, con la debida interpretación de los resultados. Aquí se produce la integración de los conocimientos referidos a las diferentes asignaturas dentro de la disciplina.

a) Series numéricas



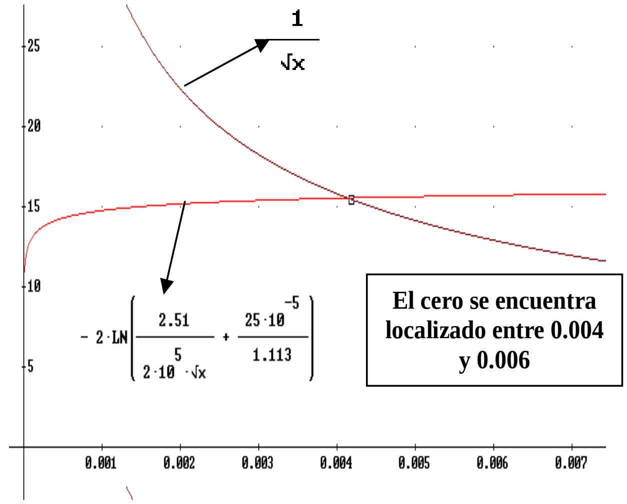
Resolución numérica de ecuaciones no lineales.

b) Resolución numérica de ecuaciones

LOCALIZACION DE LA RAIZ.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\cdot LN\left(\frac{2.51}{2\cdot 10^{5}\cdot\sqrt{\lambda}} + \frac{25\cdot 10^{-5}}{1.113}\right)$$

$$-\frac{1}{2\cdot\sqrt{\lambda}} = LN\left(\frac{2.51}{2\cdot 10^{5}\cdot\sqrt{\lambda}} + \frac{25\cdot 10^{-5}}{1.113}\right)$$



ECUACIONES DIFERENCIALES

c) Resolución de problemas que conducen a ecuaciones diferenciales

APLICACIONES GEOMETRICAS

•Trayectorias isogonales.

$$F\left(x, y, \frac{y^{1}-k}{1+ky^{1}}\right) = 0$$

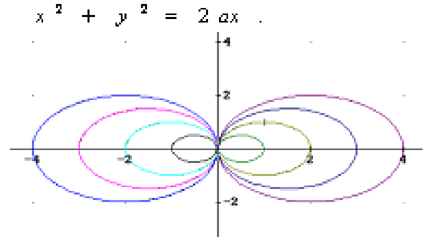
•Trayectorias Ortogonales

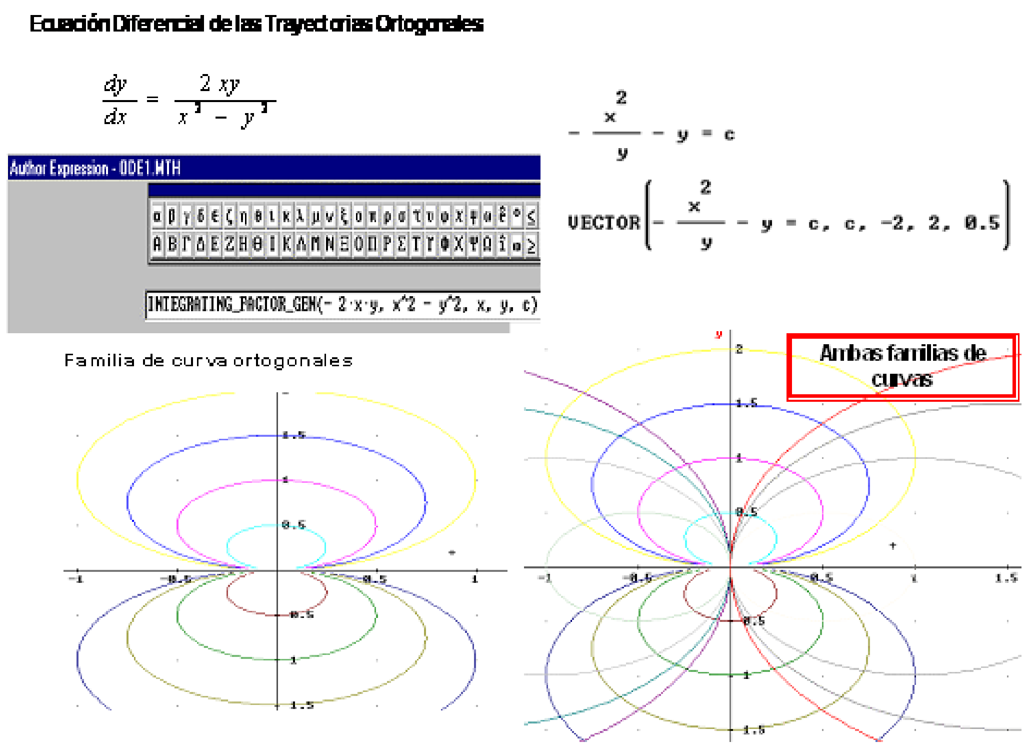
$$F\left(x, y, -\frac{1}{y^{1}}\right) = 0$$

PROBLEMA:

Hallar la ecuación de la familia de las curvas que son ortogonales a la familia.

$x^{2} + y^{2} = 2ax$.





Conclusiones

El uso de un asistente matemático en la disciplina matemática para las Ciencias Técnicas permite:

1. Que el problema a resolver sea más asequible para el estudiante, que el alumno adquiera mayor confianza en sí debido a los cálculos que realiza, así como que se incremente el número de experiencias personales en la solución de problemas.
2. Que los estudiantes conozcan más profundamente los algoritmos, se sientan más motivados hacia la asignatura debido a un mayor acercamiento a la solución de problemas más relacionados con su perfil profesional, con menos cantidad de cálculos manuales.

3. Que el estudiante pueda ampliar, organizar, visualizar y realizar múltiples representaciones del conocimiento que se le imparte, lo que puede tributar a mejorar su comprensión conceptual del problema.

Referencias bibliográficas.

Castañeda, P. (1998). *Propuesta de Diseño de la Asignatura Matemática III para la carrera de Telecomunicaciones y Electrónica Aplicando un Asistente Matemático*. Tesis de Maestría, Habana, Cuba.

Castañeda, P. (2001). Necesidad actual del uso del ordenador en el aprendizaje de la Matemática. En Universidad Politécnica de Valencia (Eds.), *Experiencias Matemáticas y Didácticas en la Universidad de Pinar del Río* (pp. 523-528). Valencia, España. I.S.B.N. 84-699-4419-3.

Infantas, L. (2007). *Métodos activos y Técnicas Didácticas aplicables a la educación Inicial, Primaria, Secundaria y Superior*. [En red]. Mayo 2007. Disponible en: http://www.monografias.com/trabajos51/metodos-didacticos/metodos-didacticos.shtml?monosearch.

Miyar I. y M. Legañoa (2007). *Empleo de los Asistentes Matemáticos para la asimilación conceptual del álgebra universitaria*. [En red]. Abril 2007.Disponible en: http://www.ead.urbe.edu/aiesad/docs/15dejunio/metodologia para la asimilacion-ileana miyar-15.ppt.

Pérez F. J. (1996). Los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas. En Sevilla, España (Ed.), *Selección de Conferencias 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática.* (pp. 345-368), Sevilla España.

Rey, A. y Sarría, J. (2007). *Utilización de Asistentes Matemáticos en la Docencia.* [En red]. Abril 2007. Disponible en: http://www.monografias.com/trabajos29/utilizacion-asistentes-matematicos-docencia/utilizacion-asistentes-matematicos-docencia.shtml#a3ventaja.

ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON EL USO DE TIC'S

Estela Torroba, Marisa Reid, Nilda Etcheverry
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales . UNLPam. Argentina
mareid@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Visualización Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se presenta el relato de una experiencia desarrollada con estudiantes universitarios para desarrollar el tema ecuaciones diferenciales ordinarias mediante una propuesta didáctica diferencial basada en la visualización.*

El objetivo de este trabajo es mostrar las interacciones que se producen en estas situaciones de enseñanza y el papel que desempeña la visualización, favorecida por las herramientas que brindan los softwares Derive y Cabri.

Se reportan observaciones que muestran características del trabajo realizado por estudiantes y docentes en el ambiente en el cual se llevó a cabo la experiencia y algunas conclusiones vinculadas con el rol de la visualización en los procesos de resolución de situaciones problemas.

Palabras clave: límite, tecnología, enseñanza, aprendizaje

Introducción y objetivo

En este trabajo se presenta el relato de una experiencia desarrollada con estudiantes universitarios para introducir el tema ecuaciones diferenciales ordinarias mediante una propuesta didáctica diferencial basada en la visualización.

Nuestra experiencia docente en la enseñanza del Cálculo y la gran cantidad de investigaciones realizadas convergen en que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo. Acordamos con lo expresado por Artigue (1998), "*en el plano didáctico hay que reconocer que la enseñanza tradicional algebraica y muy algoritmizada, es una enseñanza que no plantea problemas y que corresponde a un nivel de exigencia mínima, tanto para los estudiantes como para los profesores*" (p. 129).

Nuestro interés al realizar esta experiencia fue abordar los conocidos obstáculos conceptuales en la comprensión de las ecuaciones diferenciales proponiendo una nueva secuencia de aprendizaje construida sobre la base de la visualización.

Por visualización entendemos el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología. La visualización es empleada con el objetivo de estimular el proceso de descubrimiento matemático a fin de conseguir una mayor comprensión matemática (Zimmermann & Cunningham, 1991).

El significado de las ecuaciones diferenciales ordinarias es de fundamental importancia para la formación de un profesional, ya sea por el innumerable campo de aplicaciones como por el carácter integrador que tiene esta teoría. Al tratarse de un tema de una asignatura cuatrimestral, con gran cantidad de contenidos a desarrollar y tiempo limitado para el aprendizaje de los mismos, decidimos priorizar que los alumnos tuvieran una idea global y más completa de las ecuaciones diferenciales, aunque quizás más intuitiva y menos formal.

Nuestra intención es desarrollar en los alumnos la visualización matemática, entendiéndola como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual generada a través del uso de tecnología.

De la experiencia realizada mostraremos aquí algunos episodios y nos proponemos describir y analizar:

1. Tipo de argumentaciones matemáticas utilizadas por los alumnos para justificar sus afirmaciones o validar sus conjeturas.
2. Las relaciones profesor-alumno-conocimiento matemático al trabajar en un ambiente computacional a partir de un nuevo abordaje de contenidos matemáticos.

En las siguientes secciones describiremos, sintéticamente, el grupo de estudiantes que participó de la experiencia, las tareas propuestas, los softwares utilizados y la forma en que se registraron las actividades desarrolladas por el grupo de estudiantes para su posterior análisis.

Grupo de estudiantes y planificación de las tareas

La propuesta que aquí se relata se desarrolló durante el segundo cuatrimestre del año 2006 con alumnos que cursaban la asignatura Análisis II correspondiente a las carreras Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estuvo organizada de la siguiente manera:

1. Clase de introducción del tema Ecuaciones Diferenciales, usando el software Cabri II Plus.
2. Dos clases en la sala de computación con el software Derive considerando aspectos gráficos y algorítmicos del concepto.

Todas las clases tuvieron una duración de dos horas.

Clase introductoria usando el software Cabri II Plus

Esta clase para introducir el tema ecuaciones diferenciales se desarrolló en el horario habitual de clase de la asignatura Análisis II y a la misma asistieron veintidós alumnos de las carreras Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática.

La profesora responsable del dictado de la asignatura, que es una de las autoras de este trabajo, fue quien llevó adelante la clase y otra de las autoras, colaboró realizando construcciones con la computadora que se proyectaban en el pizarrón usando el cañón e interactuando con la docente en las explicaciones.

El desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática podrá impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos propios del cálculo. El diseño de nuevos materiales es imperativo para este desarrollo integral, y no como hasta ahora se ha realizado, en donde se enfatiza en demasía un solo tipo de representación, que es el algebraico. Es necesario romper con esa idea y proporcionar al estudiante una noción más rica que le permitan realizar tareas más profundas cuando está aprehendiendo conceptos del cálculo.

En el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales el registro gráfico juega un papel central y para instrumentar este escenario se requiere de la tecnología para explorar aspectos que surjan de la visualización.

Luego de definir y clasificar las ecuaciones diferenciales se presentó la siguiente ecuación diferencial: $y' = -x/(4y)$ con el objeto de estudiar las propiedades de las soluciones de la misma a partir de su campo direccional.

En esta oportunidad se trabajó con el software Cabri II Plus que permite la construcción de segmentos de pendiente asociados a la ecuación y de campos de pendientes cuya construcción paso a paso permite “ver” las curvas de la familia solución. Para obtener estos segmentos se procedió del siguiente modo:

En un punto cualquiera del plano cartesiano (x_0, y_0) se construyeron dos vectores paralelos a los ejes con origen en ese punto. El vector vertical de longitud $-x_0/(4y_0)$, y el horizontal de longitud uno. El vector suma de ellos se encuentra sobre una recta de pendiente $-x_0/(4y_0)$. Marcamos sobre el mismo un segmento con uno de sus extremos en el punto (x_0, y_0). Posteriormente con la rejilla de puntos se puede obtener el campo de direcciones como el lugar geométrico de los segmentos tangentes cuando éstos se desplazan sobre la rejilla.

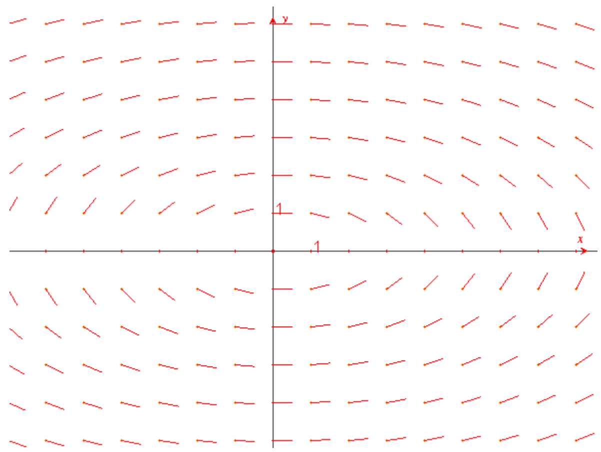


Figura 1

Observando el campo de direcciones se puede identificar que las curvas solución son elipses con centro en el origen de coordenadas.

A continuación se realizó un trabajo exploratorio ubicando los segmentos de igual pendiente y trazando las isoclinas correspondientes, como se observa en la Figura 2.

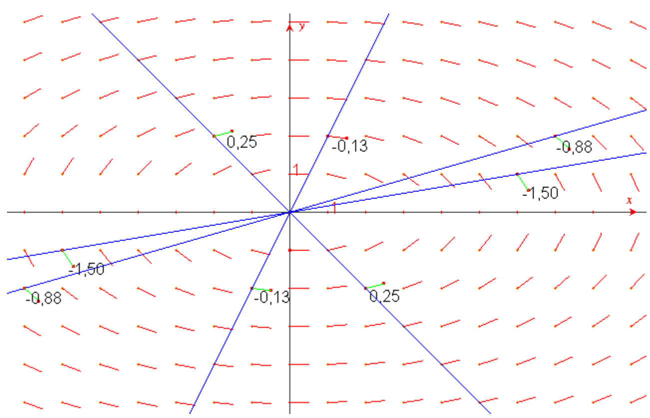


Figura 2

Posteriormente se trabajaron con otras ecuaciones diferenciales y mediante la construcción de campos direccionales pudieron visualizar la forma general de las curvas solución.

Se presentó un enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales oponiéndose a la enseñanza tradicional que potencia el enfoque algebraico sobre el gráfico y el numérico, y favorece el carácter mecánico e instrumental permitiendo que los estudiantes desarrollen una visión limitada y restringida en la búsqueda de la solución de las ecuaciones diferenciales.

> "*Conceptualmente, el papel visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y... en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido*" (Zimmermann, 1990, p. 136).

Clase en la sala de computación

En estas dos clases los alumnos disponían de una computadora cada una equipada con el software Derive 5. Coordinando la clase se encontraba la profesora responsable de la asignatura y otra de las autoras de este trabajo participó como observadora.

Los alumnos tenían conocimiento del software ya que en la primer clase práctica de la asignatura fueron introducidos los comandos básicos del programa. Este software fue seleccionado por ser de fácil manejo, no requerir de conocimientos previos de computación o programación y posibilitar el tratamiento de los contenidos matemáticos propuestos.

A cada alumno se le entregó una guía de actividades para ser resultas utilizando el software. Al término de la clase debían entregar los trabajos realizados.

Las actividades que se propusieron priorizaban la articulación de registros de representación asociados a la ecuaciones diferenciales ordinarias, las tareas consistían en:

- resolución de ecuaciones diferenciales usando los enfoques analítico y cualitativo.

- resolución de situaciones que corresponden a crecimiento y decrecimiento de poblaciones, enfriamiento, etc.

A continuación se muestran ejemplos de cada una de esas tareas:

Para las ecuaciones diferenciales $y' = 1/y$ y $y' = x^2/y$

a) Dibuje el campo direccional

b) Grafique algunas curvas solución sin resolver la ecuación diferencial.

c) Resuelva la ecuación diferencial.

d) Dibuje las soluciones obtenidas en el inciso c) y compárelas con las gráficas del inciso b).

Este problema fue extraído de Stewart (1999) pp.956.

Suponga que la temperatura de una taza de café obedece la ley de enfriamiento de Newton. La temperatura de una café recién servido es de $200^\circ F$ y un minuto después su temperatura es de $190^\circ F$ en una sala cuya temperatura es de $70^\circ F$. Determine cuándo el café alcanzará una temperatura de $150^\circ F$.

La utilización del software para la resolución de las actividades propuestas permitió que los estudiantes exploraran inicialmente las ideas geométricas y numéricas, desarrollaran sus propias concepciones y finalmente, las conectaran con los resultados obtenidos algebraicamente, dándoles una interpretación significativa.

Para hacer un uso reflexivo de la tecnología en el aula de matemática es necesario implementar tareas que demanden el uso coherente de diferentes representaciones. "*La tecnología, desde este punto de vista, servirá como herramienta fructífera para la* *construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas*" (Hitt, 2003, p. 222).

La participación de los docentes en este encuentro se limitó simplemente a observar el trabajo que realizaban los estudiantes ya que los mismos pudieron completar las tareas solicitadas sin ayuda.

Conclusiones

A partir de lo relatado en las secciones anteriores, podemos proporcionar algunos elementos que caracterizan las actividades desarrolladas en el ambiente computacional por los estudiantes.

En una de las tareas solicitadas sobre resolución de algunas ecuaciones diferenciales, los estudiantes sólo presentaron la solución algebraica brindada por el software o utilizaron las representaciones gráficas de manera muy limitada, ello no les permitía contar con consideraciones adicionales que les sirvieran de apoyo para darles mayor seguridad a sus procesos algebraicos o proporcionarles una señal de peligro en caso de error.

El uso del software Cabri II Plus favorece la aparición de un nuevo razonamiento implícito en los estudiantes. La computadora trae una ayuda dinámica a la enseñanza, en particular porque favorece las interacciones entre los distintos registros y facilitando en planteo de conjeturas.

La articulación entre los distintos enfoques, esbozar las curvas de la solución, su evaluación numérica y obtener la formula explícita; contribuyen a la comprensión de la solución de los problemas que se presentaron.

Si nos referimos a la dinámica de las clases en la sala de computación, es destacable el hecho de que todos los alumnos trabajaron en el tema, aunque tuvieran dudas. Percibimos ritmos diferentes en cada estudiante y pudimos observar diálogo matemático entre ellos, aunque cada uno disponía de una computadora para realizar las actividades propuestas.

La preparación de las actividades demandó gran dedicación previa por parte de los docentes, de modo tal que los alumnos pudieran seguirla de manera independiente y con libertad para implementar sus propias estrategias. Así, la clase estuvo centrada en el trabajo de los alumnos y los docentes recorrieron el aula y aclararon las dudas cuando los alumno así lo requerían, sin anticiparse.

La conjunción de abordajes visuales y algebraicos y el empleo de diversas representaciones: gráficas, tabulares, algebraicas, aparecen como necesarias y complementarias para resolver las cuestiones planteadas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp.97-140) México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Guzmán, M. de, (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid, España: Ediciones Pirámide, S.A

Hitt, F. (2003) Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10, 2, 213-224

Stewart, J. (1999). *Cálculo Multivariable*. México: International Thomson Editores.

Zimmermann W. (1990). *Visual Thinking in Calculus*. In Visualization in Teaching and Mathematics. Zimmermann W. & Cunningham S. Editors. Washington, DC, EE.UU: MAA, No.19.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*, Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

USO DE LA CALCULADORA BÁSICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS

Eduardo Basurto Hidalgo
Centro de Investigación y Estudios Avanzados México
basurtomat@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: básico

Resumen. *Este artículo reporta los resultados obtenidos en un estudio realizado con estudiantes entre 13 y 15 años, los cuales trabajaron en la resolución e invención de problemas de números con signo utilizando una calculadora no programable, esto con el propósito de extender el dominio numérico de los naturales a los enteros. Algunos de los resultados obtenidos indican que cuando los estudiantes resuelven operaciones aditivas de números enteros, con la calculadora la presencia de una sintaxis distinta a la del lenguaje matemático escrito, evolucionan la semántica del concepto de entero y que además al variar los contextos de dichos problemas se involucran en estructuras de problemas poco comunes con lo que enriquecen los sentidos de usos de los números negativos*.

Palabras clave: calculadora básica, problemas aditivos, números con signo

Introducción y objetivo

Los números enteros y sus operaciones ocupan un lugar importante en la enseñanza del algebra. Se menciona en el Yearbook NCTM (1992) "Ya son cerca de 20 años desde que las primeras calculadoras de mano fueron ofrecidas a la venta como productos de consumo cotidiano." Como consecuencia de esto vino su inserción en el ámbito educativo. De manera institucional en el Plan de Estudios 2006 (SEP 2006, P.24) se dice que "Es necesario el aprovechamiento de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la enseñanza…". El libro para el maestro de educación secundaria con respecto a la calculadora en operaciones aditivas de números con signo afirma que, "a través del uso de las teclas - , M+, M- y +/- los estudiantes comprenderán los diversos significados del símbolo - cuando aparece en una expresión" (SEP 1994, P.131).

Problema de investigación

Esta investigación pretende indagar la manera en que los alumnos utilizan la calculadora básica al resolver problemas aditivos. Surgen preguntas tales como: ¿Puede el manejo de reglas de escritura distinta a la escritura natural inhibir o beneficiar la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros?, ¿Puede la calculadora, ayudar a construir los conceptos necesarios para la resolución de situaciones aditivas?

Marco teórico

Los problemas que se utilizaron pertenecen a la clasificación de problemas aditivos de Bruno y Martinón (1997), la cual se enfoca en la estructura y en la forma semántica de los problemas y cuya extensión es de 11 clases de problemas como se muestra en la Tabla 1.

ESTRUCTURA FUNCIONAL	FORMA SEMÁNTICA
$a(t) + b(t) = u(t)$	**Combinación de estados (1) [COMBINACIÓN]**
$e(i) + v = e(f)$	**Variación de un estado (2) [CAMBIO]**
$e + c = d$	**Comparación de estados.(3) [COMPARACIÓN]**
$v(i, m) + v(m, f) = v(i, f)$	**Combinación de variaciones sucesivas.(4)**
$V_a(i,f)+V_b(i,f)=V_e(i,f)$	**Combinación de variaciones (5)**
$V_e(i, f) +c=V_d(i´, f´)$	**Comparación de variaciones(6)**
$V(i, f) + c = v_e(i', f')$	**Variación de variaciones.(7) [DOS CAMBIOS]**
$C_{ed} + C_{dg} =C_{eg}$	**Combinación de comparaciones adyacentes(8)**
$C_{ag} + C_{bh} = C_{ed}$	**Combinación de comparaciones(9)**

$C(i) + v = C(f)$	**Variación de una comparación(10)**
$C_{ed} + C = C_{gh}$	**Comparación de comparaciones(11)**

Tabla 1

Con el fin de ubicar las respuestas de los estudiantes en algún punto específico de la transición entre los naturales y los enteros se utilizaron los Niveles de conceptualización de Negativos de Gallardo (2002). Estos niveles son los siguientes:

-Sustraendo. En este caso la noción del número siempre obedece a la magnitud. Esto es en la resta de dos cantidades a – b, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, en este nivel el signo "–" solo tiene un carácter binario a nivel de sustracción.

-Número relativo. Este nivel de aceptación se hace presente cuando un estudiante puede concebir la idea de opuestos, esto en situaciones discretas así mismo es un nivel que aparece cuando la idea de simétricos se manifiesta en situaciones continuas.

-Número aislado. Este se presenta cuando un estudiante es capaz de aceptar un número negativo como la solución de una operación, de un problema o una ecuación.

-Negativo formal. Aparece cuando el estudiante reconoce al número negativo como parte de un conjunto numérico en donde quedan incluidos tanto los positivos y los negativos así como sus propiedades, el cual se conoce como el conjunto de los enteros.

El tercer elemento para analizar el desempeño de los estudiantes, fue el proceso de "Génesis Instrumental" el cual según Artigue (2002) consiste en la manera en que un artefacto (calculadora) se convierte en un instrumento, a través del reconocimiento de las potencialidades y limitaciones del mismo.

Un instrumento se diferencia del artefacto en el cual se basa en sentido de que el primero "es una entidad mixta, parte artefacto y parte proyectos cognitivos los cuales lo hacen un instrumento" Artigue (2002). Es decir, esta conversión del artefacto (calculadora) a instrumento involucra una evolución en los roles de aplicación de las diferentes usos de la calculadora (artefacto).

El proceso de ***génesis instrumental*** según Artigue (2002) se desarrolla en dos direcciones:

- *La primera se enfoca hacia el artefacto, tomando en cuenta y asimilando progresivamente sus potencialidades y limitaciones, utilizando o transformando éstas para usos específicos. Esta parte es* conocida como: ***INSTRUMENTALIZACIÓN DEL ARTEFACTO***
- *La segunda se dirige al sujeto, principalmente al desarrollo o apropiación de planes de acción instrumentada los cuales eventualmente tomarán forma como técnicas instrumentadas que permitan dar respuestas efectivas a tareas otorgadas.* ***INSTRUMENTACIÓN.***

Estas técnicas instrumentadas deben ir de la mano con el discurso teórico para no convertirse en una rutina de memoria.

Diseño la investigación

La investigación se desarrolló en dos fases, primero se aplicó un cuestionario a 16 estudiantes de segundo de secundaria de entre 12 y 13 años, a partir de ese cuestionario se seleccionaron dos estudiantes ya que eran quines obtuvieron los mejores resultados en el cuestionario. A dichos estudiantes se les realizó una entrevista didáctica y exploratoria que contenía cuestionamientos muy similares a los presentados en el cuestionario pero con preguntas en las que se tratara llevar a los alumnos a su límite de conocimiento.

Protocolo básico de entrevista (ítems)

Parte A

1. ¿Qué quiere decir "Tengo 60 pesos"?

2. ¿Qué quiere decir "Un buzo se encuentra a 10 m bajo el nivel del mar"?

3. ¿Cómo resolverías la siguiente operación en la calculadora? (+5) + (-3)=

4. ¿Cómo resolverías la siguiente operación en la calculadora? (-5) + (-3)=

5. ¿Cómo resolverías la siguiente operación en la calculadora? (+5) - (+3)=

6. ¿Cómo resolverías la siguiente operación en la calculadora? (+3) - (+5)=

7. ¿Cómo resolverías la siguiente operación en la calculadora? (+5) - (-3)=

8. Escribe una situación en la uses el número -9

9. Inventa un problema que corresponda a la operación planteada. (-4) + (-3) =

10. Inventa un problema que corresponda a la operación planteada. (-5) - (-2) =

12. Oprime la siguiente secuencia de tecla en la calculadora, ¿Cuál es el resultado?

Estas de acuerdo. Después inventa un problema que corresponda a la situación.

-	4	+	-	5	=

Parte B

No	Problema
1	Karla compro 70 boletos de lotería de los cuales 38 no tienen premio ¿Cuántos de los boletos si tuvieron premio?
2	Un día en la ciudad de Acapulco, la temperatura fue de 15º C por la mañana y por la tarde aumentó 17º C ¿Cuál fue la temperatura por la tarde?
3	El ascensor de un edificio se encuentra en el piso 2 del sótano si sube 18 pisos ¿En qué piso se encuentra?
4	Paco debe $10 pesos. Si su amigo Alan le presta $8 pesos. ¿Cuánto debe Paco?
5	Carlos tiene $15. Juan tiene $4 menos que Carlos ¿Cuánto dinero tiene Juan?
6	La primera semana del mes realicé una compra de $40 con mi tarjeta de crédito. La tercera semana realicé un pago de $30¿Cuál es mi situación a fin de mes?
7	A Pedro le dieron $7 de domingo, en casa de su abuelos, más tarde en casa de sus tíos perdió $5 en volados con su primo Luís ¿Cómo quedó su cantidad de dinero de Pedro?
8	Ayer, de la madrugada al medio día, la temperatura aumentó 10º y hoy aumentó 3º menos que ayer ¿Cuánto aumentó hoy?
9	El miércoles Diana perdió $ 5. El jueves Diana perdió $ 8 menos que el miércoles. ¿Cuánto perdió o

	ganó Diana?
10	Alejandro tiene 3 canicas menos que Maria, Diana tiene 7 más que Alejandro, ¿Cuántas canicas más tiene Diana que María?
11	El lunes Juan tenía $3 más que Marcos, el martes Marcos ganó $5 más que Juan ¿Cuánto más tiene el martes Marcos que Juan?
12	Daniel tiene 2 pesos menos que Ernesto. Lo que Héctor tiene más que Gabriel es 5 pesos más de lo que tiene Ernesto que Daniel ¿Cuánto dinero tiene Héctor más que Gabriel?

Análisis de datos

El cambio en la sintaxis al resolver operaciones aditivas de números con signo en la calculadora además de vía papel y lápiz, parece no alterar los procedimientos de solución de los estudiantes ya que al no tener conocimiento del funcionamiento de la misma en el dominio de los enteros, trabajan en el dominio de los naturales gracias a las equivalencias sintácticas que conocen, esto es, resolvían las operaciones de forma mental y las cambiaban en términos de números naturales para poder ingresarlas a la calculadora.

Cuando se solicita explícitamente que utilicen la calculadora ingresando números signados es cuando realmente los estudiantes comienzan a darse cuenta de las diferencias de la sintaxis de la calculadora con respecto a la escritura en papel y lápiz.

Conforme a lo revisado en los cuestionarios y las entrevistas principalmente, se puede decir que este enfrentamiento con las limitaciones y potencialidades de la calculadora básica en cuanto a las operaciones aditivas de números con signo, ayuda a refirmar los conceptos que el estudiante tiene sobre las operaciones aditivas de números con signo.

Esta situación por momentos puede promover la extensión del dominio numérico, esto, al tiempo de que los estudiantes comienzan a predecir resultados incorrectos en la calculadora provocados por dichas limitaciones, es decir, la calculadora si puede ser una ventana de significados pero trabajando mediante situaciones que ponen en conflicto al estudiante al tener la necesidad de explicarse las acciones de misma.

La manera en que se les presentaron los problemas a los estudiantes se basó en solicitar que primero resolvieran con lápiz y papel, los cual, cabe mencionar que en su mayoría lo realizaban trabajando con números Naturales, después se les sugería que utilizaran la calculadora, y al confrontar la sintaxis del lenguaje matemático en lápiz y papel con en del la calculadora era que emergía los enteros.

Es decir, la calculadora ayudaba a través de sus cambios de sintaxis por momentos era útil al resolver los problemas ya que llegaban a una interpretación correcta de la semántica de los mismos, ya que cuando los estudiantes resolvían en el terreno de los naturales aunque llegaran a soluciones correctas, debido a algunas equivalencia sintáctica entre los Naturales y los Enteros, se alteraba el significado y sentido de la solución.

Vale la pena mencionar que la introducción del artefacto deberá ser vía actividades que le permitan al estudiante generar su propio proceso de génesis instrumental previo a la enseñanza. Este momento de carácter espontáneo permitirá a los estudiantes además de iniciar la incorporación del artefacto ya como un instrumento en la realización de tareas, podrá hacer evolucionar los conceptos que intervengan en dicho proceso.

Conclusiones

En este trabajo se concluyó que la sintaxis distinta de la calculadora ayudó a la correcta conceptualizacíon de los números con signo en situaciones aditivas.

A manera de orientación, es importante el hecho de que, como ya se mencionó al principio de esta investigación, se tiene una amplia confianza en el uso de recursos tecnológicos como recursos que ayudarán al mejoramiento del proceso de enseñanza – aprendizaje, lo cual, como pudimos ver a lo largo de este trabajo puede ser posible en ciertas condiciones.

En lo que se debe hacer conciencia es no pensar que por el simple hecho de introducir los recursos tecnológicos en las aulas e incorporarlos a las tareas de los estudiantes, habrá una transferencia automática o instantánea (falacia didáctica) de los conocimientos de los estudiantes al recurso tecnológico empleado. Sino más bien esta transferencia de conocimiento, así como el lograr empatar los distintos lenguajes, forman parte de un proceso que toma tiempo a los estudiantes y que sólo se puede lograr con intervenciones didácticas dirigidas y diseñadas específicamente para tales fines.

Referencias bibliográficas

Alarcón, J. Arriaga, A. Barrón, H. Rosas, R. (1994). *Libro para el maestro. Educación secundaria*. SEP. México.

Artigue, M (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7(3)*, 245 – 274.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación matemática, 9(1)*. 33-46. Mexico: Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. (2002), *"*Qualitative analysis in the study of negative numbers*", Proccedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, (2), 377- 384.

National Council of Teachers of Mathematics. (1992). *Yearbook*. Reston, USA. VA: Autor.

SEP (2006). *Plan de Estudios*. Educación secundaria. México.

CURSOS DE MATEMÁTICAS EN LA RED. CÓMO BUSCAN LOS ALUMNOS Y QUÉ LOS MOVILIZA A ABRIR UN SITIO

Ana Lasserre, Josefina Royo, Celia Torres, Edna Agostini, Mercedes Naraskevicins
Universidad Nacional de Jujuy Argentina
perassi@educ.ar, josefina.royo@gmail.com
Campo de investigación: Educación a distancia Nivel: Superior

Resumen. *Las TIC's invaden cada vez más distintos ámbitos de la vida: laboral y social. La Educación no está ajena a este fenómeno y el desarrollo de espacios de formación mediante las nuevas tecnologías está en pleno crecimiento: tanto desde el punto de vista de las aplicaciones como de la teoría que fundamenta su uso.*

Sin embargo, esos espacios no siempre responden a las necesidades de los alumnos ni a sus intereses. En la búsqueda de generar un curso interactivo en Matemática, para futuros ingresantes a la Universidad (o al nivel superior no universitario), se trató de determinar cuáles podían ser los aspectos movilizadores que harían que los alumnos interesados se inclinen por ese Curso al momento de revisar conceptos estudiados en el Nivel Medio.

Palabras clave: matemática, TIC's, curso interactivo, movilizadores

El impacto de las tecnologías en la Educación

El mundo de la educación no puede ignorar la realidad tecnológica actual ni como objeto de estudio ni como instrumento del que valerse para formar a los ciudadanos.

Por eso el impacto en la educación de nuevas tecnologías, cada vez más sofisticadas, no debe ser desdeñado ya que está vinculado a la necesidad de formación permanente de la sociedad. El mismo se visualiza en tendencias tales como:

- Expansión del desarrollo de la enseñanza/aprendizaje a través de Internet. Actualmente un número creciente de Universidades (Finkelievich & Prince,2005) imparte cursos y carreras a través de Internet.
- Expansión de la red para que la educación, basada en ella, pueda hacerse accesible a la mayoría de la población, mediante conexiones económicas o gratuitas, aprovechando los espacios públicos: instituciones educativas, municipios, bibliotecas y fundaciones.

▪ Mejoras en los servicios para Internet, fundamentalmente en lo que hace a velocidad de navegación y aparición de ordenadores personales cada vez más pequeños y potentes.

▪ La telefonía móvil, a la que ya accede la mayor parte de la población, que va camino a convertirse en un vehículo imprescindible para la formación de los individuos.

Si esas tendencias se consolidan como todo hace prever, su influencia en la educación no será menor y se sentirá en aspectos tales como:

1. Uso de simuladores, modelos y herramientas de visualización más sofisticada que ayudarán más eficazmente a un aprendizaje de contenidos abstractos o complejos.

2 Elaboración de potentes Guías Didácticas virtuales e interactivas, por las que pueda accederse a información debidamente seleccionada y clasificada. Hay contenidos suficientes en la red como para ofertar distintos diseños para aprender. Estas propuestas ayudarán a los alumnos a la construcción de significados a través de diferentes perspectivas, procedencias, contextos y experiencias compartidas (Piscitelli,2006).

3. Existencia de programas de estudio destinados a ciudadanos de diferentes países y/o etnias, que obligarán a diseños más integradores e interculturales.

4. Apertura de un panorama alentador para los estudiantes con discapacidades, sobre todo físicas al reducirse, o eliminarse, muchas de las barreras que en la sociedad actual impiden a estos grupos el acceso a los diferentes canales de información y formación.

Sobre el aprendizaje por medio de las TIC's

Tal como lo indica Marcelo García (2000), en las bases de la pedagogía contemporánea figuran como esenciales, entre otros: el aprendizaje activo e individualizado y aunque las formas de soporte o almacenamiento de los contenidos y las vías o canales para la interacción sean diferentes, las bases pedagógicas continúan vigentes. Creemos que las tecnologías avanzadas no cambian ni introducen nuevos principios pedagógicos en relación a los aprendizajes, aunque sí en referencia a la enseñanza. Es más, el uso de las nuevas tecnologías hace que las bases pedagógicas mencionadas se vean significativamente reforzadas como en el caso de los principios de actividad y de aprendizaje individualizado.

Ello es así porque el *principio de actividad* es consustancial a cualquier propuesta educativa realizada mediante cualquier modalidad. El estudiante es sujeto activo de su propio proceso de construcción del aprendizaje y en ese sentido, es más protagonista en la enseñanza a través de Internet (o en espacios virtuales) que en la enseñanza presencial.

Lo mismo sucede con el *principio pedagógico del aprendizaje individualizado* que se potencia en la educación en espacios virtuales, aunque ésta no lo haya descubierto ya que era defendido, al igual que el anterior, por la Escuela Nueva de finales del siglo XIX.

Ya está ampliamente reconocido que la formación con las TIC's incorpora un cambio de paradigma pedagógico, centrado en el aprendizaje más que en la enseñanza. Se trata de un modelo de formación enfocado en problemas que los alumnos deben resolver utilizando los contenidos adquiridos, dejando de ser meros receptores pasivos.

Vale la pena, entonces, analizar cómo aprendemos. A lo largo de nuestra experiencia pasamos por múltiples situaciones en las que aprendemos. Algunas están más organizadas y sistematizadas, mientras que muchas otras son casuales o surgen del azar. Podemos, entonces, identificar 4 modalidades de formación, cada una de las cuales representan categorías de aprendizaje diferentes:

- Aprendemos de otros.
- Aprendemos con otros: aprendizaje colaborativo.
- Aprendemos solos: autoformación.
- Aprendemos en forma informal, no sistemáticamente.

Siguiendo a Rodríguez Artacho (2000), vemos que las teorías que intentan explicar cómo se produce el aprendizaje son muchas. Por ello, sólo haremos una selección de aquellas propuestas teóricas que pueden tener una mayor aplicación para el aprendizaje adulto a través de las TIC's.

Teorías Constructivistas

Las teorías constructivistas ponen su énfasis en considerar que aprender no es una tarea pasiva, sino que aprendemos haciendo e incorporando lo nuevo que conocemos en los esquemas que ya poseíamos. Dos premisas básicas de esta teoría son:

a. El aprendizaje es significativo: ello se logra cuando el individuo logra conectar las ideas y esquemas de conocimiento que ya posee con los nuevos contenidos que se presentan.

b. El formador juega un rol distinto que consiste en modelar la comprensión de los nuevos contenidos, detectando a través del diálogo las dudas de los alumnos y presentando la información en un formato adecuado a su nivel actual de conocimientos.

Teoría del Aprendizaje Situado

Según Picazo Rodríguez (2006), la Teoría del Aprendizaje Situado expresa que no debería existir mucha distancia entre el nuevo conocimiento y los problemas que ese nuevo conocimiento pretende resolver. Por ello, propone que en su formación, el alumno resuelva problemas reales, hable un lenguaje práctico. Entre sus ideas principales destaca que el conocimiento no puede adquirirse al margen del contexto en el que se produce. Y ese contexto debería ser los más parecido posible a aquel en el que posteriormente se va a aplicar lo aprendido.

Teoría de la Flexibilidad Cognitiva

Muchas veces agradecemos que otras personas nos den su punto de vista sobre alguna cuestión, porque nos ayuda a ver las cosas desde una perspectiva diferente. Y este elemento es el que destaca la Teoría de la Flexibilidad Cognitiva. La idea de flexibilidad, pues, se relaciona con la necesidad de formar personas para que puedan dar respuesta a situaciones que habitualmente no exigen una única salida.

Esta flexibilidad tiene implicaciones importantes para la organización de los contenidos y las tareas de aprendizaje en dominios complejos y poco estructurados. Puesto que se parte de que un determinado ámbito de conocimiento es complejo, y de que el alumno debe aprender a hacer uso de él de forma flexible, se hace hincapié en mostrar las relaciones entre las distintas ideas y contenidos, en lugar de presentarlos de forma compartimentada. Para que sea posible transferir el conocimiento y las destrezas a situaciones reales distintas de la situación inicial de aprendizaje, es necesario que la información se presente desde perspectivas múltiples, y que se ofrezcan varios casos de estudio que ilustren el contenido en cuestión. Estos casos deben ser auténticos y reflejar la complejidad y la falta de definición de las situaciones cotidianas, de forma que requieran poner en marcha el mismo pensamiento que se necesita ante los contextos de la vida real (Jonassen,D., Dyer,D., Peters,K., Robinson,T., Harvey,D, King,M.& Loughner,P., (1997), en Marcelo García, 2000)

Teoría del Aprendizaje Experiencial

Más que una teoría, el aprendizaje experiencial constituye un modelo de aprendizaje adulto. Los adultos organizan su aprendizaje a partir de tareas de solución de problemas, y tal aprendizaje es más motivador y provechoso cuando presenta una relevancia inmediata para su trabajo o su vida personal. Por tanto, los contenidos deben estar encajados en la realidad a la que se han de aplicar, y deben servir para resolver problemas prácticos.

Desde esta teoría, el aprendizaje se concibe como un ciclo de cuatro etapas: a)experiencia concreta inmediata, b) observación y reflexión sobre la experiencia, c) conceptualización abstracta y formulación de hipótesis y d) experimentación activa.

Así, se propone que las personas, y fundamentalmente las personas adultas, aprendan de manera cíclica. Se parte de la experiencia, pero a ésta le siguen la reflexión, el planteamiento de dudas y cuestiones, qué sabemos y qué desconocemos y la experiencia incluyendo errores y lagunas. Todo esto constituye la base para las actividades de aprendizaje. Sólo a partir de ahí es posible empezar a encajar el desarrollo de los contenidos.

La teoría también posee relevancia porque, además de sugerir una rueda cíclica de aprendizaje, postula la existencia de distintos estilos de aprendizaje en función de la preferencia por alguno de esos momentos del ciclo. Así, no es posible homogeneizar las rutas de aprendizaje ya que cada sujeto suele mostrar cierta preferencia por determinada forma de aprender. Una de las claves para poder atender a la diversidad de preferencias dentro del aprendizaje adulto reside en considerar constructos como el de "estilo de aprendizaje". El “estilo” es, así, el conjunto de rasgos (cognitivos, afectivos, etc.) que determinan en un sujeto una preferencia especial por aprender de una forma determinada y con una serie de recursos en lugar de con otros.

Resumiendo, creemos que a los fines del trabajo que vamos a realizar y tomando elementos de las distintas teorías, entre otras características, el Aprendizaje a través de Internet debe ser:

- ACTIVO: los alumnos son partícipes en la construcción del conocimiento y desarrollan habilidades como la capacidad de búsqueda, análisis y síntesis de la información.
- Basado en el AUTOAPRENDIZAJE: es decir que se debería propiciar la capacidad de aprender de forma autónoma. Ello significa que *no todo hay que darlo,* sino que deben existir áreas de conocimiento que los propios alumnos deberán indagar.
- CONSTRUCTIVO: la nueva información se elabora y construye sobre la anterior, contribuyendo a que el alumno alcance un verdadero aprendizaje.

- ORIENTADO A METAS: los objetivos de aprendizaje se hacen explícitos y el alumno tiene facilidad para elegir el camino que quiere seguir para alcanzar estas metas.
- CENTRADO EN PROBLEMAS Y EN CASOS: son estrategias adecuadas que hacen que el alumno se implique en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ello proporciona otras alternativas para transmitir el conocimiento y mejorar la calidad de la formación.

Sobre nuestro trabajo

El propósito de nuestro trabajo de investigación actual es desarrollar un curso interactivo en Matemática. A partir de allí, medir el impacto que esta propuesta genera en los estudiantes de Nivel Medio que piensan seguir estudios de nivel superior, universitario o no universitario, particularmente en carreras con un fuerte contenido en Matemática.

Además se tratará de determinar en qué forma, dicho curso puede contribuir a una mejor formación de los ingresantes al nivel superior en esta disciplina y a una más visible democratización de la enseñanza por la posibilidad de que una mayor cantidad de jóvenes pueda acceder a tutorías personalizadas a bajo costo.

En 1º se aceptó que el diseño del Curso debe tener en cuenta las consideraciones teóricas explicitadas precedentemente en relación a los aprendizajes de los alumnos.

En 2º lugar, para la determinación del tema a desarrollar se hizo un detallado análisis de las falencias detectadas en los alumnos desde nuestra experiencia como docentes de los primeros años de carreras universitarias y no universitarias: Ingenierías, Ciencias Económicas, Formación Docente en Matemática, en Física y en Tecnología.

Pero además, se tomaron como referencia las demandas explícitas de los docentes de Nivel Medio con quienes compartimos, en el año 2005, las actividades de un Proyecto de Articulación entre Escuelas Medias de Jujuy y la Universidad Nacional de Jujuy .

De ese estudio surgió la conveniencia de desarrollar el tema “Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones” ya que el mismo tiene múltiples aplicaciones en distintas asignaturas de las carreras de nivel superior y en distintos ámbitos de la vida cotidiana y también porque en su desarrollo los alumnos deben poner en juego diferentes habilidades que hacen a: el correcto manejo de la simbología y el lenguaje matemático, el dominio de las operaciones fundamentales tanto con números enteros como racionales, la interpretación y comprensión de los problemas planteados, la estimación, la verificación de los resultados, etc.

Como lo establecimos en nuestros objetivos, el curso estará dirigido, aunque no en forma excluyente, a aquellos alumnos que piensen seguir carreras de Nivel Superior vinculadas con la Matemática y que deseen repasar el tema que el curso propone. Es decir que se plantea como un curso de revisión (aunque en muchos casos se convierta en un caso de aprendizaje) de un tema ya “visto” en el secundario.

En ese esquema tomamos como muy importante la cuestión de la motivación, entendiendo que ésta define un *para qué* de naturaleza cognoscitiva y emocional que posibilita el aprendizaje (Herrán Gascón, 1999). Sin motivación no hay aprendizajes de calidad.

Es decir, si es un curso que no va a ser obligatorio, sino que va a estar colgado en la Red, ¿Cuáles serían las razones para que un internauta que desee repasar ciertos temas de matemáticas elija nuestra propuesta y no otras? Vale mencionar que sólo en Google y en forma rápida hemos encontrado más de 14.000 sitios donde se habla de ecuaciones.

Decidimos indagar entonces, entre potenciales usuarios, cuál sería su método de búsqueda y qué razones lo inclinarían a visitar un sitio cualquiera. Realizamos una encuesta de respuesta libre a: 7 alumnos de la carrera de Abogacía en una universidad privada, 20 de 1º año del Profesorado de Matemática, 15 de Tecnología, 3 alumnos universitarios de cursos avanzados de Ingeniería y 7 profesionales jóvenes en esta disciplina.

Algunas de las cuestiones que surgen del análisis de la encuesta son las siguientes:

a) El 95% de los encuestados "navega" a través de Google porque considera que es el más completo y simple. Están conformes con los resultados que les brinda este buscador.

b) En segundo lugar, el 50 % de los encuestados siguen la misma rutina: una vez solicitado el tema, abren los sitios en el orden que aparecen en la pantalla hasta encontrar uno que satisfaga sus necesidades. Sólo uno, señaló que abriría un sitio por el autor.

c) ¿Cuáles son esas necesidades? Que el tema esté desarrollado lo más completo posible (30%); que esté expuesto en forma clara (50%); que contenga poca teoría y muchos ejercicios resueltos (33%).

La rutina descripta por los encuestados sugiere que si se desea que un determinado sitio sea visitado por la mayor cantidad de alumnos, el mismo debe estar ubicado en los primeros lugares del listado que ofrece el buscador.

En la misma encuesta se les preguntó, además, qué les llamaría la atención y haría que, en presencia de dos sitios similares en su temática, eligieran uno antes que el otro. Las respuestas aquí fueron mucho más heterogéneas y no marcaron una tendencia definida. Citaron por ejemplo, que deberían tener una estructura llamativa, colores, letras grandes y palabras claras, muchos gráficos, interactividad, imágenes multimedia, música, movimiento, presencia de foros de discusión e íconos que reflejen la "calidad" del sitio. Dado que estas respuestas no daban información suficiente que permitiera determinar una tendencia en su elección, se decidió indagar nuevamente sobre esta cuestión, presentándola en forma diferente, de tal manera que se pudieran profundizar en sus opiniones.

La nueva encuesta preparada consistió en la presentación a 45 alumnos del Profesorado de Matemáticas, de 3 diseños distintos de páginas iniciales de un "Sitio" donde, claramente, se indicaba la temática a tratar en el curso. La primera corresponde a un formato tradicional: Institución, Autores, Tema e Índice.

En la segunda, el único cambio consistió en una distribución radial de cada una de las partes del curso ubicando, en el centro, la temática principal: Ecuaciones.

Finalmente en la 3º se buscó un diseño más ameno con dibujos y una situación problemática, relacionada con una temática actual y que podría interesar a los jóvenes. Luego aparece el índice ordenado por orden de dificultad como se hizo en el 1º diseño.

Esta 3º propuesta fue elegida por el 72% de los encuestados resultando determinante para ello, el haber colocado, a modo de disparador, un problema actual.

De las respuestas de los alumnos, surge que valoran muy positivamente poder “ver” las aplicaciones prácticas de los temas de Matemática. No haber colocado un problema en el 1º y 2º diseño de la página de inicio no les permitió suponer que tales aplicaciones podrían encontrarse en el mismo desarrollo del curso y por tal razón no lo eligieron

Del resto, el 12 % de los encuestados eligió la propuesta dos (Distribución radial de la temática) porque les permitía visualizar mejor los temas a tratar y el 8% eligió la propuesta 1 porque priorizó el orden lógico en la presentación de los temas (Índice). Uno sólo manifestó que elegiría cualquiera de las 3 ya que tratan exactamente los mismos temas.

Entendimos que estas respuestas nos abrían un pequeño haz de luz sobre lo que más interesa a los alumnos. Surgió como hipótesis fuerte, que se inclinan por la aplicación práctica de la Matemática, tanto desde el simple algoritmo como desde el punto de vista del razonamiento (Problemas, planteo de los mismo, cálculo y discusión de la solución).

Por ello se decidió hacer una nueva indagatoria, bajo la forma de una encuesta semiestructurada (con una sola posibilidad de respuesta libre a fin de justificar su decisión).

Aplicada a 85 alumnos de los Profesorados de Matemática y de Tecnología, obtuvimos la ratificación de nuestra hipótesis, ya que aunque no desdeñan la teoría, los alumnos prefieren la parte práctica tanto en lo que hace a resolución de ejercicios como de problemas. Valoran muy positivamente la existencia de ejercicios resueltos.

También valoran en sentido positivo, (85%),la posibilidad de que haya un espacio en el sitio que les permita autoevaluarse. Esto nos parece importante de recalcar, ya que aceptar la autoevaluación implica que son conscientes de que ésta les permitirá saber si se apropiaron o no del tema y, por ende, tener la posibilidad de rever y profundizar el mismo.

A partir de los datos aportados por los propios alumnos, ahora se está terminando el diseño del sitio, el que será probado durante el corriente año con alumnos del último curso de algunas escuelas medias, y durante los meses de febrero y marzo de 2008 con los alumnos inscriptos para ingresar a la Facultad de Ingeniería o al Instituto del Profesorado.

Referencias bibliográficas

Finkelievich, S. & Prince, A: (2005) Universidades y TIC's en Argentina. *Las Universidades Argentinas en la sociedad de la información.*Disponible en: www.educ.ar/ Educación y TIC's

Herrán Gascón, A.(1999) Didáctica de la motivación. Obtenido en 2007 de la dirección: www.dewey.uab.es

Picazo Rodriguez, A (2006) La Internet como medio para el aprendizaje situado. Disponible en: www.scribd.com

Marcelo García, C (2000) : *Bases y evolución de la Teleformación en "eForm@ción: Una nueva oportunidad para aprender"*. Barcelona: Editorial Gestión 2000

Piscitelli, A. (2006): La alfabetización digital puede ser una nueva infraestructura del conocimiento. En *Educación y TIC's.* Disponible en: www.educ.ar/ Educación y TIC's

Rodriguez Artacho, M. (2000) .*El proceso de aprendizaje y las teorías educativas*. Obtenido en 2007 de la dirección: www.sensei.ieec.uned.es

PROYECTO EDUCATIVO. PROCAD

Dora Fernández de Musomecci, Marta Susana Golbach, Ida Cristina Kempf de Gil, Carolina Ana Rotger
Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Argentina
dfernandez50@hotmail.com; mgolbach@tucbbs.com.ar
Campo de investigación: Diseño curricular, Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Con el fin de atenuar las causas que inciden en el bajo desempeño académico de los alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán, se propone implementar un Programa de Orientación y Capacitación Académica (PROCAD), para dichos alumnos, cubriendo tres áreas: Matemática, Técnicas de Estudio y Comprensión de Textos y Orientación Vocacional, con tres etapas de ejecución: Autoaprendizaje (de modalidad semi-presencial y con tutorías presenciales), Afianzamiento y Evaluación (ambas de modalidad presencial). Empleando además, en la etapa de Afianzamiento metodologías de enseñanza, sustentadas en el constructivismo. Con la implementación del Programa se pretende dotar al alumno de las competencias necesarias para un mejor desempeño académico*.

Palabras clave: desempeño académico, proyecto educativo, alumnos.

Introducción y objetivo

En la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán, Álgebra es una asignatura de primer año, de carácter promocional y común a las tres carreras que se ofrecen en esta Facultad. Tiene una inscripción masiva y cuenta con un alumnado que, en general, carece de los conocimientos previos y de los hábitos de estudio necesarios para emprender con éxito una carrera universitaria. Estos, entre otros motivos, influyen en el rendimiento académico de los alumnos y traen como consecuencia que al finalizar el cursado de la asignatura, promocionen menos de la mitad, proporción que va disminuyendo a través de los años. Las estadísticas indican un incremento en el número de alumnos libres y recursantes en esta signatura y en el área Matemática en general. Además de un alto porcentaje de deserción y un alto índice de permanencia en las distintas carreras. Durante el mes de febrero de los años 2005 y 2006 la Cátedra de Álgebra, implementó un Curso de Revisión no obligatorio ni eliminatorio, asistieron a estos cursos alrededor de mil alumnos. En cuanto a los resultados obtenidos no fueron los esperados, comprobándose notables diferencias entre los conocimientos previos que traen los estudiantes y los pre-requisitos necesarios para cursar primer año. A fin de atenuar las causas que inciden en el bajo desempeño académico de los alumnos, se propone implementar un Programa de Orientación y Capacitación Académica (PROCAD), para los alumnos Ingresantes a la mencionada Facultad, cubriendo tres áreas: Matemática, Técnicas de Estudio y Comprensión de Textos y Orientación Vocacional, organizado mediante la modalidad presencial y de educación a distancia. De manera de brindar la oportunidad y el apoyo indispensable al estudiante, que le permita además de superar falencias cognoscitivas, adquirir hábitos de estudios, competencias generales y específicas que le sirvan de base efectiva en el aprendizaje universitario. El objetivo de este trabajo es presentar el Proyecto Educativo PROCAD, el cual se encuentra en etapa de aprobación, como una propuesta paliativa que posibilitará revertir considerablemente la situación actual.

Diagnóstico

El eje central de este Proyecto es el fracaso de los alumnos de primer año en la asignatura Álgebra de la facultad de Ciencias Económica. En la cual, desde hace varios años venimos observando una disminución sostenida en el desempeño académico de los alumnos ingresantes en el Área Matemática. Álgebra es la primera asignatura de esta Área que se cursa en el primer cuatrimestre. Cada año la Cátedra recibe un número de alumnos que se fue incrementando llegando actualmente alrededor de 1700 (1350 en el año 2004, 1479 en el 2005 y 1654 en el 2006). Al ser una asignatura promocional el alumno tiene la posibilidad de promocionar o bien de regularizar para luego rendir un examen final. Se promociona en el caso de tener un promedio de notas entre tres parciales mayor o igual a 6 (seis) y regulariza si este promedio es de cuatro a menos de seis. Mientras que el alumno queda libre en el caso de tener dos aplazos.

El siguiente gráfico Nº1 se muestra la distribución porcentual de los alumnos según el régimen de cursado en Álgebra en el período 2004-2006.

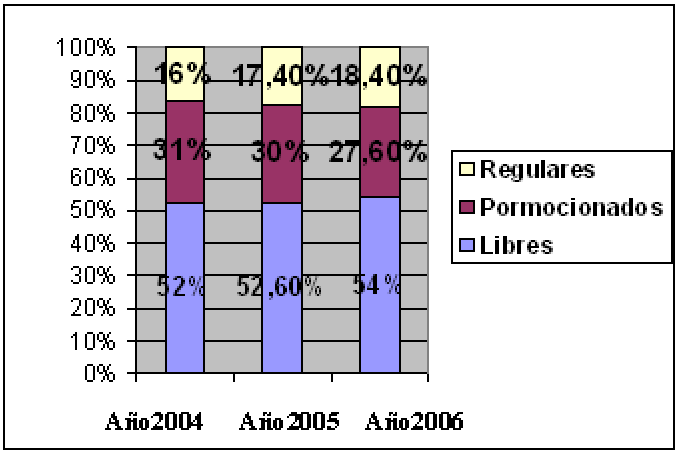


Gráfico Nº 1: Porcentajes de alumnos regulares, promocionados y libres en el período 2004-2006.

Se puede observar un notable incremento del porcentaje de alumnos libres respecto a los de condición regular y promocionados en el período considerado.

Existen diversos trabajos de investigación que dan cuenta de los factores de mayor incidencia en la problemática del alumno ingresante. Entre ellos: la falta de conocimientos básicos mínimos, insuficientes hábitos de estudio y de lectura, déficit del conocimiento de estrategias de aprendizaje apropiadas para el estudio universitario, la falta de motivación y diferencia de niveles cognoscitivos. A lo cual se suma, en esta Facultad, la masividad y el ingreso irrestricto. Esta problemática trae aparejado importantes costos económicos a la Institución y por ello consideramos primordial tratar de dar respuestas a la misma, mediante el Proyecto Educativo PROCAD.

Fundamentación Teórica:

El presente proyecto se sustenta en el Paradigma Constructivista, constituido por la confluencia de los aportes de figuras de la talla de Piaget (1989), Ausubel (1986) y

Vigotsky (1988) entre otros. Este enfoque considera que el aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento (construcción social), del cual el alumno participa activamente involucrándose con otros aprendices tomando la retroalimentación como un factor fundamental en la adquisición final de contenidos (Rosas y Sebastián, 2001).

■ **La Teoría Psicogenética de Piaget** (1989), considera que existe un vínculo práctico entre el sujeto y el objeto, porque ambos se constituyen mutuamente. Todo acto inteligente por más rudimentario que sea, supone una interpretación de la realidad externa que se denomina Asimilación, y consiste en la incorporación del objeto externo a esquemas mentales previos del sujeto. Cuando se asimila algo nuevo, el sujeto debe modificarse en función de las características particulares del objeto a incorporar y tal modificación del sujeto recibe el nombre de Acomodación. El equilibrio entre ambos procesos es lo que se denomina Adaptación.

Este marco teórico se amplía con los aportes de Ausubel (1986) y Vigotsky (1988).

■ **La teoría de D. Ausubel** se ocupa de los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos científicos previamente formados o “descubiertos” por el alumno en su entorno. El concepto central de su teoría de la Asimilación es el de aprendizaje significativo definido como un proceso a través del cual una nueva información se relaciona de modo no arbitrario y sustancial con un aspecto relevante preexistente en la estructura cognitiva del aprendiz. Esta concepción de aprendizaje esta basada en la comprensión y no en la memorización repetitiva y mecánica, necesitando de una actitud favorable o positiva del alumno.

■Una de las contribuciones esenciales del **Enfoque Histórico–Cultural de L.S.Vigotsky**, al constructivismo es la dimensión social del aprendizaje. Concibe al sujeto como un ser eminentemente social y al conocimiento mismo como un producto social. Establece una distinción entre el *nivel de desarrollo efectivo o real* determinado por lo que el sujeto logra hacer de modo autónomo, y el *nivel de desarrollo potencial* determinado por lo que el sujeto sería capaz de hacer con ayuda de mediadores externamente proporcionados. La diferencia entre estos dos niveles es a lo que Vigotsky denominó zona de desarrollo próximo (ZDP). La obra iniciada por Vigotsky continuó desarrollándose a través de sus seguidores destacándose entre ellos P. Ya. Galperín (1988) con su Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales.

La Teoría de la asimilación de P. Ya Galperin (1988) plantea que en el proceso de aprendizaje el estudiante transita paulatinamente por determinados momentos, que van desde un plano externo hasta su realización en el plano interno mental, que constituyen las Etapas del Proceso de Asimilación. Estas etapas son: motivación, orientación (BOA), material o materializada, verbal y mental. Destaca, además la importancia de organizar el proceso de asimilación del estudiante teniendo en cuenta la Teoría de la Dirección con sus fases de orientación, de ejecución y de control.

Otros aspectos teóricos que se consideraron fueron:

El Estudio Independiente que es una técnica didáctica que posibilita a cada estudiante lograr, a través de un proceso, un aprendizaje autónomo, creativo y significativo. Sus objetivos son: capacitar al alumno para aprender por sí mismo, ofrecer oportunidades para la investigación personal, posibilitar el ejercicio de la responsabilidad (Pizarro, A., 1996)

La transferencia, palabra que en términos generales se refiere a la influencia del aprendizaje en una situación o contexto sobre un subsiguiente aprendizaje en otra situación o contexto, es decir el efecto del aprendizaje pasado en el aprendizaje presente.

El aprendizaje grupal que es una nueva forma o concepción de aprendizaje fundamentada en distintas tendencias pedagógicas. El trabajo de grupo es mucho más que una técnica o una serie de técnicas: es una actitud, una manera de entender las relaciones humanas, es un ejercicio continuo de creatividad, que promueve la intervención de sistemas para fomentar la interacción entre las personas. **Los métodos y técnicas participativas** que son las vías y procedimientos sistematizados de organización y desarrollo de la actividad del grupo de estudiantes. Que aplicados a la organización del proceso enseñanza-aprendizaje, permiten establecer vínculos entre los conocimientos y su aplicación práctica, estimulan el desarrollo del espíritu investigativo, la creatividad y el autoaprendizaje, ayudan a la asunción de posturas críticas, personales y comprometidas ante el conocimiento, estimulan la búsqueda de la verdad a través del trabajo conjunto de indagación y reflexión y permiten lograr conocimientos significativos.

Propuesta: Frente a la problemática planteada, surgió la necesidad de realizar acciones tendientes a mejorar la articulación entre los niveles educativos Medio y Superior, creando un puente preparatorio durante el cursado del último año de la escuela media, de manera de dotar a al alumno de las competencias necesarias, que le sirvan de base efectiva para un mejor desempeño académico. Además de lograr una mayor claridad respecto de su vocación. Por ello los objetivos del PROCAD son los siguientes:

Objetivo general: Aumentar el desempeño académico de los alumnos ingresantes a primer año de la FACE de la UNT, en la asignatura Álgebra.

Objetivos específicos: Incrementar el número de alumnos regulares y promovidos en la asignatura Álgebra. Promover y desarrollar la formación integral de profesores y estudiantes.

Entre las actividades a desarrollar en el Programa de Orientación y Capacitación Académica se prevé la capacitación de docentes de matemática del Nivel Medio, mediante el dictado de talleres y/o seminarios a cargo de docentes de matemática de esta Facultad. A fin de que participen posteriormente en la ejecución del Proyecto. Otras de las actividades a realizar por los docentes que participen en el PROCAD, es la de formar grupos de trabajo, cada uno de ellos con objetivos propios, independientemente del trabajo que se realice en las áreas restantes. Entre otros, el grupo difusión, encargado de las jornadas informativas y de la entrega de materiales en los colegios secundarios y polimodales y el grupo de Control y Estadísticas el cual controlará el desarrollo de las actividades y el tiempo de ejecución de las mismas, además del análisis estadísticos de los resultados obtenidos. El procesamiento de estos aportará información relevante acerca de la implementación de este Programa. En la elaboración y redacción del material, participarán todos los docentes del proyecto, supervisados por los responsables de cada área. Estos se estructurarán con actividades que favorezcan el paso por las distintas etapas del proceso de asimilación. En el área Matemática, la Cátedra dispone de un libro de texto cuyas autoras son docentes de la misma y de un Cuadernillo de Nivelación, con la ejercitación práctica correspondiente.

Fundamentalmente el PROCAD, está dirigido a los estudiantes del último año del nivel medio, aspirantes a ingresar a la FACE de la UNT. El mismo cubre tres áreas: Matemática, Técnicas de Estudio y Comprensión de Textos y Orientación Vocacional, las cuales estarán a cargo de profesores idóneos en cada una de las mismas. La propuesta comprende tres etapas de ejecución: I) Autoaprendizaje, II) Afianzamiento y III) Evaluación: las que se desarrollaran en el período, 1 de septiembre de cada año al 28 de febrero del año siguiente. En cada una de ellas, se trabajará con textos guías, y modalidad presencial y de educación a distancia.

Al finalizar cada ciclo se medirá el nivel de conocimientos y desarrollo de habilidades y destrezas de los alumnos que participen en el programa. Como así también, si el apoyo brindado en los Talleres de Orientación Vocacional y Técnicas de Estudio y Comprensión de Texto, han sido positivos. El detalle de las tres etapas es el siguiente:

I) Autoaprendizaje: A realizarse entre el 1 de septiembre y el 15 de diciembre de cada año con actividades semipresenciales. Se trata de un aprendizaje autónomo e individual, a partir de los materiales preparados para tal fin, por lo tanto el alumno avanzará de acuerdo a sus capacidades y dedicación, regulando su aprendizaje. Para canalizar las dudas e inquietudes que se le puedan presentar, a partir del estudio de los materiales, se ofrece los horarios de consulta y las tutorías presenciales, que se realizaran en las aulas de la Facultad. En dichos encuentros se orientarán a los alumnos en el estudio y trabajo independiente, a reflexionar sobre sus propios procesos de aprendizaje y a la transferencia de los conocimientos. Se implementará, además en esta etapa el Taller de

Orientación Vocacional desarrollado por docentes especializados, empleando test y/o textos elaborados previamente.

II) Afianzamiento: A realizarse durante el mes de febrero del año siguiente con actividades presenciales y obligatorias. Se prevé la realización de dos talleres o espacios curriculares extra clases, para las áreas Matemática y Técnicas de Estudio y Comprensión de Textos, con asistencia obligatoria, a desarrollarse en las instalaciones de esta Facultad. En el área Matemática se implementarán metodologías de enseñanza activas (conversación heurística, exposición problémica, discusión en pequeños grupos, ...), y estrategias de enseñanza (mapas conceptuales, analogía, pistas tipográficas y discursivas, ...) combinando siempre contenidos teóricos con contenidos prácticos; las que permitirán al alumno transformar sus debilidades en fortalezas y dirigidas a lograr un aprendizaje significativo. Se implementarán además técnicas participativas (lluvia de ideas, técnica de la rejilla, PNI, ...), a fin de que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento, trabajando con los materiales didácticos o textos guías. En este proceso, el docente intervendrá como mediador y facilitador del aprendizaje, promoviendo la interacción cooperativa entre los alumnos y suministrando las ayudas necesarias de manera de generar y hacer avanzar a los alumnos en la ZDP.

En el área Técnicas de Estudio y Comprensión de Texto, se darán a conocer estrategias de estudio adecuadas, (identificar y subrayar ideas principales; hacer resúmenes; estrategias de memorización para recordar entre otras: definiciones, fórmulas, propiedades; estrategias de resolución de problemas, pensamiento crítico, ...) que orienten, nivelen e inicien el proceso de adaptación de los alumnos. Los instrumentos a aplicar durante el afianzamiento son: evaluaciones, encuestas, test, etc.

III) Evaluación: Las mismas se llevaran a cabo en distintos momentos. La primera de ellas se realizará al finalizar la primera etapa del autoaprendizaje, para todo aquel alumno que considere se encuentra en condiciones de hacerlo. Si aprueba la misma con nota igual o superior a seis, sólo proseguirá en el área Técnicas de Estudio. Las siguientes evaluaciones tendrán lugar al inicio de los Talleres y al finalizar los mismos, con recuperación en julio del correspondiente año. A través de la evaluación final se podrá medir las destrezas, habilidades y competencias adquiridas por los alumnos y permitirá a los docentes, obtener información relevante, para conocer si lograron alcanzar adecuadamente las metas esperadas, como así también como mejorar para el año siguiente, el material empleado, si se continuara con el Proyecto.

Una vez finalizado el Proyecto, realizamos un análisis de las fortalezas y debilidades del mismo con respecto a los objetivos planteados; las oportunidades que tenemos para que éstas sean aprovechadas de la mejor manera y las amenazas que existen para evitarlas y así, asegurar el éxito del mismo.

Fortalezas: Integración sólida de capacidades y conocimientos de los alumnos, las cuales se proyectarán positivamente en un futuro. Equipo docente experimentado y ampliamente capacitado. Disponibilidad de los recursos necesarios para su funcionamiento (mobiliario, biblioteca,…)

Oportunidades: Toma de conciencia de la sociedad sobre la necesidad de elevar la calidad de la escuela media. Demanda de un mayor nivel de calidad en materia de estudios universitarios.

Debilidades: Débil presencia de alumnos en la Etapa I, por coincidir con los dos últimos meses de su secundario. Insuficiente conciencia por parte de los alumnos, respecto del esfuerzo realizado por los docentes y la institución. Posibilidad de que la institución no cuente con la totalidad de los fondos necesarios al momento de iniciar el proyecto, a pesar de contar con un presupuesto, en parte autofinanciado.

Amenazas: Falta de interés en la capacitación, por parte de los Docentes. Falta de interés de las autoridades, que obedece a cuestiones políticas.

Conclusión

Pensamos que este Proyecto es importante por cuanto ofrece una propuesta paliativa que redundará en beneficio de los alumnos y de la Institución. Con su implementación se pretende: Generar comunicación entre las instituciones de ambos niveles, mediante el intercambio de información válida y confiable. Contribuir a la capacitación de los docentes del nivel medio, que les permita llevar a cabo una instrucción que desarrolle competencias cognitivas, que favorezcan el aprendizaje significativo de los alumnos. Lograr una planificación de contenidos donde se tengan en cuenta, además de los conceptuales, dominios procedimentales y actitudinales, de una forma armoniosa e interrelacionada. Realizar una propuesta de configuración didáctica, que tome en cuenta todas las capacidades del estudiante considerado como actor y no como mero receptor de su capacitación universitaria. Dotar al alumno de las competencias necesarias para un mejor desempeño académico, identificando las fortalezas de los estudiantes para ayudar a consolidarlas, así como sus debilidades para transformarlas en fortalezas. Disminuir las desigualdades de oportunidades de los alumnos, trabajando sobre la búsqueda de caminos que garanticen el derecho a la educación. Lo cual se reflejará en el desempeño y tiempo de permanencia de los mismos en la institución. Allanar el futuro accionar de otras unidades académicas de inscripción masiva.

Estos aspectos constituyen fortalezas para un posterior proceso de acreditación de la Carrera de Contador Público de la UNT puesto que se estaría cumpliendo con algunos de los estándares establecidos.

Referencias bibliográficas

Anchorena, S. (2006). *Organización, Gestión y Proyectos Educativos*. Buenos Aires, Argentina: Autor.

Chunk, D. (1997). *Teorías del aprendizaje.* México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Díaz Barriga, F. y Hernández Rojas, G. (1997). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo.* México: McGraw Hill.

Forni, F. (2002). *Formulación y evaluación de proyectos de acción social.* Buenos Aires, Argentina: Humanitas.

Pizarro, A. (1996). *Estudio independiente. Módulo IV (primera parte).* Instituto Coordinador de Programas de Capacitación: UNT.

Piaget, J. (1989). *La equilibración de las estructuras cognoscitivas*. Madrid, España: Siglo XXI.

Rosas, R., Sebastián, C. (2001). *Piaget, Vigotski y Maturana. Constructivismo a tres voces.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA, UN ACERCAMIENTO VISUAL CON GEOGEBRA

Armando López Zamudio
C.B.T.i.s. No.94 México
larmandozam@hotmail.com
Campo de investigación: Tecnología Avanzada y Visualización Nivel: Medio

Resumen. *En un artículo escrito por la historiadora Grabiner (1983) destaca que la derivada fue primero utilizada, después descubierta, luego desarrollada y finalmente definida. Este análisis nos ayuda a entender las dificultades del concepto y los tropiezos que se dieron en su desarrollo histórico, dándonos pauta para su enseñanza. La primera etapa en que la derivada fue utilizada de manera inconsciente, Grabiner se refiere al método de máximo y mínimos de Fermat, y esta propuesta retoma dicho método como un primer acercamiento plausible al concepto de derivada, utilizando el software GeoGebra de Hohenwarter M. (2007) y sus bondades visuales, como un recurso didáctico que permite a los estudiantes de bachillerato apropiarse del concepto en cuestión.*

Palabras clave: visualización, derivada, GeoGebra

Introducción y objetivo

Una de las tareas esenciales del docente es el diseño de estrategias de aprendizaje que incluya diferentes ambientes o espacios educativos, estas estrategias en matemáticas deben incluir métodos basados en la resolución de problemas, la simulación, el trabajo en equipo y el uso de las tecnologías. El software de geometría dinámica como lo es GeoGebra es un excelente recurso que nos permite modelar y simular diferentes problemas matemáticos de tópicos de las materias de Algebra, Geometría y trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo. En este ambiente los estudiantes pueden inspeccionar un rango muy amplio de ejemplos geométricos, de esta manera ellos extienden sus habilidades para formular y explorar conjeturas, así como para juzgar, construir y comunicar argumentos matemáticos apropiadamente. Para Wolfgang (1997) el uso de software de matemáticas apoya al estudiante en el proceso de aprender a visualizar. Las figuras geométricas se conceptualizan como resultados de construcciones, cuyas propiedades son definidas por las relaciones establecidas entre sus partes. Esta visión es más difícil de transmitir por medio de construcciones hechas con lápiz y papel, entonces la observación de las propiedades que se mantienen invariables al modificar la forma y el tamaño de las figuras, motiva la explicación por parte del estudiante en un ambiente de la geometría dinámica.

En este tenor proponemos el uso del software de geometría dinámica GEOGEBRA como un espacio educativo que facilita los procesos de aprendizaje, en particular del concepto de derivada del cual tradicionalmente privilegiaba los procesos algorítmicos y no el conceptual. Esta propuesta pretende revertir esta situación. La Reforma Curricular dada a conocer por el COSNET (2004) nos sugiere el uso secuencias didácticas: "Es un conjunto de actividades, organizadas en tres bloques: apertura, desarrollo y cierre" (SEIT, 2004, p. 12) Es apremiante la elaboración de estas secuencias didácticas, que rescaten la experiencia del profesor pero que cuenten con un respaldo científico.

Objetivo

Elaborar una propuesta didáctica a través de una secuencia didáctica que involucre el software GeoGebra para el tratamiento del Cálculo Diferencial en el bachillerato, que posibilite a los estudiantes comprender los conceptos fundamentales, particularmente el concepto de DERIVADA que es imprescindible para la modelación de fenómenos y su aplicación en el curso de Matemática Aplicada.

Antecedentes

La enseñanza del Cálculo Diferencial (CD) en el Nivel Medio Superior, en muchos países, se enfrenta a un problema generalizado: los estudiantes escasamente comprenden sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con la derivada. Las evidencias mostradas en congresos especializados y la experiencia misma de los profesores de esta asignatura son coincidentes: al terminar sus cursos de CD cantidades significativas de estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de esos procedimientos. Incluso, difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre la rapidez de la variación a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto. Hay un gran trabajo por desarrollar, para crear secuencias didácticas, en particular en el curso de cálculo diferencial y matemática aplicada, Para Arcavi & Hadas ”…la herramienta tecnológica en sí misma es de poco valor si no es acompañada por situaciones problema que le dan significado”(Arcavi & Hadas, 2000, p. 26). Vinner (1992) presenta un estudio acerca del uso de las consideraciones visuales en los cursos de cálculo. Muestra con dos preguntas: una sobre un teorema relacionado con el valor medio del cálculo integral y otra sobre el teorema del valor medio del cálculo diferencial, los cuales son susceptibles de verificarse geométricamente, -resaltando precisamente que a esta verificación debiera considerar como una demostración matemática en la enseñanza a estudiantes-, la preferencia de los estudiantes por el aspecto algebraico de las demostraciones y su evitación de las consideraciones visuales. Sugiere el autor de este artículo –basado en los resultados obtenidos en este experimento llevado acabo con estudiantes de primer año universitario- que debiera enfatizarse el acercamiento visual en las demostraciones y resolución de problemas y que debiera considerarse a tales interpretaciones geométricas, como demostraciones matemáticas. Y siempre que sea posible, enseñar las interpretaciones visuales de nociones algebraicas. Vinner, (1992) intentan ser bastante específicos acerca de por qué muchos estudiantes que han llevado un curso universitario de cálculo adquieren un conocimiento conceptual deficiente del curso. Sobre un estudio amplio con ciento treinta estudiantes, a quienes se les aplico un cuestionario con once preguntas, presentan una muestra detallada del tipo de análisis cualitativo que realizan. Observaron que aunque hay elementos que indican una buena comprensión sobre cálculo diferencial por parte del estudiante, en cuestiones algorítmicas rutinarias, encontraron otros elementos en la resolución de problemas conceptuales no rutinarios, que muestran serías conceptualizaciones erróneas. Existen obstáculos para la comprensión del concepto de derivada, con la palabra "tangente" entendida como el nombre de una línea recta que toca en un punto a una curva, en contraste con su significado como función trigonométrica usada para definir la pendiente de una línea recta. Así como el concepto de derivada puntual. Para Arcos (2006) el enfoque del Cálculo infinitesimal, en su versión más próxima a la presentación de Leibniz debería de considerarse en la enseñanza sobre todo en las escuelas de ingeniería, y considera el enfoque formal para las escuelas de ciencias. Vinner (1992) muestra la preferencia de los estudiantes por el aspecto algebraico de las demostraciones fracasando en ellas, y su evitación de las consideraciones visuales en donde los problemas a resolver podían verificarse geométricamente. En un artículo escrito por la historiadora Grabiner (1983) destaca que la derivada fue primero utilizada, después descubierta, luego desarrollada y finalmente definida. Este análisis nos ayuda a entender las dificultades del concepto y los tropiezos que se dieron en su desarrollo histórico, dándonos pauta para su enseñanza.

La primera etapa en que la derivada fue utilizada de manera inconsciente, Grabiner se refiere al método de máximo y mínimos de Fermat, y esta propuesta retoma dicho método como un primer acercamiento plausible al concepto de derivada, utilizando el software GeoGebra y sus bondades visuales, como un recurso didáctico que permite a los estudiantes de bachillerato apropiarse del concepto en cuestión.

La propuesta

La secuencia se lleva a cabo en un aula, que cuenta con una computadora y un proyector, donde se utilizara como un pizarrón electrónico para interactuar con los alumnos, el docente y la secuencia didáctica. A grandes rasgos las etapas de la secuencia son las siguientes:

Etapa de apertura (Tiempo 4 horas) Aquí se plantean una problema que involucre la necesidad de encontrar un máximo, es decir encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva con pendiente cero, para luego usando GeoGebra visualizar las diferentes maneras en que se construyo históricamente la recta tangente a una curva desde los griegos hasta el método de Descartes.

Etapa de Desarrollo: (Tiempo 8 horas) Aquí se da a conocer el método de Fermat para encontrar tangentes a curvas, se ejemplifican uno o dos casos de funciones, algebraicas y trascendentes, usando acercamientos visuales con GeoGebra de una recta secante a una curva hasta que sea una recta tangente a la curva en cuestión en un punto fijo.

Etapa de Cierre: (4 horas) Se plantean casos visuales en que se da la grafica de la función derivada y se pide un bosquejo de la función primitiva, se resuelve por este método el problema que dio origen al estudio de las tangentes de pendiente cero.

Metodología

La metodología que se lleva a cabo en esta investigación es de tipo cuantitativa, hemos considerado la necesidad del estudio a partir de datos obtenidos por análisis curricular del curso de Cálculo y Matemáticas Aplicadas que se imparte en la educación media superior tecnológica. El estudio se sitúa en el Centro de Bachillerato Tecnológico y de Servicios número 94 (CBTIS Nº 94) de Pátzcuaro, Michoacán. Los pasos a desarrollar en este estudio son los siguientes.

- Selección de una muestra.
- Aplicación del mismo examen a un grupo de expertos.
- Diseño e implementación de la secuencia didáctica.
- Aplicación de una evaluación al grupo de estudio.
- Análisis de resultados.

- Conclusiones.

De la muestra: Grupo piloto

La muestra es seudo aleatoria, y fue seleccionada de un total de 10 grupos, alumnos del CBTIS No. 94, consta de 190 alumnos pertenecientes a 5 grupos (38,34,47,42 y 29 alumnos) del sexto semestre del nivel medio superior con edades entre 17-18 años. Estos alumnos habían cursado álgebra, geometría plana euclidiana, trigonometría y geometría analítica, un curso de cálculo en el que abordaron el concepto de derivada hasta algunas de sus aplicaciones como es obtener máximos y mínimos de una función. Dos grupos son del bachillerato físico matemáticas cursando paralelamente la especialidad de computación, y tres de químico biológicas cursando paralelamente la especialidad de puericultura. La secuencia se aplicara dentro de los contenidos de la segunda unidad del curso Matemática Aplicada que corresponde a Aplicaciones del cálculo diferencial.

Grupo Control

Este grupo de expertos consta de 17 profesores de matemáticas de diferentes niveles, 2 nivel medio, 10 nivel medio superior, 5 nivel superior. Todos ellos inscritos en un programa de maestría en matemática educativa, donde como parte del curso Software Educativos que incluye el programa se le aplico el mismo examen diagnóstico que al grupo de estudio.

Examen Diagnostico

El examen consta de cuatro preguntas, la primer pregunta fue tomada del examen Education Testing Service (1997) mejor conocidos como exámenes GRE (pregunta no. 5) que demanda del dominio profundo del concepto de la derivada. La segunda pregunta investiga si el estudiante conoce el concepto de recta tangente a una función, y el dominio del concepto de pendiente. La tercera pregunta investiga si se sabe relacionar la pendiente cero de una línea recta tangente como posibles máximos y mínimos. Y la cuarta pregunta es muy explicita *¿Cuál es su interpretación de la derivada de f(x) geométricamente en el punto* $(x_1, f(x_1))$*?*

Resultados

La siguiente tabal muestra los resultados del examen diagnóstico, donde podemos observar que el reactivo 4 tuvo solamente 2 aciertos y el reactivo 3 fue el que más aciertos tubo 23, sin embargo la calificación promedio de toda la muestra fue de 7/100 es decir 0.07 una calificación que deja mucho que desear ya que debemos considerar que estos alumnos ya cursaron una materia de calculo diferencial. Podemos también observar que el grupo B tuvo un mejor desempeño que los otros grupos sin embargo su calificación promedio es de 1.6 que de ningún modo es alentador.

Grupo	Reactivo 1	Reactivo 2	Reactivo 3	Reactivo 4	Promedio
B	3	9	13	0	16/100
C	3	4	6	0	9/100
E	0	3	3	1	4/100
F	2	0	0	1	2/100
G	2	0	1	0	2/100
TOTAL	10	16	23	2	

Tabla 1. Examen diagnóstico aplicado a grupo experimenta

Para validar el examen y comparar los aprovechamientos del grupo experimental se aplico el examen a un grupo de expertos el cual ya se describió al inicio de la metodología, los resultados aparecen a continuación en la Tabla 2.

Reactivo 1	Reactivo 1	Reactivo 1	Reactivo 1
7	16	14	8

Tabla 2: Examen diagnóstico aplicado a expertos

El promedio del grupo de expertos es de 65/100 es decir 6.5 en la escala de uno a diez. Por lo que podemos considerar valido el examen.

Los resultados que se obtuvieron después de que el grupo fue sometido a la secuencia didáctica, (cabe señalar que el examen aplicado fue similar al diagnostico, sin embargo no fueron los mismos reactivos) se muestran en la Tabla 3.

GRUPO	Reactivo 1	Reactivo 2	Reactivo 3	Reactivo 4	Promedio
B	23	29	29	31	74/100
C	8	17	17	23	48/100
E	10	19	20	47	51/100
F	7	13	30	28	46/100
G	4	5	14	38	39/100
TOTAL	52	83	110	167	

Tabla 3. Examen aplicado al grupo experimental después de la secuencia didáctica

El promedio general de la muestra fue 54 de 100 es decir un 5.4 que es mucho mayor del 0.07 que se obtuvo antes de la experimentación en consideración con el grupo de expertos podemos considerar que la secuencia fue un éxito.

Conclusiones

Se elaboro una propuesta didáctica a través de una secuencia didáctica que recurrió a las ideas de Fermat y al uso el software de geometría dinámica GeoGebra para el tratamiento del concepto de derivada como un acercamiento bastante plausible sobre todo si hablamos de estudiantes de bachillerato, particularmente el concepto de DERIVADA que es imprescindible para la modelación de fenómenos y su aplicación en el curso de Matemática Aplicada. Podemos también señalar que la hipótesis de se acepta pues la mayoría 86% de los estudiantes interiorizaron el concepto de derivada, así como de otros conceptos subyacentes como es el de pendiente, línea recta, tangente, secante. Los alumnos pudieron interpretar geométricamente el concepto de derivada así como su aplicación en la resolución de problemas de optimización. En los resultados pudimos observar que 164 alumnos de 190 pudieron contestar la pregunta 4 que directamente cuestiona el concepto de la derivada, lo que antes de la secuencia didáctica sólo 2 alumnos contestaron correctamente. Por otra parte podemos observar que los alumnos del grupo B que en el inicio mostraron tener mayores conocimientos en el tema, después de la experimentación superaron en la calificación promedio a los expertos, ya que debemos recordar que el promedio de los expertos fue de 6.5 mientras que los alumnos del grupo B fue de 7.4, unas de las explicaciones a este diferencia es que este grupo tiene conocimientos de computación y su bachillerato es de físico matemáticas, en cambio los otros grupos son de la especialidad de Puericultura y el bachillerato es químico biológicas. Este acercamiento sin duda será de gran ayuda para el desempeño de los alumnos y alumnas en su estudio de la integral. El promedio general fue de 5.4 que no es deseable pero supera en mucho a lo obtenido en el examen diagnóstico. ¿Que nos queda en el horizonte? Mejorar las secuencias didácticas, y experimentar con alumnos usando una metodología donde los estudiantes puedan contar con una computadora para que puedan interaccionar más con el software, por lo que es importante diseñar actividades en ese sentido.

Referencias bibliográficas

Arcavi A., Hadas N. **(**2000**)** Computer medianted learnig: An example of an approach**;** *International Journal of Computers for Mathematical Learning,5* 25-45.

Arcos Quezada J. I. (2006) El cálculo infinitesimal y la enseñanza del cálculo en el siglo XXI. *En* Sepúlveda, L. A., García, P. R., Guerrero, M. L. (Eds.). *Memorias. XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas***,** 51-57 Morelia: UMSNH.

Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (COSNET) (2004) *Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica,* Ed. Editores e impresores FOC S. A. De C. V. México.

Wolfgang, F. (1997) Triángulos y Cuadriláteros Inscritos en un Círculo, Una aplicación del software educativo “Cabri Géometre” *Educación Matemática 9*(2) 116-136.

Grabiner, J. V. (1983**).** The Changing Concept of Change: The derivate from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56(4)* 195-206.

Education Testing Service *(1997) Graduate Record Examinations Mathematics Test*, Author. Princeton N. J. 08541.

Hohenwarter M. (2007) GeoGebra (Versión 3.0) [Software de cómputo] Salzburgo, Austria.

Subsecretaria de Educación e Investigación Tecnológicas (SEIT) SEP (2004) *Reforma Curricular del Bachillerato Tecnológico Programa de Estudios*. México.

Vinner, S. (1992) *The Avoidance of Visual Considerations in Calculus students Focus on Learning Problemas in Mathematics,*11 (1989) 149-156.

UN TUTOR INTERACTIVO PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA: ANÁLISIS DE LAS CONDICIONES PARA SU IMPLEMENTACIÓN

Analía Mena de Pappalardo, Marta Golbach
Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Argentina
m-pappalardo@cgcet.org.ar, mgolbach@tucbbs.com.ar
Campo de investigación: Educación a Distancia Nivel: Superior

Resumen. *El presente trabajo, tiene por objetivo presentar los resultados obtenidos en la investigación no experimental y de corte transversal realizada a los alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.T. La información recabada estuvo referida a la evolución de la matricula en el periodo 2001 – 2004, la condición de los alumnos según el régimen de cursado y sus dificultades en el mismo y el porcentaje de alumnos que poseía conocimientos informáticos y tenía interés en utilizar la computadora para el aprendizaje de Álgebra. Este estudio permitió establecer si los alumnos reunían las características mínimas necesarias para la aplicación de un Tutor Interactivo y de este modo contribuir a mejorar la Calidad del Aprendizaje de los alumnos ingresantes.*

Palabras clave: investigación educativa, alumnos ingresantes, conocimientos informáticos, rendimiento académico.

Introducción y objetivo

Cada año, la Cátedra de Álgebra de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán, se enfrenta con el problema de la masividad, y esto no sólo supone una mayor cantidad de alumnos sino también una amplia variedad de realidades sociales y culturales. En la búsqueda de recursos que permitan superar las dificultades referidas, el uso de las nuevas tecnologías a través de la implementación de un Tutor Interactivo en la enseñanza del Álgebra, ha sido considerada una opción. Tomando como fundamento teórico para su diseño, la Teoría de Formación por Etapas de las Acciones Mentales que se enmarca en la tendencia pedagógica Histórico – Cultural de L. S. Vigotsky y seguidores.

Según las teorías antes señaladas, la implementación de la informática, trae aparejado consecuencias para la práctica docente y para los procesos de aprendizaje, por ello, no puede realizarse sin un análisis de las características de la población estudiantil que se verá involucrada con su aplicación.

El presente trabajo, tiene por objetivo presentar los resultados obtenidos en la investigación realizada.

Análisis del Rendimiento Académico de los alumnos ingresantes. Años 2001 al 2004.

La asignatura Álgebra tiene un régimen mixto de aprobación, esto significa que los alumnos tienen la posibilidad de promocionar o regularizar la mencionada asignatura. En el siguiente cuadro se muestra la evolución de la matrícula en el período 2001 – 2004

AÑO	2001	2002	2003	2004
ALUMNOS INSCRIPTOS	1679 (100%)	1646 (100%)	1752 (100%)	1773 (100%)
ALUMNOS REGULARES	16,8 %	17,9 %	17,5 %	15,6 %
ALUMNOS PROMOCIONADOS	34,4 %	37,7 %	30,4 %	31,8 %
ALUMNOS LIBRES	48,8 %	44,4 %	52,1 %	52,6 %

Tabla Nº1: Evolución de la matricula en el periodo 2001 – 2004.

El mayor incremento en la matrícula (6,44%) se produce entre 2002 -2003, y el 5.6% en el período completo 2001 – 2004.

Respecto a la condición de los alumnos según el régimen de cursado, se observa un notorio incremento del porcentaje de alumnos libres respecto a los de condición regular y promocionados (ver gráficos Nº1).

De este hecho surge la necesidad, por parte de los docentes de la cátedra de estudiar diferentes estrategias desde lo estructural del sistema como desde las metodologías apropiadas para grupos numerosos. Con la información de este trabajo de investigación se contribuirá desde lo metodológico con el objetivo de aportar estrategias, que según el marco teórico considerado, permitirán aumentar cobertura y rendimiento académico.

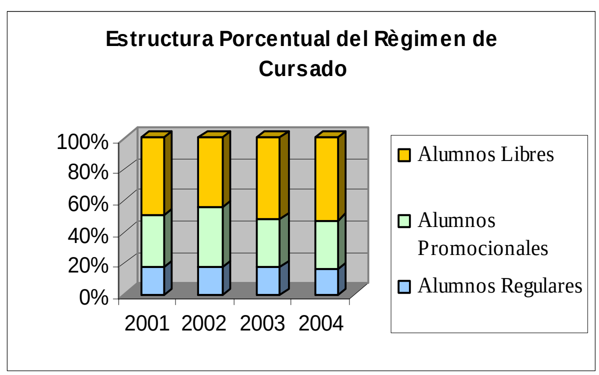


Gráfico Nº 1: Porcentajes de alumnos libres, promocionados y regulares en el periodo 2001 – 2004.

Construcción del Marco Muestral con Muestreo por Conglomerados.

Para llevar a cabo la investigación se realizaron tres encuestas (una por año) a los alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas en los años 2001, 2002 y 2003 respectivamente. La investigación fue no experimental de corte transversal, y los objetivos de la misma fueron conocer acerca de: 1) Las dificultades que los alumnos manifiestan tener en el cursado de la asignatura y 2) El porcentaje de alumnos que poseía conocimientos informáticos y tenía interés en utilizar la computadora para el aprendizaje de Álgebra.

La población objetivo en cada uno de los años considerados la constituían los alumnos inscriptos para cursar la asignatura Álgebra en la mencionada Facultad (Año 2001: N = 1679, Año 2002: N = 1646, Año 2003: N = 1752). La Población muestreada fueron los alumnos inscriptos en la asignatura Álgebra y que rindieron el 1º Parcial. (Año 2001: 1460 alumnos, Año 2002: 1391, Año 2003: 1503).

Los formularios utilizados en la recolección de datos, fueron estructurados y anónimos, constaron de preguntas cerradas, dicotómicas (Si / No) y de opción múltiple. Las preguntas fueron formuladas utilizando un lenguaje sencillo y claro para que los alumnos pudieran contestar sin mayores inconvenientes.

La encuesta realizada en el año 2001 fue de utilidad para tomar conocimiento de cuestiones relevantes relacionadas con la población respecto al objetivo mencionado y para validar el instrumento en sí mismo, surgiendo de esto la necesidad de incorporar variables que no habían sido consideradas y que eran necesarias para conocer cuestiones de especial interés para el diseño e implementación del Sistema de Tareas. Las mismas fueron incorporadas posteriormente en las encuestas realizadas en los años 2002 y 2003 y se referían a:1) El porcentaje de alumnos que disponen de computadora propia y/o posibilidad de acceso al uso de una computadora. 2) La adhesión al uso al uso de equipamiento y aplicaciones informáticas y el tipo de conocimientos que los alumnos poseen sobre ellas.

Metodología de Muestreo

Se utilizó un diseño por conglomerados multietápico. Se confeccionaron listados para cada una de las comisiones (conglomerados), siendo las mismas 19 en el año 2001 y 16 en los años 2002 y 2003. La encuesta se distribuyó de acuerdo a los resultados de una muestra probabilística estratificada de los conglomerados, que consistió en dividir a las comisiones o conglomerados en estratos según el porcentaje de alumnos aprobados en el primer parcial de Álgebra. Posteriormente utilizando muestreo aleatorio simple en cada estrato se seleccionó una muestra de conglomerados de tamaño proporcional al tamaño del estrato.

Encuesta 2001 – Diseño de la muestra por Conglomerados Multietápico.

Para la estratificación de la población, se clasificaron las comisiones en cuatro estratos según el porcentaje de aprobados: **Bajo**: El porcentaje de alumnos aprobados es entre (10 - 30]% , **Medio Bajo**: El porcentaje de alumnos aprobados es entre (30 - 50]%, **Medio Alto**: El porcentaje de alumnos aprobados es entre (50 - 70]%

Alto: El porcentaje de alumnos aprobados es entre (70 - 100]%

Dentro de estos estratos se establecieron los números de comisiones proporcional al tamaño del estrato y se seleccionaron, por muestreo aleatorio simple las comisiones en

ESTRATO	Nº DE COMISIONES	Nº DE ALUMNOS	%ALUMNOS	MUESTRA (CANT.COM)	COMISIÓN SELECCIONADA	Nº ALUMNOS SELECIONADOS
(10 - 30] %	2	155	10,62	1	13	73
(30 - 50]%	8	588	40,27	2	15 , 17	159
(50 - 70]%	8	641	43,90	2	6 , 2	167
(70 - 100]%	1	76	5,21	1	9	76
TOTAL	19	1460	100,00	6		475

cada estrato, resultando una muestra de 6 (seis) comisiones de las 19 (diecinueve). La

Tabla Nº2: Estratificación de Comisiones según el porcentaje de aprobados

encuesta, se efectuó aproximadamente 8 semanas después de iniciado el dictado de la asignatura en el mencionado periodo lectivo. Y la cantidad de alumnos que la contestaron fue 399, sobre un total 475 seleccionados lo que significa un 84% del tamaño de la muestra. Esto se encuentra dentro de los límites esperados de no respuesta. Se trabajó de modo similar en los periodos académicos 2002 y 2003.

Análisis de las dificultades en el aprendizaje del Álgebra.

El perfil del usuario de un Software Educativo es un punto fundamental en el desarrollo del mismo. Los alumnos que ingresan a la Facultad de Ciencias Económicas tienen características similares en cuanto a la edad, sexo y condición laboral.

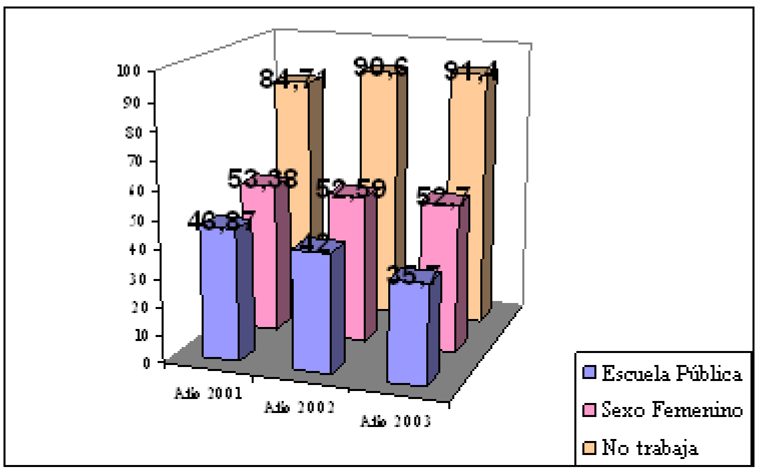


Grafico Nº 2: Datos demográficos de los alumnos ingresantes a la F. C. E. – U.N.T.

Como se pude observar en el gráfico Nº2 un porcentaje muy bajo de alumnos trabaja, lo que lleva a suponer que cuentan con un elevado tiempo disponible para el estudio. Respecto a las dificultades que tienen los alumnos cuando cursan la asignatura Álgebra, del estudio diagnóstico previo a la implementación del Sistema de Tareas Interactivo, los resultados se observan en la tabla Nº 3: Al compararse los periodos lectivos 2002 y 2003, se encontró que en ambos los alumnos coincidían en aproximadamente un 50% que una de las dificultades que tuvieron en el cursado de la asignatura fueron las clases teóricas con demasiados alumnos. Además de la escasa posibilidad de dialogo con los docentes, que se considera una consecuencia de la masividad en estas clases.

Dificultades durante el cursado de Álgebra	Año 2002	Año 2003
De índole personal	163 (40.2%)	81 (21.2%)
Clases teóricas con muchos alumnos.	208 **(51.4%)**	179 **(48.9%)**
Clases prácticas con muchos alumnos.	141 (34.8%)	130 (32.9%)
El profesor de la teoría no expone claramente los temas	136 (33.6%)	122 (32.7%)
El profesor de la práctica no expone claramente los temas	131 (32.3%)	95 (24.8%)
Los cuadernillos de la teoría no son fáciles de entender	132 (32.6)	86 (23.6%)
Los cuadernillos de la práctica no son fáciles de entender	103 (25.4%)	58 (16.1%)
Escasa posibilidad de dialogo con los docentes	177 **(43.7%)**	179 **(45.3%)**
Desarrollo de demasiados contenidos en el periodo de dictado de la materia.	225 (55.6%)	96 (25.7%)
Otras	18 (4.55)	14 (3.5 %)

Tabla Nº3: Dificultades que los alumnos manifiestan tener durante el cursado de Álgebra. Años 2002 y 2003

Hay además una considerable disminución en los problemas que se refieren a los de índole personal y a los que consideran que se desarrollan demasiados contenidos en poco tiempo, entre un periodo y otro.

El resto de las dificultades no son significativas en cuanto al porcentaje de alumnos que la consideran como tales, pero de todas maneras no se les debe restar importancia a la hora de tenerlas en cuenta en el diseño del Sistema de tareas.

Análisis de la posibilidad de aplicación de la computadora para la enseñanza del Álgebra

Los principios básicos de la teoría de Vigotsky, giran alrededor del concepto de "enseñanza aprendizaje mediados", es decir, cuando interviene un mediador entre el docente y el alumno. Esta teoría se elaboró a principio de siglo y el instrumento mediador era el lenguaje, hoy en día se puede hablar de computadoras, videos, etc. Por ello, es importante estudiar algunos de los aspectos que se consideran relevantes analizar para llevar a cabo un proceso de enseñanza aprendizaje basado en el uso de un Tutor Interactivo. Ellos son:

1)El porcentaje de alumnos que le gustaría utilizar la computadora para el aprendizaje del Álgebra. 2) El porcentaje de alumnos que posee conocimientos básicos de informática. 3) El porcentaje de alumnos que tienen la posibilidad de acceder a una computadora.

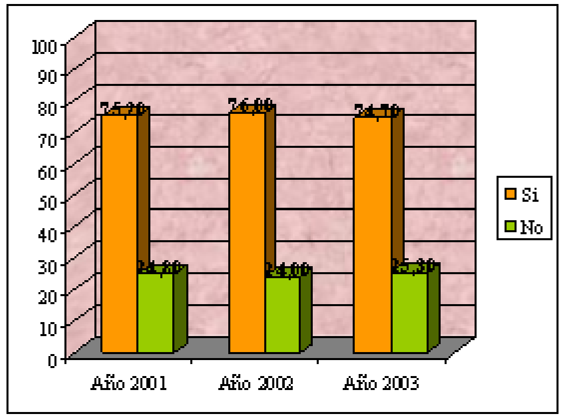


Gráfico Nº 3: Porcentaje de alumnos que le gustaría utilizar la computadora para el aprendizaje del Álgebra

Establecer la aceptación al uso de la computadora y los conocimientos que el grupo de alumnos manifiesta poseer, podrían brindar un indicativo de la disposición en adquirir conocimientos a través del Sistema de Tareas Interactivo.

Se observa en el gráfico Nº 3 que en los tres periodos lectivos considerados, más del 70% de los alumnos manifiestan que les gustaría utilizar la computadora para el aprendizaje del Álgebra. Con estos resultados queda en evidencia que los alumnos podrían tener una buena inclinación para el uso del Tutor en el aprendizaje de la mencionada asignatura.

Se trató además, de establecer los conocimientos que poseían los alumnos respecto al uso de la computadora. Por este motivo consideramos la variable: **“Utiliza la Computadora para….”** .El mayor uso que manifiestan dar a la computadora en todos los años analizados es para realizar trabajos escritos y para jugar, como se puede observar en el gráfico Nº 4.

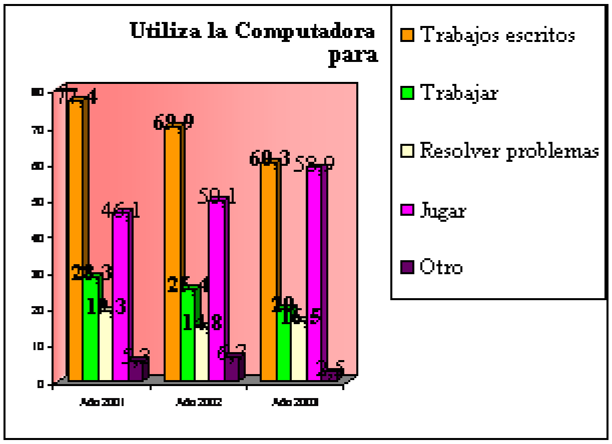


Gráfico Nº 4: Distribución porcentual de alumnos según el uso que le dan a la computadora

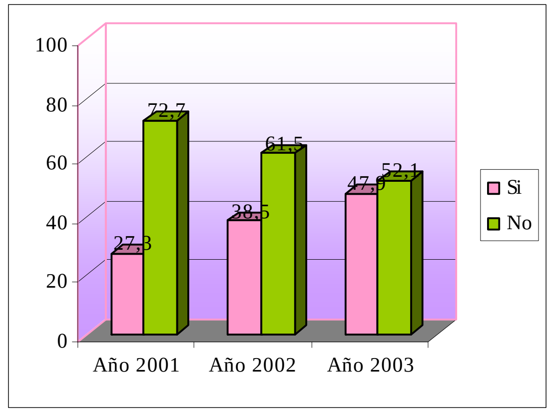


Gráfico Nº 5: Porcentaje de alumnos que realizaron y no realizaron cursos de informática en el periodo 2001 - 2003

Esto se puede tomar como un indicador de la disposición del alumno al uso de la computadora en el aprendizaje, por ejemplo de Álgebra, y por ende en la utilización del Sistema de Tareas Interactivo. También es importante analizar el contexto de los alumnos que realizaron cursos de Informática y los que no lo hicieron, resultados que se pueden visualizar en el Gráfico Nº 5. Si bien, es alto el porcentaje de alumnos que no recibió un entrenamiento formal, la situación tiende a uniformarse en el transcurso del periodo analizado.

Tratando de especificar más acerca del uso que los alumnos le dan a la computadora, en relación a este aprendizaje formal o no formal pero ahora referido al tipo de utilitarios

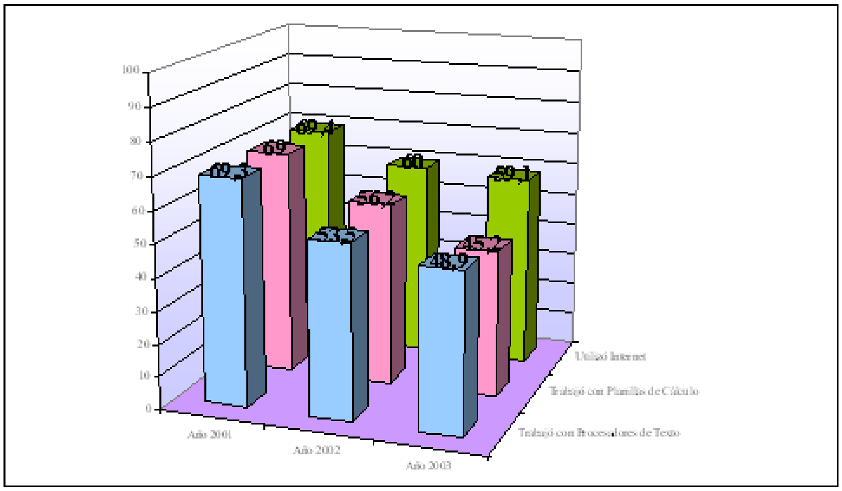


Gráfico Nº6. Porcentaje de alumnos que, sin haber recibido un entrenamiento formal, trabajan con Procesadores de Texto, Planillas de Cálculo e Internet.

o no formal pero ahora referido al tipo de utilitarios básicos que se utilizan, consideraremos esta descripción para el grupo de alumnos que contestaron que no recibieron entrenamiento formal.

Es importante destacar que no hay variaciones significativas (ver gráfico Nº 6) en cuanto a la composición de estas variables a través del tiempo y que el uso de los distintos utilitarios se realizó en un marco de aprendizaje no formal o autoaprendizaje. Esto último no resulta un escollo para la implementación del Tutor, ya que se lo podría tomar como un indicador de una disposición positiva de los alumnos al trabajo independiente.

Se considera que para el uso del Sistema de Tareas Interactivo estos porcentajes son considerados más que suficientes por la simplicidad de su diseño.

En cuanto a la disponibilidad propia de computadora o la posibilidad de acceso a alguna, del estudio comparativo de los años 2002 y 2003 se observó un aumento del 3.8% respecto de los alumnos que poseían computadora propia en el año 2002. Del análisis de los porcentajes indicados, podemos deducir que en ambos periodos poseen relativas condiciones de disponibilidad de una computadora.

La tarea siguiente consistió en averiguar a aquellos alumnos que no poseían computadora, es decir aquellos que deberán realizar acciones adicionales para acceder a sus prestaciones, si tenían posibilidades de lograrlo. Del análisis de los resultados surgió que de un periodo a otro el porcentaje de alumnos que dispone de computadora propia o no propia en caso de necesitarlo aumenta. En el periodo lectivo 2003 más de un 84% de los 177 alumnos que no poseía computadora propia puede acceder a una en caso de ser necesario.

De estos resultados se puede concluir que si bien un 50% de alumnos poseen computadora propia y un porcentaje próximo al 30% del total manifiesta poder acceder a una que no sea propia en caso de necesitar, es un grupo con “relativas” condiciones de acceso ya que solo la mitad posee su propia computadora y el resto deberá realizar acciones adicionales para acceder a una.

Conclusiones

Este estudio permitió constatar que en general la población estudiantil estudiada reúne las características mínimas necesarias que se necesitan para la implementación del Sistema de Tareas Interactivo. Si bien, hay usuarios de computadoras principiantes y otros experimentados, de todas maneras el Sistema de Tareas fue diseñado para que sea fácil de usar. Así cada alumno podrá trabajar a su ritmo, sin existir presión para avanzar al ritmo de los demás, lo que es importante ya que todo el proceso de aprendizaje es más eficiente si los alumnos pueden determinar su propio camino, seleccionando la información disponible para ellos, del modo más conveniente para su propio estilo de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Lohr, Sharon L.(2000). *Muestreo: Diseño y Análisis.* International D.F. México: Thomson Editores S. A.

Altabef, C, et al, (2003). *Los Avances Tecnológicos y la Educación IV* .Argentina.Tucumán: Ediciones del Rectorado. Universidad Nacional de Tucumán.

Vizcarro, C.; León, J. (1999). *Nuevas Tecnologías para el Aprendizaje*. Madrid. España: Ediciones Pirámide.

West, J. W. (1982). *Cómo investigar en educación.* Madrid. España.: Ediciones Morata, S.A.

Cook T. y Reichardt C..(1986).*Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación educativa*. Madrid, España: Morata S.A.

Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C.; Baptista Lucio, P. (1998). *Metodología de la Investigación.* D.F., México: McGraw Hill. Interamericana Editores.